

Рязанова Т.В., Татарова Д.Д.

## ДИНАМИЧЕСКИЕ РЕЖИМЫ МОДЕЛИ СВЯЗАННЫХ ЛОГИСТИЧЕСКИХ ОСЦИЛЛЯТОРОВ С АДДИТИВНЫМ ШУМОМ

*Аннотация.* В работе изучается модель связанных логистических осцилляторов, используемая в криптографических алгоритмах передачи информации. Рассматриваются различные режимы и бифуркации, вызванные изменением параметров связи. Исследуется изменение зон гарантированного хаоса при воздействии на систему внешнего случайного воздействия.

*Ключевые слова:* связанные логистические осцилляторы, бифуркации, стохастические феномены.

*Abstract.* The coupled-logistic map that is used in cryptographic algorithms for data transmission is discussed. Different regimes and bifurcations caused by changing coupling parameters are studied. The change of the zones of guaranteed chaos under the influence of external random influence on the system is investigated.

*Keywords:* coupled-logistic map, bifurcations, stochastic phenomena.

### Введение

Начиная с пионерской работы R. Mattews [1] интерес к хаотическим динамическим системам как методу безопасной передаче данных не угасает [2-5]. Задача исследователей заключается не только в нахождении способа шифрования и дешифрования передаваемых данных, но и в исследовании математических моделей, генерирующих хаос. Практические приложения в криптографии на основе хаоса требуют, чтобы соответствующие хаотические динамические системы были устойчивыми по отношению к параметрам системы, т.е. хаотическое поведение системы не терялось при малейшем изменении параметра.

В данной работе рассматривается система связанных логистических осцилляторов [4], подверженная внешнему случайному воздействию:

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha x_n (1 - x_n) + d_1 (y_n - x_n) + \varepsilon \xi_n, \\y_{n+1} &= \alpha y_n (1 - y_n) + d_2 (x_n - y_n) + \varepsilon \xi_n\end{aligned}$$

Здесь параметр  $\alpha$  отвечает параметру стандартного логистического уравнения, параметры  $d_1, d_2$  являются параметрами связи двух независимых уравнений в одну систему,  $\xi_n$  – случайное число, распределенное по нормальному закону  $E \xi_i = 0$ ,  $E \xi_i^2 = 1$  и  $\varepsilon$  – интенсивность случайного возмущения.

Целью данного исследования является сравнительный анализ бифуркаций и возникающих динамических режимов детерминированной системы для двух выбранных режимов базового логистического уравнения (выбор  $\alpha$ ) в зависимости от изменения параметров связи ( $d_1, d_2$ ). Изучается механизм перехода к хаосу и исследуются параметрические зоны хаоса. Также изучается влияние аддитивного шума динамику системы.

### Детерминированная модель

Рассмотрим сначала детерминированную модель ( $\varepsilon = 0$ ):

$$\begin{aligned}x_{n+1} &= \alpha x_n(1-x_n) + d_1(y_n - x_n), \\y_{n+1} &= \alpha y_n(1-y_n) + d_2(x_n - y_n).\end{aligned}$$

Система имеет четыре равновесия:  $M_0(0,0)$  – существует всегда и является седловой точкой,  $M_1\left(\frac{\alpha-1}{\alpha}; \frac{\alpha-1}{\alpha}\right)$  – существует при  $\alpha \neq 0$  и устойчиво, если  $1 < \alpha < 3$  и  $1 - \alpha - d_1 < d_2 < 3 - \alpha - d_1$ . Когда выполняется условие  $(\alpha-1)^2 > 4d_1d_2$ , система имеет еще два неустойчивых равновесия

$$M_{2,3}\left(\frac{\alpha - 2d_1 - 1 \mp \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4d_1d_2}}{2\alpha}; \frac{\alpha - 2d_2 - 1 \pm \sqrt{(\alpha-1)^2 - 4d_1d_2}}{2\alpha}\right).$$

Для целей наших исследований нас будут интересовать неравновесные режимы. На Рисунке 1 представлены карты динамических режимов для двух фиксированных значений параметра  $\alpha$ . Параметры выбраны таким образом, что логистическое уравнение ( $x_{n+1} = \alpha x_n(1-x_n)$ ) имеет устойчивое равновесие в первом случае ( $\alpha = 2.1$ ) и цикл кратности два во втором ( $\alpha = 3.2$ ), что видно на картах режимов при  $d_1 = d_2 = 0$ .

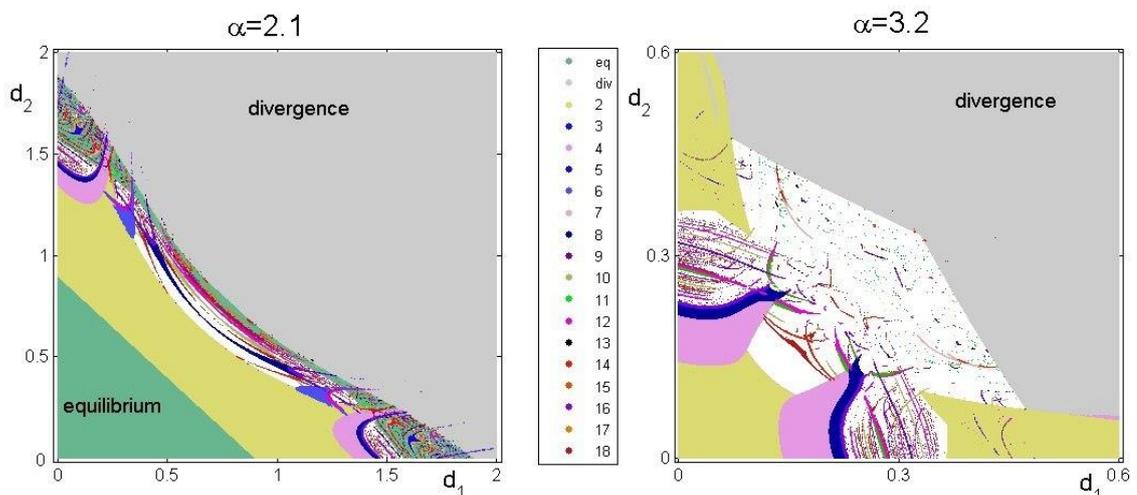


Рисунок 1 – Карты динамических режимов

Увеличение параметров связи  $d_1$  и  $d_2$  приводит в обоих случаях к усложнению режимов. Цветами на Рисунке 1 выделены области равновесия, циклов кратности, не превышающей 18, и уход в бесконечность. Белому цвету соответствуют более сложные режимы: циклы кратности выше 18, замкнутые инвариантные кривые и хаос. Стоит отметить, что карты построены для заданной начальной точки и дают представление об одном найденном режиме, но не о сосуществовании нескольких. Пример сосуществования будет представлен ниже.

Далее будем фиксировать параметр  $d_2 = 0.1$  и подробно изучать изменение динамики системы при изменении параметра  $d_1$ . В первом случае ( $\alpha = 2.1$ ) в системе наблюдается переход к хаосу через каскад бифуркаций удвоения периода (см. Рис. 3а), но в данном случае существует только один аттрактор. На Рисунке 3а слева представлена зависимость показателя Ляпунова для равновесия (красный) и для циклов и хаотических режимов (синий).

Во втором случае ( $\alpha = 3.2$ ) в системе наблюдается более сложный механизм перехода к хаосу. Отличительной особенностью этого случая является сосуществование нескольких аттракторов. На Рисунке 2а сверху представлена бифуркационная диаграмма при  $\alpha = 3.2$ ,  $d_2 = 0.1$ : синим цветом выделен цикл кратности два, который при увеличении параметра  $d_1$  преобразуется в хаотический аттрактор, красным цветом показан сосуществующий с синим цикл кратности два, который при некотором значении параметра теряет устойчивость (становится седловым) и в системе рождается третий (зеленый) цикл кратности два. В системе происходит седло-узловая бифуркация. При дальнейшем увеличении параметра  $d_1$  зеленый цикл теряет устойчивость и исчезает. На Рисунке 2а (снизу) данные бифуркации можно отследить по изменению знака показателя Ляпунова. Здесь цвет линии совпадает с цветом аттрактора на диаграмме.

На Рисунке 2б приведены примеры сосуществующих аттракторов: сверху ( $d_1 = 0.1$ ) два цикла кратности два, каждый аттрактор представлен со своим бассейном притяжения, снизу ( $d_1 = 0.3$ ) седловой цикл кратности два (красный), притягивающий цикл кратности два (зеленый) и двухкусочный хаотический аттрактор (синий).

Как видно, данная детерминированная модель обладает двумя «неудобными» для использования в криптографии свойствами. Первое связано с зоной хаоса после каскада удвоения периода, которая не является всюду хаотической. В данном случае мы наблюдаем узкие окна периодических режимов, что наглядно видно из отрицательности значений показателя

Ляпунова (см. Рис. 3b справа). И данное поведение не удовлетворяет условию устойчивости зоны хаоса к изменению параметра. Второе свойство связано с возможным сосуществованием двух аттракторов – хаотического и регулярного (цикла кратности два см. Рис. 2b снизу). Данное поведение накладывает ограничение на выбор начальной точки или же выбор зоны параметра, где сосуществования аттракторов не наблюдается.

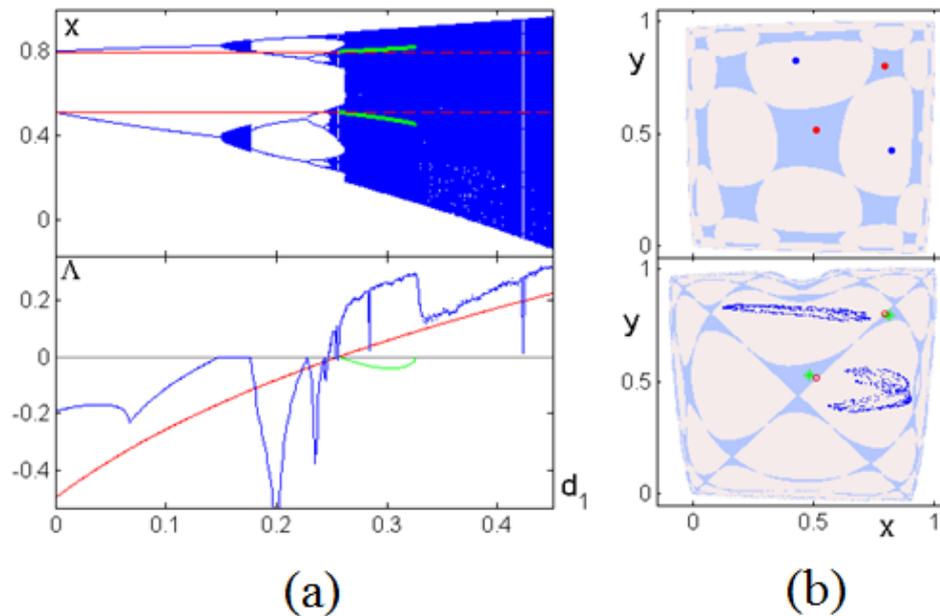


Рисунок 2 – (a) Бифуркационная диаграмма (сверху) и показатель Ляпунова (снизу) при  $\alpha = 3.2$ ,  $d_2 = 0.1$ , (b) – сосуществующие аттракторы и бассейны их притяжения при  $\alpha = 3.2$ ,  $d_1 = 0.1$  (сверху) и  $d_1 = 0.3$  (снизу)

### Стохастическая модель

Рассмотрим теперь влияние внешнего случайного воздействия на динамику нашей модели ( $\varepsilon \neq 0$ ):

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= ax_n(1-x_n) + d_1(y_n - x_n) + \varepsilon \xi_n, \\ y_{n+1} &= ay_n(1-y_n) + d_2(x_n - y_n) + \varepsilon \xi_n \end{aligned}$$

Под действием случайных возмущений траектории покидают детерминированный аттрактор и формируют вокруг него пучок случайных состояний. Однако само присутствие случайного возмущения не переводит систему в хаотический режим при любом значении параметра. В системе могут наблюдаться так называемые стохастические равновесия и стохастические циклы различных кратностей, оставаясь при этом регулярными.

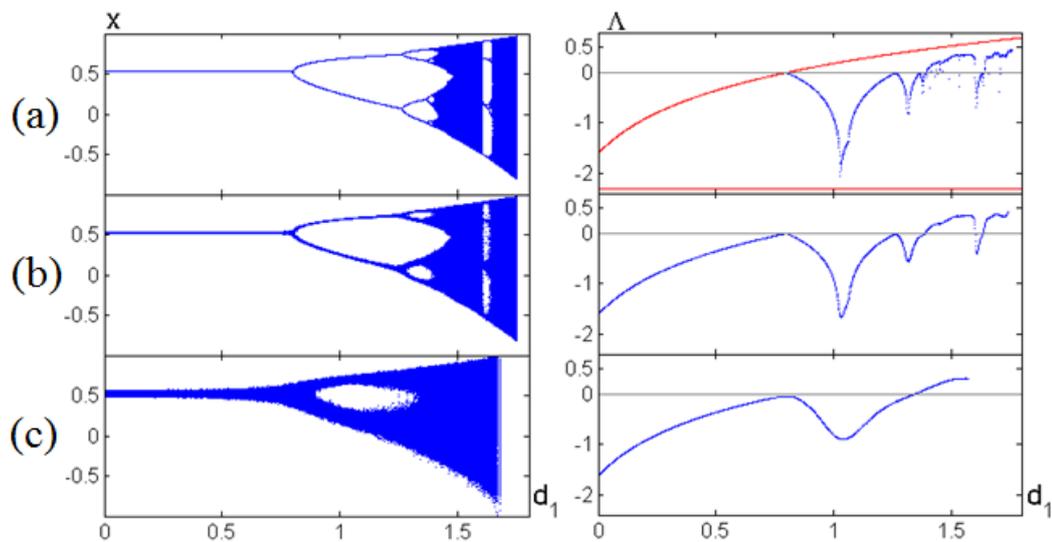


Рисунок 3 – Бифуркационные диаграммы (слева) и показатель Ляпунова (справа) при  $\alpha = 2.1$ ,  $d_2 = 0.1$  и  $\varepsilon = 0$  (a),  $\varepsilon = 0.001$  (b),  $\varepsilon = 0.01$  (c)

Рассмотрим первый случай ( $\alpha = 2.1$ ). На Рисунке 3 слева представлены бифуркационные диаграммы при изменении параметра  $d_1$  для трех различных значений интенсивности шума  $\varepsilon = 0$  (a),  $\varepsilon = 0.001$  (b),  $\varepsilon = 0.01$  (c). На Рисунке 3 справа представлены соответствующие зависимости показателя Ляпунова. Легко заметить, что шум маленькой интенсивности ( $\varepsilon = 0.001$ ) сглаживает график показателя Ляпунова в зоне хаоса, узкие выбросы в отрицательную область исчезают, т.е. увеличивается зона гарантированного хаоса. Однако дальнейшее увеличение интенсивности приводит к дестабилизации системы на тех значениях параметра, где ранее наблюдались даже регулярные циклы (см. Рис. 3с справа). Траектории под действием шума уходят в бесконечность.

Рассмотрим теперь второй случай ( $\alpha = 3.2$ ). Здесь, как и в предыдущем случае, наблюдается сглаживание показателя Ляпунова в тех зонах, где ранее были выбросы в отрицательную область. Важно, что даже при маленьком значении интенсивности внешнего возмущения ( $\varepsilon = 0.001$ ) те траектории, которые сходились на регулярный аттрактор (зеленый цикл кратности два), теперь сходятся на хаотический. Данное поведение легко заметить на значениях показателя Ляпунова (Рис. 4а справа). На бифуркационной диаграмме (Рис. 4а слева) зеленый аттрактор не представлен в силу его идентичности с красным и синим.

Однако, как и в предыдущем случае, при увеличении интенсивности шума уже до уровня ( $\varepsilon = 0.001$ ) в системе наблюдается дестабилизация режимов и траектории уходят в бесконечность. Таким образом, система становится непригодной для использования ее в качестве генератора хаоса. Необходимо уметь рассчитывать уровень допустимого случайного возмущения, ведущий к наиболее эффективному расширению зон хаоса.

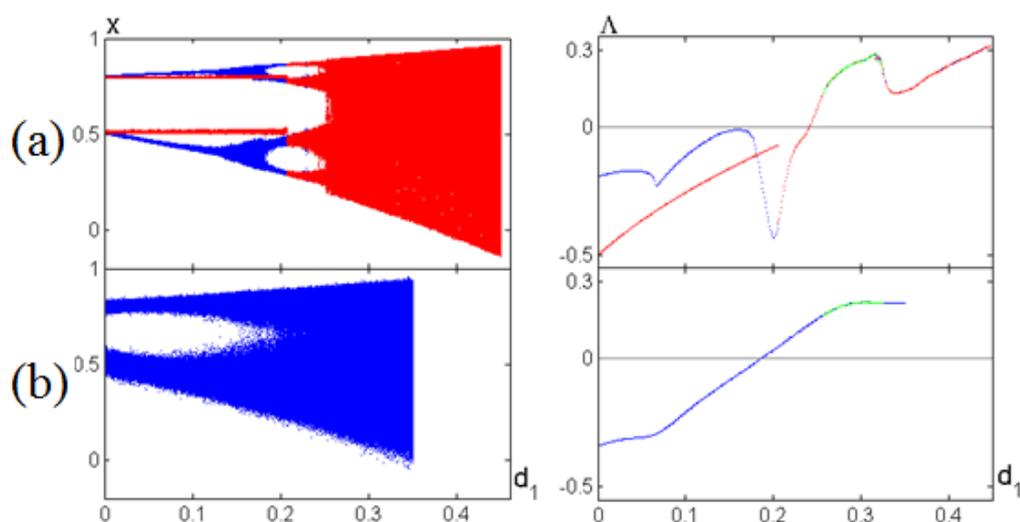


Рисунок 4 – Бифуркационная диаграмма (слева) и показатель Ляпунова (справа) при  $\alpha = 3.2$ ,  $d_2 = 0.1$  и  $\varepsilon = 0.001$  (a),  $\varepsilon = 0.01$  (b)

### Заклучение

Таким образом, в работе исследованы возникающие режимы для связанного логистического осциллятора. Показано, как можно расширить применимость данного отображения для генерации хаоса в задачах криптографии, учитывая внешнее случайное возмущение.

Дальнейшая исследовательская работа связана с применением техники функции стохастической чувствительности [6] для нахождения оптимального уровня интенсивности случайного воздействия.

### Библиографический список

1. Matthews R. On the Derivation of a chaotic Encryption Algorithm / R. Matthews // Cryptologia. – 1989. – Vol. 13, № 1. – P. 29–42.
2. Chaos-based communications at high bit rates using commercial fibreoptic links / A. Argyris [et al.] // Nature. – 2005. – Vol. 438, I. 7066. – P. 343–346.
3. Electronically-implemented coupled logistic maps / A. L’Her [et al.] // The European Physical Journal B. – 2016. – Vol. 89, I. 3. – Article ID 81.
4. Hasler M. An Introduction to the Synchronization of Chaotic Systems: Coupled Skew Tent Maps / M. Hasler, Y. L. Maistrenko // IEEE transactions on circuits and systems i-regular papers. – 1997. – Vol. 44, I. 10. – P. 856–866.
5. Kaddoum G. Wireless Chaos-Based Communication Systems: A Comprehensive Survey / G. Kaddoum // IEEE Access. – 2016. – Vol. 4. – P. 2621–2648.
6. Bashkirtseva I. Attractors of randomly forced logistic model with delay: stochastic sensitivity and noise-induced transitions / I. Bashkirtseva, E. Ekaterinchuk, L. Ryashko // Journal of Difference Equations and Applications. – 2015. – Vol. 22, I. 3. – P. 376–390.