УДК 624.04.071.2

К ИССЛЕДОВАНИЮ ПРОДОЛЬНОЙ ДИНАМИКИ ЛЕНТОЧНЫХ КОНВЕЙЕРОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ДИСКРЕТНЫХ СХЕМ ЗАМЕЩЕНИЯ

Г. Г. Кожушко,
профессор, д-р техн. наук
М. Д. Лукашук,
магистрант
Уральский федеральный университет им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург

Аннотация. Рассматривается задача определения математической модели динамики конвейерной ленты при различных режимах эксплуатации. Для расчетов в ряде случаев конвейерная лента моделируется цепочной системой с конечным числом степеней свободы.

Ключевые слова: *конвейерная лента, дискретизация, цепь.*

TO THE STUDY OF LONGITUDINAL DYNAMICS OF BELT CONVEYORS USING DISCRETE DISPLACEMENT SCHEMES

Abstract. The problem of determining the mathematical model of the conveyer belt dynamics under different operating conditions is considered. For calculations, in some cases, the conveyer belt is modeled as a chain system with a finite number of degrees of freedom.

Keywords: *belt conveyor, sampling, chain.*

Большой класс прикладных задач, возникающих при исследовании ленточных конвейеров, сводится к изучению продольной динамики в режимах пуска, торможения, заклинивания, обрыва ленты при различных видах кинематического возмущения и т. д. При этом ленту, как правило, относят к дискретизации динамических задач как упруго-вязкий стержень [1; 2]. Это приводит к описанию продольной динамики конвейера волновыми уравнениями в частных производных, которые, как правило, решаются численными методами. В некоторых случаях приближенные решения удается получить в замкнутом виде.

Использование метода конечных разностей для решения волнового уравнения в частных производных, описывающих колебания ленты как системы с распределенными параметрами, является, по существу, дискретизацией реальной системы.

В ряде случаев динамика ленточных конвейеров моделируется цепочной системой с конечным числом степеней свободы, т. е. используется метод прямой дискретизации.

При рассмотрении цепочных однородных схем замещения (или при использовании конечно-разностных аналогов симметричной структуры) эффективным оказывается применение матричных методов [3].

Для исследования продольных колебаний конвейерная лента представляется в виде однородной дискретной цепи, составленной из равных по величине масс m_i, соединенных между собой линейными упруго-вязкими элементами с коэффициентами жесткости c и демпфирования η [3].

К концевой массе m_1 приложена возмущающая сила P, а другая масса либо жестко закреплена (что в математическом смысле равносильно $m_{a+1} = \infty$), либо на нее действует сила сопротивления.

Целью работы является получение формул замкнутого вида для вычисления динамических нагрузок F_1 в связях неразветвленной цепочной системы.

Движение дискретной цепи описывается системой уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
&\ddot{F}_1 - c_1\left(\frac{P-F_1}{m_1} - \frac{F_1-F_2}{m_2}\right) + \eta_1\left(\frac{\dot{P}-\dot{F}_1}{m_1} - \frac{\dot{F}_1-\dot{F}_2}{m_2}\right);\\
&\ddot{F}_i - c_i\left(\frac{F_{i-1}-F_i}{m_i} - \frac{F_i-F_{i+1}}{m_{i+1}}\right) + \eta_i\left(\frac{\dot{F}_{i-1}-\dot{F}_i}{m_i} - \frac{\dot{F}_i-\dot{F}_{i+1}}{m_{i+1}}\right);\\
&\ddot{F}_n - c_n\left(\frac{F_{n-1}-F_n}{m_n} - \frac{F_n-Q}{m_{n+1}}\right) + \eta_n\left(\frac{\dot{F}_{n-1}-\dot{F}_n}{m_n} - \frac{\dot{F}_n-\dot{Q}}{m_{n+1}}\right).
\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Приведенная система уравнений соответствует схеме с двумя свободными концами; в случае же, когда один из концов дискретной цепи закреплен, последнее уравнение в (1) имеет вид

$$\ddot{F}_n = c_n\left(\frac{F_{n-1} - F_n}{m_n}\right) + \eta_n\left(\frac{\dot{F}_{n-1} - \dot{F}_n}{m_n}\right).$$

Запишем (1) в матричной форме

$$P_1 = CM_1F + HM_2\dot{F} + \ddot{F}, \tag{2}$$

где M_1, M_2, C, H — матрицы масс, жесткостей, коэффициентов демпфирования.

Решения (2) в матричной форме будем искать в виде

$$F = D + \sum_{k=1}^{n} A_k e^{a_k t}. \tag{3}$$

Подставив (3) в (2), после упрощения получим

$$\sum_{k=1}^{n}\left(CM_i + a_kHM_i + a_k^2E\right)A_k e^{a_k t} = -\ddot{D} - CM_iD - HM_i\dot{D} + P_i. \tag{4}$$

Приравнивая нулю правую часть (4), найдем частное решение неординарной системы (2). Общее решение однородной системы уравнений, соответствующей (2) $\ddot{F} + CM_iF + HM_i\dot{F} = 0$, найдем, приравнивая нулю левую часть уравнения (4),

$$\sum_{k=1}^{n}\left(CM_i + a_kHM_i + a_k^2E\right)A_k e^{a_k t} = 0. \tag{5}$$

Действительная часть решения (3) имеет вид

$$F = D + \sum_{k=1}^{n} X_kS_k e^{P_k t}\cos\omega_k t, \tag{6}$$

где X_k — собственный нормированный вектор матрицы B_i с собственным числом λ_k. Неизвестными являются величины S_k, находимые из начальных условий, а также вектор D. В частном случае, когда $P(t) = \mathrm{const}$ и $Q(t) = \mathrm{const}$ для случая двух свободных концов имеем

$$\sum_{k=1}^{n} X_kS_k = -\left(P - Q\right)\begin{bmatrix} \frac{n}{n+1} \\ \frac{n-1}{n+1} \\ \vdots \\ \frac{1}{n+1} \end{bmatrix} \tag{6}$$

Опуская промежуточные преобразования, i-й связи для однородной системы со свободными концами

$$F_i = D_i - \frac{P-Q}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin i\varphi_k \operatorname{ctg}\frac{\varphi_k}{2}e^{P_k t}\cos\omega_k t \tag{7}$$

или

$$F_i = \frac{P-Q}{n+1}\left[n + 1 - i - \sum_{k=1}^{n}\sin i\varphi_k \operatorname{ctg}\frac{\varphi_k}{2}e^{\alpha_k t}\cos\omega_k t\right] + Q. \tag{8}$$

где $\varphi_k = \dfrac{nk}{n+1}$, $P_k = \dfrac{\eta}{m}\left(\cos\varphi_k - 1\right)$.

В случае консервативной системы $(\eta = 0)$ (8) имеет вид

$$F_i = Q + \frac{P-Q}{n+1}\left[n + 1 - i - \sum_{k=1}^{n}\sin i\varphi_k \operatorname{ctg}\frac{\varphi_k}{2}\cos\omega_k t\right], \tag{9}$$

где $\varphi_k = \dfrac{nk}{n+1}$, $\omega_k = 2\sin\dfrac{\varphi_k}{2}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Из (6) получаем формулу для нахождения нагрузки в i-й связи для системы с одним закрепленным концом:

$$F_i = P\left(1 - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin i\varphi_k \operatorname{ctg}\frac{\varphi_k}{2}\cos\omega_k t e^{\alpha_k t}\right), \tag{10}$$

где $\varphi_k = \dfrac{n(2k+1)}{2n+1}$, $P_k = \dfrac{\eta}{m}\left(\cos\varphi_k - 1\right)$,

$$\omega_k = 2\sin\frac{\varphi_k}{2}\sqrt{\frac{c}{m} - \frac{\eta^2}{m^2}\sin^2\frac{\varphi_k}{2}}.$$

Для консервативной схемы уравнение (10) преобразуется к виду:

$$F_i = P\left(1 - \frac{1}{n + \frac{1}{2}}\sum_{k=1}^{n}\sin i\varphi_k \operatorname{ctg}\frac{\varphi_k}{2}\cos\omega_k t\right).$$

где $\varphi_k = \dfrac{n(2k-1)}{2n+1}$, $\omega_k = 2\sin\dfrac{\varphi_k}{2}\sqrt{\dfrac{c}{m}}$.

Полученные выражения могут быть использованы при решении ряда прикладных задач динамики ленточных конвейеров в эксплуатационных и аварийных режимах (пуск, торможение, заклинивание, обрыв ленты).

Список литературы

1. *Панкратов С. А.* Динамика горных машин для открытых и земляных работ. М., 1967.
2. *Спиваковский А. О., Дмитриев В. Г.* Теоретические основы расчета ленточных конвейеров. М., 1977. 154 с.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. Изд. 5-е. М. : Физматлит, 2004. 559 с.