На правах рукописи

Волканин Леонид Сергеевич

СТАБИЛИЗАЦИЯ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ ПО УПРАВЛЕНИЮ

05.13.18 – математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ — 2006

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Научный руководитель:	—	доктор физико-математических наук, профессор Аркадий Владимирович Ким
Официальные оппоненты:	—	доктор физико-математических наук, Николай Юрьевич Лукоянов
	—	кандидат технических наук, Наталья Ивановна Королева
Ведущая организация	—	Удмуртский государственный университет, г. Ижевск

Защита диссертации состоится ” 18 ” октября 2006 г. в 13 ч. 00 м. на заседании диссертационного Совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А.М.Горького по адресу:
620063, г.Екатеринбург, пр. Ленина, 51, комн.248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького

Автореферат разослан ” 15 ” сентября 2006 года.

Ученый секретарь
диссертационного Совета
доктор физ.-мат. наук, профессор В. Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Многие свойства реальных объектов определяются эффектом последействия, состоящего в том, что дальнейшее состояние объекта зависит не только от настоящего, но и от прошлого, т.е. от его предыстории. Моделировать такие процессы позволяют функционально-дифференциальные уравнения (ФДУ), называемые также уравнениями с запаздыванием или уравнениями с последействием.

Возникновение подобных систем, связанных с эффектом последействия, потребовало развития соответствующей теории, которая активно развивалась такими математиками как Н.В. Азбелев, Г.А. Каменский, В.Б. Колмановский, Н.Н. Красовский, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский, Г.И. Марчук, А.Д. Мышкис, В.Р. Носов, С.Б. Норкин, Ю.С. Осипов, Л.С. Понтрягин, С.Н. Шиманов, Л.Э. Эльсгольц, C.H.T. Baker, H.T. Banks, R. Bellman, K.L. Cooke, R.D. Driver, J.K. Hale, V. Lakshmikantam, V. Volterra и многими другими.

Полученные в этой области фундаментальные результаты сформировали качественную теорию дифференциальных уравнений с запаздыванием. Вместе с тем, полное решение различных задач для подобных систем, в том числе задач управления и стабилизации, аналитическими методами удается получить лишь в исключительных случаях. Поэтому проблема создания эффективных численных методов решения задач и разработка их программной реализации современными вычислительными средствами является особенно актуальной.

Для конечномерных систем линейно-квадратичная теория (получившая название *аналитического конструирования регуляторов* – АКОР), разработанная А.М.Летовым и Р.Калманом в начале 60-х годов, благодаря ясной постановке и конструктивным результатам играет особую роль среди различных подходов к синтезу управлений. Вычисление коэффициентов матрицы усиления (стабилизирующего) управления на основе теории АКОР сводится к решению *алгебраического уравнения Риккати* (АУР), причем соответствующее управление, если оно существует, стабилизирует систему.

Исследование задач АКОР для систем с последействием инициировано статьей Н.Н. Красовского[1], в которой было показано, что оптимальное стабилизирующее управление является линейным непрерывным функционалом на функциональном (фазовом) пространстве системы с последействием, и были выведены соотношения, описывающие параметры оптимального управления и оптимального значения функционала качества.

Основой построения общей теории АКОР для систем с последействием, также как и общей теории функционально-дифференциальных уравнений (ФДУ), является предложенная Н.Н.Красовским *функциональная* трактовка решений таких систем.

К настоящему времени *теоретические* аспекты АКОР для систем с последействием разработаны с достаточной полнотой, однако, в силу бесконечномерной природы систем с последействием, практическое применение теории наталкивается на ряд принципиальных трудностей. Поэтому разработка *конструктивных* алгоритмов АКОР для систем с последействием постоянно находится в центре внимания математиков и инженеров.

Основные результаты при исследовании ФДУ получены для систем с запаздыванием в фазовых координатах. Системы с последействием в управлении изучены значительно менее подробно.

Настоящая работа продолжает исследования в этом направлении.

Цель работы.

Одной из основных трудностей, сдерживающих практическое использование АКОР в задачах синтеза управления для систем с последействием, является необходимость решения специальной системы *обобщенных уравнений Риккати* (ОУР), описывающей коэффициенты оптимального управления и представляющей собой систему алгебраических уравнений, обыкновенных дифференциальных уравнений и дифференциальных уравнений с частными производными.

Поэтому уже в первых работах, где были получены ОУР[2], проблема

---

[1] Красовский Н. Н. Об аналитическом конструировании оптимального регулятора в системе с запаздываниями времени // Прикладная математика и механика. 1962. Т. 26, №1.

[2] Ross D. W. Controller Design for Time Lag Systems via Quadratic Criterion // IEEE Trans. Aut. Control. 1971. V. 16, pp. 664–672

Ross D. W., Flugge-Lotz I. An Optimal Control Problem for Systems with Differential Difference Equation Dynamics // SIAM J. Control. 1969. V. 7, №4, pp 609–623

Eller D. H., Aggarwal J. K. and Banks H. T. Optimal control of linear time-delay systems // IEEE Trans. Automat. Control. 1969. V. 14, pp. 678-687

АКОР для систем с последействием была сформулирована в виде двух задач:

Задача A : нахождение явных решений ОУР;

Задача B : разработка методов исследования стабилизирующих свойств управлений, соответствующих явным решениям ОУР.

Отметим, что для систем с последействием, в отличие от конечномерных систем, линейное управление с обратной связью, построенное на основе решения ОУР, не всегда является стабилизирующим, поэтому выделение исследования устойчивости в отдельную *Задачу B* представляется естественным. Для систем с запаздыванием в фазовых координатах некоторые аспекты задач A и B подробно изучались в работах[3]

Целью данной работы является разработка конструктивных аналитических и численных методов синтеза стабилизирующих управлений для систем с последействием в управляющих параметрах на основе минимизации обобщенных квадратичных функционалов качества.

Методы исследования.

Методика исследования основана на функциональном подходе в качественной теории функционально–дифференциальных уравнений. Систематически применяются понятия и методы функционального анализа, теории устойчивости, управления. Существенную роль в методике играют численные процедуры.

Разработанные в данной диссертации методы построения явных решений ОУР основываются на идее введения дополнительных слагаемых в функционал качества.

Модификация функционала качества в теории АКОР для конечномерных систем была предложена в работе А.А.Красовского[4]. Введение дополнительного квадратичного слагаемого в функционал качества позволило упростить матричные уравнения, описывающие коэффициенты оптимального стабилизирующего управления (в рамках такого подхода

---

[3] Колмановский В. Б., Королева Н. И. О синтезе билинейных систем с запаздыванием в управлении // Прикладная математика и механика. 1993. Т. 57, №1, с. 238-243

Kolmanovskii V. B., Myshkis A. D. Applied theory of functional differential equations. Kluwer Academic Publishers. 1992

Uchida K., Shimemura E., Kubo T. and Abe N. The linear-quadratic optimal control approach to feedback control design for systems with delay // Automatica. 1988. V. 24, №6, pp. 773-780

Kim A. V. Functional Differential Equations. Application of i-smooth calculus. Kluwer Academic Publishers. 1999

[4] Красовский А. А. Интегральные оценки моментов и синтез линейных систем // Автоматика и телемеханика. 1967. №10, с. 53-71

оптимальное стабилизирующее управление определяется матрицей усиления, являющейся решением не АУР, а более простого *уравнения Ляпунова*). Соответствующая процедура называется *аналитическим конструированием по критерию обобщенной работы*, так как добавочное слагаемое в функционале качества может быть интерпретировано как "энергия" (обобщенная работа) оптимального управления.

Научная новизна. Разработаны новые конструктивные алгоритмы анализа и синтеза управлений для систем с последействием в управлении на основе решения линейно–квадратичных задач управления.

Теоретическая и практическая ценность. Развитые в диссертации методы позволяют строить и анализировать синтез управления для систем с последействием. Разработанные методы и алгоритмы реализованы в пакете прикладных программ *Time-delay System Toolbox* в системе MATLAB.

Основные результаты

1) в задаче управления для линейных систем с запаздыванием по управлению с модифицированным квадратичным критерием качества получена система обобщенных уравнений Риккати;
2) получены варианты явных решений ОУР (обобщенных уравнений Риккати), позволяющие свести задачу к численному решению нелинейного матричного уравнения и затем получить управление в явном виде;
3) получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости линейных систем с запаздыванием по управлению с помощью сведения к задаче стабилизации линейной системы с последействием в координатах и анализа фундаментальной матрицы этой системы;
4) разработана методика численного моделирования линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием по управлению и решения соответствующих экспоненциальных матричных уравнений;
5) разработанные алгоритмы численного моделирования реализованы в виде комплекса программ для системы Matlab. Реализован интерфейс для использования комплекса программ в сети интернет (http://matlab.fde.uran.ru).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-8]. Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, полученные автором.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, 5 глав, 2 приложений и списка литературы. Общий объем работы составляет 120 страниц, библиография содержит 40 наименований.

Апробация работы. Результаты диссертации докладывались и обсуждались на

— Школе молодых ученых Института математики и механики УрО РАН (Екатеринбург, 2003);

— конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач» (Екатеринбург, 2004);

— Russian-Korean workshop on Telecommunications (Екатеринбург, 2005);

— конференции «Теория управления и математическое моделирование» (Ижевск, 2006);

— научных семинарах в Институте математики и механики УрО РАН и Уральском государственном университете.

СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во <u>введении</u> обоснована актуальность темы исследований, сформулирована цель диссертационной работы и пути её достижения, отмечена новизна и практическое значение работы.

В <u>первой главе</u> дается введение в проблему АКОР для систем с запаздыванием в управлении.

Основным объектом исследования является система с последействием

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_\Delta u(t-\Delta) + \int\limits_{-\Delta}^{0} G(\nu)u(t+\nu)d\nu \ , \qquad (1)$$

где A, B, B_Δ – постоянные матрицы размерностей $n\times n$, $n\times r$, $n\times r$, соответственно; $G(\cdot)$ – матрица размерности $n\times r$ с кусочно-непрерывными на $[-\Delta,0)$ коэффициентами, $x\in R^n$ – фазовый вектор, $u\in R^r$ – управляющее воздействие (управление). Состоянием системы является пара $\{x, w(\cdot)\}\in R^n\times Q[-\Delta,0)$, где $Q[-\Delta,0)$ - пространство кусочно-непрерывных на $[-\Delta,0)$ r-мерных функций,

$$w(\cdot) = w(s), -\Delta\le s<0 = u_t(\cdot) = u(t+s), -\Delta\le s<0.$$

Стабилизирующее управление с обратной связью ищется в классе линейных отображений

$$u(x, w(\cdot)) = Ex + \int\limits_{-\Delta}^{0} L(\nu) w(\nu) d\nu \ , \tag{2}$$

где E – постоянная $r \times n$ матрица, $L(\cdot)$ – матрица размерности $r \times r$ с кусочно-непрерывными на $[-\Delta, 0]$ коэффициентами.

В разделе 1.2 формализуются понятия замкнутой системы,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + B_\Delta u(t - \Delta) + \displaystyle\int\limits_{-\Delta}^{0} G(\nu) u(t + \nu) d\nu \ , \\ u(t) = Ex(t) + \displaystyle\int\limits_{-\Delta}^{0} L(\nu) u(t + \nu) d\nu \ , \end{cases} \tag{3}$$

замкнутой системы в дифференциальной форме,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = & Ax(t) + Bu(t) + B_\Delta u(t - \Delta) + \displaystyle\int\limits_{-\Delta}^{0} G(\nu) u(t + \nu) d\nu \ , \\ \dot{u}(t) = & EAx(t) + [EB + L(0)] u(t) + [EB_\Delta - L(-\Delta)] u(t - \Delta) + \\ & + \displaystyle\int\limits_{-\Delta}^{0} \left[EG(\nu) - \frac{dL(\nu)}{d\nu} \right] u(t + \nu) d\nu \ . \end{cases} \tag{4}$$

Устанавливается эквивалентность этих систем.

Теорема 1. Пусть заданы система (1) и линейный синтез управления (2), причем элементы матрицы $L(\cdot)$ непрерывны и имеют кусочно-непрерывные производные. Для любого начального условия $\{x^0, w^0(\cdot)\}$ существует единственный допустимый процесс $\{x(\cdot), u(\cdot)\}$, удовлетворяющий:

a) системе (3) при $t > 0$,

b) начальному условию

$$\begin{cases} x(t_0) = x^0, \\ u(t_0 + \nu) = w^0(\nu), \ -\Delta \le \nu < 0, \end{cases}$$

и условию

$$u(0) = Ex^0 + \int\limits_{-\Delta}^{0} L(\nu) w^0(\nu) d\nu \ .$$

При этом функция $u(\cdot)$ является непрерывной и кусочно-дифференцируемой при $t \geq 0$ и, следовательно, удовлетворяет системе (4).

В этом же параграфе вводятся определения устойчивости и асимптотической устойчивости замкнутой системы.

В разделе 1.3 вводится понятие стабилизирующего управления с обратной связью и показывается, что рассматриваемая в диссертации задача может быть сформулирована следующим образом

Задача С. Для заданной системы (1) найти управление (2), при котором замкнутая система (3) является асимптотически устойчивой.

В разделе 1.4. для получения соотношений, описывающих параметры одного из возможных стабилизирующих управлений вида (2), на управление накладывается дополнительное требование минимизации обобщенного квадратичного функционала качества

$$\begin{gathered} J = \int\limits_{0}^{\infty} \Bigg\{ x'(t)\Psi_0 x(t) + u'(t)\, M\, u(t) + 2x'(t) \int\limits_{-\Delta}^{0} \Psi_1(s) u(t+s) ds + \\ + \int\limits_{-\Delta}^{0} \int\limits_{-\Delta}^{0} u'(t+s)\Psi_2(s,\nu) u(t+\nu) ds d\nu + \qquad (5) \\ + \int\limits_{-\Delta}^{0} u'(t+s)\Psi_3(s) u(t+s) ds + u'(t-\Delta)\Psi_4 u(t-\Delta) \Bigg\} dt \end{gathered}$$

на траекториях замкнутой системы. Здесь Ψ_0 – постоянная $n \times n$ матрица, $\Psi_1(\cdot)$ – матрица размерности $n \times r$ с кусочно-непрерывными на $[-\Delta, 0]$ коэффициентами, $\Psi_2(\cdot,\cdot)$ – матрица размерности $r \times r$ с кусочно-непрерывными на $[-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0]$ коэффициентами. $\Psi_3(\cdot)$ – матрица размерности $r \times r$ с кусочно-непрерывными на $[-\Delta, 0]$ коэффициентами, M, Ψ_4 – постоянные симметричные положительно определённые $r \times r$ матрицы.

Весовым функционалом состояния в (5) является квадратичный функционал

$$Z[x, w(\cdot)] = x'\Psi_0 x + 2x' \int\limits_{-\Delta}^{0} \Psi_1(s) w(s) ds + \\ + \int\limits_{-\Delta}^{0} \int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s) \Psi_2(s, \nu) w(\nu) ds d\nu + \int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s) \Psi_3(s) w(s) ds + \\ + w'(-\Delta) \Psi_4 w(-\Delta), \tag{6}$$

определённый на пространстве $H = R^n \times Q[-\Delta, 0)$,

Отметим, что в большинстве работ рассматривается квадратичный критерий качества

$$J_* = \int\limits_{0}^{\infty} \{x'(t)\Psi_0 x(t) + u'(t) M u(t)\} \, dt, \tag{7}$$

однако, принимая во внимание определенный произвол в выборе матриц Ψ_0, $\Psi_1(\cdot)$, $\Psi_2(\cdot, \cdot)$, $\Psi_3(\cdot)$, Ψ_4 задача (1), (5) имеет больше "степеней свободы".

Коэффициенты $\Psi_0, \ldots, \Psi_4$ функционала качества (5) можно выбирать с определённым произволом, так как основная задача состоит в построении стабилизирующего управления.

В разделе 1.5. приводится система обобщенных уравнений Риккати (ОУР), на основе которой будет исследовать задача АКОР. Вывод системы ОУР приводится во второй главе.

Во второй главе приводится вывод системы ОУР, а также рассматривается три варианта выбора весовых коэффициентов таким образом, что система ОУР упрощается и решение можно выписать в явном виде.

Целью раздела 2.1 является вывод обобщённых уравнений Риккати (необходимых условия оптимальности), которым, в случае разрешимости задачи оптимальной стабилизации, удовлетворяют коэффициенты оптимального регулятора и обобщённого квадратичного функционала качества. Оптимальное значение (функционал Беллмана) для задачи (1), (5) в точке $\{x, w(\cdot)\} \in H$ обозначается $W[x, w(\cdot)]$.

Теорема 2. Пусть:
1) существует решение задачи (1), (5),
2) оптимальное значение функционала качества (5) имеет вид

$$\begin{gathered}W[x, w(\cdot)] = x'Px + 2x' \int\limits_{-\Delta}^{0} D(s)w(s)ds + \\ + \int\limits_{-\Delta}^{0} \int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s)R(s,\nu)w(\nu)dsd\nu + \int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s)\Pi(s)w(s)ds\end{gathered},$$

причём

(a) P – симметричная $n \times n$ матрица,

(b) коэффициенты $n \times r$ матрицы $D(\cdot)$ и $r \times r$ матрицы $\Pi(\cdot)$ непрерывны и кусочно-дифференцируемы на $[-\Delta, 0]$,

(c) коэффициенты $r \times r$ матрицы $R(\cdot, \cdot)$ и её производных $\frac{\partial R}{\partial s}$ и $\frac{\partial R}{\partial \nu}$ непрерывны всюду на $[-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0]$, исключая линию $s = \nu$,

(d) для матрицы $R(\cdot, \cdot)$ выполняется условие

$$R'(\nu, s) = R(s, \nu), \ (s, \nu) \in [-\Delta, 0] \times [-\Delta, 0].$$

Тогда матрицы P, $D(\cdot)$, $R(\cdot, \cdot)$, $\Pi(\cdot)$ являются решением системы обобщённых уравнений Риккати (ОУР)

$$PA + A'P + \Psi_0 - \Big[P'B + D(0)\Big]\Big[\Pi(0) + M\Big]^{-1}\Big[B'P + D'(0)\Big] = 0, \quad (8)$$

$$\begin{gathered}\frac{dD(s)}{ds} - A'D(s) - \Psi_1(s) - P'G(s) + \\ + \Big[P'B + D(0)\Big]\Big[\Pi(0) + M\Big]^{-1}\Big[B'D(s) + R(0,s)\Big] = 0,\end{gathered} \quad (9)$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial R(s,\nu)}{\partial s} + \frac{\partial R(s,\nu)}{\partial \nu} - \Psi_2(s,\nu) - 2D'(s)G(s) + \\ + \Big[D'(s)B + R(s,0)\Big]\Big[\Pi(0) + M\Big]^{-1}\Big[B'D(s) + R(0,s)\Big] = 0,\end{gathered} \quad (10)$$

$$\frac{d\Pi(s)}{ds} - \Psi_3(s) = 0, \quad (11)$$

с граничными условиями

$$P'B_\Delta = D(-\Delta), \tag{12}$$

$$D'(s)B_\Delta = R(s,-\Delta), \tag{13}$$

$$\Psi_4 = \Pi(-\Delta). \tag{14}$$

и условиями симметричности

$$P' = P, R'(\nu, s) = R(s,\nu) \tag{15}$$

В разделе 2.2 приводится первый вариант выбора матриц $\Psi_1(\cdot)$, $\Psi_2(\cdot,\cdot)$, позволяющий свести задачу к численному решению нелинейного матричного уравнения и затем получить управление в явном виде.

Теорема 3. Пусть симметричная $n\times n$ матрица $\widetilde{P}$ является решением экспоненциального матричного уравнения

$$PA + A'P + \Psi_0 - \Big[P'B + e^{A'\Delta}P'B_\Delta\Big]K\Big[B'P + B'_\Delta P e^{\Delta A}\Big] = 0, \tag{16}$$

$K = \Big[\int\limits_{-\Delta}^{0}\Psi_3(s)ds + \Psi_4 + M\Big]^{-1}$, матрицы $\widetilde{D}(s)$, $\widetilde{\Pi}(s)$ и $\widetilde{R}(s,\nu)$ имеют вид:

$$\widetilde{D}(s) = e^{A'(s+\Delta)}\widetilde{P}'B_\Delta, \tag{17}$$

$$\widetilde{\Pi}(s) = \int\limits_{-\Delta}^{s}\Psi_3(\nu)d\nu + \Psi_4 \tag{18}$$

$$\widetilde{R}(s,\nu) = \begin{cases} \widetilde{Q}(s)\widetilde{D}(\nu) & \text{для } (s,\nu)\in\Omega_1, \\ \widetilde{D}'(s)\widetilde{Q}'(\nu) & \text{для } (s,\nu)\in\Omega_2, \end{cases} \tag{19}$$

где

$$\Omega_1 = \{(s,\nu)\in[-\Delta,0]\times[-\Delta,0] : s-\nu<0\},$$
$$\Omega_2 = \{(s,\nu)\in[-\Delta,0]\times[-\Delta,0] : s-\nu>0\}$$

и

$$\widetilde{Q}(s) = B'_\Delta e^{-A'(s+\Delta)}.$$

Если в функционале качества (5) весовые матрицы выбраны Ψ_0, $\Psi_3(\cdot)$, Ψ_4 выбраны произвольным образом, а матрицы $\Psi_1(\cdot)$, $\Psi_2(\cdot,\cdot)$ – в виде

$$\Psi_1(s) = [\widetilde{P}'B + \widetilde{D}(0)]\,K\,[B'\widetilde{D}(s) + \widetilde{R}(0,s)] - \widetilde{P}'G(s), \tag{20}$$

$$\Psi_2(s,\nu) = [\widetilde{D}'(s)B + \widetilde{R}(s,0)]\, K\, [B'\widetilde{D}(s) + \widetilde{R}(0,s)] - 2\widetilde{D}'(s)G(s), \quad (21)$$

тогда матрицы $\widetilde{P}$, $\widetilde{D}(s)$ и $\widetilde{R}(s,\nu)$ являются решениями соответствующей системы ОУР (8)–(15).

В разделе 2.3 приводится второй вариант выбора матриц $\Psi_1(\cdot)$, $\Psi_2(\cdot,\cdot)$

Теорема 4. Пусть симметричная $n \times n$ матрица $\widetilde{P}$ и $n \times r$ матрица $\widetilde{D}(0)$ являются решением системы матричных уравнений

$$PA + A'P + \Psi_0 - \Big[P'B + D(0)\Big] K \Big[B'P + D'(0)\Big] = 0\ , \quad (22)$$

$$D(0) - e^{-[P'BKB' + D(0)K - A']\Delta} P'B_\Delta = 0\ , \quad (23)$$

$K = \Big[\int\limits_{-\Delta}^{0} \Psi_3(s)ds + \Psi_4 + M\Big]^{-1}$, матрицы $\widetilde{D}(s)$, $\widetilde{\Pi}(s)$ и $\widetilde{R}(s,\nu)$ имеют вид:

$$\widetilde{D}(s) = e^{-[P'BKB' + \widetilde{D}(0)K - A'](s+\Delta)} \widetilde{P}' B_\Delta\ , \quad (24)$$

$$\widetilde{\Pi}(s) = \int\limits_{-\Delta}^{s} \Psi_3(\nu)d\nu + \Psi_4 \quad (25)$$

$$\widetilde{R}(s,\nu) = \begin{cases} \widetilde{Q}(s)\widetilde{D}(\nu) & \text{для } (s,\nu) \in \Omega_1, \\ \widetilde{D}'(s)\widetilde{Q}'(\nu) & \text{для } (s,\nu) \in \Omega_2, \end{cases} \quad (26)$$

где

$$\Omega_1 = \{(s,\nu) \in [-\Delta,0] \times [-\Delta,0] : s - \nu < 0\},$$
$$\Omega_2 = \{(s,\nu) \in [-\Delta,0] \times [-\Delta,0] : s - \nu > 0\}$$

и

$$\widetilde{Q}(s) = B'_\Delta e^{[\widetilde{P}'BKB' + D(0)K - A'](s+\Delta)}\ ,$$

Если в функционале качества (5) весовые матрицы выбраны $\Psi_0, \Psi_3(\cdot), \Psi_4$ выбраны произвольным образом, а матрицы $\Psi_1(\cdot), \Psi_2(\cdot,\cdot)$ – в виде

$$\Psi_1(s) = \widetilde{P}'BKB'\widetilde{R}(0,s) + \widetilde{D}(0)K\widetilde{R}(0,s) - \widetilde{P}'G(s), \quad (27)$$

$$\Psi_2(s,\nu) = [\widetilde{D}'(s)B + \widetilde{R}(s,0)]K[B'\widetilde{D}(s) + \widetilde{R}(0,s)] - 2\widetilde{D}'(s)G(s). \quad (28)$$

тогда матрицы $\widetilde{P}$, $\widetilde{D}(s)$ и $\widetilde{R}(s,\nu)$ являются решениями соответствующей системы ОУР (8)–(15).

В разделе 2.4 приводится специальный (стационарный) вариант выбора матриц $\Psi_1(\cdot)$, $\Psi_2(\cdot,\cdot)$.

Теорема 5. Пусть симметричная $n \times n$ матрица $\widetilde{P}$ является решением экспоненциального матричного уравнения

$$PA + A'P + \Psi_0 - \Big[P'B + P'B_\Delta\Big] K \Big[B'P + B'_\Delta P\Big] = 0, \qquad (29)$$

$K = \Big[\int\limits_{-\Delta}^{0} \Psi_3(s)ds + \Psi_4 + M\Big]^{-1}$, матрицы $\widetilde{D}(s)$, $\widetilde{\Pi}(s)$ и $\widetilde{R}(s,\nu)$ имеют вид:

$$\widetilde{D}(s) = \widetilde{P}'B_\Delta, \qquad (30)$$

$$\widetilde{\Pi}(s) = \int\limits_{-\Delta}^{s} \Psi_3(\nu)d\nu + \Psi_4 \qquad (31)$$

$$\widetilde{R}(s,\nu) = B'_\Delta P B_\Delta. \qquad (32)$$

Если в функционале качества (5) весовые матрицы выбраны $\Psi_0, \Psi_3(\cdot), \Psi_4$ выбраны произвольным образом, а матрицы $\Psi_1(\cdot), \Psi_2(\cdot,\cdot)$ – в виде

$$\Psi_1(s) = [\widetilde{P}'B + \widetilde{D}(0)]\, K\, [B'\widetilde{D}(s) + \widetilde{R}(0,s)] - \widetilde{P}'G(s) - A'\widetilde{D}(s), \qquad (33)$$

$$\Psi_2(s,\nu) = [\widetilde{D}'(s)B + \widetilde{R}(s,0)]\, K\, [B'\widetilde{D}(s) + \widetilde{R}(0,s)] - 2\widetilde{D}'(s)G(s), \qquad (34)$$

тогда матрицы $\widetilde{P}$, $\widetilde{D}(s)$ и $\widetilde{R}(s,\nu)$ являются решениями соответствующей системы ОУР (8)–(15).

Третья глава посвящена построению и анализу свойств регулятора.

Приводится управление с обратной связью, полученное в ходе вывода системы ОУР. Это управление отвечает необходимым условиям оптимальности:

$$u^*(x, w(\cdot)) = -\Big[\Pi(0) + M\Big]^{-1} \Bigg[B'\Bigg(Px + \int\limits_{-\Delta}^{0} D(s)w(s)ds\Bigg) + \\ + D'(0)x + \int\limits_{-\Delta}^{0} R(0,\nu)w(\nu)d\nu\Bigg] \qquad (35)$$

Для построения управления с обратной связью необходимо, согласно разработанному подходу

1) вычислить матрицу P, являющуюся решением соответствующего матричного уравнения;
2) вычислить матрицы $D(s)$ и $R(s,\nu)$ подстановкой P в соответствующую формулу, вычислить матрицу $\Pi(0)$;
3) построить управление с обратной связью, подставив в формулу (35) матрицы P, $D(s)$, $R(s,\nu)$ и $\Pi(0)$;

Следующей задачей, после нахождения явного вида регулятора, является задача исследования его стабилизирующих свойств.

В разделе 3.1 приводится полный вид управлений с обратной связью и замкнутых систем, соответствующих рассмотренным вариантам явных решений ОУР.

В разделе 3.2 получены достаточные условия стабилизируемости

Теорема 6. Пусть матрицы P, $D(s)$, $R(s,\nu)$, $\Pi(s)$ являются решением системы (8) – (15);

Если

1) весовой квадратичный функционал (6) является положительно определенным на $H = R^n \times Q[-\Delta, 0)$.

2) квадратичный функционал

$$W[x, w(\cdot)] = x'Px + 2x' \int\limits_{-\Delta}^{0} D(s)\, w'(s)\, ds +$$
$$+ \int\limits_{-\Delta}^{0} \int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s)R(s,\nu)w(\nu)ds d\nu + \int\limits_{-\Delta}^{0} w'(s)\Pi(s)w(s)ds$$

является *положительно определенным* на $H = R^n \times Q[-\Delta, 0)$,

тогда система (1) стабилизируема и управление с обратной связью

$$u^*(x, w(\cdot)) = -\Big[\Pi(0) + M\Big]^{-1} \Bigg[B'\Bigg(Px + \int\limits_{-\Delta}^{0} D(s)w(s)ds\Bigg) + $$
$$+ D'(0)x + \int\limits_{-\Delta}^{0} R(0,\nu)w(\nu)d\nu\Bigg] \tag{36}$$

является решением ЛКЗУ (1), (5) в классе стабилизирующих управлений, а минимальное значение функционала качества J, соответствующее начальной позиции $\{x, w(\cdot)\}$, имеет вид (36).

В разделе 3.3 получены необходимые и достаточные условия стабилизируемости линейных систем с запаздыванием по управлению с помощью сведения к задаче стабилизации линейной системы с последействием в координатах и анализа фундаментальной матрицы этой системы.

Систему (4) можно рассматривать как систему с запаздыванием по состоянию относительно переменной $y = (x, u)$:

$$\dot{y} = \hat{A}y + \hat{B}_\Delta y(-\Delta) + \int_{-\Delta}^{0} \hat{G}(s)ds \tag{37}$$

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} A & B \\ EA & EB + L(0) \end{pmatrix}, \ \hat{B}_\Delta = \begin{pmatrix} 0 & B_\Delta \\ 0 & EB - L(-\Delta) \end{pmatrix}$$

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} 0 & G(s) \\ 0 & EG(s) - \dfrac{dL(s)}{ds} \end{pmatrix}$$

Фундаментальной матрицей системы (37) называется матрица $F[t]$ размерности $n+r \times n+r$, которая является решением матричного уравнения с запаздыванием

$$\frac{dF[t]}{dt} = \hat{A}F[t] + \hat{B}_\Delta\, F[t-\Delta] + \int\limits_{-\Delta}^{0} \hat{G}(s)\, F[t+s]\, ds\,, \quad t > 0\,, \tag{38}$$

с начальными условиями

$$\begin{cases} F[0] \;=\; I\,, \\ F[t] \;=\; 0 \ \text{ при } \ t < 0\,. \end{cases} \tag{39}$$

Теорема 7. Система (37) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда существует число $T > 0$, такое, что

$$\left(\max_{-\Delta \le s \le 0} \|F[T+s]\|\right) \left(1 + \Delta\, \|\hat{B}_\Delta\| + \int\limits_{-\Delta}^{0}\int\limits_{-\Delta}^{s} \|\hat{G}(\nu)\| d\nu ds\right) < 1. \tag{40}$$

Практическая реализация алгоритмов проверки устойчивости на основе данной теоремы может быть осуществлена на основе численного моделирования фундаментальной матрицы системы, например, с использованием программы *checkstab* из Time-Delay System Toolbox.[5] Алгоритм *checkstab* основан на проверке указанных выше свойств фундаментальной матрицы системы, а также работах[6]. При этом, в ряде случаев, удобно переформулировать теорему следующим образом.

Теорема 8. Система (37) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда существует натуральное число $k > 1$, такое, что

$$\left(\max_{-\Delta\le s\le 0}\|F[k\Delta+s]\|\right)\left(1+\Delta\,\|\hat{B}_\Delta\|+\int\limits_{-\Delta}^{0}\int\limits_{-\Delta}^{s}\|\hat{G}(\nu)\|d\nu ds\right)<1. \quad (41)$$

Отметим, что параметры управления находятся на основе необходимых условий оптимальности. Поэтому, вообще говоря, найденные управления, даже если они стабилизируют систему, могут не быть оптимальными.

Четвертая глава содержит ряд примеров, иллюстрирующих результаты проведенных исследований.

Пятая глава описывает программную реализацию разработанных алгоритмов численного моделирования для системы Matlab. В этой же главе описывается интерфейс для использования комплекса программ в сети интернет (http://matlab.fde.uran.ru).

Подходы к решению вопроса интеграции пакета прикладных программ Time-delay System Toolbox в сеть интернет с возможностью интерактивных или пакетных вычислений описаны в работах [4,6].

В работе рассматриваются два варианта: вычислитель на платформе Intel под управлением ОС Windows 2000/2003 и на платформе Alpha под управлением ОС Digital Unix. Оба варианта разрабатываются и предна-

[5] A. V. Kim, W. H. Kwon, V. G. Pimenov et al Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). Seoul, Korea: Seoul National University, 1998.

[6] Kim A. V., Lozhnikov A. B. Constructive Stability Criterion for Linear Systems with Delays. IMM Ural Branch of Russian Academy of Sciences. 2001.

Ким А. В., Ложников А. Б. Математическое моделирование систем с последействием: теория, алгоритмы, программное обеспечение // Известия Института математики и информатики. Ижевск. 2002. №2, с. 55-58 значены для организации доступа к вычислительным алгоритмам решения функционально-дифференциальных уравнений, реализованным как модули на языках C и FORTRAN, а также как расширения для системы MATLAB. В качестве веб-сервера используется Microsoft Internet Information Server.

В первой модели взаимодействие с вычислительной компонентой (MATLAB) может быть организовано несколькими способами, например, посредством создания COM-объекта Matlab.Application и управления им.

К сожалению, имеющиеся у этого объекта возможности, хотя и достаточны для выполнения всех численных расчётов, но абсолютно не рассчитаны на работу в распределённой среде. Более того, MATLAB не предоставляет никаких средств для контроля выполняемых программ.

Для создания вычислительного сервера созданы компоненты:

FDE.Spooler – общее управление задачами (постановка в очередь, снятие, изменение приоритета и т.п.). Эта компонента создаётся на том же компьютере, где работает веб-сервер. Спулер работает с правами стандартного пользователя для внешних приложений IIS и не производит никаких физических действий с файлами.

FDE.Task – этот COM-объект обслуживает конкретную задачу вычислителя, содержит такие свойства, как идентификатор задачи, её имя, необходимые для просчёта текстовые файлы (в свойствах) и др. Этот объект создаётся спулером на тех компьютерах, где располагаются вычислительные компоненты, по протоколу DCOM. Никакого файлового обмена между веб-сервером, спулером и объектом Task нет, а, следовательно, нет и проблем с правами доступа к диску. Вместо этого происходит обычное чтение/запись свойств COM-объекта, либо вызов методов. Компонента готовит и создаёт в определённом каталоге файлы, необходимые для успешного просчёта задачи в MATLAB. При этом надо учитывать, что MATLAB имеет доступ к файлам только из каталога с задачей, то есть пользователь (умышленно или нет) не сможет нанести сколько-нибудь существенный вред системе в целом.

Очередь задач периодически проверяется на наличие задач сервисом, запущенным на вычислителе.

Именно этот сервис непосредственно взаимодействует с MATLAB, при этом он, как было указано выше, работает от имени пользователя, сильно ограниченного в правах.

При разрастании вычислительного сервера (подключении дополнительных вычислителей) возможно создание дополнительного набора компонент FDE.Agent, выполняющих различную техническую работу.

Во второй модели (вариант гетерогенной среды) создание компонент становится задачей если и решаемой, то очень сложной. Вместо этого используется протокол SOAP над транспортом EMAIL. При этом на UNIX-машине должен быть установлен интерпретатор Perl с библиотекой SOAP. Передача файлов, необходимых для запуска вычислительных модулей, осуществляется пакетами SOAP. Проблема безопасности, существовавшая в первой модели, при таком подходе не возникает.

Модули, размещённые и запускаемые на вычислителе, могут быть написаны на языках C, FORTRAN или на любых других языках, компиляторы которых будут установлены на UNIX-машине.

При этом, независимо от языка, на котором написан модуль, он должен быть приведён в соответствие с определёнными интерфейсными требованиями (это сводится к созданию описания модуля на языке XML его автором).

Ещё одной особенностью данной модели является требование обязательного наличия в системе по крайней мере одного почтового сервера и почтовых клиентов на каждой из машин (и на веб-сервере, и на вычислителях).

Управление очередью задач на конкретном вычислителе (при этом подразумеваются задачи, запущенные в рамках нашей системы) может решаться двумя способами: либо запуском специального демона на самом вычислителе, либо организацией сервиса-спулера на Windows-машине. Это может быть тот же компьютер, где работает веб-сервер, либо отдельный, расположенный в непосредственной близости к вычислителю (в одной локальной сети).

Передача функций управления очередью задач отдельному компьютеру, а также стандартизация интерфейсов вычислительных модулей позволяет также перейти к следующему шагу масштабирования системы – созданию вычислительной решётки.

В заключении сформулированы основные результаты, полученные в диссертационной работе.

ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] Ким А. В., Волканин Л. С., К синтезу управления для систем с последействием в управляющих параметрах // Известия Уральского государственного университета. 2003. №26. С. 81-86.

[2] Kim A. V., Volkanin L. S., Generalized Riccati equations in linear-quadratic control problems // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Suppl. 2. 2002. Pp. S98-S119

[3] Волканин Л. С., Моделирование систем с последействием // Вестник Уральского государственного технического университета - УПИ. Серия радиотехническая. 2005. №17 (69). С. 248-255

[4] Волканин Л.С. Сетевая интеграция и интерфейс пакета прикладных программ Time-Delay System Toolbox // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 33-й региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2002. С. 314-318

[5] Волканин Л. С. Стабилизация систем с запаздыванием в управлении: алгоритмы, программное обеспечение // Проблемы теоретической и прикладной математики. Труды 34-й региональной молодежной конференции. Екатеринбург: УрО РАН. 2003. С. 90-95

[6] Баклановский М. В., Волканин Л. С. Распределенные модели вычислительного сервера с веб-доступом // Всероссийская научная конференция "Научный сервис в сети Интернет". Тез. докл., Новороссийск, 23-28 сент. 2002 г. С. 99-100

[7] Ким А. В., Волканин Л. С. К аналитическому конструированию регуляторов для систем с запаздыванием в управляющих параметрах // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тез. докл. Всерос. конф., Екатеринбург, 2-6 февр. 2004 г. С. 170-171

[8] Volkanin L. S., Kim A.V., Time-Delay System Toolbox in Virtual Hereditary System Center // Proceedings of the 1st Korea-Russia International Workshop on Mobile and Telecommunication Technology, Ekaterinburg, Russia, June 28-29, 2005 Pp. 106-109