**Серия «Математика»**
2020. Т. 32. С. 33—48

Онлайн-доступ к журналу:
http://mathizv.isu.ru

ИЗВЕСТИЯ
*Иркутского государственного университета*

УДК 517.957, 517.958, 532.5.032
MSC 35N10, 76D05, 76D17, 76U05
DOI https://doi.org/10.26516/1997-7670.2020.32.33


# Класс точных решений для двумерных уравнений геофизической гидродинамики с двумя параметрами Кориолиса*


Н. В. Бурмашева[1,2], Е. Ю. Просвиряков[1,2]

[1] *Институт машиноведения УрО РАН, Екатеринбург, Российская Федерация,*

[2] *Уральский федеральный университет, Екатеринбург, Российская Федерация*



**Аннотация.** Предложен класс точных решений уравнений Навье – Стокса для вращающейся вязкой несжимаемой жидкости. Данный класс позволяет описывать установившиеся сдвиговые неоднородные (т. е. зависящие от нескольких координат выбранной декартовой системы) течения. Вращение характеризуется двумя параметрами Кориолиса, что во вращающейся системе координат приводит к тому, что даже для сдвиговых течений вертикальная скорость оказывается ненулевой. Учет второго параметра Кориолиса также уточняет широко известное гидростатическое условие для течений вращающейся жидкости, используемое при традиционном приближении ускорения Кориолиса. Класс точных решений позволяет обобщить классическое точное решение Экмана. Известно, что течение Экмана предполагает однородное распределение скоростей при пренебрежении вторым параметром Кориолиса, что не позволяет описывать экваториальные противотечения. В статье



* Исследование выполнено при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 19-19-00571).

этот пробел в теоретических исследованиях частично восполняется. Было показано, что редукция базовой системы уравнений, состоящей из уравнений Навье – Стокса и уравнения несжимаемости, для данного класса приводит к переопределенной системе дифференциальных уравнений. Получено условие разрешимости данной системы. Показано, что построенные нетривиальные точные решения в общем случае принадлежат классу квазиполиномов. Однако учет условия совместности, определяющего разрешимость рассматриваемой переопределенной системы, приводит к тому, что пространственные ускорения, характеризующие неоднородность распределение поля скоростей течения, оказываются постоянными величинами. Также приводятся точные решения для всех составляющих поля давления.

**Ключевые слова:** слоистые течения, сдвиговые течения, точные решения, параметр Кориолиса, переопределенная система, условия совместности.

## 1. Введение

Исследование течений вращающихся жидкостей является предметом изучения сравнительно молодой науки — геофизической гидродинамики [14; 19; 20; 35; 37]. Этот раздел механики жидкости как отдельная научная дисциплина окончательно сформировался в 70-е гг. XX столетия, когда в Пристонском университете Джозефом Смагоринским была организована одноименная лаборатория [19; 35–37]. Не будет преувеличением сказать, что центральное место в геофизической гидродинамике занимает точное решение Экмана, описывающее установившееся сдвиговое изобарическое течение вращающего океана бесконечной глубины [27].

При построении точного решения Экман использовал традиционное приближение ускорения Кориолиса: пренебрегал вторым параметром Кориолиса [27]. Фактически это означало пренебрежение вертикальной скоростью жидкости, поскольку она много меньше характерных значений горизонтальных скоростей [14; 20; 27]. Нахождение двух компонент скоростей осуществлялось из решения двух уравнений Навье – Стокса, дополненных уравнением несжимаемости [27]. Система уравнений, записанная во вращающейся системе координат, является переопределенной. Экманом было указано нетривиальное точное решение системы уравнений Навье – Стокса и уравнения несжимаемости, которое является суперпозицией точного решения Куэтта для каждой горизонтальной скорости [26; 27]. Это решение многократно сравнивалось с натурными наблюдениями [30; 31; 33] и экспериментальными данными [13; 17; 28; 38; 39], обобщалось для слоя конечной глубины при различных силах [2; 7–9; 12; 15; 16; 22; 23].

Использование классического течения Экмана не позволяет описывать экваториальные противотечения из-за пренебрежения вторым параметром Кориолиса. В статьях [10; 24; 25; 34] были предложены математические модели для описания экваториальных изотермических и конвективных противотечений при использовании нулевого первого параметра Кориолиса. В этом случае система уравнений также переопределенная и описывает движение жидкости в инерциальной системе координат. Течение жидкости в этом случае генерируется неоднородными скоростями и напряжениями, которые в океанологии называют параболический ветер [14; 18].

В статье [11] впервые предложены точные решения для описания неоднородного течения Экмана в случае учета первого параметра Кориолиса. В [11] проведено исследование переопределенной системы уравнений Навье – Стокса и уравнения несжимаемости для сдвиговых течений вращающейся жидкости в классе Линя – Сидорова – Аристова [1; 6; 21; 29].

В данной статье восполняется пробел в теоретических исследованиях течений типа Экмана с двумя параметрами Кориолиса с неоднородным распределением скоростей или касательных напряжений на одной или обеих границах бесконечного слоя жидкости конечной глубины.

## 2. Постановка задачи

Рассмотрим установившееся течение вязкой несжимаемой жидкости, вращающейся с однородной (постоянной) угловой скоростью $\mathbf{\Omega}$. Полагаем, что вращение жидкости описывается двумя параметрами Кориолиса [14; 18], т. е. вектор угловой скорости в выбранной системе координат имеет следующий вид:

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2}\left(0, f_2, f_1\right).$$

Величины $f_1 = 2\Omega \sin\phi, f_2 = 2\Omega\cos\phi$ — это соответственно первый и второй параметры Кориолиса. Они характеризуют положение (географическую широту $\phi$) вращающейся системы координат. При этом во многих работах вторым параметром Кориолиса принято пренебрегать в средних широтах, обосновывая этот выбор тем, что в океане вертикальные скорости много меньше горизонтальных. В данной работе второй параметр также может локально обращаться в нуль, но при этом вектор угловой скорости не является тождественно равной нулю величиной. Исследование такого рода течений осуществляется посредством интегрирования системы уравнений, состоящей из уравнения Навье – Стокса и уравнения несжимаемости [19; 20]:

$$(\mathbf{V}, \nabla)\,\mathbf{V} + 2\mathbf{\Omega} \times \mathbf{V} = -\nabla P + \nu \triangle \mathbf{V},$$

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0. \tag{2.1}$$

Здесь $\mathbf{V} = (V_x\,(x,y,z,t)\,, V_y\,(x,y,z,t)\,, V_z\,(x,y,z,t))$ — вектор скорости течения во вращающейся системе координат; $P\,(x,y,z,t)$ — нормированное на плотность редуцированное давление, полученное из истинного давления $p$ вычитанием центробежной составляющей

$$\frac{1}{2}\rho\left((\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\,,(\mathbf{\Omega}\times\mathbf{r})\right)$$

и учетом потенциальных массовых сил; $\mathbf{r} = (x,y,z)$ — радиус-вектор; $\nu$ — кинематическая вязкость жидкости; $\nabla = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z)^T$, $\triangle = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$ — операторы Гамильтона и Лапласа соответственно. При этом сила Кориолиса (сила инерции) $2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V}$ определяется символическим определителем:

$$2\mathbf{\Omega}\times\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & f_2 & f_1 \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix} = (f_2V_z - f_1V_y)\,\mathbf{i} + f_1V_x\mathbf{j} - f_2V_x\mathbf{k}.$$

В случае, когда установившееся движение вращающейся жидкости является сдвиговым ($V = (V_x(x,y,z), V_y(x,y,z), 0)$), система (2.1) в координатной форме записывается следующим образом:

$$V_x\frac{\partial V_x}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_x}{\partial y} - f_1V_y = -\frac{\partial P}{\partial x} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_x}{\partial z^2}\right),$$

$$V_x\frac{\partial V_y}{\partial x} + V_y\frac{\partial V_y}{\partial y} + f_1V_x = -\frac{\partial P}{\partial y} + \nu\left(\frac{\partial^2 V_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V_y}{\partial z^2}\right),$$

$$f_2V_x = \frac{\partial P}{\partial z}, \quad \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} = 0. \tag{2.2}$$

Учет второго параметра Кориолиса приводит к появлению силы инерции в третьем уравнении системы (2.2), что означает невыполнение гидростатического условия для течений вращающейся жидкости в сравнении с использованием традиционного приближения для угловой скорости. Система (2.2) является квадратично нелинейной (в виду наличия в левых частях уравнений Навье – Стокса конвективной производной) и переопределенной, поскольку число уравнений (четыре) в ней превосходит число неизвестных функций $(V_x, V_y, P)$.

Очевидно, что системе (2.2) удовлетворяет тривиальное решение $V_x = V_y = P = 0$. Для нахождения точного решения системы (2.2), отличного от нулевого, рассмотрим далее поле скоростей, линейным образом зависящее от продольных (горизонтальных) координат $x$ и $y$, и поле давление, являющееся квадратичной формой этих же координат [1; 4–6; 10; 21; 29] :

$$V_x = U\,(z) + u_1\,(z)\,x + u_2\,(z)\,y, \quad V_y = V\,(z) + v_1\,(z)\,x + v_2\,(z)\,y, \tag{2.3}$$

$$P = P_0(z) + P_1(z)\,x + P_2(z)\,y + P_{12}(z)\,xy + P_{11}(z)\,\frac{x^2}{2} + P_{22}(z)\,\frac{y^2}{2}. \quad (2.4)$$

Заметим, что коэффициенты линейных форм (2.3) и квадратичной формы (2.4) относительно горизонтальных координат $x, y$ зависят от вертикальной (поперечной) координаты $z$.

Подставим далее выражения (2.3)–(2.4) в систему уравнений (2.2) и приравняем коэффициенты при соответствующих степенях независимых переменных $x$ и $y$. В результате получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений для определения неизвестных функциональных коэффициент форм (2.3), (2.4):

$$P'_{12} = P'_{11} = P'_{22} = 0; \quad (2.5)$$

$$u_1u_2 + u_2v_2 - f_1v_2 = -P_{12} + \nu u''_2, \quad u_1v_1 + v_1v_2 + f_1u_1 = -P_{12} + \nu v''_1,$$
$$u_1^2 + u_2v_1 - f_1v_1 = -P_{11} + \nu u''_1, \quad u_2v_1 + v_2^2 + f_1u_2 = -P_{22} + \nu v''_2,$$
$$u_1 + v_2 = 0; \quad (2.6)$$

$$P'_1 = f_2u_1, \quad P'_2 = f_2u_2; \quad (2.7)$$

$$Uu_1 + Vu_2 - f_1V = -P_1 + \nu U'', \quad Uv_1 + Vv_2 + f_1U = -P_2 + \nu V''; \quad (2.8)$$

$$P'_0 = f_2U. \quad (2.9)$$

Дифференцирование в системе уравнений (2.5)–(2.9) ведется по переменной $z$. Заметим, что семейство точных решений (2.3), (2.4) ранее использовалось для описания течений жидкости в инерциальных системах координат [10; 11; 24; 25; 34] . Для вращающихся жидкостей с вектором угловой скорости, направленным в противоположную сторону по отношению к ускорению свободного падения, использовался частный случай поля скоростей (2.3) $V_x = U(z) - \Omega y$, $V_y = V(z) + \Omega x$, который соответствовал во вращающейся системе координат точному решению Экмана $V_x = U(z)$, $V_y = V(z)$. Таким образом, представления гидродинамических полей (2.3), (2.4) формируют новый класс точных решений для уравнений геофизической гидродинамики, пригодный для описания неоднородных течений.

В систему (2.5)–(2.9) входят двенадцать неизвестных (компоненты линейных форм (2.3) и квадратичной формы (2.4)), связанные тринадцатью уравнениями. Переход для класса (2.3)-(2.4) от системы уравнений в частных производных (2.2) к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений (2.5)–(2.9) сохраняет свойство переопределенности, наследуя при этом нелинейные свойства системы (2.2). В этом случае поиск нетривиального точного решения системы (2.2) эквивалентен анализу разрешимости системы (2.5)–(2.9).

Согласно системе (2.5), компоненты $P_{12}, P_{11}, P_{22}$ поля давления являются постоянными величинами и могут быть однозначным образом найдены из граничных условий. Заметим также, что неизвестные в системах (2.7), (2.8) и (2.9) могут быть найдены непосредственным интегрированием, если будет известно решение системы (2.6) для пространственных ускорений $u_1, u_2, v_1, v_2$. Таким образом, разрешимость системы уравнений (2.5)–(2.9) сводится к разрешимости изолированной системы (2.6).

## 3. Анализ разрешимости системы уравнений

После того, как коэффициенты $P_{12}, P_{11}, P_{22}$ при старших членах квадратичной формы будут определены из граничных условий, система (2.6) станет неоднородной нелинейной системой дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами относительно пространственных ускорений $u_1, u_2, v_1, v_2$.

Путем попарного сложения (и вычитания) первого уравнения системы (2.6) со вторым, а третьего уравнения этой системы -— с четвертым, систему (2.6) можно привести к эквивалентному виду:

$$v_1'' = u_2'', \quad \nu u_2'' = P_{12} + f_1 u_1, \quad 2\nu u_1'' = P_{11} - P_{22} - f_1 \left(u_2 + v_1\right), \tag{3.1}$$

$$P_{11} + P_{22} + 2u_1^2 + 2u_2 v_1 + f_1 \left(u_2 - v_1\right) = 0. \tag{3.2}$$

Решение уравнений системы (3.1) определяет общий вид пространственных ускорений $u_1, u_2, v_1$. При этом полученные решения должны быть согласованы между собой в силу уравнения (3.2).

Двукратное дифференцирование второго уравнения системы (3.1) с учетом третьего уравнения этой системы приводит к линейному дифференциальному уравнению:

$$\nu u_2^{(4)} = \frac{f_1}{2\nu} \left[P_{11} - P_{22} - f_1 \left(u_2 + v_1\right)\right]. \tag{3.3}$$

При этом линейная связь между компонентами $v_1, u_2$ поля скоростей (2.3) определяется из первого уравнения системы (3.1):

$$v_1 = u_2 + c_1 z + c_2. \tag{3.4}$$

Подстановка этого соотношения в уравнение (3.3) приводит к обыкновенному дифференциальному уравнению для определения пространственного ускорения $u_2$:

$$u_2^{(4)} + \frac{f_1^2}{\nu^2} u_2 = \frac{f_1}{2\nu^2} \left[P_{11} - P_{22} - f_1 \left(c_1 z + c_2\right)\right]. \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.5) как неоднородного уравнения четвертого порядка с постоянными коэффициентами, согласно [32] , определяется следующей суммой:

$$u_2 = c_3 \cosh\left(kz\right) \cos\left(kz\right) + c_4 \cosh\left(kz\right) \sin\left(kz\right) + c_5 \sinh\left(kz\right) \cos\left(kz\right) +$$

$$+c_6 \sinh(kz)\sin(kz) + az + b.$$

здесь $k^4 = f_1^2/\left(4\nu^2\right)$, $a = -c_1/2, b = \left(P_{11} - P_{22} - f_1 c_2\right)/\left(2f_1\right)$. Учитывая соотношение (3.4), получим точное решение для пространственного ускорения $v_1$:

$$v_1 = c_3 \cosh(kz)\cos(kz) + c_4 \cosh(kz)\sin(kz) + c_5 \sinh(kz)\cos(kz) +$$

$$+c_6 \sinh(kz)\sin(kz) + (a + c_1)\, z + (b + c_2)\,.$$

Из второго уравнения системы (3.1) находим вид решения для пространственного ускорения $u_1$:

$$u_1 = \frac{\nu u_2'' - P_{12}}{f_1}.$$

Далее подставим найденные решения уравнений системы (3.1) в алгебраическое условие совместности (3.2). Согласно методу неопределенных коэффициентов [3], условие (3.1) сводится к тождеству:

$$c_2^2 f_1^2 + 2c_2 f_1^3 - P_{11}^2 - 4P_{12}^2 - 2f_1^2\left(P_{11} - P_{22}\right) + 2P_{11}P_{22} + P_{22}^2 = 0. \quad (3.6)$$

При этом $c_1 = c_3 = c_4 = c_5 = c_6 = 0$.

Подстановка нулевых значений коэффициентов $c_1, c_3, c_4, c_5, c_6$ в точные решения для компонент $u_1, u_2, v_1, v_2$ приводит к окончательному виду (общему решению):

$$u_1 = -\frac{P_{12}}{f_1}, \quad u_2 = b = \frac{P_{11} - P_{22} - f_1 c_2}{2f_1},$$

$$v_1 = b + c_2 = \frac{P_{11} - P_{22} + f_1 c_2}{2f_1}, \quad v_2 = \frac{P_{12}}{f_1}. \quad (3.7)$$

Заметим, что все пространственные ускорения оказались в силу условия (3.2) постоянными функциями, часть из которых зависит от значения параметра $c_2$, определяемого соотношением (3.6).

## 4. Интегрирование переопределенной системы (2.5)–(2.9)

Итак, анализ условий разрешимости переопределенной системы (2.6) позволил определить ее точное решение. Опираясь на полученное решение (3.7), проинтегрируем оставшиеся уравнения систем (2.7)–(2.9).

Уравнения системы (2.7) являются линейными неоднородными обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами. Их решение находится непосредственным интегрированием по переменной $z$:

$$P_1 = f_2 u_1 z + p_1, \quad P_2 = f_2 u_2 z + p_2. \quad (4.1)$$

Перейдем далее к системе уравнений (2.8) для определения однородных компонент $U, V$ поля скорости (2.3) и преобразуем ее следующим образом:

$$\nu U'' - u_1 U - (u_2 - f_1)\, V = P_1, \quad \nu V'' + u_1 V - (v_1 + f_1)\, U = P_2. \tag{4.2}$$

Вид решения системы (4.2) зависит от значений коэффициентов $u_1$, $u_2$, $v_1$.

1) Пусть $v_1 + f_1 = 0$, тогда второе уравнение системы (4.2) запишется следующим образом:

$$\nu V'' + u_1 V = P_2. \tag{4.3}$$

Таким образом, второе уравнение системы (4.2) становится изолированным. После того, как будет найдено его решение (решение уравнения (4.3)), непосредственным интегрированием первого уравнения системы (4.2) определяется выражение для компоненты $U$ поля скорости (2.3). Решение неоднородного уравнения (4.3) зависит от величины коэффициента $u_1$:

1.1) Если $u_1 = 0$, то

$$V = \frac{f_2 u_2}{6\nu} z^3 + \frac{p_2}{2\nu} z^2 + C_2 z + C_1.$$

1.2) Если $u_1 > 0$, то

$$V = \frac{f_2 u_2 z + p_2}{u_1} + C_1 \sin\left(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\right) + C_2 \cos\left(z\sqrt{\frac{u_1}{\nu}}\right).$$

1.3) Если $u_1 < 0$, то

$$V = \frac{f_2 u_2 z + p_2}{u_1} + C_1 \sinh\left(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\right) + C_2 \cosh\left(z\sqrt{\frac{|u_1|}{\nu}}\right),$$

2) Пусть теперь $v_1 + f_1 \neq 0$, тогда из второго уравнения системы (4.2) выразим скорость $U$:

$$U = \frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f_1} \tag{4.4}$$

и подставим в первое уравнение. Получим:

$$\nu \left(\frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f_1}\right)'' - u_1 \left(\frac{\nu V'' + u_1 V - P_2}{v_1 + f_1}\right) - (u_2 - f_1)\, V = P_1.$$

Элементарными преобразованиями это уравнение приводится к равносильному виду:

$$V^{(4)} - \frac{u_1^2 + (u_2 - f_1)\,(v_1 + f_1)}{\nu^2} V = \frac{P_1\,(v_1 + f_1) - u_1 P_2}{\nu^2}. \tag{4.5}$$

После нахождения решения этого уравнения, пользуясь подстановкой (4.4), определяем скорость $U$. Решение уравнения (4.5) зависит [32] от значения коэффициента

$$S = -\frac{u_1^2 + (u_2 - f_1)(v_1 + f_1)}{\nu^2}.$$

2.1) Если $S = 0$, то

$$V = \frac{f_2 u_1 (v_1 + f_1 - u_2)}{120\nu^2} z^5 + \frac{p_1 (v_1 + f_1) - u_1 p_2}{24\nu^2} z^4 + C_4 z^3 + C_3 z^2 + C_2 z + C_1.$$

2.2) Если $S > 0$, то

$$V = C_1 \cosh(kz) \cos(kz) + C_2 \cosh(kz) \sin(kz) +$$

$$+ C_3 \sinh(kz) \cos(kz) + C_4 \sinh(kz) \sin(kz) + \frac{P_1 (v_1 + f_1) - u_1 P_2}{S\nu^2},$$

здесь $k^4 = S/4$.
2.3) Если $S < 0$, то

$$V = C_1 \cos(kz) + C_2 \sin(kz) + C_3 \cosh(kz) +$$

$$+ C_4 \sinh(kz) + \frac{P_1 (v_1 + f_1) - u_1 P_2}{S\nu^2}.$$

Таким образом, вне зависимости от значений управляющих параметров (случаи 1.1)–2.3)) получено точное решение для однородных скоростей $U$ и $V$. Далее, интегрируя уравнение (2.9), находим однородную составляющую поля давления (2.4) — фоновое давление $P_0$. Следовательно, будет построено точное (аналитическое) решение переопределенной системы (2.5)–(2.9) для любого сочетания значений задаваемых параметров.

Полученные выражения для неизвестных функций, входящих в точное решение (2.3), (2.4), описывают слоистые и сдвиговые течения с учетом двух параметров Кориолиса для вращающейся жидкости. Условие разрешимости (3.6) переопределенной системы уравнений (2.5)–(2.9), равносильной системе (2.2) в рамках класса точных решений (2.3), (2.4), задает область применимости точного решения для задач геофизической гидродинамики. Данное решение позволит теоретически исследовать экваториальные градиентные противотечения вращающейся жидкости при однородном и параболическом распределении касательных напряжений и скоростей на границе атмосферы и океана. Точные решения (2.3), (2.4) также будут служить тестовым примером для апробации и верификации численных расчетов. Отметим, что полученные формулы показывают ветвление решения в зависимости от величин неоднородности ветра (пространственных ускорений) и квадратичных слагаемых давления, определяющих вид квадрик изолиний этого поля. При изменении этих параметров и пренебрежении временем выхода на установившийся режим можно говорить о теоретическом описании скачкообразного изменения профиля скоростей в исследуемом слое жидкости.

## 5. Заключение

В статье исследована переопределенная система уравнений Навье – Стокса и уравнения несжимаемости, описывающая сдвиговое течение вращающейся жидкости. Сила инерции в уравнениях Навье – Стокса описывается при помощи двух параметров Кориолиса. Приведен класс точных решений, описывающий неоднородные течения. В рамках этого класса точных решений исследована разрешимость уравнений движения и построено точное решение, описывающее поле скоростей и поле давления, вид которого зависит от величин коэффициентов, формирующих неоднородность поля скорости.

## Список литературы

1. Аристов С. Н. Вихревые течения в тонких слоях жидкости : дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Владивосток: ИАПУ, 1990. 303 с.
2. Аристов С. Н., Мясников В. П. Нестационарные трехмерные структуры в приповерхностном слое океана // Доклады Российской академии наук. 1996. Т. 349, № 4. С. 457–467.
3. Аристов С. Н., Князев Д. В., Полянин А. Д. Точные решения уравнений Навье – Стокса с линейной зависимостью компонент скорости от двух пространственный переменных// Теоретические основы химической технологии. 2009. Т. 43, № 5. С. 547–566.
4. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Неоднородные течения Куэтта // Нелинейная динамика. 2014. Т. 10, № 2. С. 177–182 https://doi.org/10.20537/nd1402004
5. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Крупномасштабные течения завихренной вязкой несжимаемой жидкости // Известия высших учебных заведений. Авиационная техника. 2015. Вып. 4. С. 50–54.
6. Аристов С. Н., Просвиряков Е. Ю. Новый класс точных решений трехмерных уравнений термодиффузии // Теоретические основы химической технологии. 2016. Т. 50, № 3. С. 294–301. https://doi.org/10.7868/S0040357116030027
7. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Динамика крупномасштабных течений в тонких слоях жидкости: Препринт № 146. Свердловск : ИМСС, Уральский научный центр АН СССР, 1987. 48 с.
8. Аристов С. Н., Фрик П. Г. Нелинейные эффекты влияния Экмановского слоя на динамику крупномасштабных вихрей в "мелкой воде"// Прикладная механика и техническая физика. 1991. Т. 32, № 2(186). С. 49–54.
9. Аристов С. Н., Шварц К. Г. Вихревые течения адвективной природы во вращающемся слое жидкости. Пермь : Пермский государственный университет, 2006. 153 с

10. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Термокапиллярная конвекция вертикально завихренной жидкости // Теоретические основы химической технологии. 2020. Т. 54, № 1. С. 114–124. https://doi.org/10.31857/S0040357119060034
11. Бурмашева Н. В., Просвиряков Е. Ю. Точное решение уравнений Навье–Стокса, описывающее пространственно неоднородные течения вращающейся жидкости // Труды Института математики и механики УрО РАН. 2020. Т. 26, № 2. С. 79–87.
12. Горшков А. В., Просвиряков Е. Ю. Конвективное слоистое течение Экмана вязкой несжимаемой жидкости // Известия РАН. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54, № 2. С. 213–220. https://doi.org/10.7868/S0003351518020101
13. Гущин В. А., Рождественская Т. И. Численное исследование явлений, возникающих вблизи кругового цилиндра в течениях стратифицированных жидкостей с небольшими периодами плавучести // Прикладная механика и техническая физика. 2011. Т. 52, № 6. С. 69–76.
14. Зырянов В. Н. Теория установившихся океанских течений. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1985. 248 с.
15. Калашник М. В., Чхетиани О. Г. Оптимальные возмущения с нулевой потенциальной завихренностью в модели Иди // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54. № 5. С. 487–496. https://doi.org/10.1134/S000235151805005X
16. Калашник М. В., Чхетиани О. Г., Чагелишвили Г. Д. Новый класс краевых бароклинных волн и механизм их генерации // Известия российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54, № 4. С. 361–370 https://doi.org/10.1134/S0002351518040089
17. Методика и результаты измерений турбулентной спиральности в стратифицированном приземном слое / Б. М. Копров, В. М. Копров, О. А. Соленая, О. Г. Чхетиани, Е. А. Шишов // Известия российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2018. Т. 54, № 5. С. 525–537. https//doi.org/10.1134/S0002351518050061
18. Коротаев Г. К., Михайлова Э. Н., Шапиро Н. Б. Теория экваториальных противотечений в Мировом океане. Киев : Наук. думка, 1986. 208 с.
19. Монин А. С. Теоретические основы геофизической гидродинамики. Ленинград : Гидрометеоиздат, 1988. 424 с.
20. Педлоски Дж. Геофизическая гидродинамика : в 2 т. М. : Мир, 1984. 398 с.
21. Сидоров А. Ф. О двух классах решений уравнений механики жидкости и газа и их связи с теорией бегущих волн// Прикладная механика и техническая физика. 1989. Т. 2. С. 34-40.
22. Чхетиани О. Г., Вазаева Н. В. Об алгебраических возмущениях в атмосферном пограничном слое // Известия Российской академии наук. Физика атмосферы и океана. 2019. Т. 55. № 5. С. 62-75. https://doi.org/10.31857/S0002-351555562-75
23. Aristov S. N., Nycander J. Convective ow in baroclinic vortices // Journal Physical Oceanography. 1994. Vol. 24, N 9. P. 18411849.
24. Burmasheva N. V., Larina E. A., Prosviryakov E. Yu. Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer // AIP Conference Proceedings. 2019. Vol. 2176. P. 030023. https://doi.org/10.1063/1.5135147
25. Burmasheva N. V., Prosviryakov E. Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation // Вестник Самарского государственного технического университета. Серия: Физико-математические науки. 2019. Т. 23, № 2. P. 341–360. https://doi.org/10.14498/vsgtu1670

26. Couette M. Etudes sur le frottement des liquides // Annales de chimie et de physique. 1890. Vol. 21. P. 433-510.
27. Ekman V. W. On the influence of the Earth's rotation on ocean currents // Arkiv főr matematik, astronomi och fysik. 1905. Vol. 2, N. 11. P. 1–52.
28. Hoff M., Harlander U. Stewartson–layer instability in a wide-gap spherical Couette experiment: Rossby number dependence // Journal of Fluid Mechanics. 2019. Vol. 878. P. 522–543. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.636
29. Lin C. C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics // Archive for Rational Mechanics and Analysis. 1958. Vol. 1. P. 391–395.
30. Meirelles S., Vinzon S. B. Field observation of wave damping by fluid mud // Marine Geology. 2016. Vol. 376. https//doi.org/10.1016/j.margeo.2016.03.006
31. Patel P. D., Christman P. G., Gardner J. W. Investigation of unexpectedly low field–observed fluid mobilities during some CO2 tertiary floods // SPE Reservoir Engineering. 1987. Vol. 2, N 4. P. 507–513. https://doi.org/10.2118/14308-PA
32. Polyanin A. D., Zaitsev V. F. Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. 2nd ed. Boca Raton : Chapman& Hall/CRC, 2003. 803 p.
33. Precigout J., Prigent C., Palasse L., Pochon A. Water pumping in mantle shear zones // Nature Communications. 2017. Vol. 8. https//doi.org/10.1038/ncomms15736.
34. Privalova V. V., Prosviryakov E. Yu., Simonov M. A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer // Russian Journal of Nonlinear Dynamics. 2019. Vol. 15, N 3. P. 271–283. https://doi.org/10.20537/nd190306
35. Smagorinsky J. History and progress // The Global Weather Experiment–Perspective on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP), National Academy of Science, 1978. P. 4-12.
36. Smagorinsky J. The beginnings of numerical weather prediction and general circulation modeling: Early recollections // Advances in Geophysics. 1983. Vol. 25. P. 3–37.
37. Smagorinsky J., Phillips N. A. Scientific problems of the global weather experiment // The Global Weather Experiment, Perspectives on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP), National Academy of Science, 1978. P. 13–21.
38. Stefani F., Gerbeth G., Gundrum Th., Szklarski J., Rudiger G., Hollerbach R. Liquid metal experiments on the magnetorotational instability // Magnetohydrodynamics. 2009. Vol. 45, N 2. P. 135–144.
39. Woumeni R. S., Vauclin M. A field study of the coupled effects of aquifer stratification, fluid density, and groundwater fluctuations on dispersivity assessments // Advances in Water Resources. 2006. Vol. 29, N 7. P. 1037–1055. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2005.09.002

**Наталья Владимировна Бурмашева**, кандидат технических наук, научный сотрудник, сектор нелинейной вихревой гидродинамики, Институт машиноведения УрО РАН, Российская Федерация, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34; доцент, Институт естественных наук и математики, Уральский федеральный университет, Российская Федерация, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19,
e-mail: nat_burm@mail.ru,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-4711-1894.

**Евгений Юрьевич Просвиряков**, доктор физико-математических наук, заведующий сектором, сектор нелинейной вихревой гидродинамики, Институт машиноведения УрО РАН, Российская Федерация, 620049, г. Екатеринбург, ул. Комсомольская, 34; профессор, Институт фундаментального образования, Уральский федеральный университет, Российская Федерация, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, e-mail: `evgen_pros@mail.ru`,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-2349-7801.

*Поступила в редакцию 10.04.2020*

---

## A Class of Exact Solutions for Two–Dimensional Equations of Geophysical Hydrodynamics with Two Coriolis Parameters

N. V. Burmasheva[1,2], E. Yu. Prosviryakov[1,2]

[1] *Institute of Engineering Science UB RAS, Ekaterinburg, Russian Federation*
[2] *Ural Federal University, Ekaterinburg, Russian Federation*

**Abstract**. The article proposes a class of exact solutions of the Navier–Stokes equations for a rotating viscous incompressible fluid. This class allows us to describe steady shear inhomogeneous (i.e., depending on several coordinates of the selected Cartesian system) flows. Rotation is characterized by two Coriolis parameters, which in a rotating coordinate system leads to the fact that even for shear flows the vertical velocity is nonzero. The inclusion of the second Coriolis parameter also clarifies the well-known hydrostatic condition for rotating fluid flows, used in the traditional approximation of Coriolis acceleration. The class of exact solutions allows us to generalize Ekman's classical exact solution. It is known that the Ekman flow assumes a uniform velocity distribution and neglect of the second Coriolis parameter, which does not allow us to describe the equatorial counterflows. In this paper, this gap in theoretical research is partially filled. It was shown that the reduction of the basic system of equations, consisting of the Navier-Stokes equations and the incompressibility equation, for this class leads to an overdetermined system of differential equations. The solvability condition for this system is obtained. It is shown that the constructed nontrivial exact solutions in the general case belong to the class of quasipolynomials. However, taking into account the compatibility condition, which determines the solvability of the considered overdetermined system, leads to the fact that the spatial accelerations characterizing the inhomogeneity of the distribution of the flow velocity field turn out to be constant. The article also provides exact solutions for all components of the pressure field.

**Keywords:** layered flows, shear flows, exact solutions, Coriolis parameter, overdetermined system, compatibility conditions.

## References

1. Aristov S.N. Eddy currents in thin liquid layers. Optimization of boundary and distributed controls in semilinear hyperbolic systems. Dr. Sci. [Phys.-Math.] Diss. Vladivostok, 1990, 303 p. (in Russian).

2. Aristov S.N., Myasnikov V.P. Time-dependent three-dimensional structures in the near–surface layer of the ocean. *Physics. Doklady*, 1996, vol. 41, no. 8, pp. 358-360.
3. Aristov S.N., Knyazev D.V., Polyanin A.D. Exact solutions of the Navier-Stokes Equations with the linear dependence of velocity components on two space variables. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2009, vol. 43, no. 5, pp. 642-662. https://doi.org/10.1134/S0040579509050066
4. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y., Inhomogeneous Couette flow. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2014, vol. 10, no. 2, pp. 177-182. https://doi.org/10.20537/nd1402004 (in Russian)
5. Aristov S.N., Prosviryakov E.Y. Large–scale flows of viscous incompressible vortical fluid. *Russian Aeronautics*, 2015, vol. 58, no. 4, pp. 413-418. https://doi.org/10.3103/S1068799815040091
6. Aristov S.N., Prosviryakov E.Yu. A new class of exact solutions for three–dimensional thermal diffusion equations. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2016, vol. 50, no. 3, pp. 286-293. https://doi.org/10.1134/S0040579516030027
7. Aristov S.N., Frik P.G. *Dynamics of large–scale flows in thin liquid layers. Preprint No. 146*, Sverdlovsk, Institute of Continuous Media Mechanics, Academy of Sciences USSR, 1987, 48 p. (in Russian)
8. Aristov S.N., Frik P.G. Nonlinear effects of the Ekman layer on the dynamics of large–scale eddies in shallow water. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1991, vol. 32, no. 2, pp. 189-194.
9. Aristov S.N., Shvartc K.G. *Vortex flows of an advective nature in a rotating fluid layer*. Perm, Perm State University, 2006. 153 p.
10. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Thermocapillary convection of a vertical swirling liquid. *Theoretical Foundations of Chemical Engineering*, 2020, vol. 54, no. 1, pp. 230-239. https://doi.org/10.1134/S0040579519060034
11. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Exact solution of Navier—Stokes equations describing spatially inhomogeneous flows of a rotating fluid. *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki UrO RAN*, 2020, vol. 26, no. 2. pp. 79–87 (in Russian).
12. Gorshkov A.V., Prosviryakov E.Y. Ekman convective layer flow of a viscous incompressible fluid. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, no 2, pp. 189-195. https://doi.org/10.1134/S0001433818020081
13. Gushchin V.A., Rozhdestvenskaya T.I. Numerical study of the effects occurring near a circular cylinder in stratified fluid flows with short buoyancy periods. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 2011, vol. 52, no. 6, pp. 905-911. https://doi.org/10.1134/S0021894411060083
14. Ziryanov V.N. Theory of steady ocean currents, Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1985, 248 p. (in Russian)
15. Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G. Optimal perturbations with zero potential vorticity in the Eady model. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 415-422. https://doi.org/10.1134/S0001433818050055
16. Kalashnik M.V., Chkhetiani O.G., Chagelishvili G.D. A new class of edge baroclinic waves and the mechanism of their generation. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, no. 4, pp. 305-312. https://doi.org/10.1134/S0001433818040230
17. Koprov B.M., Koprov V.M., Solenaya O.A., Chkhetiani O.G., Shishov E.A. Technique and results of measurements of turbulent helicity in a stratified surface layer. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2018, vol. 54, no. 5, pp. 446-455. https://doi.org/10.1134/S0001433818050067

18. Korotaev G.K., Mikhaylova E.N., Shapiro N.B. *The theory of equatorial countercurrents in the oceans.* Kiev, Naukova Dumka Publ., 1986, 208 p. (in Russian)
19. Monin A.S. *Theoretical foundations of geophysical hydrodynamics.* Leningrad, Gidrometeoizdat Publ., 1988, 424 p. (in Russian)
20. Pedlosky J. *Geophysical fluid dynamics.* Berlin, New York, Springer-Verlag, 1987, 710 p.
21. Sidorov A.F. Two classes of solutions of the fluid and gas mechanics equations and their connection to traveling wave theory. *Journal of Applied Mechanics and Technical Physics*, 1989, vol. 30, no. 2, pp. 197-203. https://doi.org/10.1007/BF00852164
22. Chkhetiani O.G., Vazaeva N.V. On algebraic perturbations in the atmospheric boundary layer. *Izvestiya. Atmospheric and Oceanic Physics*, 2019, vol. 55, no. 5, pp. 432-445. https://doi.org/10.1134/S0001433819050050
23. Aristov S.N., Nycander J. Convective flow in baroclinic vortices. *Journal Physical Oceanography*, 1994, vol. 24, no. 9, pp. 18411849.
24. Burmasheva N.V., Larina E.A., Prosviryakov E.Yu. Unidirectional convective flows of a viscous incompressible fluid with slippage in a closed layer. *AIP Conference Proceedings*, 2019, vol. 2176, p. 030023. https://doi.org/10.1063/1.5135147
25. Burmasheva N.V., Prosviryakov E.Yu. Convective layered flows of a vertically whirling viscous incompressible fluid. Velocity field investigation. *Journal of Samara State Technical University, Ser. Physical and Mathematical Sciences*, 2019, vol. 23, no. 2, pp. 341-360. https://doi.org/10.14498/vsgtu1670
26. Couette M. Etudes sur le frottement des liquides. *Annales de chimie et de physique*, 1890, vol. 21, pp. 433-510.
27. Ekman V.W. On the Influence of the Earth's rotation on ocean currents. *Arkiv för matematik, astronomi och fysik*, 1905, vol. 2, no. 11, pp. 1–52.
28. Hoff M., Harlander U. Stewartson–layer instability in a wide–gap spherical Couette experiment: Rossby number dependence. *Journal of Fluid Mechanics*, 2019, vol. 878, pp. 522-543. https://doi.org/10.1017/jfm.2019.636
29. Lin C.C. Note on a class of exact solutions in magneto-hydrodynamics. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 1958, vol. 1, pp. 391–395.
30. Meirelles S., Vinzon S. B. Field observation of wave damping by fluid mud. *Marine Geology*, 2016, vol. 376. https//doi.org/10.1016/j.margeo.2016.03.006
31. Patel P.D., Christman P.G., Gardner J.W. Investigation of unexpectedly low field–observed fluid mobilities during some CO2 tertiary floods. *SPE Reservoir Engineering*, 1987, vol. 2, no. 4, pp. 507-513. https://doi.org/10.2118/14308-PA
32. Polyanin A.D., Zaitsev V.F. *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations. 2nd ed.* Boca Raton, Chapman& Hall/CRC, 2003, 803 p.
33. Precigout J., Prigent C., Palasse L., Pochon A. Water pumping in mantle shear zones. *Nature Communications*, 2017, vol. 8. https//doi.org/10.1038/ncomms15736.
34. Privalova V.V., Prosviryakov E.Yu., Simonov M.A. Nonlinear gradient flow of a vertical vortex fluid in a thin layer. *Russian Journal of Nonlinear Dynamics*, 2019, vol. 15, no. 3, pp. 271-283. https://doi.org/10.20537/nd190306
35. Smagorinsky J. History and progress. *The Global Weather Experiment–Perspective on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP), National Academy of Science*, 1978, pp. 4-12.
36. Smagorinsky J. The beginnings of numerical weather prediction and general circulation modeling: Early recollections. *Advances in Geophysics*, 1983, vol. 25, pp. 3-37.

37. Smagorinsky J., Phillips N. A. Scientific problems of the global weather experiment. *The Global Weather Experiment, Perspectives on Its Implementation and Exploitation: A Report of the FGGE Advisory Panel to the U.S. Committee for the Global Atmospheric Research Program (GARP), National Academy of Science*, 1978, pp. 13-21.
38. Stefani F., Gerbeth G., Gundrum Th., Szklarski J., Rudiger G., Hollerbach R. Liquid metal experiments on the magnetorotational instability. *Magnetohydrodynamics*, 2009, vol. 45, no. 2, pp. 135-144.
39. Woumeni R.S., Vauclin M. A field study of the coupled effects of aquifer stratification, fluid density, and groundwater fluctuations on dispersivity assessments. *Advances in Water Resources*, 2006, vol. 29, no. 7, pp. 1037-1055. https://doi.org/10.1016/j.advwatres.2005.09.002

**Natalya Burmasheva**, Candidate of Sciences (Engineering Sciences), Research Fellow, Institute of Engineering Science UB RAS, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation; Associate Professor, Ural Federal University, 19, Mir st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation, e-mail: nat_burm@mail.ru, ORCID iD https://orcid.org/0000-0003-4711-1894.

**Evgeniy Prosviryakov**, Doctor of Sciences (Physics and Mathematics), Head of Sector, Institute of Engineering Science UB RAS, 34, Komsomolskaya st., Ekaterinburg, 620049, Russian Federation; Professor, Ural Federal University, 19, Mir st., Ekaterinburg, 620002, Russian Federation,
e-mail: evgen_pros@mail.ru,
ORCID iD https://orcid.org/0000-0002-2349-7801.

*Received 10.04.2020*