

Для цитирования: Суворов Н. В., Ахунов Р. Р., Губарев Р. В., Дзюба Е. И., Файзуллин Ф. С. Применение производственной функции Кобба — Дугласа для анализа промышленного комплекса региона // Экономика региона. — 2020. — Т. 16, вып. 1. — С. 187-200

<https://doi.org/10.17059/2020-1-14>

УДК 332.14; 338.45

**Н. В. Суворов<sup>а)</sup>, Р. Р. Ахунов<sup>б)</sup>, Р. В. Губарев<sup>в)</sup>, Е. И. Дзюба<sup>г)</sup>, Ф. С. Файзуллин<sup>д)</sup>**

<sup>а)</sup> Институт народнохозяйственного прогнозирования РАН (Москва, Российская Федерация)

<sup>б)</sup> Уфимский федеральный исследовательский центр РАН (Уфа, Российская Федерация)

<sup>в)</sup> Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова (Москва, Российская Федерация)

<sup>г)</sup> Отделение Общероссийского народного фронта в Республике Башкортостан (Уфа, Российская Федерация; e-mail: intellectRus@yandex.ru)

<sup>д)</sup> Институт социально-экономических исследований УФИЦ РАН (Уфа, Российская Федерация; e-mail: fayzullin.f@gmail.com)

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННОЙ ФУНКЦИИ КОББА — ДУГЛАСА ДЛЯ АНАЛИЗА ПРОМЫШЛЕННОГО КОМПЛЕКСА РЕГИОНА<sup>1</sup>

*Ключевую роль в экономической безопасности России играет промышленный комплекс. В условиях существенных межрегиональных разрывов по уровню социально-экономического развития актуализировался вопрос оптимизации размещения производительных сил в субъектах РФ за счет повышения эффективности инвестиционно-промышленной политики на мезоуровне. На наш взгляд, обеспечить эффективность такой политики невозможно без современных методов экономико-математического моделирования и информационных технологий. До сих пор адекватным методом, позволяющим достаточно точно оценивать производственные возможности промышленного комплекса страны или ее региона, остается производственная функция Кобба — Дугласа. В настоящее время активно идут процессы развития такого метода в двух направлениях: осуществляется модификация функции путем насыщения различными факторами и совершенствования подходов определения ее динамических (изменяющихся во времени) параметров. В рамках исследования авторы отвечают на вопрос о возможности построения адекватной производственной функции Кобба — Дугласа со статичными параметрами и возможности построения адекватной производственной функции Кобба — Дугласа с динамическими параметрами на примере промышленного комплекса Республики Башкортостан за 2006–2016 гг. Эмпирическим путем первая гипотеза была опровергнута, а вторая — подтверждена. Применяя альтернативный метод линейной регрессии (АМЛР), были определены динамические параметры производственной функции Кобба — Дугласа, достаточно точно оценивающей производственные возможности промышленности Республики Башкортостан. Выбор метода неслучаен. Во-первых, его применение позволяет обеспечить в любом случае правильный экономический знак параметров при факторных показателях (труд и капитал). Во-вторых, проведение расчетов оригинальным способом, оперируя темпами роста показателей, обеспечивает высокую точность верификации параметров модели. Так, проведенные расчеты показали, что динамика регулярной компоненты объясняет 57,4 % дисперсии исходного временного ряда (функции остатка после определения параметров модели с помощью АМЛР). В сочетании с другими эконометрическими методами применение разработанной модели позволит также формировать достаточно точный прогноз производственных возможностей промышленного комплекса любого региона страны. Результаты исследования можно применить при разработке инвестиционно-промышленной политики Республики Башкортостан.*

**Ключевые слова:** регион России, промышленный комплекс, оценка производственных возможностей, производственная функция Кобба — Дугласа, труд и капитал, темпы роста, статичные и динамические параметры, альтернативный метод линейной регрессии, временной ряд, регулярная и случайная компоненты

<sup>1</sup> © Суворов Н. В., Ахунов Р. Р., Губарев Р. В., Дзюба Е. И., Файзуллин Ф. С. Текст. 2020.

### Введение

Видные российские ученые обеспечение экономической безопасности страны напрямую связывают с проведением новой индустриализации России. При этом в настоящее время единая общепринятая трактовка понятия «новая индустриализация» отсутствует. Позиция научного коллектива по данному вопросу наиболее близка к точке зрения академика РАН А.И. Татаркина, трактующего новую индустриализацию как «синхронный процесс создания новых высокотехнологичных секторов экономики и эффективного инновационного обновления традиционных секторов при общественно согласованных качественных изменениях технико-экономической и социально-институциональной сфер посредством интерактивных технологических, социальных, политических и управленческих изменений» [1]. На наш взгляд, указанный автор, в отличие от ряда других исследователей, справедливо акцентировал внимание на судьбе традиционных индустриальных отраслей, составляющих основу экономики большинства старопромышленных регионов страны, предлагая их встраивание путем модернизации и технико-технологического обновления в неоиндустриальную систему России.

Несмотря на дискуссионность вопроса трактовки понятия «новая индустриализация», руководство и научно-экспертное сообщество страны высказывают консолидированную позицию по вопросу необходимости актуализации положений структурно-инвестиционной политики (прежде всего, затрагивающей вопросы развития промышленного комплекса) России для повышения ее эффективности, а в конечном итоге успешности проведения новой индустриализации.

В связи с существенными межрегиональными разрывами и, прежде всего, высокой степенью дифференциации финансовых возможностей субъектов РФ актуализировался вопрос повышения эффективности инвестиционно-промышленной политики практически каждого региона страны. В настоящее время это невозможно без применения современных методов экономико-математического моделирования («основная ценность таких моделей заключается в их относительной простоте и наглядности при описании сложных закономерностей производства» [2]) и современных информационных технологий, что и предопределило цель (закрывающуюся в разработке адекватной модели, оценивающей производственные возможности промышленного ком-

плекса региона страны) и логическую структуру исследования. Так, сначала проводится обзор экономико-математических моделей, применяемых для оценки производственных возможностей промышленности субъекта РФ. Затем на примере промышленного комплекса Республики Башкортостан предпринимается попытка построения адекватной производственной функции Кобба — Дугласа со статическими и динамическими параметрами.

### Обзор экономико-математических моделей, оценивающих производственные возможности промышленности региона

В настоящее время производственные возможности промышленного комплекса на макро- и мезоуровне характеризуются рядом близких, но не тождественных терминов, таких как производственный, промышленный, производственно-промышленный и индустриальный потенциал страны или ее региона. Анализируя труды известных (имеющих академические звания) ученых СССР и России (Л.И. Абалкина [3], А.И. Анчишкина [4], А.Р. Бахтизина [5], Г.Б. Клейнера [6], В.Л. Макарова [5], А.И. Татаркина [1] и др.), необходимо отметить, что различают два подхода к сущностной трактовке дефиниции «индустриальный (производственный) потенциал»: ресурсный (совокупность различных видов производственных ресурсов) и результативный (выпуск определенного объема материальных благ). Учитывая оба подхода, то есть применяя смешанный (гибридный) подход, под индустриальным (производственным) потенциалом региона страны нами понимается «производство определенного объема материальных благ, и прежде всего, конкурентоспособной как традиционной, так и инновационной продукции на территории субъекта РФ в результате использования набора взаимосвязанных ограниченных ресурсов» [7].

Наиболее адекватным инструментом, имитирующим поведение сложных социально-экономических систем, являются агент-ориентированные модели (АОМ). «Основная идея, лежащая в основе моделей этого класса, заключается в построении вычислительного инструмента, представляющего собой совокупность агентов с определенным набором свойств и позволяющего проводить симуляции реальных явлений» [8]. Принципиальным отличием АОМ от других (объект-ориентированных) моделей, является наличие у агентов определенных интересов (задаются целевой функцией), а следовательно, их поведение

может изменяться под воздействием внешних факторов. Структурным элементам (агентам) таких моделей присуща активность, то есть их невозможно рассматривать лишь как набор ресурсов.

Основным фактором, ограничивающим широкое применение АОМ в России, является необходимость наличия у исследователей суперкомпьютеров — дорогостоящего оборудования и специального (преимущественно зарубежного) программного обеспечения.

Поэтому до сих пор для оценки производственных возможностей на макро-, мезо- и микроуровне вне зависимости от отраслевой принадлежности хозяйствующих субъектов не только в РФ, но и практически в любой экономически развитой стране мира остается производственная функция. Классической признается работа Ч. Кобба и П. Дугласа, опубликованная в 1928 г. [9], в которой предложена двухфакторная производственная функция, описывающая зависимость объема выпущенной продукции от труда и капитала. Два исследования Р. Солоу [10, 11] внесли определенный вклад в развитие производственной функции, заложив основы создания неоклассической модели экономического роста, где помимо труда и капитала присутствует и экзогенный нейтральный фактор технический прогресс. Также одним из первых простейшую производственную функцию, так называемую АК-модель, рассматривал экономист из США М. Франкель [12]. Определенное развитие моделирования производства нашло отражение в ряде зарубежных работ. В начале 70-х гг. XX в. появились макроэкономические модели, учитывающие шоковые переменные (случайные факторы). Так, в частности, У. Броком и Л. Мирманом [13] введен случайный фактор при переменных производственной функции, а С. Тарновский [14] применил случайный фактор в ограничениях модели роста. Над развитием АК-моделей работали, например, Ц. Грилихес [15], П. Ромер [16] и Р. Лукас [17], причем последний рассматривает человеческий капитал в качестве самостоятельного фактора экономического роста и формы передачи знаний. Необходимо отметить, что и в нашей стране, начиная с 1960-х гг. XX в., активно развивался метод производственной функции [18, 19].

В настоящее время нельзя не отметить многообразие различных модификаций двухфакторной (для классического варианта это труд и капитал) производственной функции Кобба — Дугласа на базе современных эконометрических методов. Однако по критерию «изме-

нение коэффициентов факторной эластичности» все такие модификации можно объединить в две группы: производственные функции со статичными параметрами и производственные функции с динамическими параметрами. Экономико-математические модели подобного класса позволяют адекватно описывать поведение сложных социально-экономических систем, как правило, не требуя наличия суперкомпьютеров и продвинутого программного обеспечения. В рамках исследования ограничимся рассмотрением ряда, на наш взгляд, наиболее интересных научных работ в этой области.

В исследовании В.Л. Макарова, С.А. Айвазяна, М.Ю. Афанасьева, А.Р. Бахтизина и А.М. Нанавян с помощью модифицированной производственной функции Кобба — Дугласа моделировался реальный производственный потенциал субъектов РФ в 2009–2011 гг. [5]. Причем такое моделирование осуществлялось как без учета, так и с учетом фактора эффективности. При этом под производственными возможностями региона (результативный показатель) неизменно понимался валовой региональный продукт в текущих ценах. Для каждого года строились по три модели, имеющие различную спецификацию в части включенных факторов. Несмотря на достаточно высокую адекватность результатов моделирования, подход, представленный в работе [5], имеет определенные недостатки. На наш взгляд, основным недостатком таких моделей является невозможность реализации прогностической функции, поскольку моделирование осуществляется для каждого года анализируемого периода, то есть изолированно от других лет.

Такой недостаток отсутствует в ряде работ других исследователей. Так, в частности, в исследовании Д.А. Гайнанова и соавторов эмпирическим путем была доказана устойчивость результатов экономико-математического моделирования (на основе сравнительного анализа показателей адекватности моделей, построенных на данных региональной статистики за 2010–2013 и 2010–2014 гг.) индустриального потенциала региона на протяжении всего анализируемого периода [7]. А это, в свою очередь, позволило спрогнозировать значение результативного показателя в среднесрочном (трехлетнем) упреждающем периоде с необходимой для исследователей точностью. Однако следует отметить, что большая часть периода исследования характеризовалась относительной стабильностью российской экономики (по крайней мере, отсутствовало внешнее давле-

ние на нее со стороны США и стран — членов ЕС). Начиная с 2014 г. национальная экономика вступила в зону турбулентности (помимо санкционного давления вышеуказанных стран произошел обвал цен на мировых рынках энергоресурсов, что не могло негативно не сказаться на экспортоориентированной сырьевой экономике России). Поэтому, на наш взгляд, в «новых» условиях построение одной общей производственной функции Кобба — Дугласа с постоянными параметрами для всего анализируемого периода может стать невозможным (по причине существенного снижения точности моделирования).

Анализ совместной работы Н.П. Горидько и Р.М. Нижегородцева позволяет сделать вывод, что действительно не всегда имеется возможность высокоточного прогнозирования на основе производственной функции Кобба — Дугласа с постоянными во времени параметрами [20]. Здесь строились производственные функции ВРП региона с учетом инвестиций в отдельные отрасли на примере Республики Татарстан за 2005–2015 гг. Эмпирическим путем исследователи получили ряд адекватных (достаточной точности) однофакторных функций Кобба — Дугласа с постоянными параметрами путем одновременного включения в модель инвестиций в основной капитал нескольких отраслей региона. Ситуация кардинально изменилась при построении таких функций для отдельных видов экономической деятельности (отраслей) Республики Татарстан. В этом случае наблюдалась значительная вариация коэффициента детерминации (одного из ключевых показателей адекватности моделирования) от 0,42 до 0,85. Считается, что если указанный показатель превышает 0,9, то это позволяет обеспечивать высокую точность аппроксимации и прогнозирования, а если он менее такой величины, но больше 0,8, то в этом случае можно получать лишь грубые (прикидочные) оценки результативного показателя [21].

Поэтому в настоящее время ученые-математики с целью повышения точности прогнозирования производственных возможностей страны, ее регионов, отраслей или предприятий занимаются разработкой моделей (производственной функции Кобба — Дугласа) с динамическими параметрами. Действительно формальные показатели высокой устойчивости усредненных оценок структурных параметров производственной функции Кобба — Дугласа не исключают наличия ярко выраженных тенденций в их динамике.

На наш взгляд, достаточно адекватной моделью, имитирующей производственные возможности страны, ее регионов или их отраслей, является производственная функция Кобба — Дугласа с динамическими параметрами (коэффициенты факторной эластичности являются дифференцированными во временном разрезе), которые рассчитываются с помощью альтернативного метода линейной регрессии (АМЛР), разработанного Н.В. Суворовым. Апробация (тестирование) АМЛР на данных национальной (СССР и России) и отраслевой статистики позволяет сделать однозначный вывод о его высокой точности. Рассмотрим основные особенности и преимущества такого метода. Несомненным преимуществом АМЛР перед традиционными математико-статистическими методами является свойство гарантировать заданные знаки структурных параметров оцениваемой модели. К особенностям подхода Н.В. Суворова можно отнести также то, что в расчетах фигурируют не значения результативного и факторных показателей в абсолютном выражении, а темпы их роста. При этом корректность применения АМЛР достигается за счет преобразования исходной статистической информации (показатели, выраженные в стоимостном выражении, приводятся в постоянных ценах, то есть производится элиминирование инфляционного фактора). Тестирование АМЛР на статистических данных реального сектора отечественной экономики для 1990–2000-х гг. показало, что вклад фактора «технический прогресс» в динамику выпуска превосходил роль труда и капитала [22]. На идентичной статистической информации оценка структурных параметров производственной функции Кобба — Дугласа с помощью АМЛР позволила определить наиболее целесообразные спецификации модели. А это указывает на необходимость наличия в модели такого фактора. Также нельзя не отметить, что итерационная процедура расчета динамических параметров реализуется на базе MS Excel, то есть для ее автоматизации не требуется наличия у исследователя специального программного продукта. Однако в отличие, например, от метода наименьших квадратов, АМЛР не позволяет произвести оценку точности модели, а также рассчитать стандартные отклонения оцененных структурных параметров. В связи с этим для оценки уровня точности статистической модели, верифицируемой при помощи АМЛР, Н.В. Суворовым разработан и протестирован (на примере промышленного комплекса России за 1993–2012 гг.) ори-



гинальный метод декомпозиции временного ряда на регулярную и стохастическую компоненты. Проведенные расчеты показали, что динамика регулярной компоненты на 69,5 % объясняет дисперсию исходного временного ряда [23]. В другой работе исследователя, являющейся логическим продолжением указанной статьи, производится мультивариантный (по различным критериальным правилам) расчет динамических параметров для ранее разработанной модели [24].

В работе С.Г. Светуныкова в целях динамического анализа и прогнозирования производственных возможностей на макро-, мезо- и микроуровне применяется степенная производственная функция комплексных переменных с действительными коэффициентами [25]. Так же, как и в исследованиях предыдущего автора, здесь предлагается рассчитывать динамические значения коэффициентов степенной производственной функции комплексных переменных, то есть варьировать их во временном разрезе (коэффициенты определяются для каждого года). А это, в свою очередь, позволяет формировать мультивариантные экономические прогнозы. На микроуровне производственная функция комплексных переменных описывает взаимосвязь прибыли и издержек (результатов деятельности предприятия) с основными производственными ресурсами (труд и капитал). Отсюда важной особенностью метода (в отличие от функций с действительными переменными) является одновременное моделирование зависимости двух переменных от пары других переменных. В итоге модель позволяет по значениям производственных ресурсов рассчитывать сразу три показателя, характеризующих результаты деятельности предприятия (издержки производства, валовая прибыль и валовой выпуск). Аналогичными показателями на макро- и мезоуровне являются такие индикаторы, как промежуточный, конечный и валовой продукты. Также особенностью таких моделей является возможность построения обратных производственных функций, то есть решение обратной задачи, заключающейся в определении объема необходимых производственных ресурсов для достижения поставленных производственных задач. Апробация подхода осуществляется на данных национальной статистики Великобритании за 1990–2010 гг. Автор подхода отмечает, что с целью повышения точности моделирования и прогнозирования необходимо расширение модели производственной функции за счет включения в нее новых переменных, например, пу-

тем декомпозиции факторов «труд» и «капитал» по такому критерию, как производственные и непроизводственные ресурсы.

Другой исследователь, В.М. Гильмундинов, предлагает новый подход оценки агрегированных производственных функций с учетом переменной степени использования основных производственных фондов, являющейся ненаблюдаемой переменной на макро- и мезоуровне [26]. Микроэкономическими основаниями такого предлагаемого подхода выступает модель производителя, максимизирующего прибыль с учетом технологических взаимосвязей между объемами производственных ресурсов (используемых факторов производства) и объемом производимой продукции. Согласно представлениям неоклассической школы экономической теории, с целью формализации вышеуказанных взаимосвязей традиционно применяется производственная функция при условии предположения о полном и оптимальном использовании факторов производства. Однако на практике такие неоклассические предположения, как правило, не выполняются по ряду объективных причин (например, «негибкости» объемов факторов производства, ограниченной информированности лиц, принимающих решения, различной интенсивности применения производственных ресурсов и т. д.). Данные обстоятельства обуславливают необходимость развития подходов к описанию производственной сферы, основанных на учете технологических взаимосвязей. С этой целью величины резервов производственных ресурсов и отклонения от оптимального их использования исследователем объединены в одну интегральную характеристику — степень использования производственных ресурсов. Таким образом, подход В.М. Гильмундинова основывается на микроэкономических основаниях поведения производителя с соответствующей модификацией задачи оптимизации объемов факторов производства и выпуска продукции. Апробация методики осуществлялась путем оценки параметров производственной функции Кобба — Дугласа и динамики степени использования основных производственных фондов российской экономики за 2002–2014 гг. Согласно результатам проведенного эмпирического исследования, динамика валового выпуска экономики России существенно зависит как от основных производственных фондов и степени их использования, так и от занятой рабочей силы (значение факторной эластичности по первой и второй переменным составило соответственно 0,959 и 0,587).

**Информация, необходимая для построения производственной функции Кобба — Дугласа, на примере промышленности РБ\***

Год	Среднегодовая численность работников предприятий и организаций промышленного комплекса РБ (труд), тыс. чел.	Среднегодовая полная учетная стоимость основных фондов предприятий и организаций промышленного комплекса РБ в сопоставимых (2006 г.) ценах (капитал), млн руб.	Валовая добавленная стоимость предприятий и организаций промышленного комплекса РБ в сопоставимых (2006 г.) ценах (выпуск), млн руб.
2006	361,5	245448	227847,8
2007	364,9	240449,1	240857,4
2008	355,6	238287,9	257440,6
2009	316,4	238594	251781,2
2010	302,8	235449,9	302793,0
2011	292,8	231495,5	332899,4
2012	292,9	242851,9	320930,3
2013	291,2	259784,5	328269,8
2014	286,8	266810,5	340119,9
2015	286,6	278527	350427,7
2016	275,9	299027,1	358023,4

\* Расчеты авторов.

Это означает, что для обеспечения устойчивых темпов роста экономики России (с учетом ее текущего состояния) требуется существенное повышение уровня инвестиционной активности и производительности рабочей силы путем внедрения новых производственных технологий. Также в рамках проведенного эмпирического исследования была выявлена высокая статистическая зависимость динамики инвестиций в основной капитал от изменений степени использования основных производственных фондов, что указывает на необходимость развития подходов к моделированию инвестиционной сферы.

Учитывая результаты проведенного обзора тематической научной литературы, мы выдвигаем две гипотезы: о возможности построения адекватной производственной функции Кобба — Дугласа со статичными (постоянными) и динамическими (переменными) параметрами оценивающей производственные возможности промышленного комплекса Республики Башкортостан по данным региональной статистики за 2006–2016 гг.

**Построение производственной функции Кобба — Дугласа на примере промышленного комплекса Республики Башкортостан**

Начнем эмпирическое исследование с проверки гипотезы о возможности построения модификации двухфакторной (труд и капитал) производственной функции Кобба — Дугласа со статичными параметрами на примере промышленности Республики Башкортостан по

данным региональной статистики за 2006–2016 гг.<sup>1</sup>:

$$Y = AK^\alpha L^\beta, \quad (1)$$

где  $Y$  — валовая добавленная стоимость предприятий и организаций промышленного комплекса РБ в сопоставимых (2006 г.) ценах (выпуск), млн руб.;  $K$  — среднегодовая полная учетная стоимость основных фондов предприятий и организаций промышленного комплекса РБ в сопоставимых (2006 г.) ценах (капитал), млн руб.;  $L$  — среднегодовая численность работников и предприятий промышленного комплекса РБ (труд), тыс. руб.;  $A$  — константа, учитывающая влияние технического прогресса и других факторов, не представленных в модели в явном виде, как труд и капитал;  $\alpha$  — коэффициент эластичности по труду;  $\beta$  — коэффициент эластичности по капиталу.

Подготовленную (показатели в стоимостном выражении с целью элиминирования фактора инфляция представлены в сопоставимых ценах) для экономико-математического моделирования информацию представим в таблице 1.

В ходе такого исследования гипотеза не подтвердилась. С одной стороны, согласно коэффициенту детерминации, составившему 0,903 (более 0,9), модель (производственная функция Кобба — Дугласа со статичными параметрами) достаточно точно оценивала про-

<sup>1</sup> Регионы России. Социально-экономические показатели. 2017. Стат. сб. М.: Росстат, 2017; Промышленность Республики Башкортостан. Стат. сб. Уфа: Башкортостанстат, 2017.

изводственные возможности промышленного комплекса республики. Но с другой стороны, в результате применения метода наименьших квадратов, во-первых, не соблюдался экономический знак параметра при переменной «труд» (коэффициент принимал отрицательное значение), а во-вторых, фактор капитала по критерию Стьюдента оказался незначимым. Поэтому был сделан вывод о невозможности построения адекватной производственной функции Кобба — Дугласа со статическими параметрами для промышленного комплекса Республики Башкортостан за 2006–2016 гг.

Поэтому перейдем к проверке второй гипотезы. В этом случае на идентичной информации определяются динамические параметры производственной функции Кобба — Дугласа с помощью АМЛР на примере промышленности республики за 2006–2016 гг.

В рамках исследования ограничимся краткой характеристикой такого метода.

Применение эконометрических методов базируется, как правило, на представлении изучаемого процесса (объекта) в виде линейной регрессионной модели, которая в стандартном виде задается соотношениями:

$$y = Xa + \varepsilon, \quad (2)$$

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} \dots x_{1m} \\ \dots \\ x_{T1} \dots x_{Tm} \end{bmatrix}, y' = (y_1, \dots, y_T),$$

$$a' = (a_1, \dots, a_m), \quad \varepsilon' = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_T),$$

где  $m$  — число оцениваемых структурных параметров;  $T$  — число наблюдений (длина временных рядов переменных);  $y$  — вектор значений зависимой переменной;  $X$  — матрица наблюдений, объясняющих переменных;  $a$  — вектор структурных параметров;  $\varepsilon$  — вектор случайных отклонений, которые, по предположению, обладают нулевым математическим ожиданием [ $M(\varepsilon) = 0$ ] и фиксированной дисперсией [ $M(\varepsilon\varepsilon') = \sigma_\varepsilon^2 E$ , где  $E$  — единичная матрица,  $\sigma_\varepsilon^2 = \text{const}$ ],  $y'$ ,  $a'$ ,  $\varepsilon'$  — транспонированные величины, соответственно  $y$ ,  $a$  и  $\varepsilon$ .

Опыт статистических расчетов на основе реальных эмпирических данных свидетельствует о том, что наиболее известные и традиционно применяемые в практике эконометрического моделирования математико-статистические методы (метод наименьших квадратов, метод максимального правдоподобия и другие близкие к ним методы) не всегда позволяют обеспечить успешную верификацию теоретически требуемых форм эконометрических моделей.

Типовыми случаями при этом являются: 1) несоответствие знака или порядка какого-либо из структурных параметров модели (1) априорным представлениям исследователя о моделируемом процессе (объекте); 2) большие величины стандартных ошибок оценок отдельных структурных параметров моделей типа (2) или неудовлетворительные в целом результаты оценивания регрессионной модели.

В связи с этим целесообразной является разработка метода идентификации структурных параметров эконометрической модели типа (2), альтернативного методам наименьших квадратов, максимального правдоподобия или их модификациям. Принципиально важным свойством метода (АМЛР) верификации статистической модели выступает возможность обеспечения теоретических (или априорных) требований, предъявляемых к спецификации оцениваемой статистической конструкции, которая в обобщенном виде является моделью с переменными во времени структурными параметрами:

$$y_t = \sum_i x_{ti} a_{ti} + \varepsilon_t = x_t a_t + \varepsilon_t, \quad (3)$$

где  $x_t = (x_{t1}, \dots, x_{tm})$  — вектор объясняющих переменных в момент времени  $t$ ;  $\{a_{ti}\}$  — динамические (изменяющиеся во времени) величины переменных.

Нами разработан подход к верификации модели с переменными во времени структурными параметрами вида (3), базирующийся на дополнении этой модели ограничениями специального вида, что приводит к следующей постановке задачи оценивания:

$$y_t = x_t a_t + \varepsilon_t, \quad (4)$$

$$a_{ti} - a_{(t-1)i} = \delta_{ti}, \quad (5)$$

$$(i = 1, \dots, m; t = 1, \dots, T).$$

Относительно остатков  $\varepsilon_t$  и  $\delta_{ti}$  в (4) и (5) считаются справедливыми гипотезы, принимаемые для традиционных регрессионных моделей: математические ожидания величин  $\varepsilon_t$  и  $\delta_{ti}$  равны нулю, а их дисперсии являются фиксированными и неизвестными априори величинами (последние должны быть определены по результатам верификации оцениваемой модели).

Нахождение оценок структурных параметров модели, заданной соотношениями типа (4) и (5), требует использования обобщенного метода наименьших квадратов (или аналогичных методов), поскольку минимизируемый функционал, на основе которого определяются  $\{a_{ti}\}$ , имеет вид:

$$\sum_{t=1}^T (y_t - x_t a_t)' (y_t - x_t a_t) + \sum_{t=2}^T (a_t - a_{t-1})' D (a_t - a_{t-1}), \quad (6)$$

где  $D$  — диагональная матрица с элементами  $\gamma_{12}, \dots, \gamma_{m2}$  на главной диагонали, которые определяются как соотношения дисперсий стохастических величин  $\{\varepsilon_i\}$  и  $\{\delta_{ii}\}$ :

$$\gamma_{i2} = \sigma_{\varepsilon}^2 / \sigma_{\delta_i}^2, \quad i = 1, \dots, m.$$

Очевидно, что результат оценивания модели (6) существенным образом зависит от выбора значений  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ . На практике в ходе проведения эконометрических расчетов можно применить следующий метод: коэффициенты  $\gamma_1, \dots, \gamma_m$  подбираются таким образом, чтобы обеспечить совпадение значений оценок дисперсий параметров  $\{a_i\}$ , получаемых в результате оценивания регрессионной модели (2), и эмпирических значений дисперсий  $s_{ai}^2$  оценок параметров модели (4) и (5), получаемых на основе минимизации (6), которые задаются в виде:

$$s_{ai}^2 = \frac{1}{T-1} \sum_t (a_{ti} - a_i^c)^2, \quad (7)$$

где для каждой  $i$ -й объясняющей переменной  $a_i^c$  — средняя арифметическая соответствующего временного ряда.

Описанный вариант метода идентификации модели, заданной соотношениями (4) и (5), был апробирован на различных типах эконометрических моделей, применительно к которым сходимость итерационной процедуры, обеспечивающей совпадение значений  $s_{ai}^2$  и  $\sigma_{ai}^2$ , не вызывала сомнений. Такой метод известен в эконометрической литературе как метод Дарбина, или метод Тейла — Гольдбергера [27].

Вместе с тем использование описанного выше варианта метода оценивания модели типа (4) и (5) в практике эконометрических расчетов выявило, что его (метода) реализация невозможна для произвольного сочетания уровней и стандартных ошибок параметров модели (2), даже если результаты оценивания указанной модели выглядят удовлетворительными с точки зрения математико-статистических критериев. Сходимость описанного выше метода может не достигаться также при наложении дополнительных условий на модель (4) и (5). Таким дополнительным ограничением может быть, в частности, требование равенства оценок  $\{a_i\}$  структурных параметров модели (2) средним значениям соответствующих времен-

ных рядов структурных параметров модели (4) и (5), то есть значениям  $\{a_i\}$  из (7).

Можно также указать на метод идентификации эконометрических моделей, который не позволяет определить стандартные ошибки структурных параметров (а в более широком смысле — вероятностные характеристики этих параметров), несмотря на то, что сами искомые параметры, усредненные по массиву исходных статистических данных, могут быть оценены на основе обработки временных рядов этих данных. Это разработаный нами АМЛР.

В математическом отношении АМЛР основывается на методе главных компонент. С точки зрения математической теории индексов (как направления теории экономической статистики) в основе АМЛР лежит конструкция наилучшего линейного индекса [28].

Более подробное описание метода и оценка его адекватности и точности представлены соответственно в работах [23] и [24].

В работе [22] производилась оценка структурных параметров четырех вариантов спецификаций производственной функции Кобба — Дугласа на основе АМЛР. Причем только в первой (приведенной далее) спецификации выполнялось условие, для классической производственной функции заключающееся в том, что суммарная эластичность выпуска по двум факторам (труд и капитал) составляет единицу:

$$\lambda_t = \alpha_k (y_t - k_t) + (1 - \alpha_k) (y_t - l_t), \quad (8)$$

где  $\lambda_t$  — автономный (независимый от динамики объема применяемых факторов производства) темп изменения выпуска;  $y_t$ ,  $k_t$ ,  $l_t$  — темпы изменения (разности натуральных логарифмов) выпуска (валовой добавленной стоимости) и производственных ресурсов (труд и капитал) в году  $t$ ;  $\alpha_k$  — коэффициент эластичности выпуска по фактору «капитал».

Учитывая это, оценивание динамических параметров производственной функции Кобба — Дугласа на примере промышленности республики за 2006–2016 гг., произведем по следующей спецификации (тождественной по смыслу вышеуказанной):

$$y_t - l_t = \alpha (k_t - l_t) + f(t), \quad (9)$$

где  $\alpha$  — коэффициент эластичности производительности труда по капиталовооруженности;  $f(t)$  — некоторая временная функция (остаток после определения значений искомых параметров).

В результате проведенных расчетов с помощью АМЛР среднее значение  $\alpha$  составило 0,487 для промышленного комплекса РБ по данным



региональной статистики за 2006–2016 гг. Это означает, что в нашем случае несколько большее влияние на экономический рост промышленности республики оказывал фактор труда, а не капитала, следовательно, для региона актуализировался вопрос развития человеческого капитала. Динамические (погодные) значения ( $f_t$ ) функции-остатка  $f(t) = y_t - l_t - 0,487(k_t - l_t)$ , а также оценки регулярной ( $q_t$ ) и нерегулярной ( $\varepsilon_t$ ) составляющей полученные по оригинальному методу декомпозиции временного ряда, рассмотренному в работе [23] представлены в таблице 2.

Проведенные расчеты показали, что динамика регулярной компоненты ( $q$ ) объясняет 57,4 % дисперсии исходного временного ряда ( $f$ ), а динамика случайной компоненты ( $\varepsilon$ ) 42,6 %. Это означает, что в большей степени (практически на 60 %) изменение темпов экономического роста промышленного комплекса Республики Башкортостан в 2006–2016 гг. зависело от учтенных в модели факторов (труд и капитал), а на долю не включенных в модификацию производственной функции Кобба — Дугласа факторов приходилось около 40 % вариации резульативного показателя.

В соответствии с работой [24], построение динамического ряда показателя  $\alpha$  было осуществлено для модели, в которой фактические значения темпов изменения производительности труда  $\{y_t - l_t\}$  скорректированы на несистематическую компоненту  $\{\varepsilon_t\}$ , то есть оцениванию подвергалась модель:

$$y_t - l_t - \varepsilon_t = \alpha_t(k_t - l_t) + \alpha_{0t} \quad (10)$$

Специально отметим, что применяемый алгоритм получения динамических оценок данной модели обеспечивает (в отличие от традиционной регрессионной модели) точное совпадение модельных и эмпирических значений скорректированных темпов изменения производительности труда (то есть значений  $\{y_t - l_t - \varepsilon_t\}$ ).

В таблице 3 представлены годовые значения эластичности производительности труда по капиталовооруженности по методике, представленной в работе [24].

Как следует из приведенных данных, значения структурных параметров рассматриваемой модели на протяжении исследуемого периода времени были подвержены достаточно существенным изменениям. Последнее позволяет предположить, что динамика параметров производственной функции, представленных в таблице 3, должна рассматриваться как функция каких-либо переменных макро- или мезо-

Таблица 2

#### Результаты декомпозиции исследуемого временного ряда\*

Год	$f_t$	$q_t$	$\varepsilon_t$
2007	0,06075	0,07039	-0,0096
2008	0,08422	0,05520	0,0290
2009	0,03703	0,12888	-0,0918
2010	0,21348	0,10273	0,1108
2011	0,12026	0,08446	0,0358
2012	-0,06013	0,03568	-0,0958
2013	-0,00724	-0,01356	0,0063
2014	0,03027	0,00624	0,0240
2015	0,00927	0,01669	-0,0074
2016	0,00635	0,00755	-0,0012

\* Расчеты авторов.

Таблица 3

#### Динамические параметры производственной функции Кобба — Дугласа промышленного комплекса Республики Башкортостан\*

Год	$\alpha_t$	$\alpha_{0t}$
2007	0,515	0,0714
2008	0,568	0,0535
2009	0,665	0,1029
2010	0,580	0,0991
2011	0,503	0,0841
2012	0,435	0,0388
2013	0,373	-0,0028
2014	0,392	0,0112
2015	0,413	0,0206
2016	0,427	0,0155

\* Расчеты авторов.

уровня. К числу таких переменных относится, прежде всего, уровень использования производственного потенциала (уровень использования производственных мощностей как республиканской промышленности, так и промышленности РФ в целом). Таким образом, результаты динамизации структурных параметров производственной функции представляют дополнительный статистический материал, математическая обработка которого должна способствовать повышению обоснованности перспективных расчетов проводимых в рамках актуализации положений промышленно-инвестиционной политики региона России.

### Заключение

Внешнее давление на российскую экономику в условиях существенных межрегиональных разрывов по уровню социально-экономического развития и ключевой роли промышленного комплекса в экономике актуализировало вопрос обеспечения эффективности

инвестиционно-промышленной политики субъектов РФ. В современных условиях решение такой задачи невозможно без объективной оценки и прогнозирования производственных возможностей промышленного комплекса региона на основе экономико-математического моделирования и информационных технологий. Наиболее адекватным инструментом, имитирующим поведение сложных социально-экономических систем, является агент-ориентированное моделирование. Однако его практическое применение в России ограничено по причине относительно высокой стоимости. Поэтому до сих пор не только в нашей стране, но и за рубежом для оценки производственных возможностей на макро- мезо- и микроуровне применяется производственная функция Кобба — Дугласа. При этом развитие применения такой функции осуществляется в двух направлениях: во-первых, осуществляется ее модификация (как правило, за счет включения ряда факторов, помимо труда и капитала), и, во-вторых, совершенствуются эконометрические методы расчета параметров производственной функции Кобба — Дугласа. В рамках исследования акцентировано внимание на изучении именно второго направления. Анализ научной литературы показал, что все многообразие таких функций можно объединить в две группы: со статическими и динамическими параметрами. Повышенный интерес исследователей к развитию эконометрических методов, позволяющих определять динамические параметры производственной функции Кобба — Дугласа, объясняется тем, что формальные показатели высокой устойчивости усредненных оценок таких структурных параметров не исключают наличия ярко выраженных тенденций в их динамике. В рамках исследования последовательно кратко охарактеризованы три альтернативных метода (предложены Н.В. Суворовым, С.Г. Светульниковым и В.М. Гильмундиновым), позволяющие корректно определять динамические параметры такой функции. Эмпирическим путем на примере промышленного комплекса Республики

Башкортостан за 2006–2016 гг. последовательно рассчитываются статические и динамические параметры производственной функции Кобба — Дугласа соответственно с помощью метода наименьших квадратов и АМЛР. По ряду объективных причин (либо не соблюдался экономический знак параметра при переменной труд, либо фактор капитал по критерию Стьюдента оказывался незначимым) гипотеза о возможности построения адекватной функции со статическими параметрами не подтвердилась. При этом с достаточно высокой степенью точности производственные возможности промышленности Республики Башкортостан в 2006–2016 гг. описывались производственной функцией Кобба — Дугласа с динамическими параметрами, определенными на основе АМЛР. Выбор метода расчета параметров функции неслучаен. Во-первых, применение его позволяет обеспечить в любом случае правильный экономический знак параметров при факторных показателях (труд и капитал). Во-вторых, проведение расчетов оригинальным способом, оперируя темпами роста показателей, обеспечивает высокую точность верификации параметров модели. Так, эмпирическим путем было установлено, что динамика регулярной компоненты временного ряда на 57,4 % объясняет дисперсию исходного временного ряда (функции остатка зависимой переменной после определения параметров модели с помощью АМЛР). Анализ полученных средних оценок эластичности зависимой переменной по факторам показал, что несколько большее влияние на производственные возможности промышленного комплекса республики оказывала такая независимая переменная, как капитал (инвестиции в основные средства). Применение АМЛР в сочетании с другими современными эконометрическими методами позволяет не только проводить ретроспективную оценку динамических параметров функции, но и формировать высокоточный прогноз производственных возможностей промышленного комплекса любого региона страны.

### Благодарность

*Статья подготовлена при финансовой поддержке гранта РФФИ № 18-410-02003 «Повышение эффективности инвестиционно-промышленной политики регионов России (на примере Республики Башкортостан)».*

### Список источников

1. Татаркин А. И. Новая индустриализация экономики России. Потребность развития и/или вызовы времени // Экономическое возрождение России. — 2015. — № 2. — С. 20–31.
2. Рузанов А. И. Производственные функции и их использование для описания закономерностей производства // Вестник Нижегородского университета им. Н. И. Лобачевского. — 2011. — № 5 (1). — С. 212–217.
3. Абалкин Л. И. Новый тип экономического мышления. — М.: Экономика, 1987. — 189 с.

4. Анчишкин А. И. Прогнозирование роста социалистической экономики. — М. : Экономика, 1973. — 294 с.
5. Оценка эффективности регионов РФ с учетом интеллектуального капитала, характеристик готовности к инновациям, уровня благосостояния и качества жизни населения / Макаров В. Л., Айвазян С. А., Афанасьев М. Ю., Бахтизин А. Р., Нанавян А. М. // Экономика региона. — 2014. — № 4. — С. 9–30.
6. Клейнер Г. Б. Системная модернизация отечественных предприятий. Теоретическое обоснование, мотивы, принципы // Экономика региона. — 2017. — № 1. — С. 13–24. — DOI 10.17059/2017-1-2.
7. Индустриальный потенциал регионов России. Оценка и резервы роста / Гайнанов Д. А., Губарев Р. В., Дзюба Е. И., Файзуллин Ф. С. // Социологические исследования. — 2017. — № 1. — С. 106–116.
8. Применение суперкомпьютерных технологий для моделирования социально-экономических систем / Окрепилов В. В., Макаров В. Л., Бахтизин А. Р., Кузьмина С. Н. // Экономика региона. — 2015. — № 2. — С. 301–313. — DOI 10.17059/2015-2-24.
9. Cobb C., Douglas P. A theory of production // The American Economic Review. — 1928. — Vol. 18. — No. 1. — P. 139–165.
10. Solow R. Technical Change and the Aggregate Production Function // The Review of Economics and Statistics. 1957. — Vol. 39. — No. 3. — P. 312–320.
11. Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency / Arrow K., Chenery H., Minhas B., Solow R. // The Review of Economics and Statistics. — 1961. — Vol. 43. — No. 3. — P. 225–250.
12. Frankel M. The production function in allocation and growth: a synthesis // American Economic Review. — 1962. — Vol. 52. — P. 996–1022.
13. Brock W., Mirman L. Optimal economic growth under uncertainty: discounted case // Journal Economic Theory. — 1972. — Vol. 4 (3). — P. 479–513.
14. Turnovsky S. Optimal stabilization policies for deterministic and stochastic linear system // Review of Economic Studies. — 1973. — Vol. 40. — No. 121. — P. 79–96.
15. Griliches Z. Issues in assessing the contribution of research and development to productivity growth // Bell Journal of Economics. — 1979. — Vol. 10. — P. 92–116.
16. Romer P. Increasing returns and long-run growth // Journal of Political Economy. — 1986. — Vol. 94. — P. 1002–1037.
17. Lukas R. On the mechanism of economic development // Journal of Monetary Economics. — 1988. — Vol. 22. — P. 3–42.
18. Клейнер Г. Б. Производственные функции. Теория, методы, применение. — М. : Финансы и статистика, 1986. — 239 с.
19. Терехов Л. Л. Производственные функции. — М. : Статистика, 1974. — 127 с.
20. Горидько Н. П., Нижегородцев Р. М. Точки роста региональной экономики и регрессионная оценка отраслевых инвестиционных мультипликаторов // Экономика региона. — 2018. — № 1. — С. 29–42. — DOI 10.17059/2018-1-3.
21. Эконометрика / Горбатков С. А., Полупанов Д. В., Фархиева С. А., Коротнева М. В. — Уфа : РИЦ БашГУ, 2012. — 204 с.
22. Суворов Н. В. Актуальные направления и проблемы совершенствования модельного инструментария макроэкономического анализа // Проблемы прогнозирования. — 2015. — № 5. — С. 25–39.
23. Суворов Н. В. Верификация эконометрической модели с учетом априорных ограничений на структурные параметры // Вопросы статистики. — 2016. — № 11. — С. 53–66.
24. Суворов Н. В. Развитие методов исследования статистических зависимостей. Регрессионные модели с переменными структурными параметрами // Вопросы статистики. — 2018. — № 6. — С. 3–15.
25. Светульников С. Г. О возможности экономического прогнозирования с помощью степенной производственной функции комплексного переменного // Экономика региона. — 2016. — № 3. — С. 966–976. — DOI 10.17059/2016-3-29.
26. Гильмундинов В. М. Оценка производственной функции с переменным использованием основных фондов в экономике России // Проблемы прогнозирования. — 2017. — № 4. — С. 34–43.
27. Джонстон Дж. Эконометрические методы. — М.: Наука, 1980. — 444 с.
28. Аллен Р. Экономические индексы. — М.: Финансы и статистика, 1980. — 256 с.

### Информация об авторах

**Суворов Николай Владимирович** — доктор экономических наук, профессор, руководитель лаборатории прогнозирования динамики и структуры народного хозяйства, Институт народнохозяйственного прогнозирования РАН; Scopus Author ID 35590747200 (Российская Федерация, 117418, г. Москва, Нахимовский пр-т, 47; e-mail: suvor\_n@ecfor.ru).

**Ахунов Рустем Ринатович** — доктор экономических наук, доцент, главный научный сотрудник, заведующий лабораторией современных проблем региональной экономики, Уфимский федеральный исследовательский центр РАН (Российская федерация, 450054, г. Уфа, пр-т Октября, д. 71; e-mail: priemnaya.akhunov@mail.ru).

**Губарев Роман Владимирович** — кандидат экономических наук, доцент, кафедра экономической теории, Российский экономический университет имени Г.В. Плеханова; Scopus Author ID 57133204200 (Российская федерация, 117997, г. Москва, Стремянный пер., 36; e-mail: gubarev.roma@yandex.ru).

**Дзюба Евгений Иванович** — эксперт, отделение Общероссийского народного фронта в Республике Башкортостан; Scopus Author ID 57193701826 (Российская Федерация, 450077, г. Уфа, ул. Кирова, 1; e-mail: intellectRus@yandex.ru).

**Файзуллин Фаниль Саитович** — доктор философских наук, профессор, главный научный сотрудник, Институт социально-экономических исследований Уфимского федерального исследовательского центра РАН; Scopus Author ID 57193699417 (Российская Федерация, 450054, г. Уфа, Проспект Октября, 71; e-mail: fayzullin.f@gmail.com).

For citation: Suvorov N. V., Akhunov R. R., Gubarev R. V., Dzyuba E. I. & F. S. Fayzullin (2020). Applying the Cobb-Douglas Production Function for Analysing the Region's Industry. *Ekonomika regiona [Economy of region]*, 16(1), 187-200.

**N. V. Suvorov<sup>a)</sup>, R. R. Akhunov<sup>b)</sup>, R. V. Gubarev<sup>c)</sup>, E. I. Dzyuba<sup>d)</sup>, F. S. Fayzullin<sup>e)</sup>**

<sup>a)</sup> Institute of Economic Forecasting of RAS (Moscow, Russian Federation)

<sup>b)</sup> Ufa Federal Research Center of RAS (Ufa, Russian Federation)

<sup>c)</sup> Plekhanov Russian University of Economics (Moscow, Russian Federation)

<sup>d)</sup> Division of All-Russia People's Front in Republic of Bashkortostan (Ufa, Russian Federation; e-mail: intellectRus@yandex.ru)

<sup>e)</sup> Institute of Social and Economic Research of the Ufa Federal Research Center of RAS (Ufa, Russian Federation; e-mail: fayzullin.f@gmail.com)

### Applying the Cobb-Douglas Production Function for Analysing the Region's Industry

*The industry plays a key role in Russia's economic security. Significant interregional gaps in the level of socio-economic development made topical the issue of optimizing the distribution of production forces in the constituent entities of the Russian Federation through increasing the efficiency of investment and industrial policy at the meso-level. In our opinion, the efficiency of such policy is impossible without modern methods of economic and mathematical modelling and information technologies. The Cobb-Douglas production function is still an adequate method for an accurate assessment of production capacities of the industry both in the whole country and its regions. At present, such method is being actively developed in two directions: the function's modification through "saturation" with different factors and improvement of the approaches to determining its dynamic (changing in time) parameters. In this study, we hypothesized the possibility of building an adequate Cobb-Douglas production function with static and dynamic parameters, using the case of the Republic of Bashkortostan's industry for the period from 2006 to 2016. The first hypothesis about using static parameters for building Cobb-Douglas production function was empirically rejected. In contrast, we have confirmed the second hypothesis. We defined dynamic parameters of the Cobb-Douglas production function using the alternative method of linear regression (AMLR). This method accurately assesses production capacities of the Republic of Bashkortostan. The choice of the method is not random. First of all, its use allows, in any case, ensuring a correct economic sign of parameters with factor indicators (labour and capital). Secondly, the original method of calculations, using the growth rates of the indicators, ensures high accuracy of verifying the model parameters. Thus, the conducted calculations have shown that the dynamics of the regular component explains 57.4 % of variance of the initial time series (remainder functions after defining the model parameters using the AMLR). Combined with other econometric methods, the application of the developed model will also enable an accurate forecast of the production capacities of the industry in regions. The study's results can be applied for developing the investment and industrial policy of the Republic of Bashkortostan.*

**Keywords:** Russian region, industry, assessment of production capacities, Cobb-Douglas production function, labour, capital, growth rates, static and dynamic parameters, alternative method of linear regression, time series, regular and random components

### Acknowledgements

*This study has been prepared with the support of Russian Foundation for Basic Research, the grant No. 18-410-020003 "Enhancement of the investment and industrial policy efficiency in regions of Russia (the case of the Republic of Bashkortostan)".*

### References

1. Tatarkin, A. I. (2015). Novaya industrializatsiya Rossii: potrebnost razvitiya i/ili vyzovy vremeni [New industrialization of the Russian economy: development deeds and/or time challenges]. *Ekonomicheskoe vrozozhdenie Rossii [Economic Revival of Russia]*, 2, 20–31. (In Russ.)
2. Ruzanov, A. I. (2011). Proizvodstvennye funktsii i ikh ispolzovanie dlya opisaniya zakonomernostey proizvodstva [Production functions and their use to describe the patterns of production]. *Vestnik Nizhegorodskogo universiteta im. N. I. Lobachevskogo [Vestnik of Lobachevsky University of Nizhni Novgorod]*, 5(1), 212–217. (In Russ.)
3. Abalkin, L. I. (1987). *Novyy tip ekonomicheskogo myshleniya [New type of economic thinking]*. Moscow: Ekonomika Publ., 189. (In Russ.)
4. Anchishkin, A. I. (1973). *Prognozirovaniye rosta sotsialisticheskoy ekonomiki [Forecasting the growth of a socialist economy]*. Moscow: Ekonomika Publ., 294. (In Russ.)
5. Makarov, V. L., Aivazyan, S. H., Afanasiev, M. Yu., Bakhtizin, A. R. & Nanavyan, A. M. (2014). Otsenka effektivnosti regionov RF s uchetom intellektualnogo kapitala, kharakteristik gotovnosti k innovatsiyam, urovnya blagosostoyaniya i kachestva zhizni naseleniya [The estimation of the regions' efficiency of The Russian Federation including the intellectual



capital, the characteristics of readiness for innovation, level of well-being, and quality of life]. *Ekonomika regiona [Economy of Region]*, 4, 9–30. (In Russ.)

6. Kleiner, G. B. (2017). Sistemnaya modernizatsiya otechestvennykh predpriyatiy: teoreticheskoe obosnovanie, motivy, printsipy [System Modernization of Domestic Enterprises: Theoretical Background, Motives, Principles]. *Ekonomika regiona [Economy of Region]*, 1, 13–24. DOI: 10.17059/2017-1-2. (In Russ.)

7. Gainanov, D. A., Gubarev, R. V., Dzyuba, E. I. & Fayzullin, F. S. (2017). Industrialnyy potentsial regionov Rossii: otsenka i rezervy rosta [Industrial potential of Russian regions: estimation and growth reserves]. *Sotsiologicheskie issledovaniya [Sociological Studies]*, 1, 106–116. (In Russ.)

8. Okrepilov, V. V., Makarov, V. L., Bakhtizin, A. R., & Kuzmina, S. N. (2015). Primenenie superkompyuternykh tekhnologiy dlya modelirovaniya sotsialno-ekonomicheskikh sistem [Application of Supercomputer Technologies for Simulation Of Socio-Economic Systems]. *Ekonomika regiona [Economy of Region]*, 2, 301–313. DOI: 10.17059/2015-2-24. (In Russ.)

9. Cobb, C. & Douglas, P. (1928). A theory of production. *The American Economic Review*, 18(1), 139–165.

10. Solow, R. (1957). Technical Change and the Aggregate Production Function. *The Review of Economics and Statistics*, 39(3), 312–320.

11. Arrow, K., Chenery, H., Minhas, B. & Solow, R. (1961). Capital-Labor Substitution and Economic Efficiency. *The Review of Economics and Statistics*, 43(3), 225–250.

12. Frankel, M. (1962). The production function in allocation and growth: a synthesis. *American Economic Review*, 52, 996–1022.

13. Brock, W. & Mirman, L. (1972). Optimal economic growth under uncertainty: discounted case. *Journal Economic Theory*, 4(3), 479–513.

14. Turnovsky, S. (1973). Optimal stabilization policies for deterministic and stochastic linear system. *Review of Economic Studies*, 121(40), 79–96.

15. Griliches, Z. (1979). Issues in assessing the contribution of research and development to productivity growth. *Bell Journal of Economics*, 10, 92–116.

16. Romer, P. (1986). Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, 94, 1002–1037.

17. Lukas, R. (1988). On the mechanism of economics development. *Journal of Monetary Economics*, 22, 3–42.

18. Kleiner, G. B. (1986). *Proizvodstvennyye funktsii. Teoriya, metody, primeneniye [Production functions: Theory, methods, applications]*. Moscow: Finansy i statistika Publ., 239. (In Russ.)

19. Terekhov, L. L. (1974). *Proizvodstvennyye funktsii [Production functions]*. Moscow: Statistika Publ., 127. (In Russ.)

20. Goridko, N. P. & Nizhegorodtsev, R. M. (2018). Tochki rosta regionalnoy ekonomiki i regressionnaya otsenka otraslevykh investitsionnykh multiplikatorov [The Growth Points of Regional Economy and Regression Estimation for Branch Investment Multipliers]. *Ekonomika regiona [Economy of Region]*, 1, 29–42. DOI: 10.17059/2018-1-3. (In Russ.)

21. Gorbatkov, S. A., Polupanov, D. V., Farkhieva, S. A. & Korotneva, M. V. (2012). *Ekonometrika [Econometrics]*. Ufa: RITS BashGU, 204. (In Russ.)

22. Suvorov, N. V. (2015). Aktualnye napravleniya i problemy sovershenstvovaniya modelnogo instrumentariya makroekonomicheskogo analiza [Current trends and problems of improving model tools of macroeconomic analysis]. *Problemy prognozirovaniya [Studies on Russian Economic Development]*, 5, 25–39. (In Russ.)

23. Suvorov, N. V. (2016). Verifikatsiya ekonometricheskoy modeli s uchedom apriornykh ogranicheniy na strukturnye parametry [Verification of an econometric model based on a priori constraints on the structural parameters]. *Voprosy statistiki*, 11, 53–66. (In Russ.)

24. Suvorov, N. V. (2018). Razvitie metodov issledovaniya statisticheskikh zavisimostey: regressionnye modeli s peremennymi strukturnymi parametrami [Development of research methods for statistical dependences: regression models with variable structural parameters]. *Voprosy statistiki*, 6, 3–15. (In Russ.)

25. Svetunkov, S. G. (2016). O vozmozhnosti ekonomicheskogo prognozirovaniya s pomoshchyu stepennoy proizvodstvennoy funktsii kompleksnogo peremennogo [The possibility using the power production function of complex variable for economic forecasting]. *Ekonomika regiona [Economy of Region]*, 3, 966–976. DOI: 10.17059/2016-3-29. (In Russ.)

26. Gil'mundinov, V. M. (2017). Otsenka proizvodstvennoy funktsii s peremennym ispolzovaniem osnovnykh fondov v ekonomike Rossii [Estimation of the production function with the variable utilization of capital assets in the Russian economy]. *Problemy prognozirovaniya [Studies on Russian Economic Development]*, 4, 34–43. (In Russ.)

27. Johnston, J. (1980). *Ekonometricheskie metody [Econometric methods]*. Trans. From English. Moscow: Nauka Publ., 444. (In Russ.)

28. Allen, R. (1980). *Ekonomicheskie indeksy [Econometric indices]*. Trans. from English. Moscow: Finansy i statistika Publ., 256. (In Russ.)

## Authors

**Nikolay Vladimirovich Suvorov** — Doctor of Economics, Professor, Head of the Laboratory of Forecasting the Dynamics and Structure of the National Economy, Institute of Economic Forecasting of RAS; Scopus Author ID 35590747200 (47, Nakhimovskiy Ave., Moscow, 117418, Russian Federation; e-mail: suvor\_n@ecfor.ru).

**Rustem Rinatovich Akhunov** — Doctor of Economics, Associate Professor, Chief Research Associate, Head of the Laboratory of Contemporary Problems of the Regional Economy, Ufa Federal Research Center of RAS (71, Oktyabrya Ave., Ufa, 450054, Russian Federation; e-mail: priemnaya.akhunov@mail.ru)

**Roman Vladimirovich Gubarev** — PhD in Economics, Associate Professor, Academic Department of Economic Theory, Plekhanov Russian University of Economics; Scopus Author ID 57133204200 (36, Stremyanny Lane, Moscow, 117997, Russian Federation; e-mail: gubarev.roma@yandex.ru).

**Evgeniy Ivanovich Dzyuba** — Expert, Division of All-Russia People's Front in Republic of Bashkortostan; Scopus Author ID 57193701826 (1, Kirova St., Ufa, 450077, Russian Federation; e-mail: intellectRus@yandex.ru).

**Fanil' Saitovich Fayzullin** — Doctor of Philosophy, Professor, Chief Research Associate, Institute of Social and Economic Research, Ufa Federal Research Center of RAS; Scopus Author ID 57193699417 (71, Oktyabrya Ave., Ufa, 450054, Russian Federation; e-mail: fayzullin.f@gmail.com).