

УДК 517.5

ПРИБЛИЖЕНИЕ ФУНКЦИЙ n -РАЗДЕЛЬНЫМИ ВСПЛЕСКАМИ В ПРОСТРАНСТВАХ $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$

Е. А. Плещева

В работе рассматриваются построенные автором ранее ортонормированные базисы n -раздельных КМА и всплесков. В классическом случае базис пространства $L^2(\mathbb{R})$ образован сдвигами и сжатиями единственной функции ψ . В отличие от классического случая, в данной статье несколько базисов пространства $L^2(\mathbb{R})$ образованы сдвигами и сжатиями n функций ψ^s , $s = 1, \dots, n$. Построенные n -раздельные всплески образуют ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$. В этом случае ряд $\sum_{s=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{nj+s,k}^s \rangle \psi_{nj+s,k}^s$ сходится к функции f в пространстве $L^2(\mathbb{R})$. Мы привели дополнительные ограничения на функции φ^s и ψ^s , $s = 1, \dots, n$, обеспечивающие сходимость такого ряда к функции f в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$ по норме и почти всюду.

Ключевые слова: всплеск, масштабирующая функция, базис, кратномасштабный анализ.

E. A. Pleshcheva. Approximation of functions by n -separate wavelets in the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.

We consider the orthonormal bases of n -separate MRAs and wavelets constructed by the author earlier. The classical wavelet basis of the space $L^2(\mathbb{R})$ is formed by shifts and compressions of a single function ψ . In contrast to the classical case, we consider a basis of $L^2(\mathbb{R})$ formed by shifts and compressions of n functions ψ^s , $s = 1, \dots, n$. The constructed n -separate wavelets form an orthonormal basis of $L^2(\mathbb{R})$. In this case, the series $\sum_{s=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{nj+s,k}^s \rangle \psi_{nj+s,k}^s$ converges to the function f in the space $L^2(\mathbb{R})$. We write additional constraints on the functions φ^s and ψ^s , $s = 1, \dots, n$, that provide the convergence of the series to the function f in the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, in the norm and almost everywhere.

Keywords: wavelet, scaling function, basis, multiresolution analysis.

MSC: 42C40

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-167-176

Введение

В работе будут использованы следующие обозначения:

Обозначим через p_l число, на единицу большее наименьшего неотрицательного вычета l по модулю n , $l \in \mathbb{Z}$. В частности, $p_{n+l} = p_l$, а

$$p_s = \begin{cases} s+1, & s = 1, 2, \dots, n-1, \\ 1, & s = n; \end{cases}$$

$L^2(\mathbb{R})$ — пространство интегрируемых с квадратом на $(-\infty, \infty)$ функций над полем комплексных чисел;

$u_{j,k}(x) = 2^{j/2} u(2^j x - k)$, $k, j \in \mathbb{Z}$, где $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$;

$\langle g, h \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \overline{h(x)} dx$ — скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R})$ функций g и h из $L^2(\mathbb{R})$;

$Pr_V f$ — ортогональная проекция функции f на подпространство $V \subset L^2(\mathbb{R})$;

$l^2(\mathbb{Z})$ — пространство последовательностей $\{c_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ таких, что $\sum_{n \in \mathbb{Z}} |c_n|^2 < \infty$.

В статье [1] нами были построены ортонормированные базисы всплесков на основе нескольких масштабирующих функций. Построение базиса всплесков начнем с построения соответствующего кратномасштабного анализа (КМА). Введем следующее

О п р е д е л е н и е 1. Рассмотрим n последовательностей вложенных друг в друга замкнутых подпространств пространства $L^2(\mathbb{R})$

$$\dots \subset V_{-1}^n \subset V_0^1 \subset V_1^2 \subset V_2^3 \subset \dots \subset V_{n-1}^n \subset V_n^1 \subset V_{n+1}^2 \subset \dots, \quad (0.1)$$

$$\dots \subset V_{-1}^1 \subset V_0^2 \subset V_1^3 \subset V_2^4 \subset \dots \subset V_{n-1}^1 \subset V_n^2 \subset V_{n+1}^3 \subset \dots \quad (0.2)$$

... ..

$$\dots \subset V_{-1}^{n-1} \subset V_0^n \subset V_1^1 \subset V_2^2 \subset \dots \subset V_{n-1}^{n-1} \subset V_n^n \subset V_{n+1}^1 \subset \dots, \quad (0.3)$$

или, кратко,

$$\dots \subset V_0^{ps-1} \subset V_1^{ps} \subset V_2^{ps+1} \subset \dots \subset V_{l+1}^{ps+l} \subset \dots, \quad s = 1, 2, \dots, n, \quad l \in \mathbb{Z}. \quad (0.4)$$

Назовем эту конструкцию *n -раздельным кратномасштабным анализом (n -КМА) пространства $L^2(\mathbb{R})$* , если она удовлетворяет следующим условиям:

а) $\bigcup_j V_{nj}^1 = \bigcup_j V_{nj}^2 = \dots = \bigcup_j V_{nj}^n = L^2(\mathbb{R})$;

б) $\bigcap_j V_{nj}^1 = \bigcap_j V_{nj}^2 = \dots = \bigcap_j V_{nj}^n = \{0\}$;

в) $f(x) \in V_j^s \Leftrightarrow f(x + l/2^j) \in V_j^s \quad \forall j, l \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, 2, \dots, n$;

г) $f(x) \in V_0^s \Leftrightarrow f(2^j x) \in V_j^s \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, 2, \dots, n$;

д) найдутся такие функции $\varphi^s(x)$, $s = 1, 2, \dots, n$, что множества их сдвигов $\{\varphi^s(x + k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ образуют ортонормированные базисы пространств V_0^s .

Если $\varphi^1 = \varphi^2 = \dots = \varphi^n$, то n -раздельный КМА превращается в классический. Построенные и исследуемые автором n -раздельные всплески можно также назвать частным случаем введенных М. З. Берколайко и И. Я. Новиковым так называемых нестационарных, или почти всплесков [3]. В отличие от нестационарных всплесков, когда на каждом уровне j базис пространства V_j образован сдвигами своей функции φ^j , мы ограничиваемся конечным числом масштабирующих функций.

Из пп. а), б) и (0.4) следует, что для всех $k, l \in \{1, \dots, n\}$ $\bigcup_j V_{nj+l}^k = L^2(\mathbb{R})$, $\bigcap_j V_{nj+l}^k = \{0\}$.

Условия вложения (0.1)–(0.4) выполняются при выполнении следующих равенств, называемых *масштабирующими соотношениями*:

$$\varphi^s(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} h_{\nu}^{s,ps} \varphi_{1,\nu}^{ps}(x). \quad (0.5)$$

Для пространств V_j^s строятся подпространства W_j^s , дополняющие их до следующего пространства V_{j+1}^{ps} таким образом, что выполняются условия

1) $V_j^s \oplus W_j^s = V_{j+1}^{ps}$;

2) $V_j^s \perp W_j^s \quad \forall j \in \mathbb{Z}, \quad s = 1, \dots, n$.

Базис пространства W_j^s образован функциями-всплесками $\{\psi_{j,k}^s(x) = 2^{j/2} \varphi^s(2^j x - k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$, где функции φ^s строятся по φ^{ps} следующим образом:

$$\psi^s(x) = \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} (-1)^{\nu-1} \overline{h_{1-\nu}^{s,ps}} \varphi_{1,\nu}^{ps}(x), \quad s = 1, \dots, n,$$

где $h_{\nu}^{s,ps}$ — коэффициенты из (0.5).

1. Сходимость по норме пространств $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$

В книге [2, гл. 5] показано, что при дополнительных ограничениях в классическом КМА на функции-всплески и масштабирующие функции разложение функции в ряд Фурье

$$f(x) = \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k} \rangle \psi_{j,k}(x)$$

по всплескам сходится не только в пространстве $L^2(\mathbb{R})$, но и в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.

В данной работе на основе методов, описанных в книге [2, гл. 5], доказано, что при подобных ограничениях на функции φ^s и ψ^s разложения функции в ряды Фурье по n -раздельным всплескам

$$f(x) = \sum_{s=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{nj+\kappa(s),k}^s \rangle \psi_{nj+\kappa(s),k}^s(x), \quad (1.1)$$

где κ — циклическая перестановка $\{1, \dots, n\}$, сходится также в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, по норме и почти всюду.

Введем для удобства следующие операторы.

Проекция f на пространство W_j^s

$$Q_j^s f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \psi_{j,k}^s \rangle \psi_{j,k}^s, \quad f \in L^2(\mathbb{R}).$$

Тогда ряд (1.1) перепишем в виде

$$f(x) = \sum_{s=1}^n \sum_{j \in \mathbb{Z}} Q_{nj+\kappa(s)}^s f(x)$$

Проекция f на пространство $V_{nj+\kappa(r)}^r$

$$P_{nJ+\kappa(r)}^r f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{nJ+\kappa(r),k}^r \rangle \varphi_{nJ+\kappa(r),k}^r, \quad f \in L^2(\mathbb{R}). \quad (1.2)$$

Так как выполнено $V_j^s \oplus W_j^s = V_{j+1}^s$, то $Q_j^s = P_{j+1}^s - P_j^s$. Выражение (1.2) является частичной суммой ряда (1.1). Действительно,

$$P_{nJ+\kappa(r)}^r f = \sum_{s=1}^n \sum_{j=-\infty}^{J-1} Q_{nj+\kappa(s)}^s f + \sum_{s=1}^r Q_{nJ+\kappa(s)}^s f.$$

Также нам потребуется следующий оператор, соответствующий всплеску ψ^r ,

$$S_{nJ+\kappa(r),l}^{\sigma,s} f(x) = P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x) + \sum_{m=1}^l \langle f, \psi_{nJ+\kappa(r),\sigma(m)}^r \rangle \psi_{nJ+\kappa(r),\sigma(m)}^r(x), \quad (1.3)$$

где $f \in L^2(\mathbb{R})$, $j, r \in \mathbb{Z}$, а σ — некоторая перестановка в $\mathbb{Z}$.

Так как $P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x)$ и $S_{nJ+\kappa(r),l}^{\sigma,s} f(x)$ — это частичные суммы рядов (1.1), то, доказав сходимость $P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x)$ и $S_{nJ+\kappa(r),l}^{\sigma,s} f(x)$ к функции $f(x)$ по норме и почти всюду в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, мы докажем и сходимость рядов (1.1) к функции $f(x)$ по норме и почти всюду в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$.

Установим, когда такие операторы определены в $L^p(\mathbb{R})$ и изучим их сходимость при $j \rightarrow \infty$.

Введем функцию W на $[0, \infty)$ со свойствами

$$\left. \begin{aligned} &W \in L^1([0, \infty)); \\ &W \text{ убывает;} \\ &W(0) < \infty. \end{aligned} \right\} \quad (1.4)$$

Заметим, что при этом $W(0) > 0$ ($W(|x|) > 0$), $W(|x|) \in L^p(\mathbb{R})$, $p > 1$. Будем говорить, что функция g мажорируется функцией W , если $|g(x)| \leq W(|x|)$, где W удовлетворяет условиям (1.4).

В дальнейшем нам потребуется следующая известная лемма (см., например, [2, лемма 3.12]).

Лемма. Предположим, что функция W на $[0, \infty)$ удовлетворяет условиям (1.4). Тогда

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} W(|x - k|) W(|y - k|) \leq C W\left(\frac{|x - y|}{2}\right), \quad x, y \in \mathbb{R},$$

где константа C зависит только от W .

Пусть масштабирующие функции φ^s и всплески ψ^s , $s = 1, \dots, n$, мажорируются функциями W , W_1 . Тогда мы можем расширить операторы P_j^s , Q_j^s и $S_{j,k}^{\sigma,s}$ на пространства $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$. Заметим что, если функция g мажорируется функцией W , то $g_{j,k} \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, $j, k \in \mathbb{Z}$.

Для таких функций запишем $\langle f, \varphi_{j,k}^s \rangle$ в виде интеграла и заменим в (1.2) порядок суммирования и интегрирования. Это возможно в силу леммы и теоремы Лебега о мажорантной сходимости. Действительно, в выражении

$$\begin{aligned} \sum_{k \in \mathbb{Z}} \langle f, \varphi_{nJ+\kappa(r),k}^r \rangle \varphi_{nJ+\kappa(r),k}^r &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}} f(y) \overline{\varphi_{nJ+\kappa(r),k}^r(y)} dy \varphi_{nJ+\kappa(r),k}^r(x) \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \sum_{k=-m}^m \int_{\mathbb{R}} f(y) 2^{nJ+\kappa(r)} \varphi^r(2^{nJ+\kappa(r)}x - k) \overline{\varphi^r(2^{nJ+\kappa(r)}y - k)} dy \\ &= \lim_{m \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} \sum_{k=-m}^m f(y) 2^{nJ+\kappa(r)} \varphi^r(2^{nJ+\kappa(r)}x - k) \overline{\varphi^r(2^{nJ+\kappa(r)}y - k)} dy \end{aligned}$$

подынтегральная функция в силу леммы ограничена интегрируемой функцией. Получим, что

$$(P_{nJ+\kappa(r)}^r f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^j K_{\varphi}^r(2^{nJ+\kappa(r)}x, 2^{nJ+\kappa(r)}y) f(y) dy, \quad (1.5)$$

где

$$K_{\varphi}^r(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^r(x - k) \overline{\varphi^r(y - k)}.$$

Аналогично

$$(Q_j^s f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} 2^j K_{\psi}^s(2^j x, 2^j y) f(y) dy,$$

где

$$K_{\psi}^s(x, y) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \psi^s(x - k) \overline{\psi^s(y - k)}.$$

Для оператора $S_{nJ+\kappa(r),m}^{\sigma,r}$ имеем

$$\begin{aligned} (S_{nJ+\kappa(r),m}^{\sigma,r} f)(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} 2^{nJ+\kappa(r)} K_{\psi}^r(2^{nJ+\kappa(r)}x, 2^{nJ+\kappa(r)}y) f(y) dy \\ &+ \int_{-\infty}^{\infty} 2^{nJ+\kappa(r)} K^{\sigma,l,r}(2^{nJ+\kappa(r)}x, 2^{nJ+\kappa(r)}y) f(y) dy, \end{aligned} \quad (1.6)$$

где

$$K^{\sigma,l,r}(x, y) = \sum_{m=1}^l \psi^r(x - \sigma(m)) \overline{\psi^r(y - \sigma(m))}.$$

Для функций φ^s , ψ^s и соответствующих операторов P_j^s , Q_j^s и $S_{j,k}^{\sigma,s}$, $s = 1, \dots, n$, справедливо следующее утверждение.

Предложение 1 [2, предложение 3.13]. (а) Пусть масштабирующая функция φ^s мажорируется функцией W . Тогда существует $C > 0$, не зависящее от j , такое, что для всех $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, выполнено

$$\|P_j^s f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|W\|_{L^1[0,\infty)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

(б) Пусть функция-всплеск ψ^s мажорируется функцией W . Тогда существует $C > 0$, не зависящее от j , такое, что для всех $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, выполнено

$$\|Q_j^s f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \|W\|_{L^1[0,\infty)} \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

(в) Пусть функции φ^s и ψ^s мажорируются функциями W , W_1 с функциями W , W_1 . Тогда существует $C = C(W, W_1) > 0$, не зависящее от j, k и σ , такое, что для всех $f \in L^2(\mathbb{R}) \cap L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, выполнено

$$\|S_{j,k}^{\sigma,s} f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C(W, W_1) \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Покажем, что, как и в классическом случае, для n -раздельных масштабирующих функций, целочисленные сдвиги которых образуют ортонормированный базис пространства V_0^s , справедливо следующее утверждение.

Предложение 2. Пусть масштабирующие функции φ^s мажорируются функцией W . Тогда для почти всех $x \in \mathbb{R}$ выполнено

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^s(x + k) = 1, \quad (1.7)$$

$$\int_{\mathbb{R}} 2^j K_{\varphi}^s(2^j x, 2^j y) dy = 1 \quad \forall j \in \mathbb{Z}. \quad (1.8)$$

Доказательство. Найдем коэффициенты разложения 1-периодической функции $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^s(x + k)$ в ряд Фурье. Поменяем порядок суммирования и интегрирования. Это возможно благодаря теореме Лебега о мажорантной сходимости.

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^s(x + k) e^{-2\pi i l x} dx &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_0^1 \varphi^s(x + k) e^{-2\pi i l x} dx = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \int_k^{k+1} \varphi^s(x) e^{-2\pi i l x} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \varphi^s(x) e^{-2\pi i l x} dx = \widehat{\varphi^s}(l) = \delta_{l,0}. \end{aligned}$$

Последнее равенство справедливо, если функции $\varphi^s(x)$, $s = 1, \dots, n$, являются масштабирующими в n -раздельном КМА (см., например, [1]). Таким образом, видим, что все коэффициенты Фурье 1-периодической функции $\sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^s(x + k)$ равны нулю, кроме нулевого, который равен единице. Отсюда следует справедливость равенства (1.7).

Докажем равенство (1.8). Действительно,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} 2^j K_{\varphi}^s(2^j x, 2^j y) dy &= \int_{\mathbb{R}} 2^j \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^s(2^j x - k) \overline{\varphi^s(2^j y - k)} dy \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^s(2^j x - k) \int_{\mathbb{R}} 2^j \overline{\varphi^s(2^j y - k)} dy = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^s(2^j x - k) \int_{\mathbb{R}} \overline{\varphi^s(y)} dy = 1 * \widehat{\overline{\varphi^s}}(0) = 1. \quad \square \end{aligned}$$

Для того чтобы изучить операторы $P_{nJ+\kappa(r)}^r$ и $S_{nJ+\kappa(r),l}^{\sigma,r}$, рассмотрим оператор

$$T_j f(x) = \int_{\mathbb{R}} 2^j K(2^j x, 2^j y) (f(y) - f(x)) dy, \quad (1.9)$$

где $K(x, y) \leq CW(|x - y|/2)$, W удовлетворяет (1.4). Для таких T_j справедлива следующая теорема, аналогичная теореме 3.16 из [2].

Теорема 1. *Для операторов T_j , определенных в (1.9), справедливы утверждения*

(а) *если $1 \leq p < \infty$, $f \in L^p(\mathbb{R})$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} \|T_j f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$;*

(б) *$\lim_{j \rightarrow \infty} \|T_j f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$ для всех равномерно непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.*

Доказательство. Для доказательства (а) возьмем $f \in L^p(\mathbb{R})$. Простой заменой переменных имеем

$$|T_j f(x)| \leq C \int_{\mathbb{R}} 2^j W(2^{j-1}|t|) |f(x-t) - f(x)| dt. \quad (1.10)$$

Применяя обобщенное неравенство Минковского для интегралов, получим

$$\begin{aligned} \|T_j f\|_{L^p(\mathbb{R})} &\leq C \int_{\mathbb{R}} 2^j W(2^{j-1}|t|) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} dt \\ &= C \int_{\mathbb{R}} W\left(\frac{|t|}{2}\right) \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-2^{-j}t) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} dt \leq \int_{\mathbb{R}} W\left(\frac{|t|}{2}\right) \omega\left(\frac{t}{2^j}, f\right)_p dt. \end{aligned}$$

Выражение

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)|^p dx \right)^{1/p} = \|\Delta_h f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq \omega(h, f)_p,$$

где $\omega(h, f)_p$ — модуль непрерывности функции f в пространстве L^p , $\omega(h, f)_p \rightarrow 0$ при $|h| \rightarrow 0$ и $0 \leq p < \infty$. По теореме Лебега о мажорантной сходимости (подынтегральное выражение ограничено интегрируемой функцией $W(|t|/2)\omega(h, f)_p$) получим справедливость утверждения (а).

Чтобы доказать утверждение (б), рассмотрим равномерно непрерывную $f \in L^\infty(\mathbb{R})$. Тогда

$$\omega_\infty(h) = \sup_{x \in \mathbb{R}} |f(x-h) - f(x)| \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow 0$ равномерно по x . По (1.10) имеем

$$\|T_j f\|_{L^p(\mathbb{R})} \leq C \int_{\mathbb{R}} \omega_\infty(t) 2^j W(2^{j-1}|t|) dt$$

и, применив теорему Лебега о мажорантной сходимости, получим требуемое утверждение. $\square$

Следствие 1. *Предположим, что φ^s , $s = 1, \dots, n$, — это масштабирующие функции, которые мажорируются функцией W .*

(а) *Если $1 \leq p < \infty$, то $\lim_{J \rightarrow \infty} \|P_{nJ+\kappa(r)}^r f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$ для всех $f \in L^p(\mathbb{R})$.*

(б) *$\lim_{J \rightarrow \infty} \|P_{nJ+\kappa(r)}^r f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$ для всех равномерно непрерывных f .*

Доказательство. В силу (1.5) и п. (а) предложения 1, запишем

$$P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} 2^j K_{\varphi}^r(2^{nJ+\kappa(r)}x, 2^{nJ+\kappa(r)}y) (f(y) - f(x)) dy. \quad (1.11)$$

Здесь

$$|K_{\varphi}^r(x, y)| = \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi^r(x - k) \varphi^r(y - k) \right| \leq \sum_{k \in \mathbb{Z}} W(x - k) W(y - k) \leq CW \left(\frac{|x - y|}{2} \right)$$

по лемме. Применив к выражению (1.11) теорему 1, получим требуемое утверждение. $\square$

Следствие 2. Предположим, что всплески ψ^s и масштабирующие функции φ^s , $s = 1, \dots, n$, мажорируются функциями W, W_1 .

(а) Если $1 \leq p < \infty$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} \|S_{nJ+\kappa(r),k}^{\sigma,r} f - f\|_{L^p(\mathbb{R})} = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$ и всех $f \in L^p(\mathbb{R})$.

(б) $\lim_{j \rightarrow \infty} \|S_{nJ+\kappa(r),k}^{\sigma,r} f - f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} = 0$ для всех $k = 1, 2, \dots$ и всех равномерно непрерывных $f \in L^\infty(\mathbb{R})$.

Доказательство. Используя (1.3) и $\int_{\mathbb{R}} \psi^s(y) dy = \widehat{\psi^s}(0) = 0$, получим

$$\begin{aligned} & S_{nJ+\kappa(r),k}^{\sigma,r} f(x) - f(x) \\ &= [P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x) - f(x)] + \int_{\mathbb{R}} \left\{ \sum_{m=1}^k \psi_{nJ+\kappa(r),\sigma(m)}^r(x) \overline{\psi_{nJ+\kappa(r),\sigma(m)}^r(y)} \right\} [f(y) - f(x)] dy \\ &= [P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x) - f(x)] + \int_{\mathbb{R}} 2^{nJ+\kappa(r)} K^{\sigma,k,r}(2^{nJ+\kappa(r)}x, 2^{nJ+\kappa(r)}y) [f(y) - f(x)] dy. \end{aligned}$$

По следствию 1 $\lim_{j \rightarrow \infty} \|P_{nJ+\kappa(r)} f - f\|_{L^2(\mathbb{R})} = 0$. По лемме

$$|K^{\sigma,l,r}(x, y)| = \left| \sum_{m=1}^l \psi^r(x - m) \psi^r(y - m) \right| \leq \sum_{m=1}^k W_1(x - m) W_1(y - m) \leq CW_1 \left(\frac{1}{2} |x - y| \right),$$

поэтому требуемое утверждение следует из теоремы 1. $\square$

2. Сходимость почти всюду в пространствах $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$

В предыдущем разделе были рассмотрены всплески, порожденные n -раздельным кратно-масштабным анализом. Мы доказали, что и $P_{nJ+\kappa(r)}^r f$, и $S_{nJ+\kappa(r),l}^{\sigma,r} f$ сходятся к f по $L^p(\mathbb{R})$ -норме, $1 \leq p < \infty$, и по $L^\infty(\mathbb{R})$ -норме для равномерно непрерывных функций, когда всплески и масштабирующие функции удовлетворяют подходящим условиям. Этот раздел посвящен изучению поточечной сходимости операторов $P_{nJ+\kappa(r)}^r f$ и $S_{nJ+\kappa(r),l}^{\sigma,r} f$ к f в $L^p(\mathbb{R})$.

В общем виде, обозначив через T_j приведенные выше операторы (1.5), (1.6), докажем следующую теорему.

Теорема 2. Пусть $\{T_j, j \in \mathbb{Z}\}$ — семейство операторов, определенных в (1.9). Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, то $\lim_{j \rightarrow \infty} T_j f(x) = 0$ для каждого x на множестве точек Лебега функции f .

Доказательство. Если x — точка Лебега функции f , то для любого $\delta > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что

$$\frac{1}{r} \int_{|t| \leq r} |f(x-t) - f(x)| dt \leq \delta, \quad 0 < r \leq \eta. \quad (2.1)$$

В силу (1.10)

$$C^{-1}|T_j f(x)| \leq \int_{|t| < \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) |f(x-t) - f(x)| dt + \int_{|t| \geq \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) |f(x-t) - f(x)| dt = I + II.$$

Так как $W(|x|)$ стремится к нулю при $|x| \rightarrow \infty$ и $W \in L^1([0, \infty))$, то

$$rW(r) \leq \int_{r/2 \leq |x| \leq r} W(|x|) dx \rightarrow 0, \quad r \rightarrow 0.$$

Пусть

$$g(r) = |f(x-r) - f(x)|, \quad G(r) = \int_0^r g(s) ds.$$

Из (2.1) получаем, что

$$G(r) \leq r\delta, \quad 0 < r \leq \eta. \quad (2.2)$$

Теперь, интегрируя по частям, получим

$$I = \int_{|t| < \eta} 2^j W(2^{j-1}|t|) |f(x-t) - f(x)| dt = \int_0^\eta 2^j W(2^{j-1}r) g(r) dr + \int_0^\eta 2^j W(2^{j-1}r) g(r) dr = I_+ + I_-.$$

Оценим I_+ :

$$I_+ = G(r) 2^j W(2^{j-1}r) \Big|_0^\eta - \int_0^\eta G(r) 2^j 2^{j-1} W'(2^{j-1}r) dr \leq r\delta 2^j W(2^{j-1}r) \Big|_0^\eta - \int_0^{2^j \eta} G(2^{-j}r) 2^j dW\left(\frac{r}{2}\right).$$

Так как W убывает, то $dW(r/2)$ отрицательно, и из (2.2) и ограниченности $rW(r)$ при $|r| < \eta$ имеем

$$I_+ \leq C\delta - \delta \int_0^{2^j \eta} 2^{-j} r 2^j dW\left(\frac{r}{2}\right).$$

Для того чтобы оценить последнее слагаемое, обозначим $A = 2^j \eta$. Тогда, интегрируя по частям, получим

$$- \int_0^{2^j \eta} 2^{-j} r 2^j dW\left(\frac{r}{2}\right) = - \int_0^A u dW\left(\frac{u}{2}\right) = -AW\left(\frac{A}{2}\right) + \int_0^A \frac{W}{2}\left(\frac{v}{2}\right) dv = -AW\left(\frac{A}{2}\right) + \int_0^{A/2} W(u) du.$$

При $j \rightarrow \infty$ (или, что эквивалентно, $A \rightarrow \infty$) последнее выражение возрастает до $\|W\|_{L^1(\mathbb{R})}$ (так как $rW(r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$). Это дает нам оценку

$$I_+ \leq C\delta + 2\|W\|_{L^1(\mathbb{R})}\delta = a_+\delta.$$

Проведем аналогичные рассуждения для I_- . В итоге получим, что для I справедливо

$$I \leq a\delta. \quad (2.3)$$

Заметим, что константа a в (2.3) зависит только от W , в частности, она не зависит от j .

Для того чтобы оценить II , используем χ_η — характеристическую функцию множества $t \in \mathbb{R} : |t| \geq \eta$. Если p' — это число, сопряженное с p (т.е. такое, что $1/p + 1/p' = 1$), то, используя неравенство Гельдера, получим

$$II \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi_\eta(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)|^{p'} dt \right)^{1/p'} + |f(x)| \int_{\mathbb{R}} |\chi_\eta(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)| dt. \quad (2.4)$$

При этом

$$\int_{\mathbb{R}} |\chi_\eta(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)| dt = 2 \int_{|s| \geq 2^{j-1}\eta} W(|s|) ds$$

стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. То же справедливо для первого слагаемого в (2.4), так как

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}} |\chi_\eta(t) 2^j W(2^{j-1}|t|)|^{p'} dt \right)^{1/p'} &= \left(\int_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)|^{p'/p} |2^j W(2^{j-1}|t|)| dt \right)^{1/p'} \\ &\leq \left((|2^j W(2^{j-1}|t|)|^{p'/p}) \left(\int_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)| dt \right) \right)^{1/p'} \\ &\leq \left(\sup_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)| \right)^{1/p} \left(\int_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)| dt \right)^{1/p'}. \end{aligned}$$

Так как $rW(r)$ ограничено, а $\int_{|t| \geq \eta} |2^j W(2^{j-1}|t|)| dt \rightarrow 0$ при $j \rightarrow \infty$, получаем, что последнее выражение стремится к нулю при $j \rightarrow \infty$. Следовательно, выбирая достаточно большое j , получаем из (2.4), что II можно сделать меньше, чем δ . Таким образом, вместе с неравенством (2.3), получаем требуемый результат. $\square$

Следствие 3. Предположим, что $|\varphi^r(x)| \leq W(|x|)$, $r = 1, \dots, n$, где W обладает свойствами (1.4). Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, то

$$\lim_{j \rightarrow \infty} P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x) = f(x)$$

для почти всех x из множества Лебега функции f .

Доказательство. Рассмотрим выражение

$$T_{nJ+\kappa(r)} f(x) = P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x) - f(x) = \int_{\mathbb{R}} 2^j K_\varphi^r(2^{nJ+\kappa(r)}x, 2^{nJ+\kappa(r)}y) (f(y) - f(x)) dy.$$

Здесь $K_\varphi^r(x, y) \leq CW(|x - y|/2)$, поэтому можно применить теорему 2. Получим, что справедливо требуемое утверждение. $\square$

Следствие 4. Предположим, что функции $|\varphi^r(x)| \leq W(|x|)$, $|\psi^r(x)|$, $r = 1, \dots, n$, мажорируются функциями W, W_1 . Если $f \in L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, то для $k = 1, 2, \dots$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} S_{nJ+\kappa(r), k}^{\sigma, r} f(x) = f(x)$$

для почти всех x из множества Лебега функции f . В частности, частичные суммы $S_{nJ+\kappa(r), l}^{\sigma, r} f(x)$ сходятся к $f(x)$ почти всюду при $J \rightarrow \infty$ и $l = 1, 2, \dots$

Доказательство. Применим теорему 2 к выражению

$$S_{nJ+\kappa(r),l}^{\sigma,r} f(x) - f(x) = [P_{nJ+\kappa(r)}^r f(x) - f(x)] + \int_{\mathbb{R}} 2^{nJ+\kappa(r)} K^{\sigma,l,r}(2^{nJ+\kappa(r)}x, 2^{nJ+\kappa(r)}y) [f(y) - f(x)] dy,$$

где по лемме $|K^{\sigma,l,r}(x, y)| \leq CW_1((1/2)|x - y|)$. Получим, что справедливо требуемое утверждение. $\square$

Поступила 19.03.2019

После доработки 15.05.2019

Принята к публикации 20.05.2019

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Плещева Е.А. Новое обобщение ортогональных базисов всплесков // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2010. Т. 16, № 2. С. 264–271. doi: 10.1134/S0081543811050130.
2. Hernandez E., Weiss G. A first course on wavelets. London, N Y etc: CRC Press, Inc., 1996. 493 p. (Studies in Advanced Math.) doi: 10.1201/9781420049985.
3. Берколайко М.З., Новиков И.Я. О бесконечно гладких почти-всплесках с компактным носителем // Мат. заметки. 1994. Т. 56, № 3. С. 3–12.

Плещева Екатерина Александровна

канд. физ.-мат. наук, старший науч. сотрудник

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН;

доцент кафедры математического анализа

Уральский федеральный университет

г. Екатеринбург

e-mail: eplescheva@gmail.com

REFERENCES

1. Pleshcheva E.A. New generalization of orthogonal wavelet bases. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2011, vol. 273, suppl. 1, pp. S124–S132. doi: 10.1134/S0081543811050130.
2. Hernandez E. and Weiss G. *A first course on wavelets*. Ser. Studies in Advanced Math., London, N Y etc: CRC Press, Inc., 1996, 493 p. doi: 10.1201/9781420049985.
3. Berkolaiko M.Z., Novikov I.Ya. On infinitely smooth compactly supported almost-wavelets, *Math. Notes*, 1994, vol. 56, no. 3, pp. 877–883. doi: 10.1007/BF02362405.

Received March 19, 2019

Revised May 15, 2019

Accepted May 20, 2019

Ekaterina Aleksandrovna Pleshcheva, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia, e-mail: eplescheva@gmail.com.

Cite this article as: E. A. Pleshcheva. Approximation of functions by n -separate wavelets in the spaces $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p \leq \infty$, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 167–176.