ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.977

СУПЕРКОМПАКТНЫЕ ПРОСТРАНСТВА УЛЬТРАФИЛЬТРОВ И МАКСИМАЛЬНЫХ СЦЕПЛЕННЫХ СИСТЕМ[1]

А. Г. Ченцов

Рассматриваются максимальные сцепленные системы (МСС) и ультрафильтры (у/ф) широко понимаемых измеримых пространств (ИП); каждое такое ИП определяется заданием на непустом множестве π-системы его подмножеств с "нулем" и "единицей" (π-система есть семейство множеств, замкнутое относительно конечных пересечений). Среди π-систем выделяются полуалгебры и алгебры множеств, а также топологии и семейства замкнутых множеств в топологических пространствах. Исследуется проблема суперкомпактности пространства у/ф в оснащении топологией волмэновского типа, а также некоторые свойства битопологических пространств, точками которых являются МСС и у/ф соответствующего ИП. Исследуются условия на ИП, при которых МСС и у/ф отождествимы, что позволяет оснащать множество у/ф суперкомпактной топологией волмэновского типа, непосредственно используя аналогичную конструкцию для пространства МСС. Указаны также некоторые варианты ИП с алгебрами множеств, для которых волмэновское оснащение пространства у/ф суперкомпактно, хотя, вообще говоря, для соответствующего ИП существуют МСС, не являющиеся у/ф. В основе данного построения находится специальная конструкция гомеоморфизма волмэновских топологий. Приведены конкретные примеры ИП, для которых реализуется суперкомпактное пространство у/ф.

Ключевые слова: алгебра множеств, гомеоморфизм, максимальная сцепленная система, ультрафильтр.

A. G. Chentsov. Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems.

We consider maximal linked systems and ultrafilters of broadly understood measurable spaces; each of these measurable spaces is defined by a π-system of subsets of a nonempty set with "zero" and "one" (a π-system is a family of sets closed under finite intersections). There are specific types of π-systems: semialgebras and algebras of sets as well as topologies and families of closed sets in topological spaces. The problem of supercompactness of an ultrafilter space equipped by a Wallman type topology is studied, and certain properties of bitopological spaces whose points are maximal linked systems and ultrafilters of the corresponding measurable space are analyzed. We also investigate conditions on a measurable space under which maximal linked systems and ultrafilters can be identified, which makes it possible to equip a set of ultrafilters with a supercompact topology of Wallman type by means of a direct application of a similar construction of the space of maximal linked systems. We also give some variants of measurable spaces with algebras of sets for which the Wallman topology of the ultrafilter space is supercompact, although, in general, there exist maximal linked systems of the corresponding measurable space that are not ultrafilters. This scheme is based on a special construction of homeomorphism for Wallman topologies. We give specific examples of measurable spaces for which the supercompact ultrafilter space is realized.

Keywords: algebra of sets, homeomorphism, maximal linked system, ultrafilter.

Настоящий выпуск посвящен Виталию Ивановичу Бердышеву — замечательному ученому-математику и организатору науки. Виталий Иванович долгое время был директором Института и многое сделал для развития научных исследований и математического образования на Урале.

MSC: 54A09, 54A10, 54B05

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-240-257

1. Введение

Предметом исследования в статье являются вопросы, связанные с суперкомпактностью [1–3] топологических пространств (ТП) и аналогами суперрасширений, реализуемых в более общих, по сравнению с традиционными (см. [1–4]), ситуациях.

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00410).

Речь идет об ультрафильтрах (у/ф) и максимальных сцепленных системах (МСС) на π-системах [5, с. 14] с "нулем" и "единицей". В серии работ автора (см. [6–9] и др.) последовательно развивался подход, в рамках которого и множество у/ф на π-системе, и множество МСС оснащались парой сравнимых топологий, образуя битопологическое пространство (БТП); упомянутые топологии на идейном уровне связывались со схемами Волмэна и Стоуна (в связи с конструкциями на основе БТП см. монографию [10]). Сами упомянутые схемы применялись ранее в специальных случаях (так, в частности, первая схема отвечает конструкции, используемой при построении расширения Волмэна; см., например, [11, § 3.6]). При этом пространство МСС с топологией волмэновского типа (случай, отвечающий содержательно реализации схемы Волмэна) обладает свойством суперкомпактности (см. [1–3], а также [4, гл. VII]). Последнее, вообще говоря, не обладает наследственностью. Поэтому распространить упомянутое свойство на пространство у/ф в общем случае не удается (заметим, что всякий у/ф есть МСС) (см. [12, с. 63]). Тем не менее во многих случаях имеется возможность оснащения пространства у/ф суперкомпактной топологией волмэновского типа; это касается ситуации, когда все МСС рассматриваемого пространства являются у/ф. Данный случай, отвечающий положению, извлекаемому из [9, предложение 5.1], обсуждается и в настоящей работе.

Кроме того, исследуются и некоторые случаи, для которых свойство отождествимости МСС и у/ф отсутствует; имеется в виду ситуация, когда существуют МСС, не являющиеся у/ф. Будем именовать такие "особые" МСС *собственными*. Оказывается, что в ряде таких случаев пространство у/ф с топологией волмэновского типа также оказывается суперкомпактным. Это удается установить, привлекая то обстоятельство, что суперкомпактность является топологическим свойством, и конструируя естественный гомеоморфизм пространства у/ф на измеримом пространстве (ИП) с подходящей полуалгеброй множеств на пространство у/ф на ИП с алгеброй, порожденной упомянутой полуалгеброй. Оказывается, что данное построение удается осуществить для целого ряда конкретных ИП вышеупомянутого типа. Важную роль играет при этом операция декартова произведения, сохраняющая следующее ключевое свойство: если пространства-сомножители были такими, что собственные МСС в них отсутствовали, то таким же будет и соответствующее произведение. В работе отмечено, что данный подход позволяет получить условия суперкомпактности для пространства конечно-аддитивных (к.-а.) (0,1)-мер в оснащении относительной $*$-слабой топологией. В связи с исследованием пространств у/ф алгебры множеств отметим работы [13–15].

2. Общие определения и обозначения

В статье используется стандартная теоретико-множественная символика (кванторы, связки и др.); через $\varnothing$ обозначаем пустое множество, $\stackrel{\triangle}{=}$ — равенство по определению. *Семейством* называем множество, все элементы которого сами являются множествами. Принимаем аксиому выбора. Если x и y — объекты, то через $\{x; y\}$ обозначаем множество, содержащее в виде своих элементов x, y и не содержащее никаких других элементов. Для каждого объекта z в виде $\{z\} \stackrel{\triangle}{=} \{z; z\}$ имеем синглетон, содержащий z: $z \in \{z\}$. Следуя [16, с. 67] и учитывая, что каждое множество есть объект, полагаем, что если x и y — объекты, то $(x, y) \stackrel{\triangle}{=} \{\{x\}; \{x; y\}\}$, получая упорядоченную пару (УП) с первым элементом x и вторым элементом y. Если z — какая-либо УП, то через $pr_1(z)$ и $pr_2(z)$ обозначаем первый и второй элементы z соответственно; они как объекты однозначно определяются условием $z = (pr_1(z), pr_2(z))$. Если u, v и w — объекты, то $\{u; v; w\} \stackrel{\triangle}{=} \{u; v\} \cup \{w\}$.

Если X — множество, то через $\mathcal{P}(X)$ обозначаем семейство всех подмножеств (п/м) X и полагаем, что $\mathcal{P}'(X) \stackrel{\triangle}{=} \mathcal{P}(X) \setminus \{\varnothing\}$; $\mathrm{Fin}(X)$ есть по определению семейство всех конечных множеств из $\mathcal{P}'(X)$, т. е. семейство всех непустых конечных п/м X.

Если A и B — множества, то через B^A обозначаем множество всех отображений из A в B; соотношение $f \in B^A$ тождественно выражению $f\colon A \longrightarrow B$ (при $f \in B^A$ и $a \in A$ в виде

$f(a) \in B$, как обычно, имеем значение f в точке a). Если A и B — множества, $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}(A)$, то

$$f^1(C) \stackrel{\triangle}{=} \{f(x)\colon x \in C\} \in \mathcal{P}(B)$$

(образ C при действии f); прообраз п/м B обозначается традиционно. Для всяких множеств U, V и отображения $f \in V^U$

$$\big(f^1[\mathcal{U}] \stackrel{\triangle}{=} \{f^1(X)\colon X \in \mathcal{U}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(V)) \ \ \forall \mathcal{U} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(U))\big) \ \& \\ \big(f^{-1}[\mathcal{V}] \stackrel{\triangle}{=} \{f^{-1}(Y)\colon Y \in \mathcal{V}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(U)) \ \ \forall \mathcal{V} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(V))\big). \tag{2.1}$$

Семейства, получающиеся в (2.1), именуем образом и прообразом соответствующего непустого семейства множеств. Для любых двух непустых множеств X и Y полагаем, что

$$Y^X_{(*)} \stackrel{\triangle}{=} \{f \in Y^X \mid f^1(X) = Y\}, \tag{2.2}$$

получая множество всех сюръекций X на Y. В терминах (2.2) определено множество

$$(\mathrm{bi})[X;Y] \stackrel{\triangle}{=} \{f \in Y^X_{(*)} \mid \forall x_1 \in X \ \forall x_2 \in X \ \ (f(x_1) = f(x_2)) \Rightarrow (x_1 = x_2)\} \tag{2.3}$$

всех биекций X на Y (мы не исключаем того, что какое-то из множеств (2.2), (2.3) будет пустым).

Мы используем ниже операции над семействами [9, разд. 1]. Непустому семейству $\mathfrak{X}$ сопоставляем (см. [8, разд. 2]):

$$\begin{aligned} &\{\cup\}(\mathfrak{X}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ \bigcup_{X \in \mathcal{X}} X\colon \mathcal{X} \in \mathcal{P}(\mathfrak{X})\Big\}, \qquad &&\{\cap\}(\mathfrak{X}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ \bigcap_{X \in \mathcal{X}} X\colon \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X})\Big\}, \\ &\{\cup\}_\sharp(\mathfrak{X}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ \bigcup_{X \in \mathcal{K}} X\colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\Big\}, &&\{\cap\}_\sharp(\mathfrak{X}) \stackrel{\triangle}{=} \Big\{ \bigcap_{X \in \mathcal{K}} X\colon \mathcal{K} \in \mathrm{Fin}(\mathfrak{X})\Big\}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

получая четыре семейства, каждое из которых содержит $\mathfrak{X}$. Если $\mathbb{M}$ — множество и $\mathcal{M} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M}))$, то

$$\mathbf{C}_{\mathbb{M}}[\mathcal{M}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbb{M} \setminus M\colon M \in \mathcal{M}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbb{M})).$$

Кроме того, непустому семейству $\mathcal{A}$ и множеству B сопоставляем след

$$\mathcal{A}|_B \stackrel{\triangle}{=} \{A \cap B\colon A \in \mathcal{A}\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(B))$$

семейства $\mathcal{A}$ на множество B. Как обычно, $\mathbb{N} \stackrel{\triangle}{=} \{1; 2; \ldots\} \in \mathcal{P}'(\mathbb{R})$, где $\mathbb{R}$ — вещественная прямая; при $n \in \mathbb{N}$ полагаем, что $\overline{1,n} \stackrel{\triangle}{=} \{k \in \mathbb{N} \mid k \leqslant n\}$. Полагаем также, что натуральные числа — элементы $\mathbb{N}$ — не являются множествами. С учетом этого для всяких множества T и числа $n \in \mathbb{N}$ вместо $T^{\overline{1,n}}$ используем более традиционное обозначение T^n, что (в силу сделанной выше оговорки) не приводит к двусмысленности.

Специальные семейства. Фиксируем до конца раздела непустое множество $\mathbf{I}$. В виде

$$\pi[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\varnothing \in \mathcal{I}) \& (\mathbf{I} \in \mathcal{I}) \& (A \cap B \in \mathcal{I} \ \ \forall A \in \mathcal{I} \ \ \forall B \in \mathcal{I})\big\} \tag{2.5}$$

имеем непустое семейство всех π-систем [5, с. 14] п/м $\mathbf{I}$ с "нулем" и "единицей". Далее вводятся некоторые специальные подсемейства (2.5). В частности, семейство

$$\pi^\sharp_*[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L_1 \in \mathcal{L} \ \ \forall L_2 \in \mathcal{L} \ \ \forall L_3 \in \mathcal{L} \\ ((L_1 \cap L_2 \neq \varnothing) \& (L_2 \cap L_3 \neq \varnothing) \& (L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)) \Rightarrow (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\big\} \tag{2.6}$$

определяет специальный класс π-систем, играющий важную роль в оснащении соответствующего множества у/ф суперкомпактной топологией. Семейство всех отделимых π-систем (п/м $\mathbf{I}$) имеет следующий вид:

$$\tilde{\pi}^0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus L\ \ \exists \Lambda \in \mathcal{L}\colon (x \in \Lambda)\&(\Lambda \cap L = \varnothing)\big\}.$$

Среди отделимых π-систем содержатся полуалгебры множеств. Для их определения введем сначала при $\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}]$, $A \in \mathcal{P}(\mathbf{I})$ и $n \in \mathbb{N}$ множество

$$\Delta_n(A, \mathcal{L}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{(L_i)_{i \in \overline{1,n}} \in \mathcal{L}^n \mid \big(A = \bigcup_{i=1}^{n} L_i\big)\&(L_p \cap L_q = \varnothing\ \ \forall p \in \overline{1,n}\ \ \forall q \in \overline{1,n} \setminus \{p\})\big\}$$

всех $\mathcal{L}$-разбиений A порядка n. Тогда

$$\Pi[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{L} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \forall L \in \mathcal{L}\ \ \exists n \in \mathbb{N}\colon \Delta_n(\mathbf{I} \setminus L, \mathcal{L}) \neq \varnothing\big\} \in \mathcal{P}'(\pi[\mathbf{I}]). \tag{2.7}$$

С учетом (2.6) и (2.7) введем также специальный класс полуалгебр множеств

$$\begin{gathered}\Pi_*^\sharp[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{L} \in \Pi[\mathbf{I}] \mid \forall L_1 \in \mathcal{L}\ \ \forall L_2 \in \mathcal{L}\ \ \forall L_3 \in \mathcal{L}\\ \big((L_1 \cap L_2 \neq \varnothing)\&(L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\&(L_1 \cap L_3 \neq \varnothing)\big) \Rightarrow\\ (L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing)\big\} = \Pi[\mathbf{I}] \cap \pi_*^\sharp[\mathbf{I}].\end{gathered} \tag{2.8}$$

Конструкции на основе (2.6) и (2.8) потребуются при исследовании вопросов, связанных с суперкомпактностью пространства у/ф. Всюду в дальнейшем

$$(\mathrm{top})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\tau \in \pi[\mathbf{I}] \mid \bigcup_{G \in \mathcal{G}} G \in \tau\ \ \forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\tau)\big\};$$

если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\mathbf{I}, \tau)$ есть топологическое пространство (ТП). Кроме того, $(\mathrm{clos})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathbf{C_I}[\tau]\colon \tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\}$ определяет семейство всех замкнутых топологий [17, с. 98] на $\mathbf{I}$. Наконец,

$$(\mathrm{alg})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{A} \in \pi[\mathbf{I}] \mid \mathbf{I} \setminus A \in \mathcal{A}\ \ \forall A \in \mathcal{A}\}$$

есть семейство всех алгебр п/м $\mathbf{I}$. При $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[\mathbf{I}]$ в виде $(\mathbf{I}, \mathcal{A})$ имеем ИП с алгеброй множеств.

Базы и предбазы. Введем в рассмотрение

$$\begin{gathered}(\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \big(\mathbf{I} = \bigcup_{B \in \beta} B\big)\,\&\\ \big(\forall B_1 \in \beta\ \ \forall B_2 \in \beta\ \ \forall x \in B_1 \cap B_2\ \ \exists B_3 \in \beta\colon (x \in B_3)\&(B_3 \subset B_1 \cap B_2)\big)\big\},\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}(\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\beta \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid (\mathbf{I} \in \beta)\&\big(\bigcap_{B \in \beta} B = \varnothing\big)\&\\ \big(\forall B_1 \in \beta\ \ \forall B_2 \in \beta\ \ \forall x \in \mathbf{I} \setminus (B_1 \cup B_2)\ \ \exists B_3 \in \beta\colon (B_1 \cup B_2 \subset B_3)\&(x \notin B_3)\big)\big\},\end{gathered}$$

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cap\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\big\} = \big\{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \mathbf{I} = \bigcup_{X \in \chi} X\big\}, \tag{2.9}$$

$$(\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\chi \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I})) \mid \{\cup\}_\sharp(\chi) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\big\}.$$

Тем самым определены базы и предбазы некоторых топологий (открытых и замкнутых) на множестве $\mathbf{I}$;

$$\big(\{\cup\}(\beta) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]\ \ \forall \beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\big)\&\big(\{\cap\}(\tilde{\beta}) \in (\mathrm{clos})[\mathbf{I}]\ \ \forall \tilde{\beta} \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]\big).$$

Ясно, что $\{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\chi)) \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$ при $\chi \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbf{I}]$. Если же $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то

$$(\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \big\{\beta \in (\mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \tau = \{\cup\}(\beta)\big\},$$

$$(\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \overset{\triangle}{=} \big\{\tilde{\beta} \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \mathbf{C_I}[\tau] = \{\cap\}(\tilde{\beta})\big\},$$

$$(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \overset{\triangle}{=} \big\{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \{\cap\}_\sharp(\chi) \in (\tau - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I}]\big\},$$

$$(\mathrm{p} - \mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I};\tau] \overset{\triangle}{=} \big\{\tilde{\chi} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_{\mathrm{cl}}[\mathbf{I}] \mid \{\cup\}_\sharp(\tilde{\chi}) \in (\mathrm{cl} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau]\big\}.$$

Тем самым введены базы и предбазы (открытые и замкнутые) конкретного ТП $(\mathbf{I},\tau)$. Все они являются непустыми семействами п/м $\mathbf{I}$.

Введем в рассмотрение покрытия $\mathbf{I}$ множествами заданного априори семейства п/м $\mathbf{I}$: если $\mathcal{I} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то

$$(\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \mathcal{I}] \overset{\triangle}{=} \big\{\mathcal{J} \in \mathcal{P}'(\mathcal{I}) \mid \mathbf{I} \ = \bigcup_{J\in\mathcal{J}} J\big\}. \tag{2.10}$$

В терминах (2.10) определяем семейство всех суперкомпактных топологий на $\mathbf{I}$

$$\begin{gathered}((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \big\{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid \\ \exists \mathcal{S} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \ \ \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I}\,|\,\mathcal{S}] \ \ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \ \exists G_2 \in \mathcal{G} \colon \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\big\}.\end{gathered} \tag{2.11}$$

В связи с дальнейшими построениями уместна следующая модификация (2.11), а именно: мы введем в рассмотрение суперкомпактные предбазы. Итак, пусть

$$((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \overset{\triangle}{=} \{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \mid \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \chi] \ \ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \ \exists G_2 \in \mathcal{G} \colon \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\big\}.$$

Кроме того, мы вводим суперкомпактные предбазы конкретных топологий: если $\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то

$$\begin{gathered}((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \\ \overset{\triangle}{=} \big\{\chi \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \mid \forall \mathcal{G} \in (\mathrm{COV})[\mathbf{I} \mid \chi] \ \ \exists G_1 \in \mathcal{G} \ \ \exists G_2 \in \mathcal{G} \colon \mathbf{I} = G_1 \cup G_2\big\} \\ = ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})[\mathbf{I}] \cap (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau].\end{gathered} \tag{2.12}$$

Из (2.11) и (2.12) следует, конечно, что

$$((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbf{I}] = \big\{\tau \in (\mathrm{top})[\mathbf{I}] \mid ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})_0[\mathbf{I};\tau] \neq \varnothing\big\}.$$

Если $\tau \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbf{I}]$, то $(\mathbf{I},\tau)$ есть суперкомпактное ТП. В заключение раздела отметим, что суперкомпактность есть топологическое свойство (сохраняется при гомеоморфизмах). В этой связи условимся о некоторых обозначениях. Так, для непустых множеств X, Y и биекции $f \in (\mathrm{bi})[X;Y]$ через $\overset{-1}{f}$ условимся обозначать биекцию, обратную к f: $\overset{-1}{f} \in X^Y$, и при $y \in Y$ элемент $\overset{-1}{f}(y) \in X$ однозначно определяется условием $\big\{\overset{-1}{f}(y)\big\} = f^{-1}(\{y\})$. Далее, для любых двух ТП (X,τ_1), $X \neq \varnothing$ и (Y,τ_2), $Y \neq \varnothing$ полагаем

$$C(X,\tau_1,Y,\tau_2) \overset{\triangle}{=} \big\{f \in Y^X \mid f^{-1}(G) \in \tau_1 \ \ \forall G \in \tau_2\big\}$$

(множество всех непрерывных отображений из (X,τ_1) в (Y,τ_2)). Тогда для любых непустых множеств U и V, а также топологий $\mathbf{t}_1 \in (\mathrm{top})[U]$ и $\mathbf{t}_2 \in (\mathrm{top})[V]$

$$(\mathrm{Hom})[U;\mathbf{t}_1;V;\mathbf{t}_2] \overset{\triangle}{=} \big\{f \in (\mathrm{bi})[U;V] \cap C(U,\mathbf{t}_1,V,\mathbf{t}_2) \mid \overset{-1}{f} \in C(V,\mathbf{t}_2,U,\mathbf{t}_1)\big\}$$

есть множество (возможно пустое) всех гомеоморфизмов $(U, \mathbf{t}_1)$ на $(V, \mathbf{t}_2)$. Будем использовать (2.1). Для большей краткости в обозначениях зафиксируем до конца раздела непустые множества X и Y. Тогда (см. (2.1), (2.9))

$$f^1[\mathcal{X}] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[Y] \quad \forall f \in Y^X_{(*)} \quad \forall \mathcal{X} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[X]. \tag{2.13}$$

Также легко устанавливается, что

$$f^{-1}[\mathcal{Z}] \in (\mathrm{COV})[X \mid f^{-1}[\mathcal{Y}]] \quad \forall f \in Y^X \quad \forall \mathcal{Y} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(Y)) \quad \forall \mathcal{Z} \in (\mathrm{COV})[Y \mid \mathcal{Y}].$$

Кроме того, имеем очевидное свойство биекций (см.(2.3))

$$f^{-1}[f^1[\mathcal{X}]] = \mathcal{X} \quad \forall f \in (\mathrm{bi})[X; Y] \quad \forall \mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)).$$

В развитие (2.13) отметим следующее легкопроверяемое свойство биективных образов суперкомпактных (открытых) предбаз:

$$f^1[\mathcal{X}] \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})[Y] \quad \forall f \in (\mathrm{bi})[X; Y] \quad \forall \mathcal{X} \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{p} - \mathrm{BAS})[X]. \tag{2.14}$$

По свойствам биекций применительно к операциям взятия образа и прообраза имеем также, что

$$f^1[\{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\mathcal{X}))] = \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(f^1[\mathcal{X}])) \quad \forall f \in (\mathrm{bi})[X; Y] \quad \forall \mathcal{X} \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})[X]. \tag{2.15}$$

Комбинируя (2.14) и (2.15), получаем следующее свойство биективных образов суперкомпактных топологий.

Предложение 1. *Если* $f \in (\mathrm{bi})[X; Y]$ *и* $\tau \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[X]$, *то* $f^1[\tau] \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[Y]$.

Итак, суперкомпактность топологий сохраняется биекциями в сторону образа. Из предложения 1, в частности, имеем следствие.

Следствие 1. *Суперкомпактность является топологическим свойством:*
если $\tau \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[X]$ *и* $\vartheta \in (\mathrm{top})[Y]$, *то* $((\mathrm{Hom})[X; \tau; Y; \vartheta] \neq \varnothing) \Rightarrow (\vartheta \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[Y])$.

Доказательство очевидно, поскольку $f^1[\tau] = \vartheta$ при $f \in (\mathrm{Hom})[X; \tau; Y; \vartheta]$.

В заключение раздела, возвращаясь к множеству $\mathbf{I}$, введем важное для дальнейшего понятие сцепленной системы и МСС. Рассматриваем при этом сцепленность непустых подсемейств $\mathcal{P}(\mathbf{I})$: если $\mathfrak{X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(\mathbf{I}))$, то

$$\langle \mathfrak{X} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in \mathcal{P}'(\mathfrak{X}) \mid X_1 \cap X_2 \neq \varnothing \ \forall X_1 \in \mathcal{X} \ \forall X_2 \in \mathcal{X}\} \tag{2.16}$$

есть семейство всех сцепленных подсемейств $\mathfrak{X}$ (т. е. сцепленных систем в $\mathfrak{X}$), а

$$\langle \mathfrak{X} - \mathrm{link} \rangle_0[\mathbf{I}] \stackrel{\triangle}{=} \{\mathcal{X} \in \langle \mathfrak{X} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] \mid \forall \tilde{\mathcal{X}} \in \langle \mathfrak{X} - \mathrm{link} \rangle[\mathbf{I}] \ (\mathcal{X} \subset \tilde{\mathcal{X}}) \Rightarrow (\mathcal{X} = \tilde{\mathcal{X}})\} \tag{2.17}$$

есть соответственно семейство всех МСС, содержащихся в $\mathfrak{X}$. Ниже (2.16) и (2.17) будут использоваться при различных конкретизациях $\mathbf{I}$ и $\mathfrak{X}$.

3. Ультрафильтры π-систем

Всюду в дальнейшем фиксируем непустое множество E. По мере надобности будут вводиться те или иные его конкретизации. Кроме того, фиксируем π-систему $\mathcal{E} \in \pi[E]$; далее также будут использоваться различные конкретизации $\mathcal{E}$, что всякий раз будет специально оговариваться. Пару $(E, \mathcal{E})$ рассматриваем как широко понимаемое ИП. Тогда

$$\mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{F} \in \mathcal{P}'(\mathcal{E}) \mid (\varnothing \notin \mathcal{F})\&(A \cap B \in \mathcal{F} \ \ \forall A \in \mathcal{F} \ \ \forall B \in \mathcal{F})\& \\ (\forall F \in \mathcal{F} \ \ \forall \Sigma \in \mathcal{E} \ \ (F \subset \Sigma) \Rightarrow (\Sigma \in \mathcal{F}))\big\} \tag{3.1}$$

есть семейство всех фильтров данного ИП, а

$$\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \mid \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \ \ (\mathcal{U} \subset \mathcal{F}) \Rightarrow (\mathcal{U} = \mathcal{F})\big\} \\ = \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \mid \forall \Sigma \in \mathcal{E} \ \ (\Sigma \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}) \Rightarrow (\Sigma \in \mathcal{U})\big\}$$

есть соответственно семейство всех у/ф ИП $(E, \mathcal{E})$. При $x \in E$ имеем тривиальный (фиксированный) фильтр

$$(\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\Sigma \in \mathcal{E} \mid x \in \Sigma\big\} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}),$$

отвечающий точке x. При этом (см. [18, (5.9)])

$$((\mathcal{E} - \mathrm{triv})[x] \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \ \ \forall x \in E) \Leftrightarrow (\mathcal{E} \in \tilde{\pi}^0[E]).$$

С использованием леммы Цорна проверяется, что $\forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*(\mathcal{E}) \ \ \exists \mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})\colon \mathcal{F} \subset \mathcal{U}$. В итоге $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \neq \varnothing$. Заметим, что при $\Sigma \in \mathcal{E}$

$$\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \mid \Sigma \in \mathcal{U}\big\} = \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \mid \Sigma \cap U \neq \varnothing \ \ \forall U \in \mathcal{U}\big\}. \tag{3.2}$$

В терминах множеств (3.2) определяется π-система $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \{\Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma)\colon \Sigma \in \mathcal{E}\} \in \pi[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$ и новое (широко понимаемое) ИП

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), (\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}]);$$

легко видеть, что $(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \in (\mathrm{BAS})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]$. Поэтому определена топология

$$\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E] \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}((\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}]) \\ = \big\{\mathbb{G} \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})) \mid \forall \mathcal{U} \in \mathbb{G} \ \ \exists U \in \mathcal{U}\colon \Phi_{\mathcal{E}}(U) \subset \mathbb{G}\big\} \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})], \tag{3.3}$$

превращающая множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})$ в нульмерное [11, 6.2] T_2-пространство

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}), \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]) \tag{3.4}$$

(мы рассматриваем (3.3), (3.4) как реализацию схемы Стоуна, обычно применяемой в случае, когда $(E, \mathcal{E})$ есть ИП с алгеброй множеств). При этом (см. (3.2), (3.3))

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \in (\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E] - \mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})]\colon (\mathbb{UF})[E; \mathcal{E}] \subset \mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E] \cap \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{E})}[\mathbf{T}_{\mathcal{E}}^*[E]]. \tag{3.5}$$

З а м е ч а н и е 1. Если $\mathcal{E} \in (\mathrm{alg})[E]$, то (3.4) — нульмерный компакт, а (3.5), как нетрудно проверить, превращается в равенство. $\square$

Рассмотрим другую конструкцию, используя построения [9]. При $H \in \mathcal{P}(E)$ полагаем, что

$$\mathbb{F}_{\mathbf{C}}^{\natural}[\mathcal{E} \mid H] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{U} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{E}) \mid \exists U \in \mathcal{U}\colon U \subset H\big\}. \tag{3.6}$$

В частности, (3.6) определено при $H \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]$ и, стало быть, при $H = E \setminus \Sigma$, где $\Sigma \in \mathcal{E}$; в этом случае $\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid E \setminus \Sigma] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) \setminus \Phi_{\mathcal{E}}(\Sigma)$. Как следствие

$$\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathbb{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E} \mid \Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]\big\} = \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})}[(\mathbb{UF})[E;\mathcal{E}]] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})] \tag{3.7}$$

определяет топологию волмэновского типа

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{E}])) \in (\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})].$$

При этом (см. [9, теорема 6.2]) в виде

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle) \tag{3.8}$$

имеем компактное T_1-пространство, причем

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{E}}[E]. \tag{3.9}$$

В связи с (3.9) отметим, что в виде $(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle, \mathbf{T}^*_{\mathcal{E}}[E])$ реализуется битопологическое пространство (БТП); при этом БТП понимается здесь как множество, оснащенное парой сравнимых топологий. В последнем случае при совпадении упомянутых топологий называем БТП *вырожденным.* В [8; 9] указаны конкретные условия, гарантирующие вырожденность и невырожденность вышеупомянутого БТП у/ф E. Оказывается, однако, что и в общем случае $\mathcal{E} \in \tilde{\pi}^0[E]$ топологии, участвующие в данном БТП, "близки" в смысле свойств, связанных с погружением E в $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$; в этой связи см. [9, (7.5) и предложение 7.1].

4. Максимальные сцепленные системы

Напомним, что $\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle[E]$ и $\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ получаются конкретизацией (2.16) и (2.17): полагаем в этих соотношениях $\mathbf{I} = E$ и $\mathfrak{X} = \mathcal{E}$. При этом (см. [9, разд. 5])

$$\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] = \big\{\mathcal{S} \in \langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle[E] \mid \forall \Sigma \in \mathcal{E}\ \ (\Sigma \cap S \neq \varnothing\ \ \forall S \in \mathcal{S}) \Rightarrow (\Sigma \in \mathcal{S})\big\}, \tag{4.1}$$

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) = \big\{\mathcal{U} \in \langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] \mid A \cap B \in \mathcal{U}\ \ \forall A \in \mathcal{U}\ \ \forall B \in \mathcal{U}\big\} \in \mathcal{P}'(\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]).$$

В связи с превращением (4.1) в БТП введем в рассмотрение множества

$$\big(\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle^0[E \mid L] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{L} \in \langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] \mid L \in \mathcal{L}\big\}\ \ \forall L \in \mathcal{E}\big)\&$$
$$\big(\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E \mid H] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mathcal{L} \in \langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] \mid \exists L \in \mathcal{L} \colon L \subset H\big\}\ \ \forall H \in \mathcal{P}(E)\big).$$

В терминах данных множеств определяются семейства $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}]$ и $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{E}]$ (см. [8, (4.9); 9, разд. 5]):

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E \mid \Lambda] \colon \Lambda \in \mathbf{C}_E[\mathcal{E}]\big\}, \tag{4.2}$$

$$\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{E}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle^0[E \mid L] \colon L \in \mathcal{E}\big\} = \mathbf{C}_{\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]}[\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}]]. \tag{4.3}$$

Отметим прежде всего, что [9, разд. 5]

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$$

и при этом (см. (4.3))

$$\mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{E}\rangle \stackrel{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_{\sharp}(\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}])) \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\langle\mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]; \tag{4.4}$$

в связи с (4.4) см. также [8, разд. 5]. При этом, конечно, имеем (см. [9, (5.8)]), что $\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{E}\rangle]$ и, более того (см. [8, разд. 5]), с учетом (2.12) имеем, что

$$\hat{\mathfrak{C}}^0_{\mathrm{op}}[E;\mathcal{E}] \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{p}-\mathrm{BAS})_0[\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E];\mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{E}\rangle] \tag{4.5}$$

(свойство суперкомпактной предбазы). Как следствие получаем (см. (2.12), (4.2), (4.5)), что $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])$

$$\Big(\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] = \bigcup_{G\in\mathcal{G}} \langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E \mid G]\Big) \Rightarrow$$
$$\Big(\exists G_1 \in \mathcal{G}\ \ \exists G_2 \in \mathcal{G}\colon \langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] = \langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E \mid G_1] \cup \langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle^0_{\mathrm{op}}[E \mid G_2]\Big) \tag{4.6}$$

((4.5) и (4.6) дополняются свойством [8, предложение 5.1], применяемым к семейству (4.3)). Итак (см.(4.4)),

$$(\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{E}\rangle) \tag{4.7}$$

есть суперкомпактное ТП (напомним также, что (см. [8, разд. 5]) (4.7) является T_1-пространством). При этом [8, предложение 5.3]

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle = \mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{E}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})}. \tag{4.8}$$

Из (4.8) следует, что (3.8) есть подпространство суперкомпактного T_1-пространства (4.7). Заметим вместе с тем, что (см. [8, разд. 6]) $\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{E}] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})[\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]]$ и определена топология

$$\mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{E}\rangle \overset{\triangle}{=} \{\cup\}(\{\cap\}_\sharp(\hat{\mathfrak{C}}^*_0[E;\mathcal{E}])) \in (\mathrm{top})[\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]],$$

превращающая множество (4.1) в нульмерное T_2-пространство, для которого (3.4) является [8, предложение 6.5] подпространством:

$$\mathbf{T}^*_{\mathcal{E}}[E] = \mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{E}\rangle|_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})}. \tag{4.9}$$

Заметим, что (см. [8, предложение 7.1])

$$\mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{E}\rangle \subset \mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{E}\rangle. \tag{4.10}$$

Таким образом (см.(4.10)), в виде $(\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{E}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{E}\rangle)$ реализуется БТП, точками которого являются МСС. Итак, мы располагаем следующими БТП:

$$\big(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle, \mathbf{T}^*_{\mathcal{E}}[E]\big), \qquad \big(\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E], \mathbb{T}_0\langle E \mid \mathcal{E}\rangle, \mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{E}\rangle\big). \tag{4.11}$$

Свойства (4.8), (4.9) позволяют трактовать первое в (4.11) БТП как подпространство второго.

5. Случай суперкомпактного пространства ультрафильтров, 1

В настоящем разделе обсуждаются условия, при которых $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) = \langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ и $\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})]$. Однако сначала мы напомним (и дополним) некоторые положения [9], касающиеся свойств МСС из множества $\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$, именуемых в [9] *собственными.* Прежде всего (см. [9, предложение 5.1])

$$\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) = \big\{\mathcal{S} \in \langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] \mid \exists S_1 \in \mathcal{S}\ \exists S_2 \in \mathcal{S}\ \exists S_3 \in \mathcal{S}\colon S_1 \cap S_2 \cap S_3 = \varnothing\big\}.$$

Как следствие для $\mathcal{M} \in \langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E]$ имеем

$$(A \cap B \cap C \neq \varnothing\ \ \forall A \in \mathcal{M}\ \ \forall B \in \mathcal{M}\ \ \forall C \in \mathcal{M}) \Rightarrow (\mathcal{M} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})). \tag{5.1}$$

Нетрудно показать, что $\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) \in \mathbb{T}_*\langle E \mid \mathcal{E}\rangle$. С (5.1) связано общее положение

$$(\mathcal{E} \in \pi^\sharp_*[E]) \Leftrightarrow (\langle \mathcal{E}-\mathrm{link}\rangle_0[E] = \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})). \tag{5.2}$$

Из (4.4), (4.8) и (5.2) вытекает, что при $\mathcal{E} \in \pi_*^\sharp[E]$

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{E}}\langle E\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})]. \tag{5.3}$$

В частности, (5.3) выполняется при $\mathcal{E} \in \Pi_*^\sharp[E]$; в этом случае (см. (2.8))

$$\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) = \langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E]. \tag{5.4}$$

З а м е ч а н и е 2. Отметим простой пример, фиксируя $a \in \mathbb{R}$ и $b \in \mathbb{R}$, для которых $a < b$; пусть $E = [a, b[$ и $\mathcal{E} = \{[pr_1(z), pr_2(z)[\colon z \in [a, b] \times [a, b]\}$. Здесь для $c \in \mathbb{R}$ и $d \in \mathbb{R}$ полагаем $[c, d\,[\stackrel{\triangle}{=} \{t \in \mathbb{R} \mid (c \leqslant t)\&(t < d)\}$ при любом соотношении между c и d. В частности, при $d \leqslant c$ имеем $[c, d\,[= \varnothing$. Тогда $\mathcal{E} \in \Pi_*^\sharp[[a, b[\,]$, а потому (5.3) и (5.4) выполняются. □

Возвращаясь к общему случаю $\mathcal{E} \in \Pi_*^\sharp[E]$, отметим, что при данном условии (3.8) есть суперкомпактное T_1-пространство и согласно (4.6) и (5.2) $\forall \mathcal{G} \in \mathcal{P}'(\mathbf{C}_E[\mathcal{E}])$

$$(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) = \bigcup_{G \in \mathcal{G}} \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[E \mid G]) \Rightarrow (\exists G_1 \in \mathcal{G}\ \ \exists G_2 \in \mathcal{G} : \mathbb{F}^*_0(\mathcal{E}) = \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[E \mid G_1] \cup \mathbb{F}^\natural_{\mathbf{C}}[E \mid G_2]).$$

6. Случай суперкомпактного пространства ультрафильтров, 2

Отметим, что при $\mathcal{E} \notin \pi_*^\sharp[E]$ равенство (5.4) может нарушаться (в этой связи напомним пример [4, гл. VII, 4.18]), и в виде $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$ мы можем получить отличное от множества $\langle \mathcal{E} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$ п/м последнего. В то же время свойство суперкомпактности, как уже отмечалось, не является наследственным (см. [12, с. 64]). Это затрудняет получение условий, обеспечивающих суперкомпактность $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{E})$ в оснащении топологией волмэновского типа. Сейчас мы рассмотрим один случай, когда (и при $\mathcal{E} \notin \pi_*^\sharp[E]$) упомянутые условия получить удается. Сначала нам потребуются некоторые новые понятия, связанные с простейшими положениями теории меры.

Итак, фиксируем $\mathcal{L} \in \Pi[E]$, получая в виде $(E, \mathcal{L})$ ИП с полуалгеброй множеств. Кроме того, рассмотрим алгебру $a^0_E(\mathcal{L}) \in (\mathrm{alg})[E]$, порожденную полуалгеброй $\mathcal{L}$: $a^0_E(\mathcal{L}) \in (\mathrm{alg})[E]$, и при этом

$$\big(\mathcal{L} \subset a^0_E(\mathcal{L})\big)\&\big(\forall \mathcal{B} \in (\mathrm{alg})[E]\ (\mathcal{L} \subset \mathcal{B}) \Rightarrow (a^0_E(\mathcal{L}) \subset \mathcal{B})\big). \tag{6.1}$$

Ясно, что (6.1) определяет $a^0_E(\mathcal{L})$ однозначно. При этом [19, (4.3.2)]

$$a^0_E(\mathcal{L}) = \big\{A \in \mathcal{P}(E) \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon \Delta_n(A, \mathcal{L}) \neq \varnothing\big\}. \tag{6.2}$$

Мы имеем непустые множества $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})$ и $\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A})$, где (здесь и ниже) $\mathcal{A} \stackrel{\triangle}{=} a^0_E(\mathcal{L})$. Напомним также, что [20, (4.5)]

$$\Psi[\mathcal{A}; \mathcal{F}] \stackrel{\triangle}{=} \big\{A \in \mathcal{A} \mid \exists F \in \mathcal{F} \colon F \subset A\big\} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}) \quad \forall \mathcal{F} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}). \tag{6.3}$$

При этом согласно [20, предложение 4.1] имеем, что

$$\Psi[\mathcal{A}; \cdot] \stackrel{\triangle}{=} (\Psi[\mathcal{A}; \mathcal{U}])_{\mathcal{U} \in \mathbb{F}^*_0(\mathcal{L})} \in (\mathrm{bi})[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}); \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A})]. \tag{6.4}$$

Предложение 2. *Отображение* (6.4) *обладает следующим свойством непрерывности*:

$$\Psi[\mathcal{A}; \cdot] \in C(\mathbb{F}^*_0(\mathcal{L}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle, \mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}), \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle). \tag{6.5}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Напомним, что согласно (3.7) имеем по двойственности

$$(\mathbb{UF})[E; \mathcal{A}] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A})}[\mathfrak{F}^\natural_{\mathbf{C}}[\mathcal{A}]] \in (\mathrm{p} - \mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{F}^*_0(\mathcal{A}); \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle]$$

(учитываем при этом, что $\varnothing \in \mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{A}]$), а тогда

$$\{\cup\}_{\sharp}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]) \in (\mathrm{cl}-\mathrm{BAS})_0[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A});\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle]. \tag{6.6}$$

Аналогичным образом имеем из (3.7), что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] = \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathfrak{F}^{\natural}_{\mathbf{C}}[\mathcal{L}]] \in (\mathrm{p}-\mathrm{BAS})^0_{\mathrm{cl}}[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle],$$

откуда, в частности, следует (см. разд. 2), что

$$(\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}] \subset \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]. \tag{6.7}$$

Свойство (6.6) означает по определению замкнутой базы, что

$$\mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle] = \{\cap\}(\{\cup\}_{\sharp}((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}])).$$

Выберем и зафиксируем $A \in \mathcal{A}$, после чего рассмотрим множество

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)) \in \mathcal{P}(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})).$$

С учетом (6.2) подберем $n \in \mathbb{N}$ и $(L^{(i)})_{i\in\overline{1,n}} \in \Delta_n(A,\mathcal{L})$, получая в частности, что A есть объединение всех множеств $L^{(i)}$, $i \in \overline{1,n}$. Заметим также, что $L^{(i)} \in \mathcal{A}$ $\forall i \in \overline{1,n}$. Пусть $\mathcal{U}_* \in \Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A))$. Тогда $\mathcal{U}_* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и

$$\mathcal{U}^* \overset{\triangle}{=} \Psi[\mathcal{A};\mathcal{U}_*] \in \Phi_{\mathcal{A}}(A). \tag{6.8}$$

При этом $\mathcal{U}^* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{n} L^{(i)} = A \in \mathcal{U}^*$. Тогда [21, лемма 2.4.1] $L^{(k)} \in \mathcal{U}^*$ для некоторого $k \in \overline{1,n}$. С учетом (6.3) и (6.8) $F \subset L^{(k)}$ для некоторого $F \in \mathcal{U}_*$. Поскольку $L^{(k)} \in \mathcal{L}$, из (3.1) вытекает, что $L^{(k)} \in \mathcal{U}_*$, а тогда $\mathcal{U}_* \in \Phi_{\mathcal{L}}(L^{(k)})$ в силу (3.2). Поскольку выбор $\mathcal{U}_*$ был произвольным, установлено

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)) \subset \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_{\mathcal{L}}(L^{(i)}). \tag{6.9}$$

Пусть $r \in \overline{1,n}$ и $\mathcal{V}_* \in \Phi_{\mathcal{L}}(L^{(r)})$. Тогда $\mathcal{V}_* \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})$ и $L^{(r)} \in \mathcal{V}_*$. Согласно (6.3)

$$\mathcal{V}^* \overset{\triangle}{=} \Psi[\mathcal{A};\mathcal{V}_*] = \big\{\tilde{A} \in \mathcal{A} \mid \exists F \in \mathcal{V}_*\colon F \subset \tilde{A}\big\} \in \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}). \tag{6.10}$$

Поскольку $L^{(r)} \subset A$, из (6.10) имеем включение $A \in \mathcal{V}^*$ (учитываем, что $L^{(r)} \in \mathcal{V}_*$). Тогда в силу (3.2) и (6.10) $\mathcal{V}^* \in \Phi_{\mathcal{A}}(A)$, а потому (см. (6.10)) $\Psi[\mathcal{A};\mathcal{V}_*] \in \Phi_{\mathcal{A}}(A)$ и, стало быть,

$$\mathcal{V}_* \in \Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)).$$

Поскольку выбор r и $\mathcal{V}_*$ был произвольным, установлено вложение

$$\bigcup_{i=1}^{n} \Phi_{\mathcal{L}}(L^{(i)}) \subset \Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)).$$

С учетом (6.9) получаем равенство

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)) = \bigcup_{i=1}^{n} \Phi_{\mathcal{L}}(L^{(i)}). \tag{6.11}$$

При этом $\Phi_{\mathcal{L}}(L^{(i)}) \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{L}]\ \ \forall i \in \overline{1,n}$. С учетом (6.7) и (6.11) получаем, что

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Phi_{\mathcal{A}}(A)) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle].$$

Поскольку выбор A был произвольным, установлено, что

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\mathbb{A}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle] \quad \forall \mathbb{A} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]. \tag{6.12}$$

Пусть теперь $\Omega \in \{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}])$. Тогда (см. (2.4)) для некоторых $q \in \mathbb{N}$ и $(\mathbb{A}_i)_{i\in\overline{1,q}} \in (\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]^q$ имеем равенство $\Omega = \bigcup\limits_{i=1}^{q} \mathbb{A}_i$, а по свойствам операции взятия прообраза имеем, что

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Omega) = \bigcup_{i=1}^{q} \Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\mathbb{A}_i). \tag{6.13}$$

При этом в силу (6.12) $\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\mathbb{A}_j) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]\ \ \forall j \in \overline{1,q}$. По свойствам замкнутых множеств имеем теперь в силу (6.13), что $\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\Omega) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]$. Поскольку выбор Ω был произвольным, установлено, что

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\mathbb{S}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle] \quad \forall \mathbb{S} \in \{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]).$$

Выберем произвольно $\mathbf{F} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle]$. Тогда в силу (6.6) получаем, что $\mathbf{F} = \bigcap\limits_{\mathbb{S}\in\mathfrak{H}} \mathbb{S}$, где $\mathfrak{H} \in \mathcal{P}'(\{\cup\}_\sharp((\mathbb{UF})[E;\mathcal{A}]))$. Тогда

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\mathbf{F}) = \bigcap_{\mathbb{S}\in\mathfrak{H}} \Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\mathbb{S}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]$$

по свойствам замкнутых множеств. Коль скоро выбор $\mathbf{F}$ был произвольным, установлено, что $\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{-1}(\tilde{\mathbf{F}}) \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle]\ \forall \tilde{\mathbf{F}} \in \mathbf{C}_{\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})}[\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle]$. Последнее означает справедливость (6.5). □

Предложение 3. *Отображение* (6.4) *открыто в смысле топологий* $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle$ *и* $\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle$:

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{1}(\mathbf{G}) \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle \quad \forall \mathbf{G} \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle. \tag{6.14}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Воспользуемся свойством [20, предложение 4.3]. Учитываем при этом, что $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$ и, в частности, является решеткой п/м E (см. [9, (1.5)]). Согласно [20, предложение 4.3]

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{1}(\mathbf{G}) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E] \quad \forall \mathbf{G} \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]. \tag{6.15}$$

Поскольку согласно (3.9) $\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle \subset \mathbf{T}^*_{\mathcal{L}}[E]$, из (6.15) следует свойство

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot]^{1}(\mathbf{G}) \in \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E] \quad \forall \mathbf{G} \in \mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle. \tag{6.16}$$

Однако в силу [9, предложение 3.1, (5.16)] $\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle = \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]$, а потому из (6.16) вытекает (6.14). □

Из (6.4) и предложений 2, 3 следует, что [11, предложение 1.4.18]

$$\Psi[\mathcal{A};\cdot] \in (\mathrm{Hom})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L});\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle;\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A});\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle]. \tag{6.17}$$

Итак, ТП $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{L}),\mathbf{T}^0_{\mathcal{L}}\langle E\rangle)$ и $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}),\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle)$ гомеоморфны.

Теорема 1. *Если* $\mathcal{L} \in \Pi^\sharp_*[E]$, *то*

$$\mathbf{T}^0_{\mathcal{A}}\langle E\rangle \in ((\mathbb{SC})-\mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})]. \tag{6.18}$$

Доказательство получается (см. (2.8)) непосредственной комбинацией следствия 1, (5.3) и (6.17). Пусть $\mathcal{L} \in \Pi_*^\sharp[E]$. Тогда $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^0\langle E\rangle)$ — суперкомпактное ТП. Напомним теперь, что, поскольку $\mathcal{A} \in (\mathrm{alg})[E]$, имеем из [9, (5.16), предложение 1] при упомянутом условии равенство $\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]$ (данное равенство уже использовалось в доказательстве предложения 3); но тогда (см. (3.4))

$$(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^0\langle E\rangle) = (\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E]) \tag{6.19}$$

есть нульмерный суперкомпакт, т. е. нульмерное суперкомпактное T_2-пространство; $\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^*[E] \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})]$. Подчеркнем, что (6.18) и последнее положение имеют место в ситуации, когда возможно свойство $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \neq \langle \mathcal{A} - \mathrm{link}\rangle_0[E]$.

П р и м е р 1. Рассмотрим частный случай, обсуждавшийся в замечании 2. Итак, будем полагать в данном примере, что $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $E = [a, b[$ и $\mathcal{L} = \{[pr_1(z), pr_2(z)[: z \in [a, b] \times [a, b]\}$. Следуя соглашению $\mathcal{A} = a_E^0(\mathcal{L})$, получаем конкретизацию (6.2)

$$\mathcal{A} = \big\{A \in \mathcal{P}([a, b[) \mid \exists n \in \mathbb{N} \colon \Delta_n(A, \mathcal{L}) \neq \varnothing\big\}.$$

Имеем в виде $(E, \mathcal{A}) = ([a, b[, \mathcal{A})$ конкретное ИП с алгеброй множеств, для которого

$$\mathbf{T}_{\mathcal{A}}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_{\mathcal{A}}^0\langle [a, b[\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[E],$$

а (6.19) — нульмерный суперкомпакт. Заметим, что само множество $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$ здесь допускает достаточно простое описание (см. [22, разд. 6]). Важно отметить, что, как легко проверить, в данном случае

$$\langle \mathcal{A} - \mathrm{link}\rangle_0[E] \setminus \mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}) \neq \varnothing,$$

т. е. мы располагаем здесь суперкомпактом у/ф при наличии собственных МСС.

7. Обобщенные декартовы произведения и условия суперкомпактности

В предыдущем разделе установлено следующее свойство: если E — непустое множество и $\mathcal{L} \in \Pi_*^\sharp[E]$, то

$$\mathbf{T}_{a_E^0(\mathcal{L})}^0\langle E\rangle = \mathbf{T}_{a_E^0(\mathcal{L})}^*[E] \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(a_E^0(\mathcal{L}))], \tag{7.1}$$

а $(\mathbb{F}_0^*(a_E^0(\mathcal{L})), \mathbf{T}_{a_E^0(\mathcal{L})}^0\langle E\rangle) = (\mathbb{F}_0^*(a_E^0(\mathcal{L})), \mathbf{T}_{a_E^0(\mathcal{L})}^*[E])$ есть непустой нульмерный суперкомпакт. В этой связи полезно отметить некоторые случаи, для которых реализуется свойство $\mathcal{L} \in \Pi_*^\sharp[\mathbb{E}]$, где $\mathbb{E}$ — то или иное непустое множество.

Рассмотрим произвольные непустые множества X и E, а также отображение $(E_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(E)^X$ (итак, $(E_x)_{x\in X}$ есть непустозначная мультифункция на X). Полагаем в дальнейшем, что

$$\mathbb{E} \stackrel{\triangle}{=} \prod_{x\in X} E_x = \big\{f \in E^X \mid f(x) \in E_x \ \ \forall x \in X\big\}, \tag{7.2}$$

получая непустое множество функций $\mathbb{E} \in \mathcal{P}'(E^X)$. Заметим, что

$$\prod_{x\in X} \pi[E_x] = \big\{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))^X \mid \mathcal{L}_y \in \pi[E_y] \ \ \forall y \in X\big\}, \tag{7.3}$$

$$\prod_{x\in X} \pi_*^\sharp[E_x] = \big\{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))^X \mid \mathcal{L}_y \in \pi_*^\sharp[E_y] \ \ \forall y \in X\big\} \in \mathcal{P}'\big(\prod_{x\in X} \pi[E_x]\big), \tag{7.4}$$

$$\prod_{x\in X} \Pi_*^\sharp[E_x] = \big\{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))^X \mid \mathcal{L}_y \in \Pi_*^\sharp[E_y] \ \ \forall y \in X\big\} \in \mathcal{P}'\big(\prod_{x\in X} \pi_*^\sharp[E_x]\big). \tag{7.5}$$

В связи с (7.4), (7.5) отметим, что для всякого непустого множества H имеем $\{\varnothing; H\} \in \Pi^\sharp_*[H]$, чем обеспечивается непустота множеств (7.4), (7.5). С учетом (7.3) имеем

$$\prod_{x\in X} \mathcal{L}_x = \big\{(L_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}(E)^X \mid L_y \in \mathcal{L}_y \;\; \forall y \in X\big\} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E)^X) \quad \forall (\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \pi[E_x]. \tag{7.6}$$

С учетом (7.6) имеем "обычное" декартово произведение п/м E, являющихся элементами π-систем $\mathcal{L}_x$, $x \in X$:

$$\prod_{x\in X} L_x = \big\{f \in E^X \mid f(x) \in L_x \;\; \forall x \in X\big\} \quad \forall (\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \pi[E_x] \quad \forall (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x. \tag{7.7}$$

Введем два типа семейств п/м $\mathbb{E}$ (7.2): если $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \pi[E_x]$, то

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \overset{\triangle}{=} \big\{H \in \mathcal{P}(\mathbb{E}) \mid \exists (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x \colon \big(H = \prod_{x\in X} L_x\big) \&$$
$$(\exists K \in \mathrm{Fin}(X) \colon L_s = E_s \;\; \forall s \in X \setminus K)\big\} \in \pi[\mathbb{E}], \tag{7.8}$$

$$\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x \overset{\triangle}{=} \big\{ \prod_{x\in X} L_x \colon (L_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\big\} \in \pi[\mathbb{E}]; \tag{7.9}$$

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \subset \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x. \tag{7.10}$$

В (7.8) используется вариант, подобный применяемому в общей топологии при построении канонической базы тихоновского произведения (см. [11, разд. 2.3]). В (7.9) реализуется вариант, подобный применяемому при построении базы ящичной топологии (см. [23, с. 198]). Если $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \pi^\sharp_*[E_x]$, то

$$\big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \pi^\sharp_*[\mathbb{E}]\big)\&\big(\bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \pi^\sharp_*[\mathbb{E}]\big). \tag{7.11}$$

З а м е ч а н и е 3. В силу (7.10) при проверке (7.11) достаточно установить второе свойство, которое, впрочем, легко следует из (7.7) и (7.9). Ограничимся краткой схемой, полагая, что

$$\mathfrak{L} \overset{\triangle}{=} \bigodot_{x\in X} \mathcal{L}_x;$$

в силу (7.9) $\mathfrak{L} \in \pi[\mathbb{E}]$. Пусть $L_1 \in \mathfrak{L}$, $L_2 \in \mathfrak{L}$, $L_3 \in \mathfrak{L}$ и

$$\big((U_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\big)\&\big((V_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\big)\&\big((W_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \mathcal{L}_x\big)$$

реализуют следующее представление L_1, L_2 и L_3:

$$\big(L_1 = \prod_{x\in X} U_x\big)\&\big(L_2 = \prod_{x\in X} V_x\big)\&\big(L_3 = \prod_{x\in X} W_x\big). \tag{7.12}$$

Пусть $L_1 \cap L_2 \neq \varnothing$, $L_2 \cap L_3 \neq \varnothing$ и $L_1 \cap L_3 \neq \varnothing$. Тогда при $x_* \in X$ имеем $U_{x_*} \cap V_{x_*} \neq \varnothing$, $V_{x_*} \cap W_{x_*} \neq \varnothing$ и $U_{x_*} \cap W_{x_*} \neq \varnothing$, откуда следует (см. (2.6)), что $U_{x_*} \cap V_{x_*} \cap W_{x_*} \neq \varnothing$, так как $\mathcal{L}_{x_*} \in \pi^\sharp_*[E_{x_*}]$. Поскольку выбор x_* был произвольным, используя аксиому выбора и (7.12), получаем, что $L_1 \cap L_2 \cap L_3 \neq \varnothing$. Коль скоро L_1, L_2 и L_3 также выбирались произвольно, получаем с учетом (2.6), что $\mathfrak{L} \in \pi^\sharp_*[\mathbb{E}]$. $\square$

Из (7.5) и (7.11) вытекает очевидное следствие: при $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod\limits_{x\in X} \Pi^\sharp_*[E_x]$ имеют место соотношения (7.11). Подобно (7.3), (7.4) и (7.5) имеем

$$\prod_{x\in X} \Pi[E_x] = \big\{(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(E))^X \mid \mathcal{L}_y \in \Pi[E_y] \;\; \forall y \in X\big\} \in \mathcal{P}'\big(\prod_{x\in X} \pi[E_x]\big).$$

По аналогии с [24, предложение III.3.1] устанавливается

Предложение 4. *Если* $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \Pi[E_x]$*, то* $\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \Pi[\mathbb{E}]$.

Из (2.8), (7.11) и предложения 4 вытекает, что

$$\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x \in \Pi_*^\sharp[\mathbb{E}] \quad \forall (\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \Pi_*^\sharp[E_x]. \tag{7.13}$$

Тогда (см. (5.3), (5.4), (7.13)) при $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \Pi_*^\sharp[E_x]$

$$\mathbb{F}_0^*\Big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\Big) = \Big\langle \bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x - \mathrm{link}\Big\rangle_0[\mathbb{E}]$$

и при этом $\mathbf{T}^0_{\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x}\langle\mathbb{E}\rangle \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})\big[\mathbb{F}_0^*\big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\big)\big]$; $\big(\mathbb{F}_0^*\big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\big), \mathbf{T}^0_{\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x}\langle\mathbb{E}\rangle\big)$ есть суперкомпактное T_1-пространство. Кроме того, с учетом (7.1) и (7.13) получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Если* $(\mathcal{L}_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X} \Pi_*^\sharp[E_x]$ *и* $\mathfrak{A} \stackrel{\triangle}{=} a^0_{\mathbb{E}}\big(\bigotimes_{x\in X} \mathcal{L}_x\big)$*, то*

$$\mathbf{T}^0_{\mathfrak{A}}\langle\mathbb{E}\rangle = \mathbf{T}^*_{\mathfrak{A}}[\mathbb{E}] \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{A})]$$

и $(\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{A}), \mathbf{T}^0_{\mathfrak{A}}\langle\mathbb{E}\rangle) = (\mathbb{F}_0^*(\mathfrak{A}), \mathbf{T}^*_{\mathfrak{A}}[\mathbb{E}])$ *есть непустой нульмерный суперкомпакт.*

Доказательство очевидно.

В связи с условиями теоремы отметим, что естественный вариант полуалгебр $\mathcal{L}_x$, $x \in X$, доставляет пример 1. Имеется в виду случай, когда $E = \mathbb{R}$, $E_s = [a_s, b_s[$ при $s \in X$, где $(a_x)_{x\in X} \in \mathbb{R}^X$ и $(b_x)_{x\in X} \in \prod_{x\in X}]a_x, \infty[$; в этом случае $\mathcal{L}_t = \{[pr_1(z), pr_2(z)[: z \in [a_t, b_t] \times [a_t, b_t]\}$ $\forall t \in X$.

В связи с (7.1) полезно отметить обстоятельство, связанное с топологическими свойствами пространства конечно-аддитивных (к.-а.) (0.1)-мер со свойством, отмеченным в [25, предложение 4.2].

Замечание 4. Пусть E — непустое множество, $\mathcal{L} \in \Pi_*^\sharp[E]$ и $\mathcal{A} \stackrel{\triangle}{=} a^0_E(\mathcal{L})$. Тогда $(E, \mathcal{A})$ есть ИП с алгеброй множеств. Рассмотрим множество $\mathbb{A}(\mathcal{A})$ всех ограниченных вещественнозначных к.-а. мер на $\mathcal{A}$ с "обычной" $*$-слабой топологией $\tau_*(\mathcal{A})$ (см. [25, §§3,4]) и конусом $(\mathrm{add})_+[\mathcal{A}]$ неотрицательных (поточечно) элементов, $\mathbb{P}(\mathcal{A}) \stackrel{\triangle}{=} \{\mu \in (\mathrm{add})_+[\mathcal{A}] \mid \mu(E) = 1\}$ и

$$\mathbb{T}(\mathcal{A}) \stackrel{\triangle}{=} \big\{\mu \in \mathbb{P}(\mathcal{A}) \mid \forall A \in \mathcal{A} \ (\mu(A) = 0) \vee (\mu(A) = 1)\big\}.$$

Напомним (см. [26, §3.4]), что $(\mathbb{A}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A}))$ есть локально выпуклый σ-компакт; свойства $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ рассматриваются, например, в [26, §3.5]. В частности, множество $\mathbb{T}(\mathcal{A})$ компактно в $(\mathbb{A}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A}))$, т.е. $*$-слабо компактно: $(\mathbb{T}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})})$ — непустой компакт. Если $\mathcal{H} \in \mathcal{P}(\mathcal{A})$, то $\mathcal{I}_{\mathcal{H}} \in \{0;1\}^{\mathcal{A}}$ определяем условиями

$$\big(\mathcal{I}_{\mathcal{H}}(H) \stackrel{\triangle}{=} 1 \ \forall H \in \mathcal{H}\big) \& \big(\mathcal{I}_{\mathcal{H}}(A) \stackrel{\triangle}{=} 0 \ \forall A \in \mathcal{A} \setminus \mathcal{H}\big),$$

получая "обычный" индикатор семейства $\mathcal{H}$, определенный на $\mathcal{A}$. В качестве $\mathcal{H}$ может использоваться у/ф из $\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})$. Тогда (см. [25, предложение 4.2])

$$(\mathcal{I}_{\mathcal{U}})_{\mathcal{U}\in\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})} \in (\mathrm{Hom})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}); \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E]; \mathbb{T}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})}]. \tag{7.14}$$

При этом (см. (7.1)) $(\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A}), \mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E])$ есть непустой суперкомпакт; $\mathbf{T}^*_{\mathcal{A}}[E] \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{F}_0^*(\mathcal{A})]$. Тогда (см. (7.14) и следствие 1)

$$\tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})} \in ((\mathbb{SC}) - \mathrm{top})[\mathbb{T}(\mathcal{A})] \tag{7.15}$$

и $(\mathbb{T}(\mathcal{A}), \tau_*(\mathcal{A})|_{\mathbb{T}(\mathcal{A})})$ является (непустым) суперкомпактом.

Напомним, что наши построения базировались на свойстве $\mathcal{L} \in \Pi_*^\sharp[E]$; $\mathcal{A} = a_E^0(\mathcal{L})$. В замечании 2 приведен простейший пример такого рода (пространство-стрелка). Более содержательные примеры реализации (7.15) можно получить, привлекая теорему 2 и (обобщенное) произведение пространств типа стрелки.

8. Заключение

В статье рассмотрены некоторые случаи, когда пространства у/ф широко понимаемых ИП обладают свойством суперкомпактности. Пространства у/ф играют важную роль в конструкциях расширений абстрактных задач о достижимости, а потому распространение на эти пространства свойства суперкомпактности (когда это возможно) представляет определенный интерес. Данная идея реализована в двух вариантах: 1) устанавливаются ИП, для которых отсутствуют собственные МСС, а потому у/ф и МСС отождествимы; 2) с привлечением свойства гомеоморфности суперкомпактность устанавливается и для некоторых пространств у/ф уже и при наличии собственных МСС. В последнем случае речь идет об ИП с алгебрами множеств. Важную роль в вопросах описания (широко понимаемых) ИП со свойством, обеспечивающим реализацию 1), играют конструкции, использующие декартово произведение; эти конструкции позволяют указать много примеров, для которых собственные МСС отсутствуют, а БТП с точками в виде у/ф отождествимы с соответствующими БТП, точками которых являются МСС.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Groot J.**de Superextensions and supercompactness // Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications. Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis, 1969. P. 89–90.
2. **Mill J.** van. Supercompactness and Wallman spaces // Amsterdam. Math. Center Tract. 1977. No. 85. 238 p.
3. **Strok M., Szymanski A**. Compact metric spaces have binary subbases // Fund. Math. 1975. Vol. 89, no. 1. P. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91.
4. **Федорчук В. В., Филиппов В. В.** Общая топология. Основные конструкции. М.: Физматлит, 2006. 336 с.
5. **Булинский А. В., Ширяев А. Н.** Теория случайных процессов. М.: Физматлит, 2005. 402 с.
6. **Ченцов А. Г.** Суперрасширение как битопологическое пространство // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2017. Т. 49. С. 55–79. doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-03.
7. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2017. Вып. 3. С. 122–141. doi: 10.20537/vm170307.
8. **Ченцов А. Г.** Битопологические пространства ультрафильтров и максимальных сцепленных систем // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2018. Т. 24, № 1. С. 257–272. doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272.
9. **Ченцов А. Г.** Ультрафильтры и максимальные сцепленные системы: основные свойства и топологические конструкции // Изв. Ин-та математики и информатики УдГУ. 2018. Т. 52. С. 86–102. doi: 10.20537/2226-3594-2018-52-07.
10. **Dvalishvili B. P.** Bitopological spaces: Theory, relations with generalized algebraic structures, and applications. 2005. 422 p. (Ser. Nort-Holland Mathematics Studies, vol. 199.)
11. **Энгелькинг Р.** Общая топология. М.: Мир, 1986. 751 с.
12. **Архангельский А. В.** Компактность // Итоги науки и техники. Сер. “Современные проблемы математики. Фундаментальные направления”. 1989. Т. 50. С. 7–128.
13. **Грызлов А. А., Бастрыков Е. С., Головастов Р. А.** О точках одного бикомпактного расширения N // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2010. Вып. 3. С. 10–17.
14. **Грызлов А. А., Головастов Р. А.** О пространствах Стоуна некоторых булевых алгебр // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 1. С. 11–16.

15. **Головастов Р. А.** О пространстве Стоуна одной булевой алгебры // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 19–24.
16. **Куратовский К., Мостовский А.**Теория множеств. М.: Мир, 1970. 416 с.
17. **Александров П. С.** Введение в теорию множеств и общую топологию. М.: Едиториал УРСС, 2004. 368 с.
18. **Ченцов А. Г.** Некоторые свойства ультрафильтров, связанные с конструкциями расширений // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 1. С. 87–101.
19. **Ченцов А. Г.** Элементы конечно-аддитивной теории меры, I. Урал. гос. техн. ун-т — УПИ. Екатеринбург, 2008. 388 с.
20. **Ченцов А. Г.** Преобразования ультрафильтров и их применение в конструкциях множеств притяжения // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2012. Вып. 3. С. 85–102.
21. **Chentsov A. G., Morina S. I.** Extensions and relaxations. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002. 408 p.
22. **Ченцов А. Г.** Об одном представлении результатов действия приближенных решений в задаче с ограничениями асимптотического характера // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2011. Т. 17, № 2. С. 225–239.
23. **Богачев В .И.** Слабая сходимость мер. Москва; Ижевск: Изд-во Ин-та компьютерных исследований, 2016. 395 с.
24. **Неве Ж.** Математические основы теории вероятностей. М.: Мир, 1969. 309 с.
25. **Ченцов А. Г.** К вопросу о представлении компактов Стоуна // Вестн. Удмурт. ун-та. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2013. Вып. 4. С. 156–174.
26. **Chentsov A. G.** Finitely additive measures and relaxations of extremal problems. N Y: Plenum, 1996. 244 p.

Поступила 13.03.2019
После доработки 6.05.2019
Принята к публикации 13.05.2019

Ченцов Александр Георгиевич
д-р физ.-мат. наук, профессор, чл.-корр. РАН
главный науч. сотрудник
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: chentsov@imm.uran.ru

REFERENCES

1. de Groot J. Superextensions and supercompactness. *Proc. I. Intern. Symp. on extension theory of topological structures and its applications.* Berlin: VEB Deutscher Verlag Wis., 1969, pp. 89–90.
2. van Mill J. *Supercompactness and Wallman spaces.* Amsterdam. Math. Center Tracts, no. 85. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1977, 238 p. ISBN: 90-6196-151-3 .
3. Strok M, Szymanski A. Compact metric spaces have binary subbases. *Fund. Math.*, 1975, vol. 89, no. 1, pp. 81–91. doi: 10.4064/fm-89-1-81-91 .
4. Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *Obshchaya topologiya. Osnovnye konstruktsii.* [General topology: Basic constructions]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2006, 336 p. ISBN: 5-9221-0618-X .
5. Bulinskii A.V., Shiryaev A.N. *Teoriya sluchainykh protsessov* [Theory of Stochastic Processes]. Moscow: Fizmatlit Publ., 2005, 402 p. ISBN: 5-9221-0335-0 .
6. Chentsov A.G. Superextension as bitopological space. *Izv. IMI UdGU*, 2017, vol. 49, pp. 55–79 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2017-49-03 .
7. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2017, vol. 27, no. 3, pp. 365–388 (in Russian). doi: 10.20537/vm170307 .
8. Chentsov A.G. Bitopological spaces of ultrafilters and maximal linked systems. *Trudy Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN*, 2018, vol. 24, no. 1, pp. 257–272 (in Russian). doi: 10.21538/0134-4889-2018-24-1-257-272 .
9. Chentsov A.G. Ultrafilters and maximal linked systems: basic properties and topological constructions. *Izv. IMI UdGU*, 2018, vol. 52, pp. 86–102 (in Russian). doi: 10.20537/2226-3594-2018-52-07 .

10. Dvalishvili B.P. *Bitopological spaces: Theory, relations with generalized algebraic structures, and applications.* Ser. Nort-Holland Mathematics Studies, vol. 199. Amsterdam; Boston; Heidelberg; London; N Y: Elsevier, 2005, 422 p. ISBN: 9780444517937 .
11. Engelking R. *General Topology.* Sigma series in pure mathematics, vol. 6. Berlin: Heldermann Verlag. 1989, 535 p. ISBN: 3885380064 . Translated to Russian under the title *Obshchaya topologiya.* Moscow: Mir Publ., 1986, 752 p.
12. Arkhangel'skii A.V. Compactness. *General topology II. Encycl. Math. Sci.*, 1996, vol. 50, pp. 1–117.
13. Gryzlov A.A., Bastrykov E.S., Golovastov R.A. About points of compactification of N. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2010, no. 3, pp. 10–17 (in Russian).
14. Gryzlov A.A., Golovastov R.A. The Stone spaces of Boolean algebras. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 1, pp. 11–16 (in Russian).
15. Golovastov R.A. About Stone space of one Boolean algebra. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 19–24 (in Russian).
16. Kuratowski K., Mostowski A. *Set theory.* Warszawa: PWN - Polish Scientific Publishers, 1968, 417 p. ISBN: 9780444534170 . Translated to Russian under the title *Teoriya mnozhestv.* Moscow: Mir, 1970, 416 p.
17. Alexandroff P.S. *Einführung in die Mengenlehre und in die allgemeine Topologie.* [Introduction to set theory and to general topology]. Berlin: VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, 1984, 336 p. Original Russian text published in Aleksandrov P.S. *Vvedenie v teoriyu mnozhestv i obshchuyu topologiyu.* Moscow: Editorial URSS, 2004, 368 p.
18. Chentsov A.G. Some ultrafilter properties connected with extension constructions. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2014, no. 1, pp. 87–101 (in Russian).
19. Chentsov A.G. *Elementy konechno-additivnoi teorii mery, I* [Elements of finitely additive measure theory, I]. Ekaterinburg: USTU-UPI Publ., 2008, 388 p.
20. Chentsov A.G. The transformation of ultrafilters and their application in constructions of attraction sets. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2012, no. 3, pp. 85–102 (in Russian).
21. Chentsov A.G., Morina S.J. Extensions and relaxations. Boston; London; Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 2002, 408 p. doi: 10.1007/978-94-017-1527-0 .
22. Chentsov A.G. One representation of the results of action of approximate solutions in a problem with constraints of asymptotic nature. *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2012, vol. 276, suppl. 1, pp. S48–S62. doi: 10.1134/S0081543812020046 .
23. Bogachev V.I. *Weak convergence of measures.* Providence, RI: American Math. Soc., 2018, 286 p. ISBN: 978-1-4704-4738-0 . Original Russian text published in Bogachev V.I. *Slabaya skhodimost' mer.* Moscow; Izhevsk: Institut Komp'yuternykh Issledovanii Publ., 2016, 395 p.
24. Neveu J. *Mathematical foundations of the calculus of probability.* San Francisco: Holden-Day, 1965, 223 p. Translated to Russian under the title *Matematicheskie osnovy teorii veroyatnostei*, Moscow: Mir Publ., 1969, 309 p.
25. Chentsov A.G. To question about representation of Stone compactums. *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2013, no. 4, pp. 156–174 (in Russian).
26. Chentsov A.G. *Finitely additive measures and relaxations of extremal problems.* N Y: Plenum, 1996, 244 p. ISBN: 0-306-11038-5 .

Received March 13, 2019
Revised May 6, 2019
Accepted May 13, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00410).

Alexander Georgievich Chentsov, Dr. Phys.-Math. Sci, RAS Corresponding Member, Prof., Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia,
e-mail: chentsov@imm.uran.ru .

Cite this article as: A. G. Chentsov. Supercompact spaces of ultrafilters and maximal linked systems, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 240–257 .