ТРУДЫ ИНСТИТУТА МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ УрО РАН

Том 25 № 2 2019

УДК 517.977

ПРИБЛИЖЕНИЕ ПРОИЗВОДНЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ОДНОГО КЛАССА ХАРДИ ДРУГИМ КЛАССОМ ХАРДИ[1]

Р. Р. Акопян

В пространстве Харди $\mathcal{H}^p(D_\varrho)$, $1 \le p \le \infty$, функций, аналитических в круге $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\}$, обозначим через $NH^p(D_\varrho)$, $N > 0$, класс функций, чья L^p-норма на окружности $\gamma_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varrho\}$ не превосходит число N, а через $\partial H^p(D_\varrho)$ — класс, состоящий из производных функций класса $1H^p(D_\varrho)$. Рассматривается задача наилучшего приближения класса $\partial H^p(D_\rho)$ классом $NH^p(D_R)$, $N > 0$, относительно L^p-нормы на окружности γ_r, $0 < r < \rho < R$. При $N \to +\infty$ получен порядок величины наилучшего приближения

$$\mathcal{E}\left(\partial H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\Gamma_r)} \asymp N^{-\beta/\alpha} \ln^{1/\alpha} N, \quad \alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

В случае, когда параметр N принадлежит некоторой последовательности отрезков, получены точное значение величины наилучшего приближения класса классом и линейный метод, его реализующий. Рассмотрена близкая задача для классов функций, аналитических в кольцах.

Ключевые слова: аналитические функции, класс Харди, наилучшее приближение класса классом.

R. R. Akopyan. Approximation of derivatives of analytic functions from one Hardy class by another Hardy class.

In the Hardy space $\mathcal{H}^p(D_\varrho)$, $1 \le p \le \infty$, of functions analytic in the disk $D_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| < \varrho\}$, we denote by $NH^p(D_\varrho)$, $N > 0$, the class of functions whose L^p-norm on the circle $\gamma_\varrho = \{z \in \mathbb{C} : |z| = \varrho\}$ does not exceed the number N and by $\partial H^p(D_\varrho)$ the class consisting of the derivatives of functions from $1H^p(D_\varrho)$. We consider the problem of the best approximation of the class $\partial H^p(D_\rho)$ by the class $NH^p(D_R)$, $N > 0$, with respect to the L^p-norm on the circle γ_r, $0 < r < \rho < R$. The order of the best approximation as $N \to +\infty$ is found:

$$\mathcal{E}\left(\partial H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\Gamma_r)} \asymp N^{-\beta/\alpha} \ln^{1/\alpha} N, \quad \alpha = \frac{\ln R - \ln \rho}{\ln R - \ln r}, \quad \beta = 1 - \alpha.$$

In the case where the parameter N belongs to some sequence of intervals, the exact value of the best approximation and a linear method implementing it are obtained. A similar problem is considered for classes of functions analytic in rings.

Keywords: analytic functions, Hardy class, best approximation of a class by a class.

MSC: 30E10, 30H10 .

DOI: 10.21538/0134-4889-2019-25-2-21-29

Пусть $D_\varrho := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| < \varrho\}$ — круг с центром в нуле радиуса ϱ; $\gamma_\tau := \{z \in \mathbb{C}\colon |z| = \tau\}$ — окружность с центром в нуле радиуса τ. Обозначим через $\mathcal{A}(D_\varrho)$ множество аналитических в круге D_ϱ функций. Для функций $f \in \mathcal{A}(D_\varrho)$ и числа $\tau, 0 < \tau < \varrho$, определим p-среднее функции f на окружности γ_τ равенством

$$\|f\|_{L^p(\gamma_\tau)} = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |f(\tau e^{it})|^p \, dt\right)^{1/p}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Пусть $\mathcal{H}^p(D_\varrho)$, $1 \le p < \infty$, — пространство Харди функций $f \in \mathcal{A}(D_\varrho)$ таких, что

$$\sup\{\|f\|_{L^p(\gamma_\tau)}\colon 0 < \tau < \varrho\} < +\infty;$$

[1]Работа выполнена при поддержке РФФИ (проект 18-01-00336) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление №211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт №02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

$\mathcal{H}^\infty(D_\varrho)$ — пространство Харди функций аналитических и ограниченных в D_ϱ. Известно, что для произвольной функции $f \in \mathcal{H}^p(D_\varrho)$ почти всюду на границе γ_ϱ круга D_ϱ существуют некасательные (угловые) предельные граничные значения, составляющие функцию, которую также будем обозначать f, из пространства $L^p(\gamma_\varrho)$. Пространство $\mathcal{H}^p(D_\varrho)$ наделено нормой

$$\|f\|_{\mathcal{H}^p(D_\varrho)} := \begin{cases} \sup\{\|f\|_{L^p(\gamma_\tau)} \colon 0 < \tau < \varrho\}, & 1 \le p < \infty, \\ \sup\{|f(z)| \colon z \in D_\varrho\}, & p = \infty; \end{cases}$$

известно, что $\|f\|_{\mathcal{H}^p(D_\varrho)} = \|f\|_{L^p(\gamma_\varrho)}$. Ясно, что для чисел $0 < \rho < R$ имеет место вложение $\mathcal{H}^p(D_R) \subset \mathcal{H}^p(D_\rho)$.

В пространстве $\mathcal{H}^p(D_\varrho)$ выделим класс Харди $NH^p(D_\varrho)$, $N > 0$, функций, удовлетворяющих неравенству $\|f\|_{\mathcal{H}^p(D_\varrho)} \le N$. Будем применять обозначение $H^p(D_\varrho)$ при $N = 1$.

Введем класс $\partial H^p(D_\varrho)$, состоящий из производных функций класса Харди $H^p(D_\varrho)$, т. е. $\partial H^p(G_\varrho) := \{g' \colon g \in H^p(D_\varrho)\}$. Отметим, что класс $\partial H^p(D_\varrho)$ не содержится в пространстве Харди $\mathcal{H}^p(D_\varrho)$, однако является подмножеством весового пространства Бергмана (подробнее см. [8, §10, п.10.1] и дальнейшие ссылки там).

1. Постановка и обсуждение задачи

Пусть в линейном пространстве два класса Q_j, $j = 1, 2$, и банахово пространство B удовлетворяют условию: для любого $q_1 \in Q_1$ существует такое $q_2 \in Q_2$, что $q_1 - q_2 \in B$. *Наилучшим приближением класса Q_1 классом Q_2 по норме пространства B* называется величина

$$\mathcal{E}\left(Q_1, Q_2\right)_B := \sup\left\{E\left(q_1, Q_2\right)_B : q_1 \in Q_1\right\},$$

где $E\left(q_1, Q_2\right)_B$ — наилучшее приближение q_1 классом Q_2 — задается равенством

$$E\left(q_1, Q_2\right)_B := \inf\left\{\|q_1 - q_2\|_B \colon q_2 \in Q_2\right\}.$$

Пусть три числа r, ρ и R связаны неравенствами $0 < r < \rho < R$.

В настоящей работе рассматривается задача наилучшего приближения класса $\partial H^p(D_\rho)$ классом $NH^p(D_R)$ по норме пространства $L^p(\gamma_r)$ (или, что то же самое, по норме пространства $\mathcal{H}^p(D_r)$), т. е. величина

$$\mathcal{E}\left(\partial H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} = \sup\Big\{E\left(q, NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} : q \in \partial H^p(D_\rho)\Big\}$$

$$= \sup\Big\{E\left(g', NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} : g \in H^p(D_\rho)\Big\}. \tag{1}$$

Будет получен порядок величины (1) при $N \to +\infty$; в случае, когда параметр N принадлежит некоторой последовательности отрезков, будут получены значение величины наилучшего приближения класса классом и линейный метод, реализующий наилучшее приближение. Помимо того, будет рассмотрена аналогичная задача для классов функций, аналитических в кольцах.

Задача приближения одного класса функций другим является классической для теории приближения. Известны двойственная взаимосвязь задачи о модуле непрерывности неограниченного оператора на классе с соответствующей задачей наилучшего приближения одного класса другим в сопряженных пространствах и взаимосвязь задачи Стечкина приближения неограниченного оператора ограниченными операторами на классе с соответствующей задачей наилучшего линейного приближения одного класса другим (см. [3]). Наиболее обстоятельно исследована взаимосвязь задачи Стечкина о наилучшем приближении операторов дифференцирования ограниченными операторами с задачей наилучшего приближения одного класса дифференцируемых функций вещественной переменной другим классом более гладких функций (подробнее см. [4; 5; 6, §7]). Изучаемая здесь задача (1) в случае $1 < p < \infty$ является родственной задачам (о модуле непрерывности оператора и наилучшего приближения оператора ограниченными операторами) на классе $H^{p'}(D_{R'})$ для оператора, сопоставляющего следу функции на окружности $\gamma_{r'}$ ее производную на окружности $\gamma_{\rho'}$. Оператор рассматривается как оператор из $L^{p'}(\gamma_{r'})$ в $L^{p'}(\gamma_{\rho'})$ с параметрами, определяемыми равенствами $1/p+1/p'=1$, $r'=1/R, \rho'=1/\rho, R'=1/r$. Эти задачи рассматривались в [2]. В дальнейших рассуждениях связь задач явно использоваться не будет. Однако для построения линейного метода, доставляющего наилучшее приближение класса классом (1), и исследования его свойств будут существенно использоваться идеи построения оператора наилучшего приближения из [2].

Наиболее близкой к (1) является задача наилучшего приближения одного класса Харди $H^p(D_\rho)$ другим классом Харди $NH^p(D_R)$, которую изучал Л. В. Тайков в [7], а затем автор в статье [1]. Для сравнения с результатами этой статьи приведем точную постановку последней задачи и известные в ней результаты. Наилучшим приближением класса Харди $H^p(D_\rho)$ классом Харди $NH^p(D_R)$ по норме пространства $L^p(\gamma_r)$ является величина

$$\mathcal{E}\left(H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} := \sup\left\{E\left(g, NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} : g\in H^p(D_\rho)\right\}. \tag{2}$$

Введем обозначения

$$\alpha := \frac{\ln R-\ln\rho}{\ln R-\ln r}, \quad \beta := \frac{\ln\rho-\ln r}{\ln R-\ln r}; \tag{3}$$

$$\eta_* := \alpha + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(\rho/R)^k-(\rho/R)^{-k}}{(r/R)^k-(r/R)^{-k}}, \quad \eta^* := \beta + 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(r/\rho)^k-(r/\rho)^{-k}}{(r/R)^k-(r/R)^{-k}}.$$

Теорема A [7, теоремы 1,2; 1, теорема 3]. *Пусть числа r,ρ,R удовлетворяют условию $0<r<\rho<R$. Тогда при произвольных p, $1\le p\le\infty$, справедливы следующие утверждения.*

1. *Для величины* (2) *имеет место порядковое равенство*

$$\mathcal{E}\left(H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} \asymp N^{-\beta/\alpha}, \quad \text{при } N\to+\infty.$$

2. *Если положительное число N представимо в виде $N=\rho^{-n}R^n(\beta-\eta)$, где n — натуральное число и $\eta\in[-\eta_*,\eta^*]$, то для величины* (2) *имеют место равенства*

$$\mathcal{E}\left(H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} = \rho^{-n}\, r^n\,(\alpha+\eta) = (\alpha+\eta)\,(\beta-\eta)^{\beta/\alpha}\,N^{-\beta/\alpha}.$$

В работах [7] и [1] в тех случаях, когда найдены точные значения величины (2), построены линейные методы приближения, их реализующие.

2. Построение метода приближения

При $0<\rho_1<\rho_2$ обозначим через $C_{\rho_1,\rho_2} := \{z\in\mathbb{C}\colon \rho_1<|z|<\rho_2\}$ кольцо с центром в нуле, с внутренним и внешним радиусами ρ_1 и ρ_2, соответственно. Пусть числа r_0, r, ρ и R связаны неравенствами $0<r_0<r<\rho<R$. Для произвольной аналитической в кольце $C_{r_0,\rho}$ функции g, представимой в $C_{r_0,\rho}$ рядом Лорана

$$g(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_k z^k, \tag{4}$$

и целого числа n определим функцию f формулой

$$f(z) := \sum_{k=-\infty}^{+\infty} v_{n+k}\, g_{n+k}\, z^{n+k-1}, \tag{5}$$

$$v_n = \frac{n\ln\rho - n\ln r - 1}{\ln R - \ln r}, \quad v_{n+k} = \frac{(n-k)\rho^{2k} - (n+k)r^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}}, \quad k \neq 0.$$

С помощью теоремы Коши — Адамара нетрудно проверить, что функция f является аналитической в кольце $C_{r_0,R^2/\rho}$ (большем, чем исходное кольцо $C_{r_0,\rho}$). Равенство (5) нам удобно интерпретировать как определение $V_n g := f$ линейного оператора V_n из пространства $\mathcal{A}(C_{r_0,\rho})$ в пространства $\mathcal{A}(C_{r_0,R^2/\rho})$. Отметим, что если функция g является аналитической в круге D_ρ, то для коэффициентов ряда (4) имеет место свойство $g_k = 0$ для $k < 0$, и, следовательно, $f \in \mathcal{A}(D_{R^2/\rho}) \subset \mathcal{H}^\infty(D_R) \subset \mathcal{H}^p(D_R)$.

Выпишем представление разности $g' - f$ в терминах коэффициентов ряда (4) функций g :

$$g'(z) - f(z) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (k - v_k)\, g_k\, z^{k-1} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} l_k\, g_k\, z^{k-1}, \quad l_k = k - v_k, \tag{6}$$

$$l_n = \frac{n\ln R - n\ln\rho + 1}{\ln R - \ln r}, \quad l_{n+k} = \frac{(n+k)R^{2k} - (n-k)\rho^{2k}}{R^{2k} - r^{2k}}, \quad k \neq 0.$$

Равенство (6) также можно интерпретировать как определение $T_n g := g' - f$ линейного оператора T_n в пространстве $\mathcal{A}(C_{r_0,\rho})$.

Теперь, используя равенство (5), выразим значения функции f на окружности γ_R через значения функции g на окружности γ_ρ. Получим представление

$$f(Re^{ti}) = R^{-1}e^{-it} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (R/\rho)^k\, v_k\ g_k\, \rho^k e^{ikt} = R^{-1}e^{-it}\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \mathcal{V}_n(t-\tau) g(\rho e^{i\tau})\, d\tau \tag{7}$$

с ядром $\mathcal{V}_n$, выражаемым через сумму μ_n косинус-ряда

$$\mathcal{V}_n(t) = (R/\rho)^n\ e^{int}\, \mu_n(t); \quad \mu_n(t) = \mu_{n,0} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \mu_{n,k}\, \cos kt,$$

в котором коэффициенты определяются формулами

$$\mu_{n,0} = v_n = \frac{n\ln\rho - n\ln r - 1}{\ln R - \ln r}, \tag{8}$$

$$\mu_{n,k} = \left(\frac{R}{\rho}\right)^k v_{n+k} = \left(\frac{\rho}{R}\right)^k v_{n-k} = \frac{(n-k)(\rho/r)^k - (n+k)(r/\rho)^k}{(R/r)^k - (r/R)^k}, \quad k \geq 1.$$

Аналогично, используя равенство (6), выразим значения функции $g' - f$ на окружности γ_r через значения функции g на окружности γ_ρ. Имеем представление

$$g'(re^{it}) - f(re^{it}) = r^{-1}e^{-it} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (r/\rho)^k\, l_k\ g_k\, \rho^k e^{ikt} = r^{-1}e^{-it}\, \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} \Lambda_n(t-\tau) g(\rho e^{i\tau})\, d\tau \tag{9}$$

с ядром Λ_n, выражаемым через сумму λ_n косинус-ряда

$$\Lambda_n(t) = (r/\rho)^n\ e^{int}\, \lambda_n(t); \quad \lambda_n(t) = \lambda_{n,0} + 2\sum_{k=1}^{+\infty} \lambda_{n,k}\, \cos kt,$$

с коэффициентами, задаваемыми формулами

$$\lambda_{n,0} = l_n = \frac{n\ln R - n\ln\rho + 1}{\ln R - \ln r}, \tag{10}$$

$$\lambda_{n,k} = \left(\frac{r}{\rho}\right)^k l_{n+k} = \left(\frac{\rho}{r}\right)^k l_{n-k} = \frac{(n+k)(R/\rho)^k - (n-k)(\rho/R)^k}{(R/r)^k - (r/R)^k}, \quad k \geq 1.$$

В дальнейшем нам потребуется следующее утверждение о свойствах функций λ_n и μ_n.

Лемма 1. *Для целого числа n, удовлетворяющего неравенству*

$$|n| \geq \frac{\pi}{\sin \alpha\pi} \frac{1}{\ln R - \ln r}, \tag{11}$$

функции λ_n и μ_n не меняют и имеют один знак на периоде, т.е. $\lambda_n(t)\mu_n(t) > 0$, $t \in [0, 2\pi]$.

Доказательство леммы 1 проводится по схеме из [2, лемма 2]. Рассмотрим в качестве $g_\pm$ функции, задаваемые формулами

$$g_\pm(t, y) = \frac{e^{ny}\sin(\alpha\pi)}{\xi(t) \pm \cos(\alpha\pi)}, \quad \xi(t) = \operatorname{ch} \frac{\pi t}{\ln R - \ln r}, \quad y = \ln R - \ln \rho.$$

Для функций λ_n и μ_n справедливы равенства

$$\lambda_n(t) = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial(1/\rho)} \left\{ \frac{1}{\rho^n} \Lambda_+(t) \right\}, \quad \mu_n(t) = \rho^{n-1} \frac{\partial}{\partial(1/\rho)} \left\{ \frac{1}{\rho^n} \Lambda_-(t) \right\},$$

в которых

$$\Lambda_+(t) = \alpha + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(R/\rho)^k - (\rho/R)^k}{(R/r)^k - (r/R)^k} \cos kt, \quad \Lambda_-(t) = \beta + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(\rho/r)^k - (r/\rho)^k}{(R/r)^k - (r/R)^k} \cos kt.$$

С другой стороны, имеют место [1, лемма 1] равенства

$$\Lambda_\pm(t) = \frac{\pi}{\ln R - \ln r} e^{-ny} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g_\pm(t + 2\pi k, y).$$

Отсюда получаем представления

$$\lambda_n(t) = \frac{\pi}{\ln R - \ln r} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} g_+(t + 2\pi k, y),$$

$$\mu_n(t) = \frac{\pi}{\ln R - \ln r} \left(\frac{\rho}{R}\right)^n \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} g_-(t + 2\pi k, y).$$

Вычисляя производные функций $g_\pm$, получим

$$\frac{\partial g_\pm}{\partial y} = \frac{\pi e^{ny}\left[\xi(t)(nu + \cos\alpha\pi) \pm (nu\cos\alpha\pi + 1)\right]}{(\ln R - \ln r)(\xi(t) \pm \cos\alpha\pi)^2}, \quad u = \frac{\sin\alpha\pi(\ln R - \ln r)}{\pi}.$$

Знак производных функций $g_\pm$ совпадает со знаком выражения в квадратных скобках. Неравенство $|nu| \geq 1$ влечет неравенство

$$\left| \frac{nu + \cos\alpha\pi}{nu\cos\alpha\pi + 1} \right| \geq 1,$$

так как дробно-линейная функция $h(z) = (z + \cos\alpha\pi)/(1 + z\cos\alpha\pi)$ отображает внешность единичного круга в себя. Для произвольного $t \in \mathbb{R}$ имеем $\xi(t) \geq 1$. Поэтому условие $|nu| \geq 1$, эквивалентное (11), влечет постоянство знака выражения $\xi(t)(nu + \cos\alpha\pi) \pm (nu\cos\alpha\pi + 1)$. Этот факт завершает доказательство леммы 1.

Замечание. Коэффициенты (10) и (8) являются средними значениями функций λ_n и μ_n на периоде. Формулы (10) и (8) влекут, что $\mu_{n,0} + \lambda_{n,0} = n$. Поэтому, если выполнено условие (11), то как функции λ_n, μ_n, так и коэффициенты $\lambda_{n,0}$, $\mu_{n,0}$, имеют один и тот же знак, совпадающий со знаком n.

Из леммы 1 следует, что существует интервал I_n (положительной длины), определяемый равенством $I_n = \{\eta \in \mathbb{R}\colon (\lambda_n(t)+\eta)(\mu_n(t)-\eta) > 0,\ t\in[0,2\pi]\}$. Интервал $I_n = (\eta_n^-, \eta_n^+)$ имеет граничные точки

$$\eta_n^- = \max_{t\in[0,2\pi]} \min\{-\lambda_n(t), \mu_n(t)\}, \quad \eta_n^+ = \min_{t\in[0,2\pi]} \max\{-\lambda_n(t), \mu_n(t)\},$$

которые связаны неравенством $\eta_n^- < 0 < \eta_n^+$. Обозначим через S_n отрезок $[\eta_n^-, \eta_n^+]$.

Для целого числа n, удовлетворяющего неравенству (11), и числа η из отрезка S_n определим линейный оператор $V_{n,\eta}$ из пространства $\mathcal{A}(C_{r_0,\rho})$ в пространство $\mathcal{A}(C_{r_0,R})$ равенством

$$(V_{n,\eta}g)(z) := (V_n g)(z) - \eta g_n z^{n-1} = f(z) - \eta g_n z^{n-1}, \tag{12}$$

в котором g_n — коэффициент с индексом n ряда Лорана (4) функции g, а оператор V_n со значениями $V_n g = f$ определен равенством (5).

3. Основной результат

Теорема 1. *Пусть числа r, ρ, R удовлетворяют неравенствам $0 < r < \rho < R$. Тогда при произвольном p, $1 \le p \le \infty$, справедливы следующие утверждения.*

1. *Для величины* (1) *с учетом введенных обозначений* (3) *имеет место порядковое равенство*

$$\mathcal{E}\left(\partial H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} \asymp N^{-\beta/\alpha} \ln^{1/\alpha} N \quad \text{при } N \to +\infty. \tag{13}$$

2. *Если положительное число N представимо в виде*

$$N = \rho^{-n} R^{n-1}(\mu_{n,0} - \eta), \tag{14}$$

где n — произвольное натуральное число, удовлетворяющее неравенству (11), *и η — произвольное число из отрезка S_n, то для величины* (1) *имеет место равенство*

$$\mathcal{E}\left(\partial H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} = \rho^{-n} r^{n-1}(\lambda_{n,0} + \eta). \tag{15}$$

Здесь $\mu_{n,0}$ и $\lambda_{n,0}$ определяются формулами (8) *и* (10).

При этом линейный метод, определенный равенством (12), *доставляет наилучшее приближение класса классом в* (1).

Доказательство. Из замечания к лемме 1 следует, что для $\eta \in S_n$ функции $\lambda_n + \eta$ и $\mu_n - \eta$, а также оба числа $\lambda_{n,0} + \eta$ и $\mu_{n,0} - \eta$ положительные.

Убедимся, что функция $(V_{n,\gamma}g)(z) = f(z) - \eta g_n z^{n-1}$ принадлежит классу $NH^p(D_R)$, если $g \in H^p(D_\rho)$. Как было показано ранее $f \in \mathcal{H}^p(D_R)$. Рассмотрим p-нормы на окружности γ_R. Используя представление (7) и положительность функции $\mu_n - \eta$, имеем

$$\|V_{n,\eta}g\|_{L^p(\gamma_R)} = \left\| f(Re^{it}) - \eta g_n R^{n-1} e^{i(n-1)t} \right\|_{L^p(0,2\pi)}$$

$$= \left\| \frac{R^{n-1}}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)} (\mu_n(t-\tau) - \eta) g(\rho e^{i\tau})\, d\tau \right\|_{L^p(0,2\pi)}$$

$$\le \frac{R^{n-1}}{2\pi\rho^n} \|g\|_{L^p(\gamma_\rho)} \int_0^{2\pi} |\mu_n(\tau) - \eta|\, d\tau \le \frac{R^{n-1}}{2\pi\rho^n} \int_0^{2\pi} (\mu_n(\tau) - \eta)\, d\tau = \rho^{-n} R^{n-1}(\mu_{n,0} - \eta).$$

Рассуждая аналогично, получим оценку приближения производной функции $g \in H^p(D_\rho)$ методом $V_{n,\eta}$, используя представление (9) и лемму 1. Имеем

$$\|g' - V_{n,\eta}g\|_{L^p(\gamma_r)} = \left\| g'(re^{it}) - \left(f(re^{it}) - \eta g_n r^{n-1} e^{i(n-1)t} \right) \right\|_{L^p(0,2\pi)}$$

$$= \left\| \frac{r^{n-1}}{2\pi\rho^n} \int\limits_0^{2\pi} e^{in(t-\tau)}(\lambda_n(t-\tau)+\eta) g(\rho e^{i\tau})\, d\tau \right\|_{L^p(0,2\pi)}$$

$$\le \frac{r^{n-1}}{2\pi\rho^n} \int\limits_0^{2\pi} |\lambda_n(\tau)+\eta|\, d\tau\, \|g\|_{L^p(\gamma_\rho)} \le \frac{r^{n-1}}{2\pi\rho^n} \int\limits_0^{2\pi} (\lambda_n(\tau)+\eta)\; d\tau = \rho^{-n} r^{n-1}(\lambda_{n,0}+\eta).$$

Следовательно, при $N = \rho^{-n}R^{n-1}(\mu_{n,0}-\eta)$ для величины (1) справедлива оценка сверху

$$\mathcal{E}\left(\partial H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} \le \rho^{-n}r^{n-1}(\lambda_{n,0}+\eta). \tag{16}$$

Получим для величины (1) оценку снизу. Функция $g_0(z) = \rho^{-n}z^n$ принадлежит классу $H^p(D_\rho)$. Наилучшее приближение ее производной $g_0'(z) = n\rho^{-n}z^{n-1}$ классом $NH^p(D_R)$ при условии

$$0 \le N \le n\rho^{-n}R^{n-1} \tag{17}$$

реализует функция $NR^{1-n}z^{n-1}$ и при этом

$$E\left(g_0', NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} = \left(n\rho^{-n} - NR^{1-n}\right) r^{n-1}.$$

Значение $N = \rho^{-n}R^{n-1}(\mu_{n,0}-\eta)$ удовлетворяет условию (17). В данном случае будем иметь

$$E\left(g_0', NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} = \rho^{-n}r^{n-1}\left(n - (\mu_{n,0}-\eta)\right) = \rho^{-n}r^{n-1}(\lambda_{n,0}+\eta).$$

Отсюда следует оценка снизу

$$\mathcal{E}\left(\partial H^p(D_\rho), NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} \ge E\left(g_0', NH^p(D_R)\right)_{L^p(\gamma_r)} = \rho^{-n}r^{n-1}(\lambda_{n,0}+\eta). \tag{18}$$

Неравенства (16) и (18) влекут утверждение (15).

Наконец, порядковое равенство (13) для наилучшего приближения следует из равенства (15), монотонности величины (1) по параметру N и того факта, что величина (14), к примеру, при $\eta = 0$, стремится к бесконечности при $n \to \infty$. Теорема доказана.

Как следует из сравнения теоремы 1 с теоремой A величина наилучшего приближения (1) стремится к нулю по порядку медленее величины (2), точнее указанные величины отличаются по прядку множителем $\ln^{1/\alpha} N$. Как в теореме A, так и в теореме 1 существует счетное число промежутков, на которых зависимость наилучшего приближения от N линейная; однако отрезок S_n в теореме 1 зависит от n в отличие от играющего аналогичную роль отрезка $[-\eta_*, \eta^*]$ в теореме A.

4. Случай кольца

В этой части рассмотрим задачу для случая классов функций, аналитических в кольце. Пусть $\mathcal{H}^p(C_{\varrho_1,\varrho_2})$, $1 \le p \le \infty$, — пространство Харди функций f, аналитических в кольце C_{ϱ_1,ϱ_2}, таких, что $\sup\{\|f\|_{L^p(\gamma_\tau)} \colon \varrho_1 < \tau < \varrho_2\} < +\infty$. Введем классы функций равенствами

$$NH^p(C_{\varrho_1,\varrho_2}) := \left\{ f \colon f \in \mathcal{H}(C_{\varrho_1,\varrho_2}), \|g\|_{L^p(\gamma_{\varrho_2})} \le N \right\}, \quad N > 0;$$

$$\partial H^p(C_{\varrho_1,\varrho_2}) := \left\{ g' \colon g \in H^p(C_{\varrho_1,\varrho_2}) \right\}.$$

Используя свойства оператора (12) и факт, что $g_0(z) = n\rho^{-n}z^{n-1} \in \partial H^p(C_{r_0,\rho})$ для произвольного целого значения параметра n и рассуждая аналогично доказательству теоремы 1, получим следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть числа r_0, r, ρ и R удовлетворяют условию $0 < r_0 < r < \rho < R$. Тогда при произвольном p, $1 \le p \le \infty$, если положительное число N представимо в виде*

$$N = \rho^{-n} R^{n-1} \left| \mu_{n,0} - \eta \right|,$$

где n — произвольное целое число, удовлетворяющее неравенству (11), *и η — произвольное число из отрезка S_n, то имеет место равенство*

$$\mathcal{E}\left(\partial H^p(C_{r_0,\rho}), NH^p(C_{r,R})\right)_{L^p(\gamma_r)} = \rho^{-n} r^{n-1} \left| \lambda_{n,0} + \eta \right|.$$

Здесь $\mu_{n,0}$ и $\lambda_{n,0}$ определяются формулами (8) *и* (10).

При этом линейный метод, определенный равенством (12), *доставляет наилучшее приближение класса классом.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Акопян Р.Р.** Наилучшее приближение оператора аналитического продолжения на классе аналитических в кольце функций // Тр. Института математики и механики УрО РАН. 2012, Т. 18, №4. С. 3–13.
2. **Akopyan Roman R.** Approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in an annulus // Ural Math. J. 2017. Vol. 3, Iss. 2. C. 6–13.
3. **Арестов В.В.** Приближение линейных операторов и родственные экстремальные задачи // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 29–42.
4. **Арестов В.В.** О некоторых экстремальных задачах для дифференцируемых функций одной переменной // Тр. МИАН СССР. 1975. Т. 138. С. 3–28.
5. **Арестов В.В.** Наилучшее приближение одного класса функций многих переменных другим и родственные экстремальные задачи // Матем. заметки. 1998. Т. 64. Вып. 3. С. 323–340.
6. **Арестов В.В.** Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51, вып. 6 (312). С. 89–124.
7. **Тайков Л.В.** Аналитическое продолжение функций с ошибкой // Тр. МИАН СССР. 1971. Т. 109. С. 61–64.
8. **Шведенко С.В.** Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техники. Сер. Мат. анализ. 1985. Т. 23. С. 3–124.

Поступила 1.04.2019
После доработки 7.05.2019
Принята к публикации 13.05.2019

Акопян Роман Размикович
канд. физ.-мат. наук, доцент
Уральский федеральный университет;
Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского УрО РАН
г. Екатеринбург
e-mail: RRAkopyan@mephi.ru

REFERENCES

1. Akopyan R.R. Best approximation for the analytic continuation operator on the class of analytic functions in a ring, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2012, vol. 18, no. 4, pp. 3–13 (in Russian).
2. Akopyan R.R. Approximation of the differentiation operator on the class of functions analytic in an annulus. *Ural Math. J.*, 2017, vol. 3, no. 2, pp. 6–13. doi: 10.15826/umj.2017.2.002 .
3. Arestov V.V. Approximation of linear operators, and related extremal problems. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 31–44.
4. Arestov V.V. Some extremal problems for differentiable functions of one variable. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1977, vol. 138, pp. 1–29.

5. Arestov V.V. The best approximation to a class of functions of several variables by another class and related extremum problems. *Math. Notes*, 1998, vol. 64, no. 3, 279—294. doi: 10.4213/mzm1403 .
6. Arestov V.V. Approximation of unbounded operators by bounded operators and related extremal problems. *Russian Math. Surveys*, 1996, vol. 51, no. 6, pp. 1093–1126. doi: 10.1070/RM1996v051n06ABEH003001 .
7. Taikov L.V. Analytic continuation of functions with an error. *Proc. Steklov Inst. Math.*, 1971, vol. 109, pp. 68–72.
8. Shvedenko S.V. Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit circle, polydisc, and ball. *J. Soviet Math.*, 1987, vol. 39, no. 6, pp. 3011–3087. doi: 10.1007/BF01087546 .

Received April 1, 2019
Revised May 7, 2019
Accepted May 13, 2019

Funding Agency: This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 18-01-00336) and by the Russian Academic Excellence Project (agreement no. 02.A03.21.0006 of August 27, 2013, between the Ministry of Education and Science of the Russian Federation and Ural Federal University).

Roman Razmikovich Akopyan, Cand. Sci. (Phys.-Math.), Ural Federal University, Yekaterinburg, 620002 Russia; Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, Yekaterinburg, 620108 Russia; e-mail: RRAkopyan@mephi.ru .

Cite this article as: R. R. Akopyan. Approximation of derivatives of analytic functions from one Hardy class by another Hardy class, *Trudy Instituta Matematiki i Mekhaniki URO RAN*, 2019, vol. 25, no. 2, pp. 21–29 .