УДК 536.21

А. И. Попов, Т. В. Иглина, Д. В. Слободчиков
Самарский государственный технический университет, г. Самара
pixinot@icloud.com

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ТЕМПЕРАТУРНЫХ ПОЛЕЙ В ТЕЛЕ ШАРООБРАЗНОЙ ФОРМЫ ПРИ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЯХ ТРЕТЬЕГО РОДА

Надежность работы тела качения подшипника напрямую влияет на надежность и продолжительность работы промышленного оборудования. Поломка таких подшипников часто приводят к выходу из строя оборудования. В работе рассмотрены вопросы нестационарного теплообмена внутри тел качения (шарообразных тел). Получено аналитическое решение поставленной задачи в безразмерных величинах температур и координат на основе методов Фурье и Бубнова-Галеркина при граничных условиях третьего рода.

Ключевые слова: *теплообмен, тело шарообразной формы, подшипник, аналитическое решение, граничные условия третьего рода.*

A. I. Popov, T. V. Iglina, D. V. Slobodchikov
Samara State Technical University, Samara

MATHEMATICAL MODEL OF TEMPERATURE FIELDS IN A BALL BEARINGS BODIES UNDER BOUNDARY CONDITIONS OF THE THIRD KIND

The reliability of the rolling bearing body directly affects the continuity and duration of operation of industrial equipment. Failure of such bearings lead to failure of pumping equipment. In this paper, the problems of non-stationary heat transfer inside rolling bodies (spherical bodies) are considered. An analytical solution of the problem in dimensionless values of temperatures and coordinates is obtained on the basis of Fourier and Bubnov-Galerkin methods under boundary conditions of the third kind.

Keywords: *heat transfer, spherical body, bearing, analytical solution, boundary conditions of the third kind.*

Большинство трудов, которые направлены на изучение термических процессов в телах качения подшипников, не уделяют должного внимания внутренним тепловым процессам тела качения. Такие процессы могут привести к структурным повреждениям внутри подшипников. Таким образом, актуальным является задача изучения процессов теплопроводности внутри тел качения подшипников (шарообразных тел) [1].

Краевая задача теплопроводности [2] для шара при симметричных граничных условиях третьего рода в безразмерных величинах будет иметь следующий вид:

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+\frac{2}{\xi}\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}\qquad(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1);\quad(1)$$

$$\Theta(\xi,0)=1;\qquad(2)$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0;\qquad(3)$$

$$\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\mathrm{Bi}\Theta(1,\mathrm{Fo})=0,\qquad(4)$$

где $\Theta=(t-t_{\text{ср}})/(t_0-t_{\text{ср}})$ – безразмерная температура; $\xi=x/r$ – безразмерная координата; $\mathrm{Fo}=(a\tau)/r^2$ – критерий Фурье (безразмерное время) [3].

Приближенное аналитическое решение основано на совместном применение метода разделения переменных и ортогональных методов взвешенных невязок. Получения высокоточного приближенного решения задачи теплопроводности достигается путем непосредственного удовлетворения дифференциального уравнения краевой задачи Штурма-Лиувилля в заданном количестве точек пространственной переменной [4].

Решение задачи (1) – (4), следуя методу разделения переменных, отыскивается (находится) в виде

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\varphi(\mathrm{Fo})\psi(\xi).\qquad(5)$$

Подставляя (5) в (1), находим

$$\frac{d\varphi(Fo)}{dFo}+\nu\varphi(Fo)=0; \tag{6}$$

$$\frac{d^2\psi(\xi)}{d\xi^2}+\frac{d\psi(\xi)}{d\xi}\frac{2}{\xi}+\nu\psi(\xi)=0, \tag{7}$$

где ν − некоторая постоянная.

Решение уравнения (6) известно и имеет вид

$$\varphi(\mathrm{Fo})=A\exp(-\nu\mathrm{Fo}), \tag{8}$$

где A – неизвестный коэффициент.

Подставляя (5) в (3), (4) получаем

$$d\psi(0)/d\xi=0; \tag{9}$$

$$\frac{\partial\psi(1)}{\partial\xi}+\mathrm{Bi}\cdot\psi(1)=0. \tag{10}$$

Решение краевой задачи Штурма-Лиувилля (7), (9), (10) принимается в виде

$$\psi(\xi)=B_0+\sum_{i=1}^{r}B_i\xi^{i+1}, \tag{11}$$

где $B_i\,(i=\overline{1,\ r})$ – неизвестные коэффициенты.

Соотношение (9) позволяет ввести еще одно граничное условие

$$\psi(0)=const=1. \tag{12}$$

Подставляя (11) в (12), находим B_0 = 1. Подставляя (11), ограничиваясь пятью членами ряда, в соотношение (10) и уравнение (7), применительно к точкам $\xi=0;1/3;2/3;1$ относительно неизвестных коэффициентов B_i $(i=\overline{1,5})$ получаем систему пяти алгебраических линейных уравнений. Тогда из решения этой системы находим коэффициенты B_i $(i=\overline{1,5})$.

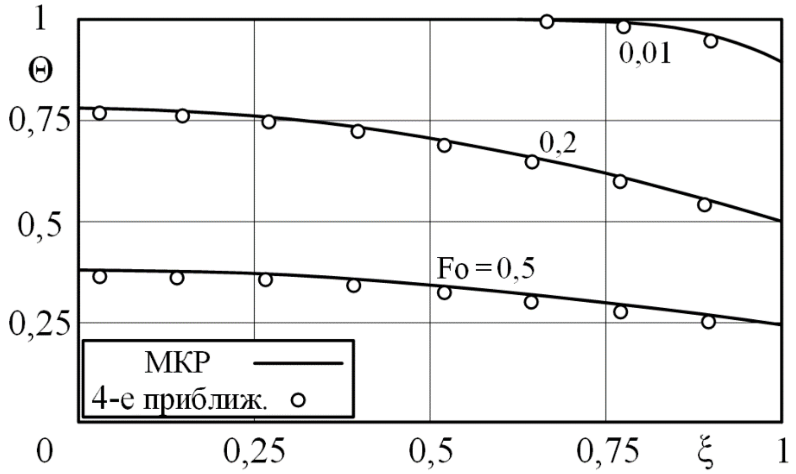
Затем, вычислив интеграл взвешенной невязки уравнения (7), находим собственные числа ν_k.

Подставляя (8), (7) в (5), получим сумму частных решений для каждого собственного числа

$$\Theta(\xi, Fo) = \sum_{k=1}^{n}\left[A_k \exp(-\nu_k \mathrm{Fo})\left(1 + \sum_{i=1}^{r} B_i(\nu_k)\xi^{i+1}\right)\right]. \qquad (13)$$

Неизвестные коэффициенты A_k находятся из вычисления невязки начального условия (2).

Результаты расчетов по формуле (13) в четвертом приближении представлены на рисунке. Их анализ позволяет заключить, что в диапазоне чисел $0{,}01 \le \mathrm{Fo} < \infty$ отличие полученного решения от численного не превышает 1,1 %.



Графики изменения температуры в шаре

Для получения более точного решения следует увеличивать количество точек, в которых необходимо выполнить уравнение (7).

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 18–79–00171.

Список использованных источников

1. Кудинов В. А., Карташов Е. М., Стефанюк Е. В. Техническая термодинамика и теплопередача. М. : Юрайт, 2012. 566 с.
2. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.
3. Лыков А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно-физический журнал. 1956. Т. 9, № 3. С. 287–304.
4. Фёдоров Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск : Наука, 2000. 220 с.