УДК 536.2

К. В. Губарева, А. В. Еремин
Самарский государственный технический университет, г. Самара
r.kristina2017@mail.ru

РЕШЕНИЕ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ПОСТОЯННЫМИ ВО ВРЕМЕНИ ВНУТРЕННИМИ ИСТОЧНИКАМИ ТЕПЛОТЫ (ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ТРЕТЬЕГО РОДА)

Используя метод дополнительных искомых функций и метод дополнительных граничных условий теплового баланса получено приближенное аналитическое решение нестационарной задачи теплопроводности для бесконечной пластины при симметричных граничных условиях третьего рода. Отмечается, что точность получаемого решения зависит от числа выполненных приближений и определяется степенью аппроксимирующего полинома. Решение позволяет выполнять параметрический анализ исследуемой системы – определение числовых параметров математической модели, при которых решение задачи соответствовало бы экспериментальным данным.

Ключевые слова: *аналитическое решение; внутренние источники теплоты; краевая задача; граничные условия третьего рода; дополнительная функция; интеграл теплового баланса.*

K. V. Gubareva, A. V. Eremin
Samara State Technical University, Samara

SOLUTION OF THE NON-STATIONARY HEAT CONDUCTIVITY PROBLEM WITH THE INTERNAL HEAT SOURCES CONSTANT IN TIME (BOUNDARY CONDITIONS OF THIRD GENUS)

Using the method of additional sought-for functions and the method of additional boundary conditions of heat balance, an approximate analytical solution of the unsteady heat conduction problem for an infinite plate is obtained under symmetric boundary conditions of the third kind. It is noted that the accuracy of the obtained solution depends on the number of performed approximations and is *determined by the degree of the approximating polynomial. The solution allows you to perform a parametric analysis of the system under study – determining the numerical parameters of the mathematical model for which the solution of the problem would correspond to experimental data.*

Keywords: *analytical solution; internal heat sources; boundary value problem; boundary conditions of the third kind; additional function; heat balance integral.*

Действие внутренних источников теплоты обусловлено воздействием электромагнитных полей, протеканием в объеме тела экзотермических реакций и др. В зависимости от соотношения граничных условий и мощности источников теплоты температура тела с течением времени может либо устанавливаться на некотором уровне, либо неограниченно возрастать (тепловое воспламенение).

Математическая постановка задачи может быть представлена в безразмерном виде [1–3] (рис. 1):

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}}=\frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2}+\mathrm{Po}\qquad(\mathrm{Fo}>0;\quad 0<\xi<1);\tag{1}$$

$$\Theta(\xi,0)=0;\tag{2}$$

$$\frac{\partial\Theta(0,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=0;\tag{3}$$

$$\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}+\mathrm{Bi}\Theta(1,\mathrm{Fo})=0,\tag{4}$$

где $\Theta=(T-T_0)/(T_{\text{ст}}-T_0)$ – безразмерная температура; $\xi=x/\delta$ – безразмерная координата; $\mathrm{Fo}=(a\tau)/\delta^2$ – критерий Фурье; $\mathrm{Po}=\mathrm{Po}_1\delta^2\beta/a$ – критерий Померанцева; $\mathrm{Bi}=\alpha\delta/\lambda$ – число Био.

В рассмотрение введена новая искомая функция времени

$$\varphi(\mathrm{Fo})=\frac{\partial\Theta(1,\mathrm{Fo})}{\partial\xi}=tg\,\alpha,\tag{5}$$

Решение задачи (1) – (4) находится в виде полинома n–ной степени:

$$\Theta(\xi,\mathrm{Fo})=\sum_{i=1}^{n}b_i(\mathrm{Fo})\,\xi^{i-1}\ ,\tag{6}$$

где $n\in N$ – натуральное число, соответствующее количеству членов ряда (6); $b_i(\mathrm{Fo})$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от безразмерного времени.

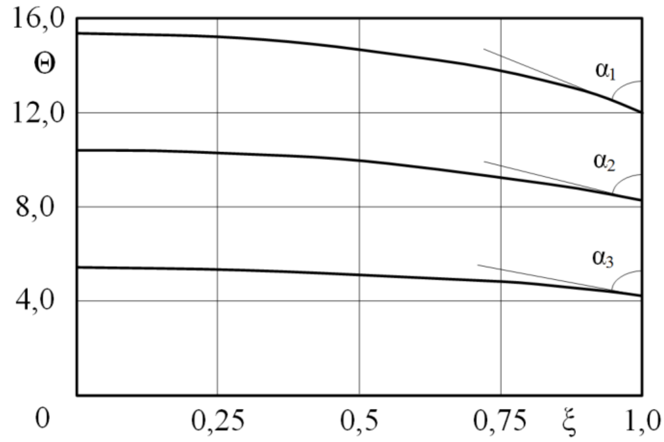

Рис. 1. Схема теплообмена

Из решения системы трех алгебраических уравнений определены коэффициенты

$$b_1(\text{Fo}) = -\frac{\varphi(\text{Fo})(2+\text{Bi})}{2\text{Bi}}; \quad b_2(\text{Fo}) = 0; \quad b_3(\text{Fo}) = \frac{\varphi(\text{Fo})}{2}.$$

Выражение (6) с учетом найденных коэффициентов записывается в виде

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = f_1(\xi)\varphi(\text{Fo}), \qquad (7)$$

где $f_1(\xi) = \frac{\xi^2}{2} - \frac{\text{Bi}+2}{2\text{Bi}}$ – координатная функция. Полученное соотношение удовлетворяет граничным условиям при любых значениях функции $\varphi(\text{Fo})$.

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = f_1(\xi)\,(C_1 e^{-\frac{\text{Fo}}{\text{K}}} - \text{Po}), \qquad (8)$$

где $\text{K} = \frac{1}{\text{Bi}} + \frac{1}{3}$.

Из решения уравнения (8) определяется константа интегрирования $C_1 = \frac{3(\text{Po} - \text{Bi} + \text{PoBi})}{\text{Bi}+3}$. Выражение (8) с учетом найденного значения представляет собой решение задачи (1) – (4) в первом приближении

$$\Theta(\xi, \text{Fo}) = \left(\frac{\xi^2}{2} - \frac{\text{Bi}+2}{2\text{Bi}}\right)\left[\frac{3(\text{Po} - \text{Bi} + \text{PoBi})}{\text{Bi}+3} e^{-\frac{\text{Fo}}{\text{K}}} - \text{Po}\right]. \qquad (9)$$

Результаты расчётов температуры первого и третьего приближения по формуле (9) представлены на рис. 2.

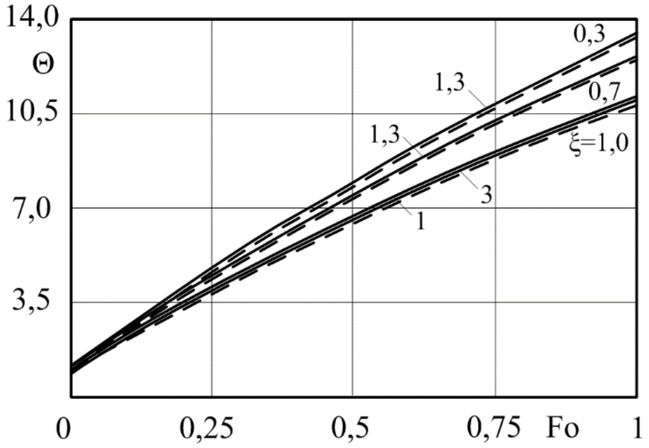

Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в пластине:
——— – приближенное решение, – – – – – численное решение [1];
1, 3 – номер приближения; Bi = 0,5; Po = 15

Разработанный метод может быть использован экспертными организациями при проведении энергетического аудита зданий, а именно, когда не представляется возможным провести замеры тепловых потерь через несущие конструкции, а также при проектировании нагревательных устройств.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 18–79–00171 и Совета по грантам Президента РФ в рамках научного проекта МК–2614.2019.8.

Список использованных источников

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.
2. Лыков А. В. Применение методов термодинамики необратимых процессов к исследованию тепло- и массообмена // Инженерно-физический журнал. 1956. Т. 9, № 3. С. 287–304.
3. Фёдоров Ф. М. Граничный метод решения прикладных задач математической физики. Новосибирск : Наука, 2000. 220 с.