УДК 536.2

К. В. Губарева, А. В. Еремин
Самарский государственный технический университет, г. Самара
r.kristina2017@mail.ru

ИССЛЕДОВАНИЕ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ПЛАСТИНЕ ПРИ ВНУТРЕННИХ ИСТОЧНИКАХ ТЕПЛОТЫ ПЕРЕМЕННОЙ МОЩНОСТИ

Рассмотрено совместное использование интегрального метода теплового баланса и дополнительных граничных условий, получено аналитическое приближенное решение задачи теплопроводности при граничных условиях первого рода с переменными во времени внутренними тепловыми источниками для бесконечно-протяженной пластины. Установлена взаимосвязь температуры, мощности и времени воздействия источника. Приведены результаты разработки приближенного аналитического метода, позволяющего получать простые по форме аналитические решения краевых задач теплопереноса с достаточной для инженерных расчетов точностью.

Ключевые слова: *нестационарная теплопроводность; внутренние источники теплоты, граничные условия.*

K. V. Gubareva, A. V. Eremin
Samara State Technical University, Samara

RESEARCH OF THE HEAT CONDUCTIVITY PROCESS IN PLATE WITH INTERNAL HEAT SOURCES OF VARIABLE POWER

Using of the integral method of heat balance and additional boundary conditions, an analytical approximate solution of the heat conduction problem with sources of time-variable internal sources for an infinitely extended plate is obtained. The relationship between temperature and power and exposure time of the source is established.

Keywords: *non-stationary thermal conductivity; internal heat sources, boundary conditions.*

Идея метода рассматривается для нестационарного режима теплопроводности бесконечной пластины.

Дифференциальное уравнение теплопроводности при наличии внутренних источников теплоты имеет вид [1–3] (рис. 1):

$$\frac{\partial\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\mathrm{Fo}} = \frac{\partial^2\Theta(\xi,\mathrm{Fo})}{\partial\xi^2} + \mathrm{PoFo} + \mathrm{Po}_1 \qquad (\mathrm{Fo} > 0;\quad 0 < \xi < 1); \tag{1}$$

$$\Theta(\xi, 0) = 0; \tag{2}$$

$$\Theta(0, \mathrm{Fo}) = 1; \tag{3}$$

$$\frac{\partial\Theta(1, \mathrm{Fo})}{\partial\xi} = 0, \tag{4}$$

где $\Theta = (T - T_0)/(T_{\text{ст}} - T_0)$ – безразмерная температура; $\xi = x/\delta$ – безразмерная координата; $\mathrm{Fo} = (a\tau)/\delta^2$ – критерий Фурье (безразмерное время); $\mathrm{Po} = \mathrm{Po}_1\delta^2\beta / a$ – критерий Померанцева; $\mathrm{Po}_1 = (\omega_0\delta^2)/[c\rho a(T_{\text{ст}} - T_0)]$ – начальное значение критерия Померанцева.

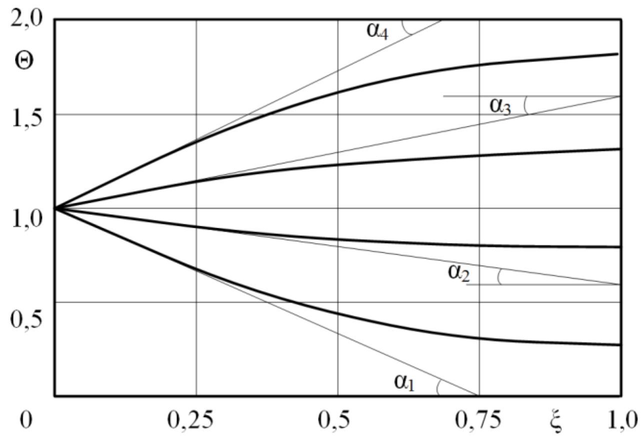

Рис. 1. Изменение температуры внутри пластины

В соответствии с предлагаемым методом, в рассмотрение введена новая искомая функция времени

$$\varphi(\tau) = \frac{\delta}{\lambda(T_0 - T_{\text{ср}})} q(\tau) = k\,q(\tau),$$

где $k = const$ – некоторый коэффициент, определяемый масштабом системы; $q(\tau)$ – плотность теплового потока на поверхности пластины;

Решение задачи (1) – (4) отыскивается в виде алгебраического полинома

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \sum_{i=1}^{n} b_i(\mathrm{Fo})\, \xi^{i-1} \ , \tag{5}$$

где $n \in N$ – натуральное число, соответствующее количеству членов ряда (5); $b_i(\mathrm{Fo})$ – неизвестные коэффициенты, зависящие от безразмерного времени.

Для того чтобы найти неизвестные коэффициенты $b_i(\mathrm{Fo})$ все граничные условия подставлены в выражение (5), и найдено решение системы трех уравнений

$$b_1(\mathrm{Fo}) = 1; \quad b_2(\mathrm{Fo}) = \varphi(\mathrm{Fo}); \quad b_3(\mathrm{Fo}) = -\frac{\varphi(\mathrm{Fo})}{2}.$$

Выражение (5) с учетом найденных коэффициентов записывается в виде

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = f_1(\xi)\varphi(\mathrm{Fo}) + 1, \tag{6}$$

где $f_1(\xi) = \xi\,(1 - 0{,}5\xi)$ – координатная функция.

После вычисления интеграла теплового баланса найдено

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = f_1(\xi)\left(C_1 e^{-3\mathrm{Fo}} + \mathrm{Po}_1 + \mathrm{Po}\left(\mathrm{Fo} - \frac{1}{3}\right)\right) + 1. \tag{7}$$

Для выполнения условия (1) составляется его невязка и требуется ортогональность невязки к координатной функции $f_1(\xi)$

$$\int_0^1 [\Theta(\xi, 0)] f_1(\xi)\, d\xi = 6C_1 - 2\mathrm{Po} + 6\mathrm{Po}_1 + 15 = 0. \tag{8}$$

Из решения уравнения (8) определяется константа интегрирования $C_1 = \frac{1}{3}\mathrm{Po} - \mathrm{Po}_1 - \frac{5}{2}$.

Решение задачи (1) – (4) представляет собой выражение (7) с учетом найденной константы интегрирования

$$\Theta(\xi, \mathrm{Fo}) = \left(\left(\frac{1}{3}\mathrm{Po} - \mathrm{Po}_1 - \frac{5}{2}\right)e^{-3\mathrm{Fo}} + \mathrm{Po}_1 + \mathrm{Po}\left(\mathrm{Fo} - \frac{1}{3}\right)\right)\xi(1 - 0{,}5\xi) + 1. \tag{9}$$

На рис. 2 представлены результаты расчётов безразмерной температуры в четвертом приближении в сравнении с численным решением. Из рис. 2 можно сделать вывод, что в диапазоне $0{,}1 \le \mathrm{Fo} < \infty$ расхождение полученных результатов не превышает 5 %.

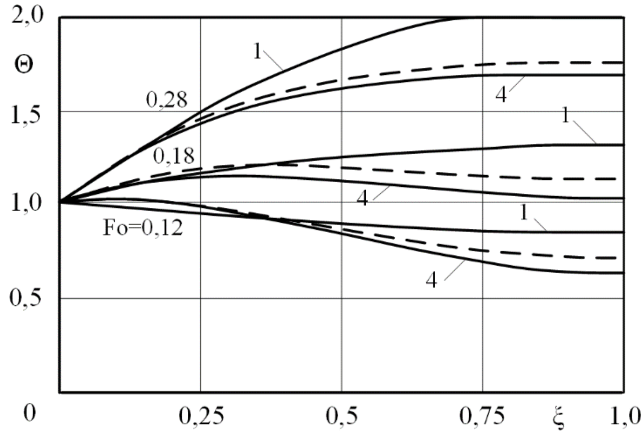

Рис. 2. Распределение безразмерной температуры в пластине:
——— – приближенное решение; – – – – численное решение;
1, 4 – номер приближения; $\mathrm{Po}_1 = 5$; $\mathrm{Po} = 5$

Введение новой искомой функции – плотности теплового потока $\varphi(\mathrm{Fo})$, позволило перейти от уравнения в частных производных к интегрированию обыкновенного дифференциального уравнения, что делает возможным использование предлагаемого метода в тех случаях, когда при определении плотности теплового потока на поверхности тела погрешность порядка 5 % можно считать удовлетворительной.

Исследование выполнено при финансовой поддержке РНФ в рамках научного проекта № 18–79–00171 и Совета по грантам Президента РФ в рамках научного проекта МК–2614.2019.8.

Список использованных источников

1. Лыков А. В. Теория теплопроводности. М. : Высшая школа, 1967. 600 с.
2. Kudinov V. A., Eremin A. V. and Stefanyuk E. V. Critical conditions for thermal explosion in a plate with a nonlinear heat source // Journal Of Machinery Manufacture And Reliability. 2016. Vol. 45, № 1. P. 38–43. URL: https://link.springer.com/article/10.3103%2FS1052618816010088 (дата обращения: 07.11.2019)
3. Еремин А. В., Стефанюк Е. В., Абишева Л. С. Идентификация источника теплоты на основе аналитического решения задачи теплопроводности // Известия высших учебных заведений. Черная металлургия. 2016. Т. 59, № 5. С. 339–346.