

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ МИРОВОЙ КОНСТАНТЫ – ЧИСЛА e (НА ПРИМЕРЕ ЛАБОРАТОРНОЙ РАБОТЫ «ИЗМЕРЕНИЕ ЧИСЛА e ПУТЕМ ОЦИФРОВКИ ИЗОБРАЖЕНИЯ ВИСЯЩЕЙ ЦЕПИ»)

Леконцева В. А., Придорогина К. Д., Бодряков В. Ю.

Уральский государственный педагогический университет, г. Екатеринбург,
Россия

vicka.leckontseva@yandex.ru, kseprid@gmail.com

Аннотация. В статье рассматривается один из способов вычисления числа e - оцифровка изображения висящей цепи. Проблемой исследования является вопрос о том, как измерить число e с наименьшей погрешностью. Цель исследования - путем оцифровки изображений цепи, свободно подвешенной в поле тяжести, измерить число e – одну из фундаментальных мировых констант. Результатом проведенного исследования является значение экспериментального значения числа e с относительной погрешностью 0,004%.

Ключевые слова: мышление, лабораторная работа, математика, число e , цепь, оцифровка

THE DEFINITION OF WORLD'S FUNDAMENTAL CONSTANTS – THE NUMBERS e (ON THE EXAMPLE OF LABORATORY WORK "MEASUREMENT OF THE NUMBER e , BY DIGITIZING IMAGE HANGING CHAIN»)

Lekontseva V.A., Pridorogina K.D., Bodryakov V.Y.

Ural State Pedagogical University, Ekaterinburg, Russia
vicka.leckontseva@yandex.ru, kseprid@gmail.com

Abstract. The article deals with one of the ways to calculate the number e - digitizing the image of a hanging chain. The problem of the study is how to measure the number e with the least error. The aim of the study is to measure the number e , one of the fundamental world constants, by digitizing images of a chain freely suspended in the gravity field. The result of the study is the value of the experimental value of the number e with a relative error of 0.004%.

Key words: thinking, laboratory work, mathematics, number e , chain, digitization

В высшей математике огромную роль играет число e – иррациональная и трансцендентная математическая константа, называемая числом Эйлера или числом Непера. Число e также является одной из фундаментальных мировых

констант и лежит в основе многих физических законов (закон изменения давления воздуха с высотой в атмосфере Земли, закон изменения температуры тела со временем вследствие теплообмена, закон радиоактивного распада и др.).

Формирование экспериментирующего мышления обучающихся является одним из актуальных на сегодня и потенциально перспективных направлений развития дидактики обучения и воспитания подрастающих поколений [1–3].

Мейер и Сауров в [1] (см. тж. [2]) предлагают считать, что экспериментальное (экспериментирующее) мышление это:

- умственная деятельность для обеспечения познавательно– конструктивной деятельности с физическими объектами и явлениями;
- теоретическое понимание реальности через ее идеально-реальное и таким образом критическое изменение; понимание реальности через создание (проектирование, изобретение) новой реальности;
- эксперимент с идеями (и их носителями) в форме внешних предметных, материальных и знаковых действий;
- мысленный эксперимент, как особое знаковое, понятийное мышление по согласованию реального и идеального миров; мыслительная деятельность, организуемая по структуре–схеме *средства – процессы – продукт*.

Мы согласны со сказанным, уточняя лишь, что объектами экспериментирующего мышления может быть и математическая (модельная) сущность рассматриваемого натурального (физического) или мыслимого (идеального) объекта или явления.

Авторы монографии [5] полагают, что в содержании школьного курса математики должна быть выделена и специально спроектирована особая содержательно-методическая линия, – линия экспериментальной математики. Решению этой перспективной задачи способствует разработка и внедрение в массовый учебный процесс системы уровневых *лабораторных работ (ЛРМ) по математике* [7–9]. Так, одной из разработанных нами и массово успешно апробированных ЛРМ является работа «Измерение числа e путем оцифровки изображения висящей цепи»).

Изложим (весьма кратко) теорию этой ЛРМ. Цепная линия – это линия, форму которой принимает гибкая однородная нерастяжимая тяжёлая нить или цепь с закреплёнными концами в однородном гравитационном поле [9–11]. Цепная линия по форме напоминает параболу, однако, как одновременно показали в 1691 г. Х. Гюйгенс, Г.В. Лейбниц и И. Бернулли (история вопроса описана в [12]), не является таковой, а является функцией гиперболического косинуса $\operatorname{ch} z = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$; эту функцию удобно записать в однопараметрическом виде: $y(x) = a \operatorname{ch}(x/a)$, где действительный параметр $a > 0$

с размерностью длины равен расстоянию от «дна» цепной линии до начала координат (рис. 1). Математическое исследование этой функции несложно и посилено даже слабо подготовленному старшекласснику, имеющему общее представление о поведении показательной функции.

Приведем содержательную часть Лабораторной работы по математике «Измерение числа e путем оцифровки изображения висящей цепи».

Цель: Путем оцифровки изображений цепи, свободно подвешенной в поле тяжести, измерить число e – одну из фундаментальных мировых констант.

Задачи: уяснить важность числа e для науки и практики и изучить основы теории цепной линии; разработать алгоритм выполнения работы; получить и оцифровать изображения висящей цепи, варьируя точки подвеса; изучить основы статистической обработки данных; подготовить отчет по ЛРМ, содержащий результат измерения числа e и оценку погрешности.

Оборудование: вертикальная рабочая поверхность (доска с гвоздиками), металлическая цепь, цифровая камера (мобильное устройство с камерой), персональный компьютер с установленным программным обеспечением для статистической обработки данных, например, пакетом MS Office.

Опишем ход работы на основном (базовом) уровне.

1°. Теоретический вывод рабочей формулы для вычисления числа e по результатам оцифровки изображения цепной линии:

$$y(x) = a \operatorname{ch}(x/a) = \frac{a}{2} (e^{x/a} + e^{-x/a}). \quad (1)$$

При $x = a$

$$y(x = a) = y(a) = \frac{a}{2} (e + 1/e),$$
$$a e^2 - 2e y(a) + a = 0,$$

откуда для понимаемого как неизвестный параметр числа e (и обратного к нему числа e^{-1}) имеем:

$$e = \frac{y(a)}{a} + \sqrt{\left(\frac{y(a)}{a}\right)^2 - 1}; \quad e^{-1} = \frac{y(a)}{a} - \sqrt{\left(\frac{y(a)}{a}\right)^2 - 1}. \quad (2)$$

Значения a и $y(a)$ определяются экспериментально при оцифровке изображения подвешенной цепи.

1. 2°. Вертикально устанавливается рабочая поверхность и на вбитые гвоздики (точки подвеса) свободно подвешивается металлическая цепь.

3°. При помощи цифровой камеры (мобильного устройства с камерой), делаются снимки цепи при хорошем освещении. Длина провисшей части цепи варьируется путем «отбрасывая» от цепи по одному звену с каждого конца. Те же действия повторяются при изменении расстояния между точками подвеса.

4°. После получения изображений, они последовательно загружаются и оцифровываются с помощью растрового графического редактора MS Paint. Последовательность действий при этом очевидна из рис. 1.

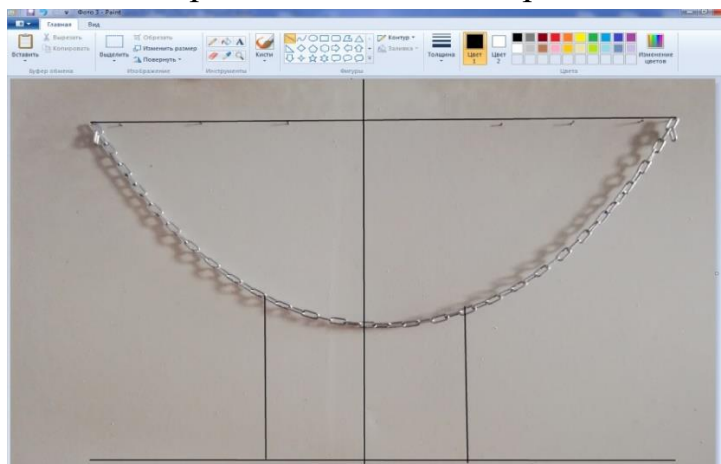


Рисунок 1 – Изображение свободно висящей цепи (для оцифровки)

Результатом оцифровки является множество пар вида $(a; y(a))_k$ и $(-a; y(-a))_k, k = 1, 2, \dots, n$. Практика занятий со студентами показывает, что оптимальным является n в пределах 5 – 10. Необходимость получения «правых» и «левых» пар $(\pm a; y(\pm a))$ отражает возможную небольшую асимметрию провиса реальной цепи, а также неточность в оцифровке ее средней линии. Кроме того, увеличение объема эмпирической информации уменьшает статистическую погрешность оценок.

5°. После того, как выполнены необходимые измерения для каждого изображения, проводится (обычно с помощью электронной таблицы MS Excel) вычисление числа e по выведенным в п. 1° формулам для «правого» и «левого» отступа от оси ординат. Внутренний контроль: произведение корней (2) должно быть равно единице.

6°. С помощью встроенных статистических функций MS Excel проводится численная обработка результатов измерений. А именно, вычисляется среднее «экспериментальное» значение (\bar{e}) числа e и его исправленное среднее квадратическое отклонение (СКО) s , в простейшем случае принимаемое за меру погрешности. Как показали наши оценки, ошибкой собственно оцифровки в \pm единицу экранного пикселя по сравнению со статистической погрешностью s можно пренебречь. Дополнительно рекомендуется оценить точность найденного экспериментального числа \bar{e} по отношению к его «точному» значению $e \approx 2,718281828$.

Хотя, как показал наш опыт, выполнение работы на базовом уровне позволяет получать в целом вполне адекватные оценки числа e , без указания рекомендуемых оптимальных параметров «экспериментальной установки»

погрешность в величине e остается довольно заметной. Эта погрешность может быть существенно снижена и доведена до уровня в малые доли процента путем «юстировки» экспериментальной установки.

Кратко опишем ход продолжения работы на продвинутом уровне.

7°. При фиксированных точках подвеса путем варьирования длины ℓ части цепи между точками подвеса определяется оптимальная глубина провиса, при которой может быть получено наиболее адекватное значение \bar{E} . При каждом положении цепи делается по несколько (5–10) ее изображений, которые оцифровываются и обрабатываются так, как описано выше. Затем строится корреляционная зависимость $\bar{E}(a)$ по которой и устанавливается рекомендуемое оптимальное значение параметра a .

8°. После того, как рекомендуемое оптимальное значение параметра a найдено, измерения (набор статистики) проводятся так, как описано на базовом уровне ЛРМ. После выполнения работы на продвинутом уровне наиболее мотивированными студентами было получено $n = 72$ значения числа e (см. частотное распределение):

e_i	2,68	2,69	2,70	2,71	2,72	2,73	2,74
m_i	1	5	18	21	19	8	0

Соответственно, $\bar{E} \pm s = 2,711 \pm 0,012$ с относительной погрешностью 0,004%.

Таким образом, описанная ЛРМ была массово успешно апробирована в реальном учебном процессе на площадке ИМФИиТ УрГПУ. Студенты с интересом и энтузиазмом осваивали (многие впервые) «экспериментальный» подход к обучению математике и выражали готовность применять его в своей будущей или текущей (например, студенты-заочники) профессиональной деятельности.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Майер В.В., Сауров Ю.А. Экспериментальное мышление: смыслы-ценности, черты, технология формирования // Учебная физика. 2018. № 4. С. 45-65.
2. Сауров Ю.А., Майер В.В. Экспериментирующее мышление в методике обучения физике // Физика в школе. 2018. № 7. С. 3-11.
3. Сорокин А.П. Организация экспериментирующего мышления при решении творческих задач по физике / В сб.: Формирование мышления в процессе обучения естественнонаучным, технологическим и математическим дисциплинам. Материалы всероссийской научно-практической конференции. Екатеринбург: УрГПУ, 2018. – С. 145-148.

4. Никифоров Г.Г. Погрешности в лабораторных работах по физике при выполнении экспериментальных и практико-ориентированных заданий ОГЭ и ЕГЭ. 7—11 классы. М.: Дрофа, 2017. – 161 с.
5. Шабанова М.В., Овчинникова Р.П., Ястребов А.В. Экспериментальная математика в школе. Исследовательское обучение / Коллективная монография. М.: Издательский дом Академии Естествознания, 2016. – 300 с.
6. Котова Л. В. Лабораторные исследовательские работы в профессионально направленном обучении методам и средствам защиты информации будущих бакалавров педагогического образования // Информатика и образование. 2018. № 1. С. 53-60.
7. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Система разноуровневых лабораторных работ по математике с применением ИКТ как инструмент фронтального формирования учебно-исследовательских и творческих умений обучающихся / Современные информационные технологии в образовании: сб. материалов 28 международной конференции, Москва-Троицк: Фонд «Байтик», 27.06.2019.
8. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю. Натурный эксперимент с применением средств информационно-коммуникационных технологий и мобильных устройств как инструмент формирования исследовательских умений студентов // Вестник РУДН: Информатизация образования. 2018. Т. 15. № 4. С. 363–372.
9. Аксенова О.В., Бодряков В.Ю., Быков А.А., Топорова Н.В. Оптимизационная задача о провисании цепной линии. С. 123–130 / В сб.: Актуальные вопросы преподавания математики, информатики и информационных технологий: межвузовский сборник научных работ / Урал. гос. пед. ун-т. – Екатеринбург: Урал. гос. пед. ун-т, 2018. – 314 с.
10. Меркин Д.Р. Введение в механику гибкой нити. М.: Наука, 1980. – 240 с.
11. Очков В. Ф., Цуриков Г. Н., Чудова Ю. В. Осторожно: цепная функция // Информатика в школе. 2017. № 4. С. 58-62.
12. Бодряков В.Ю., Быков А.А. История гиперболических функций: их изучение и некоторые приложения // Математическое образование. 2018. №. 4(88). С. 18-29.