DOI 10.15826/B978-5-7996-2935-9.32

СТАБИЛЬНОСТЬ КРУГОВЫХ ОРБИТ ФОТОНОВ В ГАЛАКТИЧЕСКИХ ГАЛО

Г. Р. Нигматуллина[1], Г. М. Гарипова[2], А. А. Потапов[1]
[1] *Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета,* [2] *Башкирский государственный педагогический университет им. М. Акмуллы*

В статье рассматривается стабильность круговых орбит фотонов в галактических гало, методом динамических систем.

STABILITY OF CIRCULAR ORBITS OF PHOTONS IN GALACTIC HALO

G. R. Nigmatullina[1], G. M. Garipova[2], A. A. Potapov[1]
[1] *Sterlitamak branch of Bashkir State University,* [2] *Bashkir State Pedagogical University named after M. Akmulla*

The article considers the stability of the circular orbits of photons in galactic halo, using the dynamic system method.

Полезным приложением метода динамических систем является изучение движения частиц, образующих галактические гало. Рассмотрим этот способ на примере фотонов, используя полевые уравнения Вейля. Метрика Маннгейма-Казанаса-де Ситтера задается выражением ($G = 1$, $c = 1$)

$$d\tau^2 = B(r)dt^2 - \frac{1}{B(r)}dr^2 - r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2), B(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \gamma r - kr^2, \tag{1}$$

где k, γ — константы. Вводя обозначение $u = \frac{1}{r}$ [1], получим уравнение траектории пробной частицы массы m_0 на экваториальной плоскости $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u + 3Mu^2 - \frac{\gamma}{2} + \frac{M}{h^2} + -\frac{1}{2h^2u^2}(\gamma - \frac{2k}{u}), \tag{2}$$

где h — угловой момент. Для фотона, масса которого равна нулю, (2) принимает вид конформно инвариантного уравнения уже без константы k:

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} = -u + 3Mu^2 - \frac{\gamma}{2}. \tag{3}$$

Чтобы решить (3) не непосредственным интегрированием, а методом динамических систем, перейдем от одного дифференциального уравнения второго порядка к двум уравнениям первого порядка. Введем обозначение

$$u = x, y = \dot{x} = \frac{dx}{d\varphi}, \tag{4}$$

чтобы получить систему

$$\dot{x} = X(x, y) = y, \tag{5}$$

$$\dot{y} = Y(x, y) = a + bx + cx^2 + dx^{-2} + ex^{-3}, \tag{6}$$

в которой

$$a = \frac{M}{h^2} - \frac{\gamma}{2}, b = -1, c = 3M, d = \frac{\gamma}{2h^2}, e = -\frac{k}{h^2}. \tag{7}$$

Условие $\dot{x} = 0$ дает $r = R = constant$, а $\dot{y} = 0$ дает

$$h^2 = -\frac{2MR^2 + R^4(\gamma - 2kR)}{R(2 + \gamma R) - 6M}, \tag{8}$$

где $R(2 + \gamma R) - 6M \neq 0$.

Точкам равновесия соответствует $\dot{x} = 0$ и $\dot{y} = 0$ то есть $(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, 0)$ и $(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2c}, 0)$. Чтобы эти точки оказались на действительной, а не на мнимой фазовой плоскости, мы должны положить $\alpha^2 \equiv b^2 - 4ac = 1 + 6\gamma M \geq 0$. При $\alpha^2 = 0$ две точки равновесия редуцируются в одну: $P(\frac{1}{6M}, 0)$. При $\alpha^2 > 0$ всегда существуют две различные точки $Q_\pm(\frac{1+\alpha}{6M}, 0)$, где $\alpha = \pm\sqrt{1 + 6\gamma M}$. Таким образом, $Q_\pm$ соответствует двум радиусам, зависящим от γ, $R_\pm = \frac{6M}{1\pm\sqrt{(1+6\gamma M)}}$.

Из уравнения (8) следует:

$$q_0\pm = 1 - \frac{6M}{R_\pm}. \tag{9}$$

Таким образом, метод динамических систем, позволяющий получить представление о поведении частиц без непосредственного решения уравнений движения, может быть успешно использован в решении ряда космологических задач.

Библиографические ссылки

1. *Чандрасекар С.* Математическая теория черных дыр. В 2-х томах. — М: Мир, 1986.