МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ИНСТИТУТ ЕСТЕСТВЕННЫХ НАУК И МАТЕМАТИКИ

Кафедра математического анализа

НАИЛУЧШЕЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРОМЕЖУТКА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ

Направление подготовки 01.04.01 «Математика»

Образовательная программа «Современные проблемы математики»

Зав. кафедрой:
к. ф.-м. н., доц. П. Ю. Глазырина

____

Магистерская диссертация

Торгашовой
Анастасии Юрьевны

____

Нормоконтролер:
к. ф.-м. н., доц. М. В. Дейкалова

____

Научный руководитель:
к. ф.-м. н., доц. М. В. Дейкалова

____

Екатеринбург

2019

РЕФЕРАТ

Торгашова А. Ю. НАИЛУЧШЕЕ ОДНОСТОРОННЕЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ ПРОМЕЖУТКА АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ МНОГОЧЛЕНАМИ, магистерская диссертация: стр. 28, рис. 2, библ. назв. 19.

Ключевые слова: АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МНОГОЧЛЕНЫ, ОДНОСТОРОННЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ, ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКАЯ ФУНКЦИЯ ИНТЕРВАЛА

Рассматриваются задачи наилучшего одностороннего приближения (снизу и сверху) в пространстве $L^{\upsilon}(-1,1)$ функций, суммируемых с весом υ на $(-1,1)$, характеристической функции интервала (a,b), $-1<a<b<1$, множеством алгебраических многочленов степени не выше заданной. Приведено решение задач в случае, когда a,b — узлы положительной квадратурной формулы при некоторых условиях на ее алгебраическую точность, а также в случае симметричного интервала $(-h,h)$, $0<h<1$, для четного веса υ.

ABSTRACT

Torgashova A. Yu. BEST ONE-SIDED INTEGRAL APPROXIMATION OF THE CHARACTERISTIC FUNCTION OF AN INTERVAL BY ALGEBRAIC POLYNOMIALS, master's thesis: pp. 28, fig. 2, bibl. 19.

Keywords: ALGEBRAIC POLYNOMIALS, ONE-SIDED APPROXIMATION, CHARACTERISTIC FUNCTION OF AN INTERVAL

We consider the problems of the best one-sided approximation (from below and from above) in the space $L^{\upsilon}(-1,1)$ of functions integrable on $(-1,1)$ with a weight υ to the characteristic function of an interval (a,b), $-1<a<b<1$, by the set of algebraic polynomials of degree not exceeding a given number. We solve the problems in the case when a and b are nodes of a positive quadrature formula under some conditions on its degree of precision as well as in the case of a symmetric interval $(-h,h)$, $0<h<1$, for an even weight υ.

МЕСТО ВЫПОЛНЕНИЯ РАБОТЫ

Кафедра математического анализа Института естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

СОДЕРЖАНИЕ

ОБОЗНАЧЕНИЯ И СОКРАЩЕНИЯ

$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ – множество действительных чисел;

υ — функция, измеримая, суммируемая, неотрицательная, отличная от нуля почти всюду на $(-1, 1)$, такую функцию будем называть весом (на $(-1, 1)$);

$L^{\upsilon}(-1, 1)$ – пространство вещественнозначных функций f, суммируемых с весом υ на $(-1, 1)$, наделенное нормой

$$\|f\| = \|f\|_{L^{\upsilon}(-1,1)} = \int\limits_{-1}^{1} |f(x)|\upsilon(x)\,dx.$$

$\mathcal{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n с вещественными коэффициентами;

$f \le g$ означает, что $f(x) \le g(x)$ почти для всех $x \in [-1, 1]$;

$\mathcal{P}_n^-(f) = \{p \in \mathcal{P}_n \colon p \le f\}$ – множество многочленов из $\mathcal{P}_n$, графики которых лежат под графиком функции f;

$\mathcal{P}_n^+(f) = \{p \in \mathcal{P}_n \colon p \ge f\}$ – множество многочленов из $\mathcal{P}_n$, графики которых лежат над графиком функции f;

$E_n^-(f) = E_{n,\upsilon}^-(f) = \inf\{\|f - p\| \colon p \in \mathcal{P}_n^-(f)\}$ – величина наилучшего приближения снизу в пространстве $L^{\upsilon}(-1, 1)$ функции f множеством $\mathcal{P}_n$;

$E_n^+(f) = E_{n,\upsilon}^+(f) = \inf\{\|f - p\| \colon p \in \mathcal{P}_n^+(f)\}$ – величина наилучшего приближения сверху в пространстве $L^{\upsilon}(-1, 1)$ функции f множеством $\mathcal{P}_n$;

$$J = J(a, b) = \begin{cases} (a, b), & -1 < a < b < 1, \\ (a, 1], & -1 < a < b = 1, \\ [-1, b), & a = -1 < b < 1, \end{cases}$$ – промежуток;

$$\mathbf{1}_J(x) = \begin{cases} 1, & x \in J, \\ 0, & x \in [-1, 1] \setminus J, \end{cases}$$ – характеристическая функция множества $J \subset [-1, 1]$.

ВВЕДЕНИЕ

1 Постановка задачи

Пусть υ — функция, измеримая, суммируемая, неотрицательная, отличная от нуля почти всюду на $(-1,1)$; такую функцию будем называть весом (на $(-1,1)$). Обозначим через $L^{\upsilon}(-1,1)$ пространство вещественнозначных функций f, суммируемых с весом υ на $(-1,1)$, наделенное нормой

$$\|f\| = \|f\|_{L^{\upsilon}(-1,1)} = \int_{-1}^{1} |f(x)|\upsilon(x)\,dx. \tag{1.1}$$

При целом неотрицательном n через $\mathcal{P}_n$ обозначим множество алгебраических многочленов $p(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ степени не выше n с вещественными коэффициентами.

Для пары измеримых функций f и g на интервале $(-1,1)$ неравенство $f \le g$ будет означать, что $f(x) \le g(x)$ почти для всех $x \in (-1,1)$. Функции f, определенной и измеримой на отрезке $[-1,1]$, сопоставим множества

$$\mathcal{P}_n^{-}(f) = \{p \in \mathcal{P}_n \colon p \le f\}, \quad \mathcal{P}_n^{+}(f) = \{p \in \mathcal{P}_n \colon p \ge f\} \tag{1.2}$$

многочленов из $\mathcal{P}_n$, графики которых лежат под или, соответственно, над графиком функции f. В первом случае функция f предполагается ограниченной снизу, во втором — сверху. Нас интересуют величины

$$E_{n,\upsilon}^{\mp}(f) = \inf\{\|f-p\| \colon p \in \mathcal{P}_n^{\mp}(f)\} \tag{1.3}$$

наилучшего приближения снизу и сверху в пространстве $L^{\upsilon}(-1,1)$ функции f множеством $\mathcal{P}_n$ и экстремальные многочлены, на которых реализуются точные нижние грани в (1.3).

Функции f, измеримой и ограниченной снизу на отрезке $[-1,1]$, сопоставим функцию $\underline{f}$, определенную на $[-1,1]$ соотношением

$$\underline{f}\,(x) = \lim_{\varepsilon\to+0} \operatorname{ess\,inf}\{f(t) \colon t \in (x-\varepsilon, x+\varepsilon) \cap [-1,1]\}, \quad x \in [-1,1]. \tag{1.4}$$

Обозначим через $\mathcal{R}^{-}$ множество функций, определенных, ограниченных снизу на отрезке $[-1,1]$, принадлежащих пространству $L^{\upsilon}(-1,1)$, и таких, что $\underline{f}\,(x) \le f(x)$ для всех $x \in [-1,1]$. Функции $f \in \mathcal{R}^{-}$ обладают тем свойством, что если для некоторой непрерывной функции φ неравенство $\varphi \le f$ выполняется почти всюду на отрезке $[-1,1]$, то оно будет выполняться и всюду на этом отрезке. Как следствие для функций $f \in \mathcal{R}^{-}$

при любом $n \ge 0$ имеем

$$\mathcal{P}_n^-(f) = \bigl\{p \in \mathcal{P}_n \colon p(x) \le f(x),\ x \in [-1,1]\bigr\}. \tag{1.5}$$

Положим $\mathcal{R}^+ = -\mathcal{R}^- = \{f\colon -f \in \mathcal{R}^-\}$. Множествам $\mathcal{R}^\mp$ принадлежат, например, функции, непрерывные на отрезке $[-1,1]$, а также разрывные функции, имеющие на $[-1,1]$ лишь разрывы первого рода во внутренних точках отрезка, при условии, что значение в точке разрыва заключено между пределами слева и справа.

В исследовании величин (1.3) существенную роль играют квадратурные формулы

$$\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(x)p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k), \quad p \in \mathcal{P}_n, \tag{1.6}$$

точные на множестве многочленов $\mathcal{P}_n$, с узлами $-1 \le x_1 < x_2 < \cdots < x_M \le 1$ и положительными весами: $\lambda_k > 0,\ 1 \le k \le M$; такие квадратурные формулы называют *положительными*. Наибольшую степень n многочленов, для которых справедлива формула (1.6), называют ее *алгебраической точностью*. В зависимости от ситуации некоторые из узлов формулы (1.6) могут быть фиксированы, а остальные считаются свободными, точнее, выбираются из условия максимальной алгебраической точности формулы (см., к примеру, [1, гл. 7, §1]. Одной из наиболее известных положительных квадратурных формул является квадратурная формула Гаусса (1866), в которой все M узлов свободные; ее алгебраическая точность есть $2M-1$ (см., например, [1, гл. 7, §1]).

Следующее утверждение является частным случаем более общего утверждения, содержащегося в [2, доказательство теоремы 2] (см. также [3, теорема 1.7.5]).

Теорема A. *Предположим, что на множестве $\mathcal{P}_n$ имеет место положительная квадратурная формула* (1.6). *Тогда для функций $f \in \mathcal{R}^\mp$ справедливы соответственно оценки*

$$E_n^-(f) \ge \int\limits_{-1}^{1} \upsilon(x)f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k), \quad E_n^+(f) \ge \sum_{k=1}^{M} \lambda_k f(x_k) - \int\limits_{-1}^{1} \upsilon(x)f(x)\,dx. \tag{1.7}$$

Если какое-либо из неравенств (1.7) обращается в равенство, то говорят, что квадратурная формула (1.6) в соответствующей задаче (1.3) является *экстремальной*.

Перейдем непосредственно к исследуемой задаче. При $-1 \le a < b \le 1$ введем единое обозначение промежутков

$$J = J(a,b) = \begin{cases} (a,b), & -1 < a < b < 1, \\ (a,1], & -1 < a < b = 1, \\ [-1,b), & a = -1 < b < 1. \end{cases} \tag{1.8}$$

Рассмотрим задачи об одностороннем приближении снизу и сверху характеристической функции

$$\mathbf{1}_J(t) = \begin{cases} 1, & t \in J, \\ 0, & t \in [-1,1] \setminus J, \end{cases} \tag{1.9}$$

промежутка (1.8) алгебраическими многочленами заданной степени $n \geq 0$ в пространстве $L^v(-1,1)$. Задача заключается в нахождении величин

$$E_{n,v}^{-}(\mathbf{1}_J) = \inf\left\{ \|\mathbf{1}_J - p_n\|_{L^v(-1,1)} \colon p_n \in \mathcal{P}_n^{-}(\mathbf{1}_J) \right\}. \tag{1.10}$$

$$E_{n,v}^{+}(\mathbf{1}_J) = \inf\left\{ \|\mathbf{1}_J - p_n\|_{L^v(-1,1)} \colon p_n \in \mathcal{P}_n^{+}(\mathbf{1}_J) \right\}. \tag{1.11}$$

Характеристические функции (1.9) промежутков (1.8) принадлежат множествам $\mathcal{R}^{\mp}$, поэтому для (1.10) и (1.11) справедливы соответствующие неравенства (1.7).

2 История исследования

2.1 Истоки

Односторонние интегральные приближения ступенчатых функций алгебраическими многочленами во взвешенной интегральной метрике на отрезке $[-1,1]$ фактически изучали в 1880-е годы А. А. Марков и Т. И. Стилтьес. В частности, ими была предложена конструкция многочлена четной степени $2m-2$, график которого расположен над графиком характеристической функции $\mathbf{1}_{[-1,h]}$ отрезка $[-1,h]$, $h \in (-1,1)$. В случае, когда h совпадает с одним из узлов m-точечной квадратурной формулы Гаусса, указанный многочлен является экстремальным в задаче о наилучшем взвешенном интегральном приближении сверху функции $\mathbf{1}_{[-1,h]}$.

Задачи одностороннего взвешенного интегрального приближения характеристической функции интервала алгебраическими или тригонометрическими полиномами возникают в различных разделах математики, они имеют богатую историю. В этой тематике существуют точные результаты, имеются порядковые результаты и исследования асимптотик (см. работы [4, 5, 6]), различные приложения (см. [3, 5, 7, 8]).

В [5] исследовалась, в частности, задача одностороннего приближения периодического продолжения характеристической функции интервала (a,b) тригонометрическими полиномами в интегральной метрике на периоде с весом Якоби. Точное решение было найдено в [5, Theorem 3] для некоторых значений a, b, удовлетворяющих специальным уравнениям.

В случае единичного веса для произвольного интервала, расположенного на периоде, задача была решена в [8]; после косинус-замены этот результат дает решение задачи (1.10) для $J = (a,1]$ при любом $a \in (-1,1)$ с весом Чебышева первого рода

$v(t) = (1-t^2)^{-1/2}$. В [7] решена задача (1.10) одностороннего интегрального приближения характеристической функции произвольного полуинтервала $(a, 1]$, $-1 < a < 1$, алгебраическими многочленами на $[-1, 1]$ с единичным весом и описан весь класс экстремальных многочленов. В работе [9] содержится решение этой задачи в пространстве $L^v(-1, 1)$ с произвольным весом; опишем основной результат работы [9] в удобном для нас виде в следующем подразделе.

2.2 Одностороннее приближение снизу характеристической функции полуинтервала $(a, 1]$

В исследовании задач (1.10) и (1.11) одностороннего приближения характеристических функций промежутков многочленами применяются M-точечные квадратурные формулы (1.6), у которых множество $\mathfrak{u}$ фиксированных узлов либо пусто, либо состоит из одного, двух или трех фиксированных узлов конкретного вида:

$$\varnothing, \quad \{-1\}, \quad \{1\}, \quad \{-1, 1\}, \tag{2.1}$$

$$\{\theta\}, \quad \{-1, \theta\}, \quad \{\theta, 1\}, \quad \{-1, \theta, 1\}, \quad \text{где} \quad \theta \in (-1, 1), \tag{2.2}$$

а остальные $M - |\mathfrak{u}|$ узлов выбираются, исходя из условия максимальной алгебраической точности формулы; здесь $|\mathfrak{u}|$ — мощность, т. е. количество точек множества $\mathfrak{u}$. Известно (см., например, [1, гл. 7, §1]), что в случае (2.1) алгебраическая точность n такой формулы удовлетворяет равенству $n = 2M - 1 - |\mathfrak{u}|$, а в случае (2.2) удовлетворяет равенствам

$$2M - 1 - |\mathfrak{u}| \le n \le 2M - |\mathfrak{u}|,$$

при этом правое неравенство обращается в равенство, когда θ совпадает с одним из узлов квадратурной формулы с фиксированными узлами $\mathfrak{u} \setminus \{\theta\}$, а левое неравенство обращается в равенство во всех остальных случаях; здесь мы считаем, что $\{\theta\} \setminus \{\theta\} = \varnothing$.

Формулы (1.6) принимают вид

$$\int_{-1}^{1} v(x) p(x) dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p\big(x_k\big), \quad p \in \mathcal{P}_{2M-1-|\mathfrak{u}|}; \tag{2.3}$$

далее в некоторых ситуациях будут использоваться более точные в сравнении с (1.6) обозначения узлов и весов (коэффициентов)

$$\{x_k = x_k^{\mathfrak{u}} = x_k(\mathfrak{u}, v, M)\}_{k=1}^{M}, \qquad \{\lambda_k = \lambda_k^{\mathfrak{u}} = \lambda_k(\mathfrak{u}, v, M)\}_{k=1}^{M}$$

формулы (2.3).

В случае пустого множества $\mathfrak{u}$ (нет фиксированных узлов) формула (2.3) является классической квадратурной формулой Гаусса (см. [1, гл. 7, §1]); в случае одного фиксированного узла, совпадающего с одним из концов отрезка $[-1,1]$, т. е. в случае, когда $\mathfrak{u} = \{-1\}$ или $\mathfrak{u} = \{1\}$, формула (2.3) есть левая или правая квадратурная формула Радо соответственно; а в случае $\mathfrak{u} = \{-1,1\}$ — квадратурная формула Лобатто. Известно (см. библиографию в [7, 9, 10]), что во всех этих случаях формула (2.3) положительная.

В работах [7, 10] для каждого из множеств $\mathfrak{u}$ фиксированных узлов из (2.2) описано множество $\Theta_M^{\mathfrak{u}}$ значений параметра $\theta \in (-1,1)$, при которых квадратурная формула (2.3) будет иметь положительные веса. Такие формулы называются *положительными модифицированными формулами Гаусса, Радо* (*левой и правой*) *и Лобатто.* В дальнейшем формула (2.3) с фиксированными узлами (2.2) рассматривается лишь при $\theta \in \Theta_M^{\mathfrak{u}}$.

Таким образом, квадратурная формула вида (2.3) с фиксированными узлами как (2.1), так и (2.2) является положительной. Алгебраическая точность формулы (2.3) как с узлами (2.1), так и с узлами (2.2) есть $N = 2M - 1 - |\mathfrak{u}|$. При этом каждому $n \in \mathbb{N}$ и $a \in (-1,1)$ соответствует [10, теорема 1.1, следствие 1.2, замечание 1.3] конкретная положительная квадратурная формула вида (2.3).

В работе [7] для единичного веса $\upsilon \equiv 1$ и в работе [9] для произвольного веса υ найдено наилучшее приближение снизу

$$E_{n,\upsilon}^{-}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \min\{\|\mathbf{1}_{(a,1]} - p_n\|_{L^{\upsilon}(-1,1)} \colon p_n \in \mathcal{P}_n^{-}(\mathbf{1}_{(a,1]})\} \tag{2.4}$$

и выписан экстремальный многочлен $p_n^a = p_{n,a}^{\upsilon}$, на котором достигается минимум в (2.4), для всех значений $a \in (-1,1)$ и $n \geq 1$. В следующей теореме собраны результаты работы [9, §3], содержащие решение задачи (2.4).

Теорема B [9, §3]. *При $M \in \mathbb{N}$, $M \geq 3$, справедливы следующие утверждения.*

(1) *Если число $a \in (-1,1)$ совпадает с одним из узлов какой-либо M-точечной положительной квадратурной формулы (2.3), отличным от максимального, т. е. $a = x_{\nu}^{\mathfrak{u}}$, $1 \leq \nu \leq M-1$, то в случае фиксированных узлов (2.1) для $n = 2M-2-|\mathfrak{u}|$ и $n = 2M-1-|\mathfrak{u}|$, а в случае фиксированных узлов (2.2) для $n = 2M-1-|\mathfrak{u}|$ имеет место равенство*

$$E_{n,\upsilon}^{-}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int\limits_{(a,1]} \upsilon(x)dx - \sum_{k=\nu+1}^{M} \lambda_k^{\mathfrak{u}}. \tag{2.5}$$

При этом соответствующая квадратурная формула является экстремальной и многочлен наилучшего приближения снизу — это многочлен $p_n^a \in \mathcal{P}_n^{-}(\mathbf{1}_{(a,1]})$ степени $n = 2M-2-|\mathfrak{u}|$ в случае множеств $\mathfrak{u}$ из (2.1) и степени $n = 2M-1-|\mathfrak{u}|$ в случае множеств $\mathfrak{u}$ из (2.2), который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах квадратурной формулы.

(2) *Если максимальный узел $x_M^{\mathfrak{u}}$ формулы (2.3) меньше 1, то для $x_M^{\mathfrak{u}} \leq a < 1$ при*

всех $0 \le n \le 2M - 1 - |\mathfrak{u}|$

$$E^{-}_{n,\upsilon}(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int\limits_{(a,1]} \upsilon(x)dx \tag{2.6}$$

и $p^* \equiv 0$ *является многочленом наилучшего приближения снизу.*

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

3 Приближение характеристической функции интервала, внутреннего для $[-1, 1]$

В данном разделе обсуждается задача одностороннего приближения снизу и сверху характеристической функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$ интервала (a, b), концы a, b которого являются узлами положительной квадратурной формулы с некоторыми указанными ниже свойствами. В частности, теорема B позволяет выписать решение задач (3.1) для интервалов (a, b), концы которых являются узлами любой из квадратурных формул (2.3). Наиболее обстоятельно будет исследована задача одностороннего приближения снизу

$$E_n^-(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E_{n,\upsilon}^-(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \inf\left\{\|\mathbf{1}_{(a,b)} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} \colon p_n \in \mathcal{P}_n^-(\mathbf{1}_{(a,b)})\right\}. \tag{3.1}$$

3.1 Экстремальные многочлены задачи

Обсудим вначале конструкцию и свойства экстремальных многочленов задачи (2.4) в предположении, что ее решение получено с помощью той или иной положительной квадратурной формулы.

Пусть

$$\int\limits_{-1}^{1} \upsilon(x)p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k), \quad p \in \mathcal{P}_N, \tag{3.2}$$

— некая положительная квадратурная формула, узлы которой $\{x_k\}_{k=1}^M$ упорядочены по возрастанию индекса, и N — ее алгебраическая точность. Будем предполагать, что параметр a совпадает с одним из узлов этой формулы, отличным от наибольшего, т. е. $a = x_{k(a)}$, $1 \le k(a) < M$; как следствие $M \ge 2$. Нас интересует ситуация, когда (3.2) есть экстремальная квадратурная формула задачи (2.4), т. е. для функции $f = \mathbf{1}_{(a,1]}$ и соответствующей степени n первое неравенство (1.7) обращается в равенство, принимающее в данном случае вид

$$E_{n,\upsilon}^-(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int\limits_a^1 \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k\le M} \lambda_k. \tag{3.3}$$

Алгебраическая точность N формулы (3.2) может и не совпадать со степенью n в задаче (2.4), т. е., вообще говоря, $N \ge n$.

Алгебраическая точность формулы (3.2), степень n в (2.4), точная степень экстремального многочлена и другие его свойства зависят от некоторых особенностей узлов формулы. В частности, важно, являются ли точки ∓ 1 ее узлами. Следуя работе [9], введем параметры s, r, каждый из которых может принимать лишь два значения 0 или 1 в соответствии со следующим правилом. Если точка -1 является узлом формулы (3.2), то полагаем $s = 1$, а если не является, $s = 0$. Аналогично, если точка 1 является узлом формулы (3.2), то $r = 1$, иначе $r = 0$.

Обозначим через ρ многочлен Эрмита, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$, однако, с разной кратностью. А именно, в точке a и точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, многочлен ρ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$; таких узлов $1 + s + r$. В остальных $M - (1 + s + r)$ узлах формулы (2.4) многочлен ρ интерполирует как значения функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$, так и значения производной: $\rho(x_k) = \mathbf{1}_{(a,1]}(x_k)$, $\rho'(x_k) = 0$. Общее число условий интерполяции будет

$$K = 2(M - (1 + s + r)) + (1 + s + r) = 2M - 1 - s - r. \tag{3.4}$$

Многочлен с перечисленными интерполяционными свойствами существует, и его степень равна $n_0 = K - 1 = 2M - 2 - s - r$ (см., например, [11, гл. 2, §11] или [12, лекция 4, п. 4.3]). В дальнейшем этот многочлен мы будем обозначать через $p_{n_0}^a$ и называть *интерполяционным многочленом Эрмита функции* $\mathbf{1}_{(a,1]}$ *в узлах квадратурной формулы* (3.2).

Лемма 3.1. *Предположим, что параметр* $a \in (-1, 1)$ *является не наибольшим узлом положительной квадратурной формулы* (3.2), *а точнее,* $a = x_{k(a)}$, $1 \le k(a) \le M - 1$. *Формула* (3.2) *является экстремальной в задаче* (3.1) *в том и только в том случае, если для алгебраической точности* N *формулы* (3.2) *выполняется условие*

$$N \ge n_0 = 2M - 2 - s - r \tag{3.5}$$

и $n_0 \le n \le N$. *В этой ситуации справедливы следующие утверждения.*

(1) *При* $n_0 \le n \le N$ *величина* (2.4) *имеет одно и то же значение*

$$E_n^-(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int\limits_a^1 \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k\le M} \lambda_k. \tag{3.6}$$

(2) *Интерполяционный многочлен Эрмита* $p_{n_0}^a$ *функции* $\mathbf{1}_{(a,1]}$ *в узлах* $\{x_k\}_{k=1}^M$ *квадратурной формулы* (3.2) *принадлежит множеству* $\mathcal{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$ *и является экстремальным многочленом задачи* (2.4) *при всех* n *со свойством* $n_0 \le n \le N$.

Доказательство леммы осуществляется с помощью известных для данной тематики методов, см., к примеру, [9]. Однако лемма имеет свои особенности, поэтому мы считаем необходимым привести ее полное доказательство. Предположим, что формула (3.2) является экстремальной в задаче (2.4). Это означает, что $n \le N$ и первое неравенство (1.7) для функции $f = \mathbf{1}_{(a,1]}$ обращается в равенство. Отсюда нетрудно сделать вывод, что многочлен $p_n \in \mathcal{P}_n^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$ является экстремальным в задаче (2.4) в том и только в том случае, если этот многочлен интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$ квадратурной формулы (3.2). Условие $p_n(x) \le \mathbf{1}_{(a,1]}(x)$, $x \in [-1,1]$, влечет, что если $x_k \in (-1,1)$, $x_k \ne a$, то наряду со свойством лагранжевой интерполяции $p_n(x_k) = \mathbf{1}_{(a,1]}(x_k)$ должно выполняться еще условие $p_n'(x_k) = 0$. Как уже отмечалось выше, степень такого многочлена равна $n_0 = 2M - 2 - s - r$. Отсюда следует, что $n_0 \le n \le N$. Свойство (3.5) проверено. Проверим, что тогда выполняются и утверждения (1), (2) леммы.

Многочлен $p_{n_0}^a$, интерполирующий функцию $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах квадратурной формулы (3.2), обладает свойством $p_{n_0}^a(x) \le \mathbf{1}_{(a,1]}(x)$, $x \in [-1,1]$, т. е. $p_{n_0}^a \in \mathcal{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$. Доказательство этого и подобного свойства интерполяционных многочленов Эрмита восходит к А. А. Маркову и Т. И. Стилтьесу и имеет богатую историю.

Для удобства записи переобозначим $\rho = p_{n_0}^a$. Рассмотрим нули производной ρ' многочлена ρ. Пусть $a = x_{k(a)}$, $1 < k(a) < M$. По теореме Ролля на каждом из интервалов (x_k, x_{k+1}), $k = 1, 2, \ldots, k(a) - 1, k(a) + 1, \ldots, M$, производная ρ' обращается в ноль; таких нулей $M - 2$. Кроме того, имеется еще $M - (1 + s + r)$ нулей производной в узлах квадратурной формулы. В результате ρ' имеет на $(-1,1)$, по крайней мере, $M - 2 + M - (1 + s + r) = 2M - 3 - s - r = n_0 - 1$ нулей. Производная ρ' является многочленом степени $n_0 - 1$ и, значит, других нулей у ρ' нет. Отсюда, в частности, следует, что на отрезке $[x_{k(a)}, x_{k(a)+1}]$ многочлен ρ возрастает от 0 до 1. Нетрудно понять, что на каждом из отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, $k \ne k(a)$, и на отрезках $[-1, x_1]$, $[x_M, 1]$ график многочлена ρ не превосходит графика функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$. Таким образом, действительно, $\rho(x) \le \mathbf{1}_{(a,1]}(x)$, $x \in [-1,1]$, т. е. $\rho = p_{n_0}^a \in \mathcal{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$.

Следовательно, многочлен $\rho = p_{n_0}^a$ является экстремальным в задаче (2.4) при $n = n_0$. Если же алгебраическая точность N формулы (3.2) больше чем n_0, то многочлен $p_{n_0}^a$ будет экстремальным в задаче (2.4) при всех n таких, что $n_0 \le n \le N$.

Обратно, предположим, что выполнено условие (3.5). Интерполяционный многочлен Эрмита $p_{n_0}^a$ функции $\mathbf{1}_{(a,1]}$ в узлах квадратурной формулы (3.2) имеет степень n_0 и, как только что было показано, обладает свойством $p_{n_0}^a \in \mathcal{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$. Отсюда нетрудно сделать вывод, что квадратурная формула (3.2) и многочлен $p_{n_0}^a$ являются экстремальными в задаче (2.4) для всех n таких, что $n_0 \le n \le N$. В самом деле, при $n_0 \le n \le N$ для произвольного многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n^-(\mathbf{1}_{(a,1]})$ имеем

$$\|\mathbf{1}_{(a,1]} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int_{-1}^{1} \upsilon(t)(\mathbf{1}_{(a,1]}(t) - p_n(t))dt = \int_{a}^{1} \upsilon(t)dt - \int_{-1}^{1} \upsilon(t)p_n(t)dt. \tag{3.7}$$

Применяя формулу (3.2) и свойство $p_n \le \mathbf{1}_{(a,1]}$ на $[-1,1]$, получаем

$$\int_{-1}^{1} \upsilon(t)p_n(t)dt = \sum_{k=1}^{M} \lambda_k p(x_k) \le \sum_{k=1}^{M} \lambda_k \ \mathbf{1}_{(a,1]}(x_k) = \sum_{k(a)<k\le M} \lambda_k. \tag{3.8}$$

Таким образом,

$$\|\mathbf{1}_{(a,1]} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} \geq \int\limits_a^1 \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k\leq M} \lambda_k. \tag{3.9}$$

Правая часть последнего неравенства есть $\|\mathbf{1}_{(a,1]} - p^a_{n_0}\|_{L^\upsilon(-1,1)}$. Поэтому (3.9) влечет, что

$$\|\mathbf{1}_{(a,1]} - p_{n_0}\|_{L^\upsilon(-1,1)} \geq E^-_n(\mathbf{1}_{(a,1]}) \geq \int\limits_a^1 \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k\leq M} \lambda_k = \|\mathbf{1}_{(a,1]} - p_{n_0}\|_{L^\upsilon(-1,1)}. \tag{3.10}$$

Следовательно, при всех $n_0 \leq n \leq N$ квадратурная формула (3.2) и многочлен $p^a_{n_0}$ являются экстремальными в задаче (2.4). Лемма 3.1 доказана полностью. $\square$

Следующее утверждение хорошо известно (см., например, [9, предложение 2]), и мы приведем его без доказательства.

Предложение A. *Если наибольший узел x_M положительной квадратурной формулы* (3.2) *меньше* 1, *то для $x_M \leq a \leq 1$ при всех $0 \leq n \leq N$ для величины* (2.4) *имеет место равенство*

$$E^-_n(\mathbf{1}_{(a,1]}) = \int\limits_a^1 \upsilon(t)dt \tag{3.11}$$

и многочлен $p^a_n \equiv 0$ является экстремальным.

Рассмотрим родственную (2.4) задачу о наилучшем приближении снизу

$$E^-_n(\mathbf{1}_{[-1,b)}) = E^-_{n,\upsilon}(\mathbf{1}_{[-1,b)}) = \min\left\{\|\mathbf{1}_{[-1,b)} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} \colon p_n \in \mathcal{P}^-_n(\mathbf{1}_{[-1,b)})\right\} \tag{3.12}$$

характеристической функции $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ полуинтервала $[-1,b)$, $-1 < b < 1$, алгебраическим многочленами заданной степени.

Для задачи (3.12) и формулы (3.2) справедливо утверждение, аналогичное лемме 3.1. Обозначим через $q^b_{n_0}$ многочлен Эрмита, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$ в том же смысле, что и ранее. А именно, в точках a и точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, многочлен $q^b_{n_0}$ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{[-1,b)}$. В остальных узлах формулы (3.2) многочлен $q^b_{n_0}$ интерполирует как значения функции $\mathbf{1}_{[-1,b)}$, так и значения производной: $q^b_{n_0}(x_k) = \mathbf{1}_{[-1,b)}(x_k)$, $(q^b_{n_0})'(x_k) = 0$. Степень этого многочлена вновь равна $n_0 = 2M - 2 - s - r$. Этот многочлен мы будем называть *интерполяционным многочленом Эрмита функции $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ в узлах квадратурной формулы* (3.2). Справедливо следующее утверждение, оно доказывается по той же схеме, что и лемма 3.1, и это доказательство мы опустим.

Лемма 3.2. *Предположим, что положительная квадратурная формула* (3.2) *обладает свойством $N \geq n_0 = 2M - 2 - s - r$. Тогда для любого узла b этой формулы, лежащего на* $(-1,1)$, *отличного от первого, т. е. $b = x_{k(b)}$, $1 < k(b) \leq M$, справедливы* *следующие утверждения.*

(1) *При* $n_0 \le n \le N$ *величина* (3.12) *имеет одно и то же значение*

$$E_n^-(\mathbf{1}_{[-1,b)}) = E_{n_0}^-(\mathbf{1}_{[-1,b)}) = \int\limits_{-1}^{b} \upsilon(t)dt - \sum_{1 \le k < k(b)} \lambda_k. \tag{3.13}$$

В частности, это означает, что формула (3.2) *является экстремальной в задаче* (3.12).

(2) *Интерполяционный многочлен Эрмита* $q_{n_0}^b$ *функции* $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ *в узлах* $\{x_k\}_{k=1}^M$ *квадратурной формулы* (3.2) *принадлежит множеству* $\mathcal{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{[-1,b)})$ *и является экстремальным многочленом задачи* (3.12) *при всех* n *со свойством* $n_0 \le n \le N$.

Следующее утверждение есть аналог предложения A.

Предложение B. *Если наименьший узел* x_1 *положительной квадратурной формулы* (3.2) *больше* -1, *то для* $-1 < b \le x_1$ *при всех* $0 \le n \le N$ *для величины* (2.4) *имеет место равенство*

$$E_n(\mathbf{1}_{[-1,b)}) = \int\limits_{-1}^{b} \upsilon(t)dt \tag{3.14}$$

и многочлен $q_n^b \equiv 0$ *является экстремальным.*

Замечание. Условимся считать, что если в какой-либо сумме множество индексов суммирования пусто, то значение суммы равно нулю. Тогда согласно предложению A и лемме 3.1 формула (3.6) справедлива и в том случае, когда a есть наибольший узел квадратурной формулы (3.2). Аналогично, согласно предложению B и лемме 3.2 формула (3.13) справедлива и в том случае, когда b есть наименьший узел квадратурной формулы (3.2).

3.2 Одностороннее приближение снизу характеристической функции интервала $(a, b) \subset [-1, 1]$

Леммы 3.1 и 3.2 позволяют обосновать следующее утверждение относительно задачи (3.1).

Теорема 3.1. *Предположим, что положительная квадратурная формула* (3.2) *обладает свойством* $N \ge n_0 = 2M - 2 - s - r$. *Тогда для любых двух узлов* $a, b \in (-1, 1)$ *этой формулы, а точнее,* $a = x_{k(a)}$, $b = x_{k(b)}$, $1 \le k(a) < k(b) \le M$, *справедливы следующие утверждения.*

(1) *При $n_0 \le n \le N$ величина* (3.1) *имеет одно и то же значение*

$$E_n(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E_{n_0}(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \int\limits_a^b \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k. \tag{3.15}$$

В частности, это означает, что формула (3.2) *является экстремальной в задаче* (3.1).

(2) *Многочлен*

$$\varrho_{n_0}^{ab} = p_{n_0}^a + q_{n_0}^b - 1 \tag{3.16}$$

степени n_0 обладает свойством

$$\varrho_{n_0}^{ab}(x) \le \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in [-1,1], \tag{3.17}$$

т. е. $\varrho_{n_0}^{ab} \in \mathcal{P}_{n_0}^-(\mathbf{1}_{(a,b)})$, и является экстремальным в задаче (3.1) *для всех n, удовлетворяющих условию $n_0 \le n \le N$.*

Доказательство. Очевидно, $\mathbf{1}_{(a,1]} + \mathbf{1}_{[-1,b)} - 1 = \mathbf{1}_{(a,b)}$. Отсюда следует свойство (3.17). Воспользуемся теперь стандартными рассуждениями, которые уже применялись выше для обоснования леммы 3.1. При $n_0 \le n \le N$ для произвольного многочлена $p_n \in \mathcal{P}_n^-(\mathbf{1}_{(a,b)})$ имеем

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int\limits_{-1}^1 \upsilon(t)(\mathbf{1}_{(a,b)}(t) - p_n(t))dt = \int\limits_a^b \upsilon(t)dt - \int\limits_{-1}^1 \upsilon(t)p_n(t)dt. \tag{3.18}$$

Применяя формулу (3.2) и свойство $p_n(x) \le \mathbf{1}_{(a,b)}(x)$, $x \in [-1,1]$, получаем оценку

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - p_n\|_{L^\upsilon(-1,1)} \ge \int\limits_a^b \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k. \tag{3.19}$$

На многочлене $\varrho_{n_0}^{ab} = p_{n_0}^a + q_{n_0}^b - 1$ неравенство (3.19) обращается в равенство. В самом деле, имеем

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int\limits_{-1}^1 \upsilon(t) \left(\mathbf{1}_{(a,1]}(t) - p_{n_0}^a(t) + \mathbf{1}_{[-1,b)}(t) - q_{n_0}^b(t)\right) dt. \tag{3.20}$$

Применяя формулы (3.6) и (3.13), получаем

$$\begin{aligned}\|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)} &= \int\limits_a^1 \upsilon(t)dt + \int\limits_{-1}^b \upsilon(t)dt - \Bigg(\sum_{k(a)<k\le M}\lambda_k + \sum_{1\le k<k(b)}\lambda_k\Bigg) = \\ &= \int\limits_{-1}^1 \upsilon(t)dt - \sum_{1\le k\le M}\lambda_k - \int\limits_a^b \upsilon(t)dt + \sum_{k(a)<k<k(b)}\lambda_k.\end{aligned} \tag{3.21}$$

На многочлене $p \equiv 1$ формула (3.2) принимает вид $\int_{-1}^{1} \upsilon(t)\,dt = \sum_{k=1}^M \lambda_k$. Поэтому действительно справедливо равенство

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)} = \int\limits_a^b \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k<k(b)}\lambda_k. \tag{3.22}$$

Используя последнее равенство, получаем

$$\|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)} \ge E_n(\mathbf{1}_{(a,b)}) \ge \int\limits_a^b \upsilon(t)dt - \sum_{k(a)<k<k(b)}\lambda_k = \|\mathbf{1}_{(a,b)} - \varrho_{n_0}^{ab}\|_{L^\upsilon(-1,1)}. \tag{3.23}$$

Следовательно, при всех n, $n_0 \le n \le N$, квадратурная формула (3.2) и многочлен $\varrho_{n_0}^{ab}$ являются экстремальными в задаче (3.1). Теорема 3.1 доказана полностью. $\square$

Применим теперь утверждение теоремы 3.1 для задачи (3.1) в условиях теоремы B. Формула (2.3) в случае фиксированных узлов (2.1) имеет алгебраическую точность $N = 2(M-(s+r))-1+(s+r) = 2M-1-(s+r))$, а в случае (2.2) ее алгебраическая точность вновь $N = 2(M-(1+s+r))-1+(1+s+r) = 2M-1-(1+s+r)$. Параметр n_0 формулы (2.3) в обоих случаях имеет значение $n_0 = 2M-2-(s+r)$; таким образом, в обоих случаях выполнено условие $n_0 \le N$. Напомним, что для узлов a и b квадратурной формулы (2.3), отличных от минимального и максимального соответственно, определен многочлен $\varrho_{n_0}^{ab} = p_{n_0}^a + q_{n_0}^b - 1$ степени n_0, в котором $p_{n_0}^a$ и $q_{n_0}^b$ суть многочлены (каждый степени n_0), которые осуществляют соответствующую эрмитову интерполяцию функций $\mathbf{1}_{(a,1]}$ и $\mathbf{1}_{[-1,b)}$ в узлах квадратурной формулы. Из вышесказанного вытекает следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Если числа a и b, $-1 < a < b < 1$, являются узлами какой-либо M-точечной положительной квадратурной формулы* (2.3), *а точнее*

$$a = x_{k(a)}^{\mathfrak{u}}, \quad b = x_{k(b)}^{\mathfrak{u}}, \quad k(a) < k(b), \tag{3.24}$$

то в случае фиксированных узлов вида (2.1) *для $n = 2M-2-|\mathfrak{u}|$ и $n = 2M-1-|\mathfrak{u}|$,* *а в случае фиксированных узлов вида* (2.2) *для* $n = 2M-1-|\mathfrak{u}|$ *имеет место равенство*

$$E_n^-(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \int\limits_a^b \upsilon(x)dx - \sum_{k(a)<k<k(b)} \lambda_k^{\mathfrak{u}}. \tag{3.25}$$

При этом соответствующая квадратурная формула является экстремальной и многочлен наилучшего приближения снизу — это многочлен (3.16) *степени* $n = 2M - 2 - |\mathfrak{u}|$ *в случае фиксированных узлов вида* (2.1) *и степени* $n = 2M - 1 - |\mathfrak{u}|$ *в случае фиксированных узлов вида* (2.2).

3.3 Пример задачи, в которой интерполяционный многочлен наименьшей степени в узлах положительной квадратурной формулы не является экстремальным

Экстремальный многочлен (3.16) задачи (3.1) имеет степень $n_0 = 2M-2-s-r$; его конструкция позволила легко сделать вывод, что он обладает свойством (3.17). Этот многочлен интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,b)}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$ квадратурной формулы (3.2). Интерес представляет тот факт, что существует многочлен с подобными интерполяционными свойствами, на единицу меньшей степени в сравнении с (3.16). В самом деле, рассмотрим многочлен Эрмита ρ, который интерполирует функцию $\mathbf{1}_{(a,b)}$ в узлах $\{x_k\}_{k=1}^M$; точнее, в точках a, b и в точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, многочлен ρ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$, в остальных же узлах x_k многочлен ρ интерполирует значения функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$ и ее производной, что в данном случае означает свойство $\rho'(x_k) = 0$. Степень такого многочлена равна $\underline{n} = n_0 - 1 = 2M - 3 - s - r$. Так же, как при доказательстве леммы 3.1, нетрудно убедиться, что

$$\rho(x) \le \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in [x_1, x_M]. \tag{3.26}$$

Однако неравенство

$$\rho(x) \le \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{3.27}$$

на всем отрезке $[-1,1]$ может и не выполняться и, значит, многочлен ρ не будет экстремальным в задаче (3.1) при $n = n_0 - 1$.

Примером такой ситуации является случай пятиточечной квадратурной формулы Гаусса с узлами

$$x_1 = -x_5 = -\frac{1}{3}\sqrt{5+2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \quad x_2 = -x_4 = -\frac{1}{3}\sqrt{5-2\sqrt{\frac{10}{7}}}, \quad x_3 = 0 \tag{3.28}$$

для значений $a = x_1$, $b = x_3$. В данном случае многочлен ρ, построенный описанным выше способом, имеет седьмую степень. Вычисления с помощью пакета Maple дают приближенное значение $\rho(-1) = 0.1650513613\ldots$; важно лишь, что это значение положительное. Следовательно, в некоторой окрестности точки -1 график многочлена ρ лежит выше графика функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$, так что свойство (3.27) в данном случае нарушено. На рисунке 3.3.1 изображен график многочлена, на котором видно нарушение.

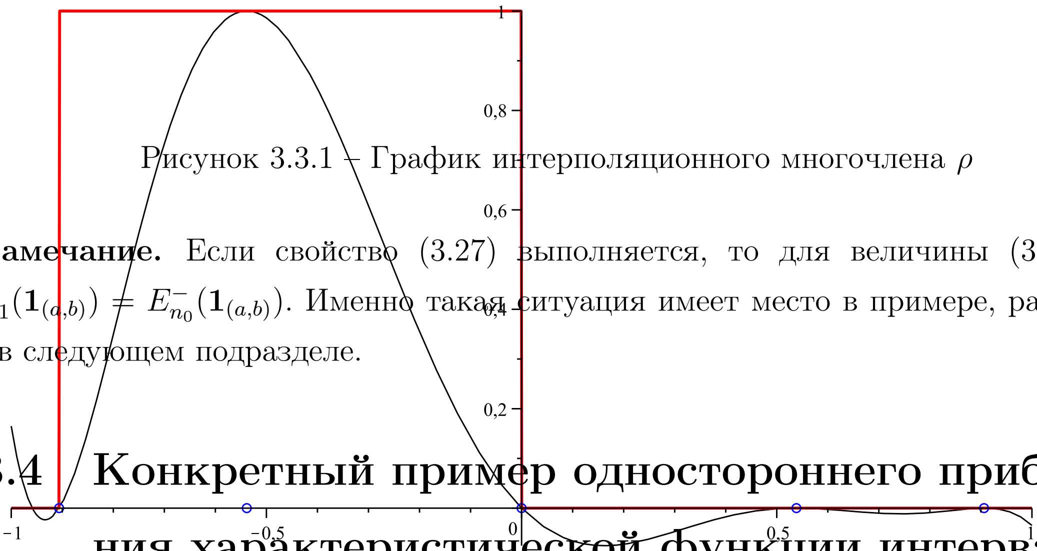

Рисунок 3.3.1 – График интерполяционного многочлена ρ

Замечание. Если свойство (3.27) выполняется, то для величины (3.1) имеем $E^-_{n_0-1}(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E^-_{n_0}(\mathbf{1}_{(a,b)})$. Именно такая ситуация имеет место в примере, рассмотренном в следующем подразделе.

3.4 Конкретный пример одностороннего приближения характеристической функции интервала

Рассмотрим задачу (3.1) в случае единичного веса $\upsilon \equiv 1$ для узлов $a = x^*_{1,4},\ b = x^*_{3,4}$ четырехточечной квадратуры Гаусса

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \sum_{\ell=1}^{4} \lambda^*_{\ell,4} f(x^*_{\ell,4}), \quad f \in \mathcal{P}_7, \tag{3.29}$$

алгебраическая точность которой есть $N = 7$. В данном случае $M = 4$, $s = r = 0$ и, значит, $n_0 = 6$. В этой ситуации применимы теоремы 3.1 и 3.2. Однако наша цель состоит в том, чтобы показать, что в данном случае можно получить решение задачи и для значения $n = n_0 - 1 = 5$. Построение формулы (3.29) и обоснование приведенной далее теоремы 3.3 осуществляется с помощью элементарных, хотя и громоздких вычислений;

мы приведем их здесь лишь схематично.

Узлы формулы (3.29) являются нулями многочлена Лежандра (см., например, [13, гл. IV])

$$P_4(z) = \frac{1}{8}(35z^4 - 30z^2 + 3), \tag{3.30}$$

а именно,

$$x^*_{1,4} = -x^*_{4,4} = -\frac{1}{35}\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}, \quad x^*_{2,4} = -x^*_{3,4} = -\frac{1}{35}\sqrt{525 - 70\sqrt{30}}. \tag{3.31}$$

Квадратурная формула (3.29) интерполяционная, и ее коэффициенты находятся по формуле

$$\lambda^*_{\ell,4} = \int\limits_{-1}^{1} \frac{\omega(x)}{\omega'(x^*_{\ell,4})(x - x^*_{\ell,4})}\, dx, \quad \omega(x) = \prod_{\ell=1}^{4}(x - x^*_{\ell,4}); \tag{3.32}$$

они положительные и имеют следующие значения:

$$\lambda^*_{1,4} = \lambda^*_{4,4} = -\frac{1}{36}\sqrt{30} + \frac{1}{2}, \quad \lambda^*_{2,4} = \lambda^*_{3,4} = \frac{1}{36}\sqrt{30} + \frac{1}{2}. \tag{3.33}$$

Теоремы 3.1 и 3.2 содержат решение задачи (3.1) для интервала $J = \big(x^*_{1,4}, x^*_{3,4}\big)$ при $n = 6$ и $n = 7$. Сейчас будет приведено решение задачи при $n = 5$. Для построения экстремального многочлена задачи будем исходить из многочлена пятой степени

$$\rho(t) = (t - \xi)(t - x^*_{1,4})(t - x^*_{3,4})(t - x^*_{4,4})^2. \tag{3.34}$$

Корень ξ многочлена (3.34) выберем из условия $\rho\,'(x^*_{2,4}) = 0$. Элементарные вычисления дают значение

$$\xi = \frac{45\sqrt{525 - 70\sqrt{30}} - \Big(12\sqrt{525 - 70\sqrt{30}} - 2\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}\Big)\sqrt{30} - 15\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}{-1575 + 280\sqrt{30} + \sqrt{525 - 70\sqrt{30}}\,\sqrt{525 + 70\sqrt{30}}}; \tag{3.35}$$

это значение приблизительно равно $-1.161692293\ldots$. Далее нам понадобится лишь тот факт, что $\xi < -1$, в чем можно убедиться с помощью элементарных преобразований, исходя из (3.35).

Теорема 3.3. *Для единичного веса $v \equiv 1$ величина одностороннего приближения снизу $E^-_n(\mathbf{1}_J)$ интервала $J = (x^*_{1,4}, x^*_{3,4})$ многочленами степени $n = 5, 6, 7$ имеет одно и то же значение*

$$E^-_n(\mathbf{1}_J) = x^*_{3,4} - x^*_{1,4} - \lambda^*_{2,4}. \tag{3.36}$$

При этом многочлен пятой степени

$$p^*(t) = \frac{\rho(t)}{\rho(x^*_{2,4})}, \quad \rho(t) = (t - \xi)(t - x^*_{1,4})(t - x^*_{3,4})(t - x^*_{4,4})^2, \tag{3.37}$$

в котором точка ξ *определена формулой* (3.35), *является многочленом наилучшего приближения функции* $\mathbf{1}_J$ *снизу*; *этот многочлен интерполирует функцию* $\mathbf{1}_J$ *в узлах формулы* (3.29).

Доказательство. Из формулы (3.34) видно, что многочлен ρ имеет на $[-1, 1]$ следующие знаки:

$$\begin{gathered} \rho(t) \geq 0 \quad \text{для} \quad t \in [-1, x^*_{1,4}] \quad \text{и} \quad t \in [x^*_{3,4}, 1]; \\ \rho(t) < 0 \quad \text{для} \quad t \in (x^*_{1,4}, x^*_{3,4}). \end{gathered} \tag{3.38}$$

Производная ρ' многочлена ρ на $[x^*_{1,4}, x^*_{3,4}]$ может обратиться в ноль только в одной точке, по построению многочлена ρ это есть точка $x^*_{2,4}$. Следовательно, $\rho(x^*_{2,4}) < 0$, и это есть абсолютный минимум многочлена ρ на $[-1, 1]$. Отсюда следует, что многочлен (3.37) интерполирует функцию $\mathbf{1}_J$ в узлах формулы (3.29) и обладает свойством $p^* \leq \mathbf{1}_J$. Этот многочлен дает оценку сверху величины $E^-_{n,1}(\mathbf{1}_J)$ при любом $n \geq 5$.

По теореме А квадратурная формула Гаусса (3.29) дает для величины $E^-_{n,1}(\mathbf{1}_J)$ при любом $n \leq 7$ оценку снизу, которая, как нетрудно заметить, при $5 \leq n \leq 7$ совпадает с оценкой сверху. Теорема 3.3 доказана. □

График экстремального многочлена данной задачи изображен на рисунке 3.4.2.

Рисунок 3.4.2 – График экстремального многочлена p^*

3.5 Одностороннее приближение сверху характеристической функции интервала $(a, b) \subset [-1, 1]$

Обсудим теперь задачу одностороннего приближения сверху

$$E^+_{n,v}(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \inf\left\{\|\mathbf{1}_{(a,b)} - p_n\|_{L^v(-1,1)} : p_n \in \mathcal{P}^+_n(\mathbf{1}_{(a,b)})\right\} \tag{3.39}$$

характеристической функции $\mathbf{1}_{(a,b)}$ интервала (a,b). Для этой задачи справедливы аналоги всех утверждений, приведенных в подразделах для задачи (3.1) одностороннего приближения снизу.

Будем исходить из положительной квадратурной формулы (3.2), алгебраическая точность N которой удовлетворяет условию $N \geq n_0 = 2M - 2 - s - r$. Пусть $a \in (-1,1)$ есть узел этой формулы. Если он не наименьший, то обозначим через $\overline{\rho} = \overline{p}^a_{n_0}$ многочлен Эрмита порядка n_0, который интерполирует характеристическую функцию $\mathbf{1}_{[a,1]}$ отрезка $[a,1]$ в узлах формулы (3.2). А точнее, в точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, и в точке a многочлен $\overline{\rho}$ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$; в частности, $\overline{\rho}(a) = 1$. В остальных узлах формулы (3.2) многочлен $\overline{\rho}$ интерполирует как значения функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$, так и значения производной: $\overline{\rho}(x_k) = \mathbf{1}_{[a,1]}(x_k)$, $\overline{\rho}'(x_k) = 0$. Многочлен с перечисленными интерполяционными свойствами существует (см., например, [11, гл. 2, §11] или [12, лекция 4, п. 4.3]). Если $a \in (-1,1)$ есть наименьший узел формулы (3.2), то положим $\overline{p}^a_{n_0} \equiv 1$; этот многочлен вновь осуществляет эрмитову интерполяцию функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$ в узлах формулы (3.2).

Многочлен $\overline{p}^a_{n_0}$ принадлежит множеству $\mathcal{P}^+_{n_0}(\mathbf{1}_{[a,1]})$ и является экстремальным многочленом в задаче приближения сверху характеристической функции (3.12) при всех n со свойством $n_0 \leq n \leq N$. В этом можно убедиться разными способами, к примеру, с помощью следующих соображений. Очевидно, что для любой измеримой ограниченной функции f при любом $n \geq 1$ имеет место равенство $E^+_n(f) = E^-_n(1-f)$ вместе с соответствующим соотношением между экстремальными многочленами. Для функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$ имеем $1 - \mathbf{1}_{[a,1]} = \mathbf{1}_{[-1,a)}$. Многочлен $1 - \overline{p}^a_{n_0}$ осуществляет эрмитову интерполяцию функции $\mathbf{1}_{[-1,a)}$ в узлах квадратурной формулы (3.2). Следовательно, он совпадает с экстремальным многочленом $q^a_{n_0}$ задачи об исследовании величины $E^-_{n_0}(\mathbf{1}_{[-1,a)})$, определенной формулой (3.12). Таким образом, $\overline{p}^a_{n_0} = 1 - q^a_{n_0}$. Лемма 3.2 и предложение B гарантируют все экстремальные свойства многочлена $\overline{p}^a_{n_0}$.

Для узла $b \in (-1,1)$ формулы (3.2), не являющегося наибольшим, обозначим через $\overline{q}^a_{n_0}$ многочлен Эрмита порядка n_0, который интерполирует характеристическую функцию $\mathbf{1}_{[-1,b]}$ отрезка $[-1,b]$ в узлах формулы (3.2). Уточним, что в точках ∓ 1, если они являются узлами квадратурной формулы, и в точке a многочлен $\overline{q}^b_{n_0}$ интерполирует лишь значения функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$; в частности, $\overline{q}^b_{n_0}(b) = 1$. В остальных узлах формулы (3.2) многочлен $\overline{q}^b_{n_0}$ интерполирует как значения функции $\mathbf{1}_{[a,1]}$, так и значения ее производной. Если $b \in (-1,1)$ есть наибольший узел формулы (3.2), то положим $\overline{q}^b_{n_0} \equiv 1$; этот многочлен также осуществляет эрмитову интерполяцию функции $\mathbf{1}_{[-1,b]}$ в узлах формулы (3.2).

Многочлен $\overline{q}^b_{n_0}$ принадлежит множеству $\mathcal{P}^+_{n_0}(\mathbf{1}_{[-1,b]})$ и является экстремальным многочленом в задаче приближения сверху характеристической функции $\mathbf{1}_{[-1,b]}$ отрезка $[-1,b]$ при всех n со свойством $n_0 \leq n \leq N$.

По той же схеме, что и теорема 3.1, доказывается следующее утверждение.

Теорема 3.4. *Предположим, что квадратурная формула* (3.2) *положительная и обладает свойством* $N \ge n_0 = 2M - 2 - s - r$. *Тогда для любых двух узлов* $a, b \in (-1, 1)$ *этой формулы,* $a = x_{k(a)},\ b = x_{k(b)}$, *где* $1 \le k(a) < k(b) \le M$, *справедливы следующие утверждения.*

(1) *При* $n_0 \le n \le N$ *величина* (3.39) *имеет одно и то же значение*

$$E_n^+(\mathbf{1}_{(a,b)}) = E_{n_0}^+(\mathbf{1}_{(a,b)}) = \sum_{k=k(a)}^{k(b)} \lambda_k - \int_a^b \upsilon(t)dt. \tag{3.40}$$

(2) *Многочлен* $\overline{\varrho}_{n_0}^{ab} = \overline{p}_{n_0}^{a} + \overline{q}_{n_0}^{b} - 1$ *порядка* n_0 *обладает свойством*

$$\overline{\varrho}_{n_0}^{ab}(x) \ge \mathbf{1}_{(a,b)}(x), \quad x \in [-1, 1], \tag{3.41}$$

т. е. $\overline{\varrho}_{n_0}^{ab} \in \mathcal{P}_{n_0}^+(\mathbf{1}_{(a,b)})$, *и является экстремальным в задаче* (3.39) *для всех* n *таких, что* $n_0 \le n \le N$.

Как следствие теоремы 3.4 для задачи (3.39) справедлив также аналог теоремы 3.2.

4 Одностороннее приближение характеристической функции симметричного интервала в случае четного веса

Результаты работы [9], относящиеся к задаче (2.4), описанные выше в теореме B, позволяют выписать решение задачи наилучшего интегрального одностороннего приближения снизу и сверху характеристической функции симметричного интервала $J = (-h, h),\ 0 < h < 1$, в случае четного веса.

Ограничимся задачей (1.10). Будем исходить из следующей задачи. Пусть υ — некоторый вес на интервале $(0, 1)$. Рассмотрим задачу о наилучшем приближении снизу

$$E_n^-(\mathbf{1}_{[0,h^2)}) = E_n^-(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^\upsilon(0,1)} = \min\left\{\|\mathbf{1}_{[0,h^2)} - p_n\|_{L^\upsilon(0,1)} \colon p_n \in \mathcal{P}_n^-(\mathbf{1}_{[0,h^2)})\right\} \tag{4.1}$$

характеристической функции $\mathbf{1}_{[0,h^2)}$ полуинтервала $J = [0, h^2)$ в пространстве $L^\upsilon(0, 1)$ на интервале $(0, 1)$ множеством алгебраических многочленов степени $n \ge 1$. Линейной заменой переменного эта задача сводится к задаче типа (2.4) на $(-1, 1)$, решение которой, как уже было сказано выше, дано в [9]. В следующем утверждении с помощью довольно простых соображений показано, что задача (4.1) эквивалентна задаче

$$E_{2n+1}^-(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)} = \min\left\{\|\mathbf{1}_{(-h,h)} - q_{2n+1}\|_{L^w(-1,1)} \colon q_{2n+1} \in \mathcal{P}_{2n+1}^-(\mathbf{1}_{(-h,h)})\right\} \tag{4.2}$$

для веса $w(t) = \upsilon(t^2)|t|,\ t \in (-1, 1)$.

Теорема 4.1. *При* $0 < h < 1$, $n \geq 1$ *задачи* (4.2) *и* (4.1) *эквивалентны, а точнее,*

(1) *имеет место равенство*

$$E^{-}_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)} = E^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)}; \tag{4.3}$$

(2) *многочлен* p_n^* *является экстремальным в задаче* (4.1) *в том и только в том случае, если многочлен* $p_n^*(t^2)$ *является экстремальным в задаче* (4.2).

Доказательство. Пусть $p_n \in \mathcal{P}^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})$ на $(0,1)$, т. е. p_n — многочлен степени не выше n и обладает свойством $p_n(t) \leq \mathbf{1}_{[0,h^2)}(t),\ t \in (0,1)$. Тогда многочлен $q_{2n}(t) = p_n(t^2)$ обладает свойством $q_{2n}(t) \leq \mathbf{1}_{(-h,h)}(t),\ t \in (-1,1)$. При этом, сделав в интеграле

$$\|\mathbf{1}_{[0,h^2)} - p_n\|_{L^v(0,1)} = \int\limits_0^1 v(\eta)(\mathbf{1}_{[0,h^2)}(\eta) - p_n(\eta))d\eta \tag{4.4}$$

замену $\eta = t^2$, получим

$$\begin{gathered}\|\mathbf{1}_{[0,h^2)} - p_n\|_{L^v(0,1)} = 2\int\limits_0^1 v(t^2)t(\mathbf{1}_{[0,h^2)}(t^2) - p_n(t^2))dt = \\ = 2\int\limits_0^1 v(t^2)t(\mathbf{1}_{[0,h)}(t) - q_{2n}(t))dt = \int\limits_{-1}^1 v(t^2)|t|(\mathbf{1}_{(-h,h)}(t) - q_{2n}(t))dt.\end{gathered} \tag{4.5}$$

Отсюда следует неравенство $E^{-}_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)} \leq \|\mathbf{1}_{[0,h^2)} - p_n\|_{L^v(0,1)}$, а значит, и неравенство

$$E^{-}_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)} \leq E^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)}. \tag{4.6}$$

Обратно, предположим, что многочлен q_{2n+1} степени $2n+1$ обладает свойством $q_{2n+1}(t) \leq \mathbf{1}_{(-h,h)}(t),\ t \in (-1,1)$. Многочлен $q_{2n}(t) = (q_{2n+1}(t) + q_{2n+1}(-t))/2$ также удовлетворяет неравенству $q_{2n}(t) \leq \mathbf{1}_{(-h,h)}(t),\ t \in (-1,1)$. Многочлен q_{2n} четный, имеет степень $2n$ и потому представим в виде $q_{2n}(t) = p_n(t^2)$, где p_n — многочлен степени n со свойством $p_n(t) \leq \mathbf{1}_{[0,h^2)}(t)$, $t \in (0,1)$. Отсюда заключаем, что

$$E^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)} \leq \|\mathbf{1}_{(-h,h)} - q_{2n}\|_{L^w(-1,1)} = \|\mathbf{1}_{(-h,h)} - q_{2n+1}\|_{L^w(-1,1)}. \tag{4.7}$$

А следовательно, справедливо неравенство

$$E^{-}_{n}(\mathbf{1}_{[0,h^2)})_{L^v(0,1)} \leq E^{-}_{2n+1}(\mathbf{1}_{(-h,h)})_{L^w(-1,1)}. \tag{4.8}$$

Неравенства (4.6) и (4.8) влекут равенство (4.3). Первое утверждение теоремы доказано. Второе утверждение нетрудно получить из анализа приведенного доказательства. Теорема 4.1 доказана. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследованы задачи нахождения величин наилучшего приближения снизу и сверху в пространстве $L^{\upsilon}(-1,1)$ функций, суммируемых с весом υ на $(-1,1)$, характеристической функции интервала (a,b), $-1 < a < b < 1$, множеством алгебраических многочленов степени не выше заданной. В ходе работы получены следующие результаты.

1. Приведено решение задач, т. е. найдены искомые величины наилучших приближений (1.10), (1.11) и описаны экстремальные многочлены в случае, когда a, b — узлы положительной квадратурной формулы при некоторых условиях на ее алгебраическую точность. Обсуждены особенности полученных решений.

2. Приведено решение задач наилучшего одностороннего приближения в $L^{\upsilon}(-1,1)$ характеристической функции симметричного интервала $(-h,h)$ при произвольном $0 < h < 1$ для четного веса υ.

По результатам исследований сделаны доклады на четырех международных конференциях:

1. 6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields (Hungary, Pecs, 24–31 августа 2017 г.), [14];

2. Международная (49-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 4–10 февраля 2018 г.), [15];

3. Международная Школа-конференция С. Б. Стечкина по теории функций (Кыштым, 1–10 августа 2018 г.), [19];

4. Международная (50-я Всероссийская) молодежная школа-конференция «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 3–9 февраля 2019 г.), [16].

Результаты исследований автора в различной степени общности опубликованы в статьях [17, 18]. В окончательном виде они опубликованы в статье [19].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ И ЛИТЕРАТУРЫ

1 Крылов В. И. Приближенное вычисление интегралов. – М.: Физматлит, 1959. – 327 с.

2 Bojanic R., DeVore R. On polynomials of best one-sided approximation // Enseign. Math. – 1966. – V. 2, № 12. – P. 139–164.

3 Корнейчук Н. П., Лигун А. А., Доронин В. Г. Аппроксимация с ограничениями. – Киев: Наукова думка, 1982. – 254 с.

4 Bustamante J., Quesada J. M., Martínez-Cruz R. Best one-sided L_1 approximation to the Heaviside and sign functions // J. Approx. Theory. – 2012. – V. 164. – P. 791–802.

5 Li X.-J., Vaaler J. D. Some trigonometric extremal functions and the Erdös–Turán type inequalities // Ind. Univ. Math. J. – 1999. – V. 48, №. 1. – P. 183–236.

6 Моторный В. П., Моторная О. В., Нитиема П. К. Об одностороннем приближении ступеньки алгебраическими многочленами в среднем // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, № 3. – С. 409–422.

7 Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J. M. Quasi orthogonal Jacobi polynomials and best one-sided L_1 approximation to step functions // J. Approx. Theory. – 2015. – V. 198. – P. 10–23.

8 Бабенко А. Г., Крякин Ю. В., Юдин В. А. Одностороннее приближение в L характеристической функции интервала тригонометрическими полиномами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2012. – Т. 18, №. 1. – С. 82–95.

9 Бабенко А. Г., Дейкалова М. В., Ревес С. Д. Односторонние интегральные приближения характеристических функций интервалов многочленами на отрезке с весом Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2015. – Т. 21, №. 4. – С. 46–53. = Babenko A. G., Deikalova M. V., Revesz Sz. G. Weighted one-sided integral approximations to characteristic functions of intervals by polynomials on a closed interval // Proc. Steklov Inst. Math. – 2017. – V. 297, Suppl. 1. – P. S11–S18.

10 Beckermann B., Bustamante J., Martínez-Cruz R., Quesada J. M. Gaussian, Lobatto and Radau positive quadrature rules with a prescribed abscissa // Calcolo. – 2014. – V. 51, №. 2. – P. 319–328.

11 Березин И. С., Жидков Н. П. Методы вычислений. Т. 1. – М.: Физматгиз, 1962. – 464 с.

12 Изложение лекций С. Б. Стечкина по теории приближений. – Екатеринбург: Изд-во УрО РАН, 2010. – 154 с.

13 Суетин П. К. Классические ортогональные многочлены. – М.: Наука, 1976. – 327 с.

СПИСОК РАБОТ АВТОРА

14 Torgashova A. Yu. One-sided mean approximation on the Euclidean sphere to the characteristic function of a spherical layer by algebraic polynomials // 6th Workshop on Fourier Analysis and Related Fields. – Conference Booklet. – Pecs, 2017. – P. 45.

15 Торгашова А. Ю. Одностороннее приближение в $L(-1,1)$ с весом характеристической функции промежутка алгебраическими многочленами // Современные проблемы математики и ее приложений. – Тез. Международ. (49-й Всеросс.) молодежной школы-конференции. – Екатеринбург, 2018. – С. 79.

16 Торгашова А. Ю. Одностороннее приближение в L с весом характеристической функции симметричного интервала алгебраическими многочленами // Современные проблемы математики и ее приложений. – Тез. Международ. (50-й Всеросс.) молодежной школы-конференции. – Екатеринбург, 2019. – С. 95.

17 Торгашова А. Ю. Одностороннее интегральное приближение характеристической функции интервала алгебраическими многочленами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2016. – Т. 22, №. 3. – С. 265–272. = Torgashova A.Yu. One-sided integral approximation of the characteristic function of an interval by algebraic polynomials // Proc. Steklov Inst. Math. – 2017. – V. 296, Suppl. 1. – P. S228-S235.

18 Торгашова А. Ю. Одностороннее приближение сверху в $L(-1,1)$ характеристической функции интервала алгебраическими многочленами [Электронный ресурс] // Proceedings of the International Youth School-conference “SoProMat-2017”. Yekaterinburg, Russia, 06-Feb-2017. URL: http://ceur-ws.org/Vol-1894/appr6.pdf (дата обращения 09.06.2019).

19 Дейкалова М. В., Торгашова А. Ю. Наилучшее одностороннее приближение в среднем характеристической функции промежутка алгебраическими многочленами // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. – 2018. – Т. 24, №. 4. – С. 110–125.