Уральский
федеральный
университет
имени первого Президента
России Б.Н.Ельцина
Уральский
энергетический
институт

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Министерство науки и высшего образования
Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Учебное пособие

Рекомендовано методическим советом
Уральского федерального университета для студентов вуза,
обучающихся по техническим направлениям подготовки
и специальностям

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2019

УДК 512.6(075.8)
ББК 22.14я73
Л59

Авторы:
Н. В. Гредасова, М. А. Корешникова, Н. И. Желонкина, Л. В. Корчемкина, Е. Г. Полищук, В. М. Иванов, И. Ю. Андреева

Рецензенты:
кафедра шахматного искусства и компьютерной математики УрГЭУ (и. о. завкафедрой канд. физ.-мат. наук, доц. *Ю. Б. Мельников*);
канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. ООУ ИММ УрО РАН *Д. С. Завалищин*

Научный редактор — д-р физ.-мат. наук, проф. *А. Н. Сесекин*

Линейная алгебра : учеб. пособие / Н. В. Гредасова, М. А. Корешникова, Н. И. Же-
Л59 лонкина [и др.] ; Мин-во науки и высш. образования РФ. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2019. — 88 с.

ISBN 978-5-7996-2776-8

В учебном пособии представлены основные понятия и теоремы линейной алгебры. Пособие включает следующие разделы: матрицы и определители; системы линейных уравнений; линейные пространства и некоторые другие математические структуры; функции в линейных пространствах. Рассмотрены решения типовых задач. Приведены задачи для самостоятельного решения.

Учебное пособие предназначается студентам, обучающимся по техническим направлениям подготовки и специальностям.

Библиогр.: 9 назв.

УДК 512.6(075.8)
ББК 22.14я73

Учебное издание

Гредасова Надежда Викторовна, **Корешникова** Мария Анатольевна, **Желонкина** Наталья Игоревна, **Корчемкина** Людмила Викторовна, **Полищук** Ефим Григорьевич, **Иванов** Владимир Михайлович, **Андреева** Ирина Юрьевна

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

Редактор Т. Е. Мерц
Верстка О. П. Игнатьевой

Подписано в печать 28.11.2019. Формат 70×100/16. Бумага офсетная. Цифровая печать. Усл. печ. л. 7,1.
Уч.-изд. л. 4,0. Тираж 40 экз. Заказ 332

Издательство Уральского университета. Редакционно-издательский отдел ИПЦ УрФУ
620049, Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 5. Тел.: +7 (343) 375-48-25, 375-46-85, 374-19-41. E-mail: rio@urfu.ru

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4. Тел.: +7 (343) 358-93-06, 350-58-20, 350-90-13. Факс: +7 (343) 358-93-06
http://print.urfu.ru

ISBN 978-5-7996-2776-8

Оглавление

1. Матрицы и определители

1.1. Основные сведения о матрицах

Матрица — это прямоугольная таблица, образованная из элементов некоторого множества и состоящая из m строк и n столбцов.

Обозначения матрицы:

$$A_{m\times n}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix},$$

или $A=\left\|a_{ij}\right\|$, или $A=\left(a_{ij}\right)_{m\times n}$, $(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, где a_{ij} — элементы матрицы; i — номер строки; j — номер столбца; $m\times n$ — размер матрицы.

Если $m=n$, то матрица называется **квадратной**, а число $m=n$ — ее **порядком**:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{n(n-1)} & a_{nn} \end{pmatrix}. \tag{1.1}$$

Главной диагональю матрицы (1.1) называется диагональ $a_{11}\,a_{22}\dots a_{nn}$.

Побочной диагональю матрицы (1.1) называется диагональ $a_{1n}a_{2(n-1)}\dots a_{n1}$.

Матрицы A и B одного размера называются **равными**, если они совпадают поэлементно, т. е. $a_{ij}=b_{ij}$ для любых $i=\overline{1,m};\quad j=\overline{1,n}$.

Виды матриц

1. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется **диагональной**.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \text{ — диагональная матрица 3-го порядка.}$$

2. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется **единичной** и обозначается буквой E или I.

Например,

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — единичная матрица 3-го порядка.}$$

3. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется **нулевой** и обозначается буквой O.

4. Квадратная матрица называется **верхней треугольной**, если все элементы, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю.

Например,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ — верхняя треугольная матрица.}$$

5. Квадратная матрица называется **нижней треугольной**, если все элементы, расположенные выше главной диагонали, равны нулю.

Например,

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 5 \end{pmatrix} \text{ — нижняя треугольная матрица.}$$

6. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется **вектором** (вектор-столбцом или вектор-строкой соответственно).

Например,

$$A=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} b_1 & b_2 & \dots & b_n \end{pmatrix}.$$

Матрица размера 1×1, состоящая из одного числа, отождествляется с этим числом.

Например,

$(4)_{1\times1}$ есть число 4.

1.2. Действия над матрицами

1. Сложение матриц

Суммой двух матриц $A_{m\times n}=(a_{ij})$ и $B_{m\times n}=(b_{ij})$ называется матрица $C_{m\times n}=(c_{ij})$, такая, что

$$c_{ij}=a_{ij}+b_{ij} \quad (i=\overline{1,m}, \quad j=\overline{1,n}).$$

Обозначение: $C=A+B$.

Пример. Найти сумму матриц $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$A+B=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & -2 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}.$$

Свойства сложения матриц

1. Переместительное свойство:

$$A+B=B+A.$$

2. Сочетательное свойство:

$$(A+B)+C=A+(B+C).$$

2. Умножение матриц на число

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ **на вещественное число** λ называется матрица $B_{m\times n}=(b_{ij})$, такая, что

$$b_{ij}=\lambda a_{ij} \quad (i=\overline{1,m},\;\; j=\overline{1,n}).$$

Пример. Умножить матрицу $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}$ на число 3.

Решение:

$$3\cdot\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 5 & 0 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6 & -9 & 3 \\ 15 & 0 & 12 \end{pmatrix}.$$

Свойства умножения матрицы на число

1. Сочетательное свойство относительно числового сомножителя:

$$(\lambda\mu)A=\lambda(\mu A).$$

2. Распределительное свойство относительно суммы матриц:

$$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B.$$

3. Распределительное свойство относительно суммы чисел:

$$(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A.$$

3. Умножение матриц

Произведением матрицы $A_{m\times n}=(a_{ij})$ **на матрицу** $B_{n\times p}=(b_{jk})$ называется матрица $C_{m\times p}=(c_{ik})$, такая, что

$$c_{ik}=a_{i1}\cdot b_{1k}+a_{i2}\cdot b_{2k}+\dots+a_{in}\cdot b_{nk}$$

$$(i=\overline{1,m},\;\; k=\overline{1,p}).$$

Обозначение: $C=A\cdot B$.

Операция умножения двух матриц определяется только тогда, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Пример. Найти произведение матриц A и B, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix},\; B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot 1+1\cdot 4 & 2\cdot 0+1\cdot 2 & 2\cdot 3+1\cdot 1 \\ 3\cdot 1+4\cdot 4 & 3\cdot 0+4\cdot 2 & 3\cdot 3+4\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 19 & 8 & 13 \end{pmatrix}.$$

Свойства произведения матриц

1. Перестановочное свойство в общем случае не выполняется:

$$AB \neq BA.$$

2. Сочетательное свойство:

$$(AB)C = A(BC).$$

3. Распределительное свойство относительно суммы матриц:

$$(A+B)C = AC + BC \text{ или } A(B+C) = AB + AC.$$

4. Если A — квадратная матрица, а E — единичная матрица того же порядка, что и A, то

$$EA = AE = A.$$

Замечание

Если $AB = BA$ то матрицы A и B называют **перестановочными** или **коммутирующими**.

4. Транспонирование матриц

Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется матрицей, **транспонированной** к данной.

Обозначение: A^T.

Пример. Транспонировать матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \\ 4 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение: $A^T = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 4 \\ 1 & 3 & 7 \end{pmatrix}$.

Свойства операции транспонирования

1) $(A^T)^T = A$;

2) $(A+B)^T = A^T + B^T$;

3) $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$.

Квадратная матрица A называется **симметрической**, если она совпадает со своей транспонированной, то есть

$$A = A^T.$$

Квадратная матрица A называется **кососимметрической**, если совпадает со своей транспонированной, умноженной на число (-1), то есть

$$A = -A^T.$$

1.3. Определители. Основные понятия

Для квадратной матрицы A порядка n введем числовую характеристику, называемую **определителем** или **детерминантом**.

Обозначение: det A, или |A|, или Δ.

1. Если $n=1$, то $A=(a_{11})$, $\det A = |a_{11}| = a_{11}$.

2. Если $n=2$, то $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}\cdot a_{22} - a_{12}\cdot a_{21}$.

3. Если $n=3$, то $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33} + a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31} + a_{13}\cdot a_{21}\cdot a_{32} - a_{13}\cdot a_{22}\cdot a_{31} -$$
$$- a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32} - a_{12}\cdot a_{21}\cdot a_{33}.$$

Это правило вычисления определителя третьего порядка называется **правилом Саррюса** или **правилом треугольников.**

Пример. Найти определитель матрицы: $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 2\cdot 7 - 3\cdot 5 = -1.$$

Пример. Найти определитель матрицы: $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Решение:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\cdot(-2)\cdot 2 + 3\cdot 1\cdot 4 + 2\cdot 0\cdot 1 - 2\cdot(-2)\cdot 4 - 1\cdot 1\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 2 = 23.$$

1.4. Свойства определителей

Перечисленные ниже свойства справедливы для определителей любого порядка.

1. При транспонировании матрицы ее определитель не изменяется.

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -3 & 6 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 \\ 1 & 6 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

Назовем строки и столбцы **рядами определителя**.

2. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 5 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 0 & 3 \\ 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}.$$

3. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

4. При умножении какого-либо ряда определителя на любое число определитель умножается на это число.

Например,

$$\begin{vmatrix} 2\cdot 2 & 1 & 4 \\ 3\cdot 2 & 7 & 2 \\ 1\cdot 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2\cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 7 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Если все элементы какого-либо ряда равны нулю, то определитель равен нулю.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

6. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей.

Например,

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 & 1+5 \\ 0 & 2 & 7+4 \\ 3 & 1 & 2+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 7 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 5 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

7. Если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на некоторое число, то определитель не изменится.

Например,

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 3 \\ -4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 3+2\cdot 4 \\ -4 & 2 & 1+2\cdot 2 \\ 3 & 1 & 2+2\cdot 1 \end{vmatrix}.$$

Минором элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых стоит данный элемент.

Обозначение: M_{ij}.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя называется минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $(i+j)$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма начетная.

Обозначение: A_{ij}.

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Например, для элемента a_{23} определителя $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 5 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$ найдем минор и алгебраическое дополнение:

$$M_{23} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}.$$

8. Определитель равен сумме произведений элементов некоторого ряда на соответствующие им алгебраические дополнения, то есть, например, разложение определителя по i-й строке имеет вид

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}.$$

Пример. Вычислить определитель: $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$.

Решение. Разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 5 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2(-2 \cdot 2 - 3 \cdot 3) - 3(1 \cdot 2 - 3 \cdot 1) + 5(1 \cdot 3 - (-2) \cdot 1) =$$

$$= -26 + 3 + 25 = 2.$$

9. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю.

Например,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

10. Определитель произведения двух квадратных матриц равен произведению их определителей:

$$|A \cdot B| = |A| \cdot |B|.$$

11. Определитель матрицы треугольного вида равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали этой матрицы.

Например,

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 1 = 6.$$

12. Определитель диагональной матрицы равен произведению элементов, стоящих на главной диагонали.

Например,

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot (-2) \cdot 4 = -24.$$

Отсюда следует, что определитель единичной матрицы любого порядка равен единице.

1.5. Обратная матрица

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица A называется **невырожденной (неособенной)**, если определитель матрицы A не равен нулю, т. е.

$$\det A \neq 0.$$

Если матрица A невырожденная, то существует и притом единственная матрица A^{-1}, такая, что

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E,$$

где E — единичная матрица.

A^{-1} называется **обратной матрицей**.

Методы вычисления обратной матрицы

1. Метод присоединенной матрицы

Присоединенная матрица — это матрица, составленная из алгебраических дополнений данной матрицы и транспонированная.

Обозначение: $A^{\vee}$.

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}.$$

Справедливо следующее равенство:

$$A \cdot A^{\vee} = A^{\vee} \cdot A = \det(A) \cdot E.$$

Отсюда следует, что если матрица A невырожденная, то

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^{\vee}.$$

Пример. Найти A^{-1} с помощью присоединенной матрицы, если

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Решение. Вычислим определитель матрицы разложением по второй строке:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} +$$

$$+ (-1)^{1+3} \cdot (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 36.$$

Составим присоединенную матрицу:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 11, \quad A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = -3, \quad A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -17, \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 21, \quad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -11,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -10, \quad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 6 \quad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2;$$

$$A^{\vee}=\begin{pmatrix}11 & -3 & 5\\ -17 & 21 & -11\\ -10 & 6 & 2\end{pmatrix},$$

тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{36}\begin{pmatrix}11 & -3 & 5\\ -17 & 21 & -11\\ -10 & 6 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{11}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36}\\ -\frac{17}{36} & \frac{7}{12} & -\frac{11}{36}\\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18}\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{11}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36}\\ -\frac{17}{36} & \frac{7}{12} & -\frac{11}{36}\\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18}\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\\ 4 & 2 & 1\\ 3 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\frac{11}{36} & -\frac{1}{12} & \frac{5}{36}\\ -\frac{17}{36} & \frac{7}{12} & -\frac{11}{36}\\ -\frac{5}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{18}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

2. Метод элементарных преобразований

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

1) перестановка строк (столбцов);

2) умножение строки (столбца) на число, отличное от нуля;

3) прибавление к элементам строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), предварительно умноженных на некоторое число.

Для квадратной матрицы A n-го порядка построим прямоугольную матрицу Γ_A размера $n\times 2n$, приписывая к A справа единичную матрицу E:

$$\Gamma_A=(A\,|\,E).$$

Далее, используя элементарные преобразования над строками, приводим матрицу Γ_A к виду

$$(E\,|\,B),$$

что всегда возможно, если A невырожденная.

Тогда

$$B = A^{-1}.$$

Пример. Найти A^{-1} с помощью элементарных преобразований, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Образуем матрицу $\varGamma_A = (A\,|\,E)$:

$$\varGamma_A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

С помощью элементарных преобразований приведем матрицу $\varGamma_A$ к виду $(E\,|\,B)$.

$$\varGamma_A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ (-2) \\ (-2) \end{matrix}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ (-1) \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ (-1) \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Итак,

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Свойства обратной матрицы

1) $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det A}$;

2) $(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

3) $(A^{-1})^T = (A^T)^{-1}$;

4) $(A^{-1})^{-1} = A$.

1.6. Матричные уравнения

Рассмотрим несколько типов матричных уравнений.

1. Уравнение типа $AX = B$.

Заданы матрицы A, B. Матрица A невырожденная. Умножим матричное равенство слева на A^{-1}:

$$A^{-1}AX = A^{-1}B;$$

$$EX = A^{-1}B;$$

$$X = A^{-1}B.$$

Таким образом, решением матричного уравнения $AX = B$ будет матрица $X = A^{-1}B$.

2. Уравнение типа $XA = B$.

Заданы матрицы A, B. Матрица A невырожденная. Умножим матричное равенство справа на A^{-1}:

$$XAA^{-1} = BA^{-1};$$

$$XE = A^{-1}B;$$

$$X = BA^{-1}.$$

Таким образом, решением матричного уравнения $XA = BA^{-1}$ будет матрица $X = BA^{-1}$.

3. Уравнение типа $AXB = C$.

Заданы матрицы A, B, C Матрицы A, B невырожденные. Умножим матричное равенство слева на A^{-1}, справа на B^{-1}:

$$A^{-1}AXBB^{-1} = A^{-1}CB^{-1};$$

$$EXE = A^{-1}CB^{-1};$$

$$X = A^{-1}CB^{-1}.$$

Таким образом, решением матричного уравнения $AXB = C$ будет матрица $X = A^{-1}CB^{-1}$.

Пример. Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратную матрицу A^{-1} для матрицы A.

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 3 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= 3\cdot(-1)\cdot(-1) + 4\cdot 2\cdot 2 + 2\cdot 3\cdot 1 - 4\cdot(-1)\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot(-1) - 3\cdot 3\cdot 2 = 15.$$

Так как $|A| \neq 0$, значит матрица A невырожденная.

Составим присоединенную матрицу:

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 10, \quad A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -7, \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5, \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4, \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7;$$

$$A^{\vee} = \begin{pmatrix} -5 & 5 & 5 \\ 10 & -7 & -4 \\ 10 & -1 & -7 \end{pmatrix},$$

тогда

$$A^{-1}=\frac{1}{15}\begin{pmatrix}-5 & 5 & 5\\ 10 & -7 & -4\\ 10 & -1 & -7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15}\end{pmatrix}.$$

Итак,

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15}\end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 2 & 1\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Умножим найденную матрицу слева на матрицу B:

$$X=A^{-1}B=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{7}{15} & -\frac{4}{15}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{15} & -\frac{7}{15}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -2\\ 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\cdot 2+\frac{1}{3}\cdot(-2)+\frac{1}{3}\cdot 1\\ \frac{2}{3}\cdot 2+\left(-\frac{7}{15}\right)\cdot(-2)+\left(-\frac{4}{15}\right)\cdot 1\\ \frac{2}{3}\cdot 2+\left(-\frac{1}{15}\right)\cdot(-2)+\left(-\frac{7}{15}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

Решением исходного матричного уравнения будет матрица-столбец

$$X=\begin{pmatrix}-1\\ 2\\ 1\end{pmatrix}.$$

1.7. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Выделим в ней k строк и k столбцов,

$$k \le \min(m, n).$$

Элементы, стоящие на пересечении выбранных строк и столбцов, образуют квадратную матрицу порядка k, определитель которой называется **минором *k*-го порядка** матрицы A.

Ранг матрицы — максимальный порядок отличных от нуля миноров матрицы A.

Обозначение: r, или $r(A)$, или $\operatorname{rang} A$.

Любой минор порядка r (r — ранг матрицы), отличный от нуля, называется **базисным минором**.

Свойства ранга

1. При транспонировании матрицы ее ранг не изменяется.
2. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.
3. При элементарных преобразованиях матрицы ее ранг не изменяется.

Матрицы A и B называются **эквивалентными**, если $r(A) = r(B)$.

Обозначение эквивалентных матриц: $A \sim B$.

Методы вычисления ранга матрицы

1. Метод окаймляющих миноров

Пусть в матрице найден минор k-го порядка M, отличный от нуля. Рассмотрим лишь те миноры $(k+1)$-го порядка, которые содержат в себе (окаймляют) минор M: если все они равны нулю, то ранг матрицы равен k. В противном случае среди окаймляющих миноров найдется ненулевой минор $(k+1)$-го порядка, и вся процедура повторяется.

Пример. Найти ранг матрицы методом окаймляющих миноров:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}.$$

Решение. Фиксируем минор 2-го порядка, отличный от нуля:

$$M_2=\begin{vmatrix}1&2\\3&4\end{vmatrix}=4-6=-2\neq 0.$$

Найдем все миноры 3-го порядка, окаймляющие M_2:

$$M_3=\begin{vmatrix}1&2&1\\3&4&2\\1&2&1\end{vmatrix}=0,\quad M_3=\begin{vmatrix}1&2&3\\3&4&6\\1&2&3\end{vmatrix}=0,\quad M_3=\begin{vmatrix}1&2&4\\3&4&8\\1&2&4\end{vmatrix}=0.$$

Так как все окаймляющие миноры 3-го порядка равны нулю, то ранг матрицы равен 2, то есть $r(A)=2$.

2. Метод элементарных преобразований

С помощью элементарных преобразований матрицу можно привести к такому виду, когда все ее элементы, кроме

$$a_{11},a_{22},\ldots,a_{rr}\ (r\leq\min(m,n)),$$

равны нулю. Следовательно, ранг матрицы равен r.

Пример. Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований, если

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}.$$

Решение. Произведем элементарные преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}\begin{array}{l}(-1)\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\end{pmatrix}\begin{array}{l}(-3)\\ \\ \end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\0&-2&-1&-3&-4\end{pmatrix}\begin{array}{l}\\(+1)\end{array}\sim\underset{\left(-\frac{1}{2}\right)\quad\left(-\frac{3}{2}\right)\quad(-2)}{\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-2&-1&-3&-4\end{pmatrix}}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&-2&0&0&0\end{pmatrix},$$

значит, ранг матрицы A равен двум, то есть $r(A)=2$.

На практике удобнее комбинировать оба метода.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\3&4&2&6&8\\1&2&1&3&4\end{pmatrix}.$$

Решение. Сначала с помощью элементарных преобразований преобразуем матрицу к виду

$$\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\\0&-2&-1&-3&4\end{pmatrix}.$$

Далее используем метод окаймляющих миноров:

$$M_2=\begin{vmatrix}1&2\\0&-2\end{vmatrix}=-2\neq 0,$$

значит, $r(A)=2$, т. к. окаймляющих миноров 3-го порядка в данном случае у получившейся матрицы нет.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Решение. Так как все элементы матрицы равны 0, тогда окаймляющие миноры 1-го порядка равны нулю, значит, $r(A)=0$.

Пример. Найти ранг матрицы A методом элементарных преобразований, если

$$A=\begin{pmatrix}4&8&4&12&4\\2&4&2&6&2\\1&2&1&3&1\end{pmatrix}.$$

Решение. Произведем элементарные преобразования.

$$A=\begin{pmatrix}4&8&4&12&4\\2&4&2&6&2\\1&2&1&3&1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\2&4&2&6&2\\4&8&4&12&4\end{pmatrix}\begin{matrix}\\(-2)\\(-4)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&1\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\end{pmatrix}$$

$$\underset{(-2)\quad(-1)\quad(-3)\quad(-4)}{\sim\begin{pmatrix}1&2&1&3&4\end{pmatrix}}\qquad\sim\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\end{pmatrix}.$$

Значит, ранг матрицы A равен единице, то есть $r(A)=1$.

1.8. Линейная зависимость (независимость) строк и столбцов матрицы

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк или столбцов.

Определим понятия зависимости и независимости для строк матрицы. Для столбцов эти понятия определяются аналогично.

Пусть дана матрица A:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\dots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\dots&a_{2n}\\\dots&\dots&\dots&\dots\\a_{m1}&a_{m2}&\dots&a_{mn}\end{pmatrix}.$$

Обозначим ее строки следующим образом:

$$e_1 = (a_{11}\, a_{12}\, \dots\, a_{1n}), \qquad e_2 = (a_{21}\, a_{22}\, \dots\, a_{2n}), \qquad \dots, \qquad e_m = (a_{m1}\, a_{m2}\, \dots\, a_{mn}).$$

Две строки матрицы называются **равными**, если равны их соответствующие элементы: $e_k = e_s$, если $a_{kj} = a_{sj}$, $j = 1, 2, \dots n$.

Арифметические операции над строками матрицы (умножение строки на число, сложение строк) вводятся как операции, проводимые поэлементно:

$$\lambda e_k = (\lambda a_{k1}\, \lambda a_{k2}\, \dots\, \lambda a_{kn});$$

$$e_k + e_s = \left[(a_{k1} + a_{s1})\, (a_{k2} + a_{s2})\, \dots\, (a_{kn} + a_{sn})\right].$$

Строка e называется **линейной комбинацией** строк $e_1, e_2, \dots, e_s$ матрицы, если она равна сумме произведений этих строк на произвольные действительные числа:

$$e = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_s e_s,$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s$ — любые числа.

Строки матрицы $e_1, e_2, \dots, e_m$ называются **линейно зависимыми**, если существуют такие числа $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m$, не равные одновременно нулю, что линейная комбинация строк матрицы равна нулевой строке:

$$\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m = 0,$$

где $0 = (0\ 0\ \dots\ 0)$.

Линейная зависимость строк матрицы означает, что хотя бы одна строка матрицы является линейной комбинацией остальных.

Если линейная комбинация строк $\lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \dots + \lambda_m e_m$ равна нулю тогда и только тогда, когда все коэффициенты λ_i равны нулю, т. е. $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_m = 0$, то строки $e_1, e_2, \dots, e_m$ называются **линейно независимыми**.

Теорема о ранге матрицы*. Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк или столбцов, через которые выражаются все остальные ее строки (столбцы).*

Пример. Докажите, что система векторов $e_1 = (1\quad 2\quad -1\quad -2\quad 0)$, $e_2 = (2\quad 3\quad 0\quad -2\quad 1)$, $e_3 = (1\quad 2\quad 1\quad 4\quad 2)$, $e_4 = (1\quad 3\quad -1\quad 0\quad -1)$ линейно независима.

Решение. Составим матрицу, строки которой будут векторами данной системы:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 3 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}.$$

Вычислим ранг данной матрицы с помощью элементарных преобразований.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 2 & 3 & 0 & -2 & 1\\ 1 & 2 & 1 & 4 & 2\\ 1 & 3 & -1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\ (-2)\\ (-1)\\ (-1)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 & -2 & 0\\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2\\ 0 & 1 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}(+2)\\ \\ \\ (+1)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 6 & 2\\ 0 & 0 & 2 & 4 & 0\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 3 & 2 & 2\\ 0 & -1 & 2 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\begin{matrix}(-3)\\ (-2)\\ \\ (-1)\end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & -7 & 1\\ 0 & -1 & 0 & -4 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\begin{matrix}(-7)\\ (-4)\\ (+3)\\ \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 6\\ 0 & -1 & 0 & 0 & -3\\ 0 & 0 & 1 & 0 & -2\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1\end{pmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Значит, ранг матрицы A равен четырем, то есть $r(A)=4$. Так как ранг матрицы равен количеству векторов исходной системы, то, согласно теореме, доказана линейная независимость исходной системы векторов.

Задачи для самостоятельного решения

1. Найти произведение матриц:

$$a)\begin{pmatrix}1 & 3\\ 2 & 6\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}9 & -6\\ -3 & 2\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}2 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 2\\ -1\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}5 & 2 & 4\\ 1 & 1 & -3\\ 1 & 3 & 0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 4 & 4\\ -3 & -5 & -4\\ 1 & 3 & 4\end{pmatrix}.$$

Ответ: $a)\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}-3\\ 8\\ 0\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}23 & 22 & 28\\ -1 & -10 & -12\\ -4 & -11 & -8\end{pmatrix}.$

2. Найти $P(A)$, если

$$P(x)=x^2-2x+1,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 0\end{pmatrix}.$$

Ответ: $A=\begin{pmatrix}5 & 0 & 2\\ 5 & 1 & 1\\ -3 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

3. Вычислить определители:

$$a)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 5 & 6\end{vmatrix};\quad b)\begin{vmatrix}5 & 2 & 3\\ 4 & 3 & 2\\ 2 & 3 & 1\end{vmatrix};\quad c)\begin{vmatrix}0 & 1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 3 & 5\\ 5 & 3 & 1 & 1\\ 3 & 2 & 1 & 0\end{vmatrix}.$$

Ответ: $a)-3;\ b)\,3;\ c)-12.$

4. Найти обратную матрицу для матриц:

$$a)\begin{pmatrix}3 & 1\\ 5 & 2\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\ 0 & 2 & -1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}1 & 5 & 1\\ 3 & 2 & 1\\ 6 & -2 & 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $a)\begin{pmatrix}2 & -1\\ -5 & 3\end{pmatrix};\quad b)\begin{pmatrix}-2 & -1 & 3\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -2\end{pmatrix};\quad c)\begin{pmatrix}4 & -7 & 3\\ 3 & -5 & 2\\ -18 & 32 & -13\end{pmatrix}.$

5. Решить матричное уравнение $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

6. Найти ранг матриц:

$$a)\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -5 \\ 14 & 28 & -42 & 70 \end{pmatrix}; \quad b)\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}; \quad c)\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 & 2 & 1 \\ 6 & -2 & -10 & -4 & 1 \\ 7 & 1 & 5 & 2 & -8 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $a)\,2$; $b)\,4$; $c)\,2$.

7. Является ли система векторов $e_1 = (1 \quad 2 \quad 2)$, $e_2 = (-1 \quad -1 \quad 0)$, $e_3 = (3 \quad 4 \quad 2)$, $e_4 = (1 \quad 3 \quad -1 \quad 0 \quad -1)$ линейно независимой?

Ответ: исходная система векторов линейно зависимая.

2. Системы линейных уравнений

2.1. Основные понятия

Системой линейных алгебраических уравнений, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где a_{ij} — коэффициенты системы; b_i — свободные члены; x_j — неизвестные значения; $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n}$.

Запишем систему в матричной форме:

$$A \cdot X = B,$$

где A — матрица коэффициентов системы или **основная матрица системы**:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

X — вектор-столбец из неизвестных x_j:

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

B — вектор-столбец из свободных членов b_i:

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}.$$

Расширенной матрицей системы называется матрица вида

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Решением системы называется n значений неизвестных

$$x_1 = c_1,\ x_2 = c_2,\ \dots,\ x_n = c_n,$$

при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Система уравнений называется **совместной**, если она имеет хотя бы одно решение.

Система уравнений называется **несовместной**, если она не имеет ни одного решения.

Совместная система называется **определенной**, если она имеет единственное решение.

Совместная система называется **неопределенной**, если она имеет более одного решения.

Каждое решение неопределенной системы называется **частным решением этой системы**.

Совокупность всех частных решений называется **общим решением системы**.

2.2. Решение невырожденных линейных систем

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases} \qquad (2.1)$$

или в матричной форме: $A \cdot X = B$.

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \text{ — определитель системы.}$$

Если определитель системы отличен от нуля, то система называется **невырожденной**.

Рассмотрим способы решения системы (2.1).

Матричный метод решения

Умножим обе части уравнения $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B.$$

Так как $A^{-1} \cdot A = E$, то

$$X = A^{-1} \cdot B.$$

Пример. Решить матричным способом систему:

$$\begin{cases} 2x + y + 2z = 3, \\ x + z = 1, \\ 2x + y + 3z = 2. \end{cases}$$

Решение. Решение системы найдем по формуле $X = A^{-1} \cdot B$.

Основная матрица системы имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Обратная матрица для матрицы A:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$X = A^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1-2 \\ 3-2+0 \\ -3+0+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Итак, $X = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Формулы Крамера

Запишем матричное равенство $X = A^{-1} \cdot B$ в следующем виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix},$$

то есть

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta} \\ \dfrac{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}{\Delta} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dfrac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$x_1 = \frac{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}{\Delta},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$x_n = \frac{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}{\Delta}.$$

Но $A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n$ есть разложение определителя

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

по элементам первого столбца. Определитель Δ_1 получается из определителя Δ путем замены первого столбца коэффициентов столбцом из свободных членов. Итак,

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}.$$

Аналогично $x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta}$, где Δ_2 получен из Δ путем замены второго столбца коэффициентов столбцом из свободных членов; $x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta}, \ \ldots, \ x_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta}$.

Формулы Крамера имеют вид

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta},$$

где Δ — определитель основной матрицы системы; Δ_i — определитель, получаемый из определителя Δ заменой i-го столбца на столбец свободных членов; $i = \overline{1, n}$.

Пример. Решить по формулам Крамера систему

$$\begin{cases} x + y - z = 0, \\ 2x + y + z = 7, \\ x - y + z = 2. \end{cases}$$

Решение. Запишем формулы Крамера:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta}, \quad y = \frac{\Delta_y}{\Delta}, \quad z = \frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

Найдем определитель системы Δ и определители неизвестных Δ_x, Δ_y, Δ_z. Здесь $\Delta_x = \Delta_1, \ \Delta_y = \Delta_2, \ \Delta_z = \Delta_3$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 + 1 + 2 + 1 + 1 - 2 = 4,$$

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 7 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 7 + 2 - 0 - 7 = 4,$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 7 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 7 + 0 - 4 + 7 - 2 - 0 = 8,$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 7 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 + 7 + 0 - 0 + 7 - 4 = 12.$$

Находим по формулам Крамера $x,\ y,\ z$:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{4}{4}=1;\quad y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{8}{4}=2;\quad z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{12}{4}=3.$$

Итак, $X=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$.

2.3. Решение произвольных систем линейных уравнений

Пусть задана система m линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\dots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\dots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\dots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$$

Теорема Кронекера-Капелли

Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг основной матрицы системы равен рангу расширенной матрицы, то есть

$$r(A)=r(\bar{A}).$$

Пусть $r(A)=r(\bar{A})=r$,то есть система совместна.

Утверждение 1. Если $r=n$, то система является определенной.

Утверждение 2. Если $r<n$, то система является неопределенной.

Правила решения произвольной системы линейных уравнений

1. Найти ранги основной и расширенной матриц системы. Если $r(A)\neq r(\bar{A})$, то система несовместна.

2. Если $r(A)=r(\bar{A})$, то система совместна. Найти какой-либо базисный минор порядка r. Взять r уравнений, из коэффициентов которых составлен базисный минор (остальные уравнения отбросить). Главные неизвестные оставить слева, а свободные перенести в правые части уравнений.

Главные (базисные) неизвестные — неизвестные, коэффициенты которых входят в базисный минор.

Свободные неизвестные — это $n-r$ неизвестных, коэффициенты которых не входят в базисный минор.

3. Решить систему относительно главных неизвестных, выразив главные неизвестные через свободные. Получить общее решение системы.

4. Придавая свободным неизвестным произвольные значения, найти соответствующие значения главных неизвестных, то есть найти частное решение системы.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 5x_1 + 3x_2 + 8x_3 + x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение

1. Найдем ранги основной и расширенной матриц системы.

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim$$

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 5 & 3 & 8 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)\ (-5) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ 0 & -22 & -12 & -14 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-2) \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 3 & 1 \\ 0 & -11 & -6 & -7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 0 & -11 \end{vmatrix} = -11 \neq 0 \ \Rightarrow \ r(\bar{A}) = 2 = r(A).$$

2. Так как $r(A) = r(\bar{A}) = r = 2$, то система совместна.

Выберем базисный минор:

$$M_2 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11.$$

Возьмем первые два уравнения, из коэффициентов которых составлен базисный минор:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 1, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0; \end{cases}$$

x_1, x_2 — главные неизвестные, так как их коэффициенты входят в базисный минор; x_3, x_4 — свободные неизвестные, так как коэффициенты при этих неизвестных не входят в базисный минор.

Главные неизвестные оставим слева, а свободные перенесем в правые части уравнений:

$$\begin{cases} x_1 + 5x_2 = 1 - 4x_3 - 3x_4, \\ 2x_1 - x_2 = -2x_3 + x_4. \end{cases}$$

3. Выразим главные неизвестные через свободные.

Решим последнюю систему относительно x_1 и x_2 по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -11;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 - 4x_3 - 3x_4 & 5 \\ -2x_3 + x_4 & -1 \end{vmatrix} = -1 + 4x_3 + 3x_4 + 10x_3 - 5x_4 = -1 + 14x_3 - 2x_4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 - 4x_3 - 3x_4 \\ 2 & -2x_3 + x_4 \end{vmatrix} = -2x_3 + x_4 - 2 + 8x_3 + 6x_4 = -2 + 6x_3 + 7x_4.$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-1 + 14x_3 - 2x_4}{-11} = \frac{1}{11} - \frac{14}{11}x_3 + \frac{2}{11}x_4;$$

$$x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-2 + 6x_3 + 7x_4}{-11} = \frac{2}{11} - \frac{6}{11}x_3 - \frac{7}{11}x_4.$$

Итак,

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} - \dfrac{14}{11}x_3 + \dfrac{2}{11}x_4, \\ x_2 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{6}{11}x_3 - \dfrac{7}{11}x_4. \end{cases}$$

Общее решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} - \dfrac{14}{11}c_1 + \dfrac{2}{11}c_2, \\ x_2 = \dfrac{2}{11} - \dfrac{6}{11}c_1 - \dfrac{7}{11}c_2, \qquad -\infty < c_1, c_2 < +\infty, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

4. Найдем частное решение системы.
Пусть $c_1 = c_2 = 0$, тогда частное решение системы имеет вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{11} \\ x_2 = \dfrac{2}{11} \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0. \end{cases}$$

2.4. Решение систем линейных уравнений методом Гаусса

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных.
Пусть дана система линейных уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \tag{2.2}$$

Решение происходит в два этапа.

1 этап. Прямой ход

С помощью элементарных преобразований строк система (2.2) приводится к **ступенчатому** (в частности, треугольному) виду:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1k}x_k + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{22}x_2 + \dots + a_{2k}x_k + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \qquad\qquad a_{kk}x_k + \dots + a_{kn}x_n = b_k, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $k \le n, \quad a_{ii} \ne 0, \quad i = \overline{1,k}.$

Коэффициенты a_{ii} называют **главными** элементами системы.

Опишем, как привести систему (2.2) к виду (2.3).

Пусть $a_{11} \ne 0$. Если $a_{11} = 0$, то первым в системе запишем уравнение, в котором коэффициент при x_1 отличен от нуля.

С помощью элементарных преобразований преобразуем систему (2.2). Исключим неизвестное x_1 во всех уравнениях, кроме первого. Для этого умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{21}}{a_{11}}$ и сложим почленно со вторым уравнением системы. Затем умножим обе части первого уравнения на $-\dfrac{a_{31}}{a_{11}}$ и сложим с третьим уравнением системы. Продолжая этот процесс, получим эквивалентную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1, \\ \qquad a_{22}^{(1)}x_2 + \dots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \qquad a_{m2}^{(1)}x_2 + \dots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$$

где $a_{ij}^{(1)}$, $b_i^{(1)}$ $(i = \overline{2,m}; j = \overline{2,n})$ — новые значения коэффициентов и правых частей, которые получаются после первого шага.

Далее аналогично, считая главным элементом $a_{22}^{(1)} \ne 0$, исключим неизвестное x_2 из всех уравнений системы, кроме первого и второго, и так далее.

Если в процессе приведения системы (2.2) к ступенчатому виду появляются нулевые уравнения, т.е. равенства вида $0 = 0$, то их отбрасывают. Если же появляются уравнения вида $0 = b_i$, а $b_i \ne 0$, то система несовместная.

2 этап. Обратный ход

На втором этапе решаем ступенчатую систему. В последнем уравнении этой системы выражаем первое неизвестное x_k через остальные неизвестные $(x_{k+1}, \dots, x_n)$. Затем подставляем полученное значение x_k

в предпоследнее уравнение системы и выражаем x_{k-1} через $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$, далее последовательно находим $x_{k-2}, \ldots, x_1$. Придавая свободным неизвестным $(x_{k+1}, \ldots, x_n)$ произвольные значения, получим множество решений системы.

Замечания

1. Если ступенчатая система оказывается треугольной, то есть $k = n$, то исходная система имеет единственное решение.

2. На практике удобнее работать не с системой (2.2), а с ее расширенной матрицей, выполняя все элементарные преобразования над ее строками.

Пример. Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - 4x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение. Составим расширенную матрицу системы:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{pmatrix}.$$

1 этап. Приведем матрицу к ступенчатому виду:

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & -2 & -3 & 10 \end{pmatrix}.$$

2 этап. Восстановим систему:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 \qquad\quad + x_4 = -3, \\ \qquad 5x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 10. \end{cases}$$

Из второго уравнения найдем x_2:

$$x_2 = \frac{2}{5}x_3 + \frac{3}{5}x_4 + 2.$$

Подставим x_2 в первое уравнение и найдем x_1:

$$x_1 = \frac{4}{5}x_3 + \frac{1}{5}x_4 + 1.$$

Общее решение системы будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{4}{5}c_1 + \dfrac{1}{5}c_2 + 1, \\ x_2 = \dfrac{2}{5}c_1 + \dfrac{3}{5}c_2 + 2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

2.5. Системы линейных однородных уравнений. Фундаментальная система решений

Система линейных уравнений называется **однородной**, если все свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \tag{2.4}$$

Однородная система всегда совместна, то есть

$$r(A) = r(\bar{A}).$$

Она имеет **нулевое (тривиальное) решение**:

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0.$$

Теорема 1. *Для того чтобы система однородных уравнений (2.4) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ранг r ее основной матрицы был меньше числа n неизвестных, то есть $r < n$.*

Пусть дана однородная система n линейных уравнений с n неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Для того чтобы однородная система n линейных уравнений с n неизвестными имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы ее определитель был равен нулю, то есть* $\Delta = 0$.

Пример. Решить систему

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 2x_3 = 0, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Вычислим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 + 2 - 12 - 2 - 3 - 4 = -20.$$

Так как $\Delta \neq 0$, то система имеет, согласно теореме 2, только одно (нулевое) решение:

$$x_1 = x_2 = x_3 = 0.$$

Запишем решение системы (2.4) $x_1 = k_1,\ x_2 = k_2,\ \ldots,\ x_n = k_n$ в виде строки

$$e_1 = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n).$$

Решения системы линейных однородных уравнений обладают следующими свойствами.

1. Если строка $e_1 = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ — решение системы (2.4), то и строка $\lambda e_1 = (\lambda k_1,\ \lambda k_2,\ \ldots,\ \lambda k_n)$ — также решение этой системы.

2. Если строки $e_1 = (k_1,\ k_2,\ \ldots,\ k_n)$ и $e_2 = (l_1,\ l_2,\ \ldots,\ l_n)$ — решения системы (2.4), то при любых c_1 и c_2 их линейная комбинация $c_1e_1 + c_2e_2 = (c_1k_1 + c_2l_1, c_1k_2 + c_2l_2 + \ldots + c_1k_n + c_2l_n)$ — также решение данной системы.

Из сформулированных свойств следует, что всякая линейная комбинация решений системы линейных однородных уравнений также является решением этой системы.

Система линейно независимых решений $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k$ называется **фундаментальной**, если каждое решение системы (2.4) является линейной комбинацией решений $e_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_k$.

Теорема*. Если ранг r основной матрицы системы линейных однородных уравнений (2.4) меньше числа переменных n, то всякая фундаментальная система решений системы (2.4) состоит из n−r решений.*

Общее решение системы (2.4) линейных однородных уравнений может быть представлено в виде

$$c_1e_1 + c_2e_2 + \ldots + c_ke_k,$$

где $e_1, e_2, \ldots, e_k$ — любая фундаментальная система решений (ФСР), $c_1, c_2, \ldots, c_k$ — произвольные постоянные и $k = n - r$.

Решения $e_1, e_2, \ldots, e_k$ можно получить, придавая свободным неизвестным поочередно значение 1, полагая остальные свободные неизвестные равными 0.

Пример. Найти фундаментальную систему решений и общее решение однородной системы уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0, \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0. \end{cases}$$

Решение. Найдем ранг системы r:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 3 & 5 & 6 & -4 \\ 4 & 5 & -2 & 3 \\ 3 & 8 & 24 & -19 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-3)\;(-4)\;(-3) \\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & -3 & -18 & 15 \\ 0 & 2 & 12 & -10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ (-3)\;(+2) \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -3 \\ 0 & -1 & -6 & 5 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{pmatrix}$$

Оставим первые два уравнения системы:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4, \\ 3x_1 + 5x_2 = -6x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

Решим полученную систему по формулам Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -4x_3 + 3x_4 & 2 \\ -6x_3 + 4x_4 & 5 \end{vmatrix} = -20x_3 + 15x_4 + 12x_3 - 8x_4 = -8x_3 + 7x_4;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4x_3 + 3x_4 \\ 3 & -6x_3 + 4x_4 \end{vmatrix} = -6x_3 + 4x_4 + 12x_3 - 9x_4 = 6x_3 - 5x_4;$$

$$x_1 = \frac{-8x_3 + 7x_4}{-1} = 8x_3 - 7x_4, \qquad x_2 = \frac{6x_3 - 5x_4}{-1} = -6x_3 + 5x_4.$$

Общее решение системы будет иметь вид

$$\begin{cases} x_1 = 8c_1 - 7c_2, \\ x_2 = -6c_1 + 5c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_2. \end{cases}$$

Из общего решения находим фундаментальную систему решений:

$$e_1^T = \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2^T = \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

С помощью фундаментальной системы общее решение может быть записано в виде

$$X(c_1, c_2) = c_1 \cdot e_1 + c_2 \cdot e_2.$$

Теорема о структуре общего решения неоднородной системы линейных уравнений. *Общее решение совместной неоднородной системы линейных уравнений равно сумме какого-либо ее частного решения и общего решения однородной системы, соответствующей данной неоднородной.*

Частное решение неоднородной системы можно получить, приравняв к нулю все свободные неизвестные. Такое решение называется **базисным решением** (в выбранном базисе).

Пример. Найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 2, \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

Решение. Ранг этой системы равен 2, так как минор

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \neq 0,$$

а все окаймляющие его миноры равны нулю:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 3 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 5 & -4 \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Эквивалентная система содержит два уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 2. \end{cases}$$

В качестве главных (базисных) неизвестных возьмем x_1, x_2. Тогда x_3, x_4 — свободные неизвестные.

1. Найдем частное решение системы, приравняв свободные неизвестные к нулю:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 1, \\ 3x_1 + 5x_2 = 2, \\ x_3 = 0, \\ x_4 = 0; \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = -1, \ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -1,$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = -1, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 1.$$

Решение $e_0 = (-1, 1, 0, 0)$ — базисное решение в базисе из неизвестных (x_1, x_2). Это частное решение данной системы.

2. Рассмотрим однородную систему, соответствующую данной неоднородной. Поскольку ранг системы равен 2, сразу возьмем эквивалентную систему, содержащую два линейно независимых уравнения:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0, \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0. \end{cases}$$

Перенесем свободные неизвестные в правую часть:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + 3x_4, \\ 3x_1 + 5x_2 = -6x_3 + 4x_4. \end{cases}$$

Найдем первое решение из фундаментальной системы, положив $x_3 = 1,\ x_4 = 0$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4, \\ 3x_1 + 5x_2 = -6; \end{cases}$$

$$\Delta = -1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} -4 & 2 \\ -6 & 5 \end{vmatrix} = -8,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = 6,$$

$$x_1 = 8,\ x_2 = -6 \Rightarrow$$

$$e_1 = (8, -6, 1, 0).$$

Второе решение из ФСР найдем, взяв $x_3 = 0,\ x_4 = 1$:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3, \\ 3x_1 + 5x_2 = 4; \end{cases}$$

$$\Delta = -1,\ \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 7,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = -5,$$

$$x_1 = -7,\ x_2 = 5 \Rightarrow$$

$$e_1 = (-7, 5, 0, 1).$$

Фундаментальная система решений однородной системы линейных уравнений найдена.

Общее решение однородной системы, соответствующей данной неоднородной системе, имеет следующий вид:

$$c_1e_1 + c_2e_2,$$

где c_1, c_2 — произвольные постоянные.

3. Общее решение данной неоднородной системы:

$$X(c_1, c_2) = e_0 + c_1e_1 + c_2e_2 \text{ или}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_1 \begin{pmatrix} 8 \\ -6 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -7 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ т. е.}$$

$$\begin{cases} x_1 = -1 + 8c_1 - 7c_2, \\ x_2 = 1 - 6c_1 + 5c_2, \\ x_3 = c_1, \\ x_4 = c_4; \end{cases}$$
$$-\infty < c_1, c_2 < +\infty.$$

2.6. Метод Жордана — Гаусса

С помощью элементарных преобразований над строками и перестановки столбцов расширенная матрица системы (2.1) может быть приведена к виду:

$$\left(\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \ldots & 0 & a'_{1,r+1} & \ldots & a'_{1n} & b'_n \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & a'_{2,r+1} & \ldots & a'_{2n} & b'_n \\ 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & a'_{r,r+1} & \ldots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_{r+1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 & b'_m \end{array}\right) \tag{2.5}$$

Матрица (2.5) является расширенной матрицей системы

$$\begin{cases} x_1 \qquad + a'_{1,r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{1n} x_n = b'_1, \\ \quad x_2 \quad + a'_{2,r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{2n} x_n = b'_2, \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad x_r + a'_{r,r+1} x_{r+1} + \ldots + a'_{rn} x_n = b'_r, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'_{r+1}, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad 0 = b'_m, \end{cases} \tag{2.6}$$

которая с точностью до обозначения неизвестных эквивалентна исходной системе.

Если хотя бы одно из чисел $b'_{r+1}, \ldots, b'_m$ отлично от нуля, то система (2.6), а следовательно, и исходная система (2.1) несовместны.

Если же $b'_{r+1} = \ldots b'_m = 0$, то система совместна и формула (2.6) дает по существу явное выражение для базисных неизвестных $x_1, \ldots, x_r$ через свободные неизвестные $x_{r+1}, \ldots, x_n$.

Пример. Методом Жордана — Гаусса найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_4 = -3, \\ 3x_1 - x_2 - 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 4, \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 = 7. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу исходной системы:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right).$$

Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\begin{array}{c} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & -1 & 4 \\ 1 & 3 & -2 & -2 & 7 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} (-3)\ (-2)\ (-1) \\ \\ \\ \\ \end{array} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{-10}{5} \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ (+2) \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -\frac{4}{5} & -\frac{1}{5} & 1 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{3}{5} & 2 \end{array}\right).$$

По последней расширенной матрице составляем систему

$$\begin{cases} x_1 - \frac{4}{5}x_3 - \frac{1}{5}x_4 = 1, \\ x_2 - \frac{2}{5}x_3 - \frac{3}{5}x_4 = 2. \end{cases}$$

Считая x_1, x_2 базисными неизвестными, а x_3, x_4 — свободными, получим общее решение в виде

$$X(c_1,c_2)=\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1+\frac{4}{5}c_1+\frac{1}{5}c_2\\ 2+\frac{2}{5}c_1+\frac{3}{5}c_2\\ c_1\\ c_2 \end{pmatrix}.$$

Пример. Методом Жордана — Гаусса найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1+x_2-3x+2x_4=6,\\ x_1-2x_2-x_4=-6,\\ x_2+x_3+3x_4=16,\\ 2x_1-3x_2+2x_3=6. \end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу исходной системы:

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6\\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16\\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)$$

Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6\\ 1 & -2 & 0 & -1 & -6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16\\ 2 & -3 & 2 & 0 & 6 \end{array}\right)\begin{matrix} (-1)\ (-2)\\ \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6\\ 0 & -3 & 3 & -3 & -12\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16\\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{array}\right)$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16\\ 0 & -3 & 3 & -3 & -12\\ 0 & -5 & 8 & -4 & -6 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ (+3)\ (+5)\\ \\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16\\ 0 & 0 & 6 & 6 & 36\\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ (1/6)\\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 13 & 11 & 74 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ (-13)\\ \\ \end{matrix} \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -3 & 2 & 6\\ 0 & 1 & 1 & 3 & 16\\ 0 & 0 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right)\begin{matrix} \\ \\ \\ (-1/2) \end{matrix} \sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&2&6\\0&1&1&3&16\\0&0&1&1&6\\0&0&0&1&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ \\ (-1)\;(-3)\;(-2)\end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&0&2\\0&1&1&0&10\\0&0&1&0&4\\0&0&0&1&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ (-1)\\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&-3&0&2\\0&1&0&0&6\\0&0&1&0&4\\0&0&0&1&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ \\ (+3)\\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&0&0&14\\0&1&0&0&6\\0&0&1&0&4\\0&0&0&1&2\end{array}\right)\begin{matrix}\\ (-1)\\ \\ \\ \end{matrix}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&8\\0&1&0&0&6\\0&0&1&0&4\\0&0&0&1&2\end{array}\right).$$

По последней расширенной матрице составляем систему

$$\begin{cases}1x_1+0x_2+0x_3+0x_4=8,\\0x_1+1x_2+0x_3+0x_4=6,\\0x_1+0x_2+1x_3+0x_4=4,\\0x_1+0x_2+0x_3+1x_4=2.\end{cases}$$

Таким образом, задача имеет единственное решение:

$$X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\6\\4\\2\end{pmatrix}.$$

Пример. Методом Жордана — Гаусса найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases}6x_1-5x_2+7x_3+8x_4=3,\\3x_1+11x_2+2x_3+4x_4=6,\\3x_1+2x_2+3x_3+4x_4=1,\\x_1+x_2+x_3=0.\end{cases}$$

Решение. Составляем расширенную матрицу

$$\bar{A}=\left(\begin{array}{cccc|c}6&-5&7&8&3\\3&11&2&4&6\\3&2&3&4&1\\1&1&1&0&0\end{array}\right).$$

Производя элементарные преобразования над строками расширенной матрицы, получаем

$$\left(\begin{array}{cccc|c}6&-5&7&8&3\\3&11&2&4&6\\3&2&3&4&1\\1&1&1&0&0\end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\3&11&2&4&6\\3&2&3&4&1\\6&-5&7&8&3\end{array}\right)\begin{array}{l}(-3)\,(-3)\,(-6)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&8&-1&4&6\\0&-1&0&4&1\\0&-11&1&8&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\ \\ \\(-1)\end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&8&-1&4&6\\0&1&0&-4&-1\\0&-11&1&8&3\end{array}\right)\sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&0&-4&-1\\0&8&-1&4&6\\0&-11&1&8&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\(-8)\\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&0&-4&-1\\0&0&-1&36&14\\0&-11&1&8&3\end{array}\right)\begin{array}{l}\\(-11)\\ \\ \\ \end{array}\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&0&-4&-1\\0&0&-1&36&14\\0&0&1&-36&-30\end{array}\right)\begin{array}{l}(+1)\\ \\ \\ \\ \end{array}\sim\left(\begin{array}{cccc|c}1&1&1&0&0\\0&1&0&-4&-1\\0&0&-1&36&14\\0&0&0&0&-16\end{array}\right).$$

По последней расширенной матрице составляем систему

$$\begin{cases}1x_1+1x_2+1x_3+0x_4=0,\\0x_1+1x_2+0x_3-4x_4=-1,\\0x_1+0x_2-1x_3+36x_4=14,\\0x_1+0x_2+0x_3+0x_4\neq 6.\end{cases}$$

Очевидно, что четвертому уравнению не удовлетворяют никакие значения x_1, x_2, x_3, x_4, таким образом, полученная система уравнений и заданная система уравнений несовместны.

Пример. Применить метод Жордана–Гаусса к определению ранга матрицы

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&3&1&3\\3&1&2&5\\2&2&2&3\end{pmatrix}.$$

Решение. Производя элементарные преобразования над строками определителя, получаем

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1\\2&3&1&3\\3&1&2&5\\2&2&2&3\end{pmatrix}\begin{array}{l}(-2)\;(-3)\;(-2)\\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-5&1\\0&-5&-7&2\\0&-2&-4&1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ (-5)\;(-2)\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-5&1\\0&0&18&-3\\0&0&6&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ (-3)\end{array}\sim$$

$$\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-5&1\\\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}&\cancel{0}\\0&0&6&-1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-5&1\\0&0&6&-1\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (1/6)\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&-5&1\\0&0&1&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (+5)\end{array}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&2&3&1\\0&-1&0&\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ (-3)\end{array}\sim\begin{pmatrix}1&2&0&\frac{9}{6}\\0&-1&0&\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ (+2)\\ \end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{11}{6}\\0&-1&0&\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ (-1)\\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1&0&0&\frac{11}{6}\\0&1&0&-\frac{1}{6}\\0&0&1&-\frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

Наивысший порядок минора третьего порядка, определитель которого отличен от нуля,

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

образует ранг матрицы. Следовательно, $r(A) = 3$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить системы методом матричного исчисления:

$$a)\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 9, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = 3; \end{cases} \quad b)\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2, \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1, \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $a)\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = -3, \\ x_3 = 4; \end{cases} \quad b)\begin{cases} x_1 = -9, \\ x_2 = -10, \\ x_3 = 13. \end{cases}$

2. Решить системы по формулам Крамера:

$$a)\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 = 1, \\ 5x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \quad b)\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 - 3x_3 = -1, \\ -2x_1 - 4x_2 + 3x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $a)\begin{cases} x_1 = -1, \\ x_2 = 3, \\ x_3 = 1; \end{cases} \quad b)\begin{cases} x_1 = -7, \\ x_2 = 7, \\ x_3 = 5. \end{cases}$

3. Исследовать совместность и найти общее решение систем

$$a)\begin{cases} 5x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 3x_4 = 10, \\ 4x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 = 2, \\ 11x_1 + 11x_2 + 4x_3 + 8x_4 = 8; \end{cases} \quad b)\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 6, \\ 7x_1 + 5x_2 - 7x_3 - x_4 = 8, \\ x_1 + 8x_2 - 18x_3 - 5x_4 = -6. \end{cases}$$

Ответ: $a)\begin{cases} x_1 = 8 - 9x_2 - 4x_3, \\ x_4 = -10 + 11x_2 + 5x_3; \end{cases}$ $b)$ система несовместна.

4. Найти фундаментальную систему решений для систем

$$a)\begin{cases}5x_1-3x_2+2x_3+4x_4=0,\\2x_1-\ \ x_2+3x_3+5x_4=0,\\4x_1-3x_2-5x_3-7x_4=0;\end{cases}\qquad b)\begin{cases}3x_1+\ \ x_2-\ \ x_3+\ \ x_4=0,\\ \ \ x_1+3x_2+\ \ x_3-\ \ x_4=0,\\-x_1+\ \ x_2+3x_3+\ \ x_4=0,\\ \ \ x_1-\ \ x_2+\ \ x_3+3x_4=0.\end{cases}$$

Ответ: $a)$ $(7,11,-1,0)$, $(11,17,0,-1)$; $b)$ $(1,-1,1,-1)$.

5. Методом Жордана–Гаусса найти общее решение системы линейных уравнений

$$\begin{cases}x_1+5x_2-2x_3-3x_4=1,\\7x_1+2x_2-3x_3-4x_4=2,\\x_1+x_2+x_3+x_4=5,\\2x_1+3x_2+2x_3-3x_4=4,\\-x_1-x_2-x_3-x_4=2.\end{cases}$$

Ответ: система несовместна.

6. Применить метод Жордана — Гаусса к определению ранга матрицы

$$A=\begin{pmatrix}7&-1&3&5\\1&3&5&7\\4&1&4&6\\3&-2&-1&-1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $r(A)=2$.

3. Линейные пространства и некоторые другие математические структуры

В математике изучаются множества объектов произвольной природы, над элементами которых установлены некоторые операции, удовлетворяющие определенным правилам. Такие множества вместе с введенными операциями называются **математическими структурами**. Мы познакомимся с некоторыми важнейшими структурами, часто встречающимися в различных разделах математики и ее приложениях.

3.1. Определение линейного пространства

Множество $\mathbb{R}$ элементов произвольной природы, называемых векторами и обозначаемых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$, называется **линейным пространством**, если:

1) имеется правило (*внутренняя операция*), позволяющее с любыми двумя элементами $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из $\mathbb{R}$ сопоставить третий элемент $\bar{z}$ из $\mathbb{R}$, называемый суммой элементов $\bar{x}$ и $\bar{y}$ и обозначаемый $\bar{x}+\bar{y}$;
2) имеется правило (*внешняя операция*), позволяющее найти для каждого действительного или комплексного числа α и любого элемента $\bar{x}$ из $\mathbb{R}$ другой элемент $\bar{y}$ из $\mathbb{R}$, называемый произведением $\bar{x}$ на число α и обозначаемый $\alpha\bar{x}$.

При этом правила (операции) 1 и 2 должны удовлетворять следующим условиям (*аксиомам*):

1) $\bar{x}+\bar{y}=\bar{y}+\bar{x}$ для любых $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из $\mathbb{R}$ (закон коммутативности);
2) $(\bar{x}+\bar{y})+\bar{z}=\bar{x}+(\bar{y}+\bar{z})$ для любых $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ из $\mathbb{R}$ (закон ассоциативности);

3) существует в $\mathbb{R}$ элемент $\bar{0}$ (нуль-вектор), такой, что $\bar{x}+\bar{0}=\bar{x}$ для любого $\bar{x}$ из $\mathbb{R}$;
4) для каждого $\bar{x}$ из $\mathbb{R}$ существует в $\mathbb{R}$ элемент $\bar{y}$, такой, что $\bar{x}+\bar{y}=\bar{0}$ (элемент $\bar{y}$ называется противоположным элементу $\bar{x}$);
5) $1\cdot\bar{x}=\bar{x}$ для любого $\bar{x}$ из $\mathbb{R}$;
6) $\alpha(\beta\bar{x})=(\alpha\beta)\bar{x}$ для любого $\bar{x}$ из $\mathbb{R}$ и любых действительных чисел α и β;
7) $(\alpha+\beta)\bar{x}=\alpha\bar{x}+\beta\bar{x}$ для любых чисел α и β и любого $\bar{x}$ из $\mathbb{R}$;
8) $\alpha(\bar{x}+\bar{y})=\alpha\bar{x}+\alpha\bar{y}$ для любых $\bar{x}$ и $\bar{y}$ из $\mathbb{R}$ и любого числа α.

Исходя из определения линейного пространства, можно софрмулировать следующие *утверждения*:

1) во всяком линейном пространстве имеется единственный нулевой элемент;
2) для каждого элемента $\bar{x}$ имеется единственный противоположный элемент $\bar{y}$, который можно представить в виде $\bar{y}=(-1)\cdot\bar{x}$;
3) для всякого $\bar{x}$ из $\mathbb{R}$ выполняется $0\cdot\bar{x}=0$.

Докажем, например, первое утверждение.

Предположим, что в $\mathbb{R}$ существует два нуль-вектора $\bar{0}_1$ и $\bar{0}_2$. Положив в третьей аксиоме определения линейного пространства $\bar{x}=\bar{0}_1$, $\bar{0}=\bar{0}_2$, получим $\bar{0}_1+\bar{0}_2=\bar{0}_1$. Если же положить $\bar{x}=\bar{0}_2$ $\bar{0}=\bar{0}_1$, то $\bar{0}_2+\bar{0}_1=\bar{0}_2$. Но по первой аксиоме справедливо $\bar{0}_1+\bar{0}_2=\bar{0}_2+\bar{0}_1$, т. е. $\bar{0}_1=\bar{0}_2$.

С одним из примеров линейных пространств вы уже знакомы. Это множество векторов, которое изучено в средней школе; выполнимость аксиом 1–8 установлена. Линейным пространством является множество всех действительных чисел с операциями сложения и умножения (заметим, что аксиомы 7 и 8 при этом совпадают). Линейное пространство образует также множество всех матриц одного и того же размера с операциями сложения матриц и умножения матрицы на число, определенными в п. 1.2. Все аксиомы 1–8 при этом выполнены, так как они справедливы для чисел.

Наиболее часто применяются линейные пространства, элементами которых являются матрицы размера $n\times 1$ либо $1\times n$. Эти линейные пространства называются **арифметическими** и обозначаются $\mathbb{R}^n$ либо $\mathbb{R}_n$. В линейном арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ матриц размера $n\times 1$ вектором является столбец

$$\begin{pmatrix} \alpha^1 \\ \alpha^2 \\ \vdots \\ \alpha^n \end{pmatrix} = \left(\alpha^1, \alpha^2, ..., \alpha^n\right)^T,$$

а в арифметическом пространстве $\mathbb{R}^n$ матриц размера $1\times n$ вектором является строка $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. Над векторами-столбцами и векторами-строками вводят операции сложения и умножения на число как над соответствующими матрицами, т. е. если

$$\overline{a} = \left(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\right), \overline{b} = \left(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n\right),$$

то

$$\overline{a} + \overline{b} = \left(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, ..., \alpha_n + \beta_n\right),$$

$$\lambda\overline{a} = \left(\lambda\alpha_1, \lambda\alpha_2, ..., \lambda\alpha_n\right).$$

Вектор $(0, 0, ..., 0)$ обозначают $\overline{0}$ и называют нулевым.

Векторы-строки и векторы-столбцы, как мы увидим позднее, отличаются тем, что преобразуются по разным законам при переходе от одной системы координат к другой. В вопросах же, не связанных с преобразованием систем координат, мы их различать не будем и для краткости те и другие будем записывать в виде строки, опуская знак транспонирования, и обозначать $\mathbb{R}^n$.

Пример. В арифметическом линейном пространстве $\mathbb{R}_3$ дано три вектора: $\overline{a} = (1;\ 2;\ -2)$, $\overline{b} = (0;\ -1;\ 3)$, $\overline{c} = (-2;\ 3;\ -4)$.

Найти вектор $\overline{d} = 2\overline{a} + 4\overline{b} - 3\overline{c}$.

Решение. По правилу умножения вектора на число и сложения векторов получаем:

$$2\overline{a} = (2;\ 4;\ -4),\ 4\overline{b} = (0;\ -4;\ 12),\ -3\overline{c} = (6;\ -9;\ 12),\ 2\overline{a} + 4\overline{b} - 3\overline{c} = (8;\ -9;\ 20).$$

3.2. Линейно зависимые и линейно независимые системы векторов

Важными понятиями в теории линейных пространств являются понятия линейной комбинации векторов, линейно зависимой и линейно независимой системы векторов.

Вектор $\bar{b} = \lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n$ называется **линейной комбинацией** векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ с коэффициентами $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$.

Система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ называется **линейно зависимой**, если существуют числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, среди которых есть отличные от нуля, такие, что имеет место равенство

$$\lambda_1\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n = 0 \tag{3.1}$$

Если же соотношение (3.1) выполняется только в единственном случае, когда $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$, то система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$, называется **линейно независимой**.

Теорема 1. Для того чтобы система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из векторов был линейной комбинацией других.

Доказательство. Пусть система векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ линейно зависима. Тогда имеет место соотношение (3.1), причем среди чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть не нули. Пусть, например, $\lambda_1 \neq 0$.

Из (3.1) находим $\bar{a}_1 = \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)\bar{a}_2 + \left(-\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)\bar{a}_3 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)\bar{a}_n$, т. е. вектор $\bar{a}_1$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots \bar{a}_n$.

Пусть вектор $\bar{a}_1$ — линейная комбинация векторов $\bar{a}_2, \bar{a}_3, \ldots, \bar{a}_n$, т. е. $\bar{a}_1 = \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n$ или $(-1)\bar{a}_1 + \lambda_2\bar{a}_2 + \lambda_3\bar{a}_3 + \ldots + \lambda_n\bar{a}_n = 0$. Так как среди чисел -1, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ есть ненулевой (-1), то система $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n$ линейно зависима.

По доказанной теореме векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$ примера 1 линейно зависимы, так как вектор $\bar{d}$ является линейной комбинацией векторов $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$.

Следующие теоремы предлагается доказать самостоятельно в качестве упражнения.

Теорема 2. Всякая система векторов, содержащая нуль-вектор, линейно зависима.

Теорема 3. Всякая система векторов, содержащая линейно зависимую подсистему, линейно зависима.

3.3. Размеренность линейных пространств. Базис и координаты

Линейное пространство называется n-**мерным**, если в нем существует система из n линейно независимых векторов, а любая система, состоящая из $(n+1)$ векторов, линейно зависима.

Если в линейном пространстве существует бесконечная система линейно независимых векторов, то пространство называется **бесконечномерным**. Мы в данном разделе будем изучать лишь конечномерные линейные пространства размерности n и обозначать их $\mathbb{R}^n$ (либо $\mathbb{R}_n$).

Любая линейно независимая система, состоящая из n векторов n-мерного линейного пространства $\mathbb{R}^n$, называется **базисом** этого пространства, а входящие в него векторы называются **базисными**.

Теорема 4. Любой вектор линейного пространства $\mathbb{R}^n$ можно представить, и притом единственным образом, в виде линейной комбинации базисных векторов фиксированного базиса.

Доказательство. Пусть $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ — какой-либо базис $\mathbb{R}^n$ и $\overline{x}$ — произвольный вектор этого пространства. Система векторов $\overline{x}, \overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$, как система, состоящая из $(n+1)$ векторов n-мерного пространства, линейно зависима, а потому найдутся такие числа $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ (среди которых есть отличные от нуля), что имеет место равенство

$$\lambda_0\overline{x} + \lambda_1\overline{f}_1 + \lambda_2\overline{f}_2 + \ldots + \lambda_n\overline{f}_n = 0. \tag{3.2}$$

Число $\lambda_0 \neq 0$, так как в противном случае векторы $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$ были бы линейно зависимы, что невозможно, поскольку они образуют базис. Поэтому из (3.2) следует

$$\overline{x} = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right)\overline{f}_1 + \left(-\frac{\lambda_2}{\lambda_0}\right)\overline{f}_2 + \ldots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_0}\right)\overline{f}_n, \tag{3.3}$$

т. е. вектор $\overline{x}$ является линейной комбинацией векторов $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_n$. Докажем единственность линейной комбинации (3.3). Предположим, что $\overline{x}$ представлен двумя линейными комбинациями вида

$$\overline{x} = \alpha_1\overline{f}_1 + \alpha_2\overline{f}_2 + \ldots + \alpha_n\overline{f}_n,$$

$$\overline{x} = \beta_1\overline{f}_1 + \beta_2\overline{f}_2 + \ldots + \beta_n\overline{f}_n.$$

Вычитая второе равенство из первого, получим

$$(\alpha_1-\beta_1)\bar{f}_1+(\alpha_2-\beta_2)\bar{f}_2+\ldots+(\alpha_n-\beta_n)\bar{f}_n=0. \qquad (3.4)$$

Так как векторы $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n$ линейно независимы, то из (3.4) следует, что $\alpha_1=\beta_1, \alpha_2=\beta_2, \ldots, \alpha_n=\beta_n$. Теорема доказана.

Коэффициенты линейной комбинации, с помощью которой вектор $\bar{x}$ выражается через базисные векторы, называются **координатами вектора** $\bar{x}$ относительно данного базиса.

Таким образом, если $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_n$ – базис и $\bar{x}=x_1\bar{f}_1+x_2\bar{f}_2+\ldots+x_n\bar{f}_n$, то числа $x_1, x_2,\ldots, x_n$ являются координатами вектора $\bar{x}$ относительно этого базиса. Пишут $\bar{x}=(x_1, x_2,\ldots, x_n)$.

Из теоремы 4 следует, что координаты для любого вектора $\bar{x}$ относительно данного базиса существуют и определяются единственным образом.

Теорема 5. При сложении векторов их координаты относительно одного и того же базиса складываются, а при умножении на число — умножаются на это число.

Теорему предлагается доказать самостоятельно.

Из этой теоремы следует, что после выбора базиса в $\mathbb{R}^n$ операции сложения и умножения вектора на число совершаются по тем же правилам, что и в арифметическом линейном пространстве.

3.4. Изоморфизм линейных пространств

После выбора базиса в *n*-мерном линейном пространстве любой вектор можно задать в виде упорядоченной совокупности *n* чисел, т. е. как вектор арифметического *n*-мерного пространства. Таким образом, все линейные пространства одной размерности устроены одинаково. Этот факт лежит в основе понятия изоморфизма линейных пространств.

Если между векторами линейных пространств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ можно установить взаимно однозначное соответствие, такое, что из $\bar{x}_1\in\mathbb{R}\to\bar{y}_1\in\mathbb{R}'$, $\bar{x}_2\in\mathbb{R}\to\bar{y}_2\in\mathbb{R}'$ для любых α и β следует, что $\alpha\bar{x}_1+\beta\bar{x}_2\to\alpha\bar{y}_1+\beta\bar{y}_2$, то говорят, что пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ **изоморфны**, а само соответствие называется **изоморфизмом**.

Легко показать, что при изоморфизме нулевому вектору пространства $\mathbb{R}$ соответствует нулевой вектор из $\mathbb{R}'$. Если векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_k$ из $\mathbb{R}$ линейно независимы, то и соответствующие им векторы $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_k$ в $\mathbb{R}'$ также линейно независимы, и наоборот. Поэтому изоморфные пространства имеют одинаковую размерность. Обратно: любые два n-мерных линейных пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ изоморфны, причем изоморфизмом будет соответствие векторов из $\mathbb{R}$ векторам из $\mathbb{R}'$ с такими же координатами (относительно любых фиксированных базисов пространств $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$). Таким образом, любое линейное пространство $\mathbb{R}^n$ изоморфно n-мерному арифметическому линейному пространству, т. е. из всех конечномерных линейных пространств достаточно изучить одно из них, например арифметическое пространство.

3.5. Подпространства

Пусть некоторая совокупность L векторов линейного пространства $\mathbb{R}$ обладает свойством: любая линейная комбинация двух произвольных векторов из L принадлежит L. Тогда линейные операции (сложения и умножения на число) над векторами, определенные в $\mathbb{R}$ не выводят за пределы L. В этом случае говорят, что L замкнуто относительно линейных операций из $\mathbb{R}$. Поэтому множество L, рассматриваемое в качестве самостоятельного объекта, с линейными операциями, определенными так же, как и в $\mathbb{R}$, является линейным пространством, которое называют подпространством линейного пространства $\mathbb{R}$.

Пусть имеем некоторую систему векторов $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots$ из линейного пространства $\mathbb{R}$. **Линейной оболочкой** этой системы векторов называется множество всех их линейных комбинаций, обозначается $L(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \ldots)$. Ясно, что линейная оболочка образует подпространство в $\mathbb{R}$.

Теорема 6 (о размерности линейной оболочки). Размерность линейной оболочки $L(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m)$ равна числу r, если среди векторов $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_m$ имеется линейно независимая подсистема, состоящая из r векторов, а любая подсистема из $(r+1)$ векторов линейно зависима.

Доказательство. Не умаляя общности, можно считать, что векторы $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_r, (r \le m)$ линейно независимы, а любая совокупность из $(r+1)$ векторов, взятых из $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m$, линейно зависима. Тогда векторы $\overline{x}_{r+1}, \overline{x}_{r+2}, ..., \overline{x}_m$ являются линейными комбинациями векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_r$. Любой вектор $\overline{z}$ из $L\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\right)$ является линейной комбинацией векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m$, а потому и векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_r$. Докажем, что любые $(r+1)$ векторов $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_r, \overline{f}_{r+1}$ из $L\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\right)$ линейно зависимы. Каждый вектор $\overline{f}_i$ является линейной комбинацией векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_r$. Составим матрицу A, строки которой образуют коэффициенты этих линейных комбинаций. В матрице A имеется r столбцов и $(r+1)$ строк. Следовательно, ее ранг не больше r. Поэтому ее строки линейно зависимы по теореме о базисном миноре, что означает линейную зависимость векторов $\overline{f}_1, \overline{f}_2, \ldots, \overline{f}_r, \overline{f}_{r+1}$.

Итак, в $L\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\right)$ есть линейно независимая система из r векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_r$, а любая система из $(r+1)$ векторов линейно зависима. По определению размерности пространство $L\left(\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m\right)$ r-мерно, а векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_r$ образуют его базис. Теорема доказана.

По этой теореме и следствию 6 из теоремы о базисном миноре размерность линейной оболочки векторов из $\mathbb{R}_n$ равна рангу матрицы, составленной из координат этих векторов относительно любого базиса.

3.6. Аффинные пространства

При решении различного рода геометрических задач часто применяется математическая структура — аффинное пространство, с которым мы познакомимся в этом подразделе.

Пусть дано множество A элементов произвольной природы, которые мы будем называть точками, и линейное пространство $\mathbb{R}$. Множество A предполагается таким, что каждую упорядоченную пару точек M, N из A можно сопоставить с единственным вектором $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$. Упорядоченную пару точек (M, N) будем называть **вектором**, обозначать $\overline{MN}$, считать, что вектор $\overline{MN}$ соответствует вектору $\overline{x}$, и записывать $\overline{MN} \to \overline{x}$. При этом точка M называется началом, а точка N — концом вектора $\overline{MN}$. Векторы $\overline{MN}$ и $\overline{PQ}$, которым соответствует один и тот же вектор $\overline{x}$, будем считать равными, отождествляя их между собой, и обозначать $\overline{MN} = \overline{PQ}$.

Если $\overline{MN} \to \overline{x}$, $\overline{MK} \to \alpha\overline{x}$, то полагаем $\overline{MK} = \alpha\overline{MN}$. Если $\overline{MN} \to \overline{x}$, $\overline{PQ} \to \overline{y}$, $\overline{TB} \to (\overline{x} + \overline{y})$, то полагаем $\overline{TB} = \overline{MN} + \overline{PQ}$. Таким образом, операции сложения «новых» векторов и умножения вектора на число введены через соответствующие операции в пространстве $\mathbb{R}$.

Закон соответствия пар точек из A и векторов из $\mathbb{R}$ предполагается удовлетворяющим следующим двум условиям:

1) для любой точки M из A и любого вектора $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$ существует точка N из A, такая, что $\overline{MN} \to \overline{x}$;

2) для любых точек M, N и P из A имеет место равенство

$$\overline{MN} + \overline{NP} = \overline{MP}. \tag{4}$$

Построенная таким образом математическая структура, состоящая из множества точек с присоединенным к нему линейным пространством и соответствием, удовлетворяющим двум свойствам, называется **аффинным пространством**.

Аффинное пространство A называется n-мерным и обозначается A_n, если пространство $\mathbb{R}$ n-мерно.

Очевидны следующие простые утверждения.

1. Для любой точки M из A вектору $\overline{MM}$ соответствует $\overline{0}$ из $\mathbb{R}$.

Действительно, пусть $\overline{MN} \to \overline{x}$, $\overline{MM} \to \overline{y}$ из $\mathbb{R}$. Так как $\overline{NM} = \overline{NM} + \overline{MM} \to \overline{x} + \overline{y}$, то $\overline{y} = \overline{0}$ из $\mathbb{R}$.

2. Для любых точек M и N из A имеет место равенство $\overline{NM} = (-1)\overline{NM}$.

Действительно, если $\overline{MN} \to \overline{x}$, $\overline{NM} \to \overline{y}$, то $\overline{MN} + \overline{NM} = \overline{MM} \to \overline{x} + \overline{y} = \overline{0}$. Отсюда следует, что $\overline{x} = -\overline{y}$, т. е. $\overline{MN} \to (-1)\overline{y}$ и $\overline{MN} \to (-1)\overline{NM}$. Пишут также $\overline{MN} \to -\overline{NM}$.

Зафиксируем какую-нибудь точку O в A_n и построим векторы $\overline{OK_i} = e_i$, $i = \overline{1,n}$, соответствующие векторам базиса, пространства $\mathbb{R}^n$. Полученная конструкция называется **аффинной системой координат**. Точку O называют ее **началом**.

Пусть M — любая точка A_n. Вектор $\overline{OM}$ называется **радиус-вектором** точки M. Координатами точки M называются координаты ее радиус-вектора, т. е. если $\overline{OM} = x_1\overline{e_1} + x_2\overline{e_2} + \ldots + x_n\overline{e_n}$, то точка M имеет координаты $(x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n)$ относительно данной системы координат. Существование и единственность координат вектора $\overline{OM}$, а потому и координат точки относительно данной системы координат, вытекает из соответствующего утверждения для $\mathbb{R}^n$. Пишут $M(x_1, x_2, ..., x_n)$.

Пример. Зная координаты точек M и N относительно данной системы координат, найти координаты вектора $\overline{MN}$.

Решение. По формуле (3.5) находим $\overline{OM} + \overline{MN} = \overline{ON}$. Отсюда $\overline{MN} = \overline{ON} - \overline{OM}$, т. е. координаты вектора $\overline{MN}$ равны разностям соответствующих координат его конца и начала.

3.7. Евклидовы и нормированные линейные пространства

Говорят, что в линейном пространстве $\mathbb{R}$ введено понятие **длины вектора**, или **нормы**, если каждому $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$ поставлено в соответствие число, обозначаемое символом $\|\overline{x}\|$ (иногда $|\overline{x}|$), такое, что:

1) $\|\overline{x}\| \geq 0$ для каждого $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$; из условия $\|\overline{x}\| = 0$ следует $\overline{x} = \overline{0}$;

2) $\|\alpha\overline{x}\| = |\alpha| \cdot \|\overline{x}\|$ для любых чисел α и любого вектора $\overline{x}$ из $\mathbb{R}$;

3) $\|\overline{x} + \overline{y}\| \leq \|\overline{x}\| + \|\overline{y}\|$ (неравенство Минковского).

Линейное пространство в этом случае называется **нормированным**.

Понятие нормы или модуля вектора можно ввести многими способами. Мы сделаем это с помощью понятия скалярного произведения.

Предположим, что имеется некоторое правило, позволяющее любой паре векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из линейного пространства $\mathbb{R}$ поставить в соответствие число, обозначаемое $(\overline{x}, \overline{y})$. Это число называется **скалярным произведением** векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$, если выполнены следующие условия:

а) $(\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{y}, \overline{x})$ для любых $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathbb{R}$;

б) $(\overline{x}, \overline{y} + \overline{z}) = (\overline{x}, \overline{y}) + (\overline{x}, \overline{z})$ для любых $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{z}$ из $\mathbb{R}$;

в) $(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda(\overline{x}, \overline{y})$ для любого числа λ и любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathbb{R}$;

г) $(\overline{x}, \overline{x}) > 0$, если $\overline{x} \neq \overline{0}$, и $(\overline{x}, \overline{x}) = 0$, если $\overline{x} = \overline{0}$.

Линейное пространство $\mathbb{R}$ называется **евклидовым**, если в нем введено понятие скалярного произведения. Через E_n будем обозначать n-мерное евклидово пространство. Евклидово линейное пространство называют также **унитарным**, или **предгильбертовым**.

Пусть $\overline{x}=(\alpha_1,\alpha_2, ...,\alpha_n)$ и $\overline{y}=(\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n)$ — два произвольных вектора из арифметического пространства $\mathbb{R}^n$. Положим

$$\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\alpha_1\beta_1+\alpha_2\beta_2+...\alpha_n\beta_n. \tag{3.6}$$

При этом условия а)–г), очевидно, выполнены. Тем самым арифметическое пространство превращено в евклидово.

Длиной вектора $\overline{x}$ (модулем, нормой) в евклидовом пространстве называется число

$$\left|\overline{x}\right|=\left\|\overline{x}\right\|=\sqrt{\left(\overline{x},\overline{x}\right)}.$$

Если скалярное произведение введено соотношением (3.6), то $\left|\overline{x}\right|=\sqrt{=\alpha_1^2+\alpha_2^2+...+\alpha_n^2}$.

Теорема 7. Для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из E_n справедливо неравенство

$$\left|\left(\overline{x},\overline{y}\right)\right|\le\left|\overline{x}\right|\cdot\left|\overline{y}\right|. \tag{3.7}$$

Доказательство. Рассмотрим вектор $\lambda\overline{x}-\overline{y}$, где λ — действительное число. При любом A по свойству скалярного произведения $\left(\lambda\overline{x}-\overline{y},\ \lambda\overline{x}-\overline{y}\right)\ge 0$. Отсюда

$$\lambda^2\left(\overline{x},\overline{x}\right)-2\lambda\left(\overline{x},\overline{y}\right)+\left(\overline{y},\overline{y}\right)\ge 0. \tag{3.8}$$

Квадратный трехчлен в (3.8) не может иметь различных действительных корней, так как в противном случае он не сохранял бы знака для всех значений λ. Поэтому дискриминант трехчлена не положителен, т. е. $\left(\overline{x},\overline{y}\right)^2-\left(\overline{x},\overline{x}\right)\left(\overline{y},\overline{y}\right)\le 0$ или $\left(\overline{x},\overline{y}\right)^2\le\left(\overline{x},\overline{x}\right)\left(\overline{y},\overline{y}\right)$. Извлекая квадратный корень, приходим к (6).

Соотношение (3.7) называют **неравенством Коши — Буняковского**. Из него следует, что $-1\le\dfrac{\left(\overline{x},\overline{y}\right)}{\left|\overline{x}\right|\left|\overline{y}\right|}\le 1$. Это дает основание ввести понятие угла φ между ненулевыми векторами соотношением $\cos\varphi=\dfrac{\left(\overline{x},\overline{y}\right)}{\left|\overline{x}\right|\left|\overline{y}\right|}$.

Два ненулевых вектора $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из E_n называются **ортогональными**, если $\left(\overline{x},\overline{y}\right)=0$.

Теорема 8. Всякая система ненулевых попарно ортогональных векторов $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m$ линейно независима (такая система векторов называется ортогональной).

Доказательство. Предположим, что

$$c_1\overline{x}_1 + c_2\overline{x}_2 + \ldots + c_m\overline{x}_m = \overline{0}. \tag{3.9}$$

Умножим обе части этого равенства скалярно на вектор $\overline{x_j}$. Получим $c_j\left(\overline{x_j}, \overline{x_j}\right) = 0$. Так как $\left(\overline{x_j}, \overline{x_j}\right) > 0$, то $c_j = 0$. Полагая $j = 1, 2, \ldots, m$, получаем, что (3.9) возможно только в случае $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$, следовательно, векторы $\overline{x}_1, \overline{x}_2, ..., \overline{x}_m$ линейно независимы.

Базис линейного пространства E_n называется **ортогональным**, если его векторы образуют ортогональную систему. Базис называется **ортонормированным**, если он ортогональный, а все его векторы имеют длину, равную единице.

Если скалярное произведение в E_n введено соотношением (3.6), то векторы

$$\overline{e}_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0);$$

$$\overline{e}_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0);$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{e}_n = (0, 0, 0, \ldots, 1)$$

образуют ортонормированный базис.

От произвольного базиса $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \ldots, \overline{a}_n$ линейного пространства E_n легко перейти к ортогональному $\overline{b}_1, \overline{b}_2, \ldots, \overline{b}_n$, применяя процесс ортогонализации, заключающийся в следующем. Положим $\overline{b_1} = \overline{a}_1$. Вектор $\overline{b}_2$ выберем в виде $\overline{b}_2 = \alpha_1\overline{b}_1 + \overline{a}_2$. Так как $\overline{b}_1 = \overline{a}_1$, а векторы $\overline{a}_1$ и $\overline{a}_2$ линейно независимы, то $\overline{b}_2 \neq 0$ при любом α_1. Число α_1 подберем так, чтобы вектор $\overline{b}_2$ был ортогонален $\overline{b_1}$, т. е. чтобы было $\left(\overline{b_2}, \overline{b_1}\right) = 0$. Это дает $\alpha_1\left(\overline{b_1}, \overline{b_1}\right) + \left(\overline{a_2}, \overline{b_1}\right) = 0$. Отсюда $\alpha_1 = -\dfrac{\left(\overline{a_2}, \overline{b_1}\right)}{\left(\overline{b_1}, \overline{b_1}\right)}$.

Далее положим $\overline{b_3} = \beta_1\overline{b}_1 + \beta_2\overline{b}_2 + \overline{a}_3$. Поскольку $\overline{b_3}$ есть линейная комбинация векторов $\overline{a}_1, \overline{a}_2, \overline{a}_3$, то $\overline{b_3} \neq 0$ при любых β_1 и β_2. Числа β_1 и β_2 подберем так, чтобы вектор $\overline{b_3}$ был ортогонален векторам $\bar{b}_1$ и $\bar{b}_2$. Требуя это, получим $\beta_1 = -\frac{\left(\overline{a_3}, \overline{b_1}\right)}{\left(\overline{b_1}, \overline{b_1}\right)}$, $\beta_2 = -\frac{\left(\overline{a_3}, \overline{b_2}\right)}{\left(\overline{b_2}, \overline{b_2}\right)}$.

Продолжая этот процесс, через n шагов получим ортогональный базис $\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_n$.

Покажем, что евклидово пространство является нормированным. Условия 1) и 2) определения нормированного пространства, очевидно, выполнены. Проверим третье условие (неравенство Минковского): $\left|\bar{x}+\bar{y}\right| \le \left|\bar{x}\right| + \left|\bar{y}\right|$.

Можем записать $\left|\bar{x}+\bar{y}\right|^2 = \left(\bar{x}+\bar{y}, \bar{x}+\bar{y}\right) = \left(\bar{x}, \bar{x}\right) + 2\left(\bar{x}, \bar{y}\right) + \left(\bar{y}, \bar{y}\right)$.

Из (3.7) следует, что $(\bar{x}, \bar{y}) \le \sqrt{\left(\bar{x}, \bar{x}\right)}\sqrt{\left(\bar{y}, \bar{y}\right)}$.

Поэтому $\left|\bar{x}+\bar{y}\right|^2 \le \left(\bar{x}, \bar{x}\right) + 2\sqrt{\left(\bar{x}, \bar{x}\right)\left(\bar{y}, \bar{y}\right)} + \left(\bar{y}, \bar{y}\right) = \left(\sqrt{\left(\bar{x}, \bar{x}\right)} + \sqrt{\left(\bar{y}, \bar{y}\right)}\right)^2$.

Отсюда и следует доказываемое неравенство.

3.8. Формулы перехода от одного базиса к другому

Пусть в линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ дано два базиса: $\left\{\overline{e_i}\right\} = \left(\overline{e_1}, \overline{e_2}, \ldots, \overline{e_n}\right)$, условно называемый старым, и $\left\{\overline{f_j}\right\} = \left(\overline{f_1}, \overline{f_2}, \ldots, \overline{f_m}\right)$, называемый новым. Разложим векторы нового базиса по векторам старого:

$$\overline{f_j} = \sum_{i=1}^{n} c_{ij}\bar{e}_i, \; j = 1, 2, \ldots, n \tag{3.10}$$

Из чисел c_{ij} можно построить матрицу

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1} & c_{n2} & \ldots & c_{nn} \end{pmatrix}.$$

Матрица C называется **матрицей перехода** от старого базиса к новому. Заметим, что в столбцах матрицы C записаны координаты новых базисных векторов относительно старого базиса.

Пусть дан вектор $\overline{x}$, причем $\overline{x}=\sum_{i=1}^{n}\xi_1\overline{e_i}$; $\overline{x}=\sum_{j=1}^{n}\eta_j\overline{f_j}$. Координаты ξ_i будем называть старыми, а η_j — новыми. Связь между новыми и старыми координатами задается следующими двумя формулами:

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=C\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix} \tag{3.11}$$

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=C^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix} \tag{3.12}$$

Пусть в E_n дано два ортонормированных базиса $\{\overline{e_i}\}$ и $\{\overline{f_j}\}$. Матрица Q перехода от одного ортонормированного к другому ортонормированному базису называется **ортогональной**. Сумма квадратов элементов каждого ее столбца равна единице как скалярное произведение векторов $\overline{f_j}$ на себя, а сумма произведений соответствующих элементов двух различных столбцов равна нулю как скалярное произведение векторов $\overline{f_j}$ и $\overline{f_i}, i\neq j$.

Ортогональные матрицы обладают замечательным для них свойством $Q^{-1}=Q^T$. Поэтому формулы (3.11) и (3.12) принимают вид

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=Q\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix}=Q^{-1}\cdot\begin{pmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \vdots\\ \eta_n\end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Пример. Пусть вектор $\overline{x}$ пространства $\mathbb{R}^3$ относительно канонического базиса имеет координаты $(2,3,4)$. Найти его координаты η_1,η_2,η_3 относительно базиса $\overline{f_1}=\{1,\ 2,\ 3\}$, $\overline{f_3}=\{1,\ 3,\ 1\}$.

Решение. В нашем случае матрица C имеет вид $C=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&3\\3&7&1\end{pmatrix}$.

Вычисляя, находим $C^{-1}=\begin{pmatrix}-18&5&3\\7&-2&-1\\5&-1&-1\end{pmatrix}$.

По формуле (3.12) можно найти координаты вектора $\bar{x}$ относительно нового базиса:

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 5 & 3 \\ 7 & -2 & -1 \\ 5 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Пусть дано множество Q всех многочленов степени не выше n. Суммой двух многочленов $A_n = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ и $B_n = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_{n-1}x + b_n$ называют многочлен $C_n = (a_0 + b_0)x^n + (a_1 + b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} + b_{n-1})x + (a_n + b_n)$, а произведением многочлена A_n на число λ — многочлен $Q_n = \lambda a_0x^n + \lambda a_1x^{n-1} + \ldots + \lambda a_{n-1}x + \lambda a_n$.

Докажите, что множество Q с указанными операциями образует линейное пространство. Укажите его размерность и какой-нибудь базис.

2. Докажите, что множество всех многочленов степени ровно n линейного пространства не образует (операции сложения и умножения на число введены, как в задаче 1).

3. Докажите, что множество всех квадратных матриц второго порядка с известными операциями сложения и умножения на число образуют четырехмерное линейное пространство. Укажите какой-нибудь базис этого пространства.

4. На множестве M всех упорядоченных пар (u, v) положительных чисел операции сложения и умножения введены следующим образом: $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 \cdot u_2, v_1 \cdot v_2); \lambda(u, v) = (u^\lambda, v^\lambda)$, где λ — вещественное число.

Докажите, что при этом множество становится линейным пространством. Выясните: а) какая пара играет роль нулевого элемента; б) какая пара является противоположной паре (u, v); в) укажите размерность этого пространства и какой-нибудь его базис.

Ответ: а) $(1,1)$; б) $\left(\frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right)$; в) 2; $(10,1)$; $(1,10)$.

5. На множестве M всех упорядоченных пар (u, v) вещественных чисел введены операции одним из следующих способов:

а) $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + 2u_2, v_1 + 2v_2)$; $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$;

б) $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = \left(\dfrac{u_1 + v_1}{2}, \dfrac{u_2 + v_2}{2}\right)$; $\lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$;

в) $(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2)$; $\lambda(u, v) = (u, v)$.

Будет ли при этом множество линейным пространством? В случае отрицательного ответа выясните, какие аксиомы при этом не выполняются.

6. Докажите, что любая система векторов линейного пространства, содержащая два одинаковых вектора, линейно зависима.

7. Пусть векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейного пространства линейно независимы. Исходя из определения, докажите, что векторы $\bar{a} - 2\bar{b}$ и $\bar{a} - 2\bar{b}$ также линейно независимы.

8. Докажите, что векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$, $2\bar{a} + 3\bar{b}$ линейного пространства $\mathbb{R}$ линейно зависимы.

9. Докажите, что множество L всех векторов (x, y, z) арифметического линейного пространства $\mathbb{R}_3$, удовлетворяющих условию $x + y + z = 0$, образует линейное подпространство пространства $\mathbb{R}_3$. Укажите размерность пространства и какой-нибудь базис.

Ответ: 2; например, $(-1,\ 0,\ 1)$, $(-1,\ 1,\ 0)$.

10. Найдите размерность и какой-нибудь базис линейной оболочки векторов $\overline{a_1} = (1,\ 0,\ 0,\ -1)$; $\overline{a_2} = (2,\ 1,\ 1,\ 0)$; $\overline{a_3} = (1,\ 1,\ 1,\ 1)$; $\overline{a_4} = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$; $\overline{a_5} = (0,\ 1,\ 2,\ 3)$ арифметического линейного пространства $\mathbb{R}^4$.

Ответ: 3; например, $\overline{a_1}$, $\overline{a_2}$, $\overline{a_4}$.

11. Относительно канонического базиса в пространстве $\mathbb{R}_2$ даны три вектора: $\overline{f_1} = (1,\ 4)$; $\overline{f_2} = (3,\ 2)$; $\bar{x} = (10,\ 10)$. Докажите, что векторы $\overline{f_1}$; $\overline{f_2}$ можно принять за новый базис, найдите координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе.

*Ответ:*1; 3.

12. Относительно канонического базиса в пространстве $\mathbb{R}_3$ даны четыре вектора $\overline{f_1} = (1,\ 3,\ 2)$; $\overline{f_2} = (-3,\ -4,\ -5)$; $\overline{f_3} = (-2,\ 4,\ 6)$. Докажите, что векторы $\overline{f_1}$; $\overline{f_2}$; $\overline{f_3}$ можно принять за новый базис, найдите координаты вектора $\bar{x}$ в этом базисе.

Ответ: (48, 30, 20).

13. Относительно канонического базиса $\{\overline{e_i}\}$ пространства $\mathbb{R}_3$ даны две тройки векторов:

$$\overline{f_1} = (a_{11},\ a_{21},\ a_{31});\quad \overline{f_2} = (a_{12},\ a_{22},\ a_{32});\quad \overline{f_3} = (a_{13},\ a_{23},\ a_{33});$$

$$\text{и } \overline{g_1} = (b_{11},\ b_{21},\ b_{31});\quad \overline{g_2} = (b_{12},\ b_{22},\ b_{32});\quad \overline{g_3} = (b_{13},\ b_{23},\ b_{33}),$$

таких, что матрицы $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$ не вырождены.

Докажите, что векторы $\overline{f_1}; \overline{f_2}; \overline{f_3}$ и $\overline{g_1}; \overline{g_2}; \overline{g_3}$ можно принять за новые базисы. Найдите матрицу перехода от базиса $\overline{f_1}; \overline{f_2}; \overline{f_3}$ к базису $\overline{g_1}; \overline{g_2}; \overline{g_3}$. Запишите формулы, связывающие координаты одного и того же вектора $\overline{x}$ относительно базисов $\overline{f_1}; \overline{f_2}; \overline{f_3}$ и $\overline{g_1}; \overline{g_2}; \overline{g_3}$.

Ответ: $C = A^{-1}B;\ \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} = B^{-1}A \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$, где (η_i) — координаты вектора $\overline{x}$ в базисе $\{\overline{g_i}\}$, а (ξ_i) — в базисе $\{\overline{f_i}\}$.

14. Относительно канонического базиса в пространстве $\mathbb{R}_2$ даны две пары векторов: $\overline{f_1} = (1,\ -2)$; $\overline{f_2} = (3,\ -5)$ и $\overline{g_1} = (2,\ -1)$; $\overline{g_2} = (-3,\ 1)$. Докажите, что эти пары векторов можно принять в качестве новых базисов в $\mathbb{R}_2$. Найдите координаты вектора $\overline{x}$ относительно базиса $\{\overline{f_1};\ \overline{f_2}\}$, если известно, что относительно базиса $\{\overline{g_1};\ \overline{g_2}\}$ он имеет координаты $(2,\ 4)$.

Ответ: $(58,\ 34)$.

4. Функции в линейных пространствах

В этом подразделе будут изучены наиболее важные частные классы функций — классы линейных и билинейных отображений одного линейного пространства в другое, а также во множество вещественных чисел.

4.1. Функции, отображения

Пусть даны два линейных пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$ и некоторые множества $E \subset \mathbb{R}$ и $F \subset \mathbb{R}'$.

Соответствие, которое каждому вектору $\bar{x}$ из E сопоставляет некоторый вектор $\bar{y}$ из F, называется отображением E в F.

Если E совпадает с $\mathbb{R}$, а F с $\mathbb{R}'$, то имеем отображение $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}'$. Отображение называют также *функцией*, или *оператором*, обозначают обычно буквой f и записывают $y = f(x)$ или $f : E \to F$. Говорят, что f есть функция переменной со значениями в F. При этом элемент $f(\bar{x}) = \bar{y}$ называется образом элемента $\bar{x}$ при отображении f, а $\bar{x}$ — прообразом элемента $\bar{y}$.

Пусть $\mathbb{R} = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}' = \mathbb{R}^m$. Если в пространстве $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ фиксировать базисы, то отображение $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ определит выражения координат $\bar{y}_1, \bar{y}_2, \ldots, \bar{y}_m$ вектора $\bar{y}$ через координаты $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n$ вектора $\bar{x}$:

$$\begin{aligned} y_1 &= f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ y_2 &= f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_m &= f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n). \end{aligned} \tag{4.1}$$

Таким образом, задание отображения $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ при фиксированных базисах равносильно заданию *m* числовых функций *n* числовых аргументов.

Произвольные отображения изучаются в математическом анализе. В данном разделе будем изучать лишь линейные отображения конечномерных пространств, тот случай, когда все функции в (4.1) линейны, т. е. имеют вид $y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{in}x_n$, где $i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, а коэффициенты a_{ik} $(k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ являются некоторыми константами.

4.2. Линейные операторы

Пусть имеется два (не обязательно различных) линейных пространства $\mathbb{R}$ и $\mathbb{R}'$. **Линейным отображением** пространства $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}'$, или **линейным оператором**, действующим из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}'$, называется отображение *A* пространства $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}'$, обладающее следующим свойством:

$$A\left(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}\right) = \alpha A\overline{x} + \beta A\overline{y},$$

для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathbb{R}$ и любых действительных чисел α и β.

Это соотношение эквивалентно двум: $A\left(\overline{x} + \overline{y}\right) = A\overline{x} + A\overline{y}$, $A\left(\alpha\overline{x}\right) = \alpha A\overline{x}$, получающимся из данного при $\alpha = \beta = 1$ и при $\beta = 0$.

Иногда в записи $A\left(\overline{x}\right)$ будем скобки опускать и писать $A\overline{x}$.

Примеры

1. Оператор, который с каждым вектором из $\mathbb{R}$ сопоставляет нуль-вектор из $\mathbb{R}'$, называется нулевым. Этот оператор, очевидно, линеен.

2. Пусть оператор *П* действует из арифметического линейного пространства $\mathbb{R}^3$ в пространство $\mathbb{R}^2$ по закону $\Pi(\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3) = (\xi_1,\ \xi_2)$. Этот оператор называется **оператором проектирования**. Покажем, что он линеен. Если $\overline{x} = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$ и $\overline{y} = (\eta_1,\ \eta_2,\ \eta_3)$— два произвольных вектора, то $\alpha\overline{x} + \beta\overline{y} = (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1, \alpha\xi_2 + \beta\eta_2, \alpha\xi_3 + \beta\eta_3)$, где α и β — любые числа. Находим $\Pi\overline{x} = (\xi_1,\ \xi_2), \Pi\overline{y} = (\eta_1,\ \eta_2), \Pi\left(\alpha\overline{x} + \beta\overline{y}\right) = (\alpha\xi_1 + \beta\eta_1, \alpha\xi_2 + \beta\eta_2) = \alpha\Pi\overline{x} + \beta\Pi\overline{y}$, т. е. оператор *П* линеен.

Теорема 1. Пусть $\mathbb{R}^n$ — n-мерное линейное пространство и $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$ его базис. Какая бы ни была совокупность векторов $\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{e}_n$ из $\mathbb{R}'$, существует единственный линейный оператор $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}'$, удовлетворяющий условию $A\bar{e}_i = \bar{f}_i \left(i = \overline{1,n}\right)$.

4.3. Матрица линейного оператора

Пусть A — линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, и $\{\bar{e}_i\} = (\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n)$ — произвольный базис $\mathbb{R}^n$, а $\{\bar{f}_j\} = (\bar{f}_1, \bar{f}_2, \ldots, \bar{f}_m)$ — базис пространства $\mathbb{R}^m$. Подействуем оператором A на каждый из базисных векторов $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n$. В результате получим n векторов $A\bar{e}_1, A\bar{e}_2, \ldots, A\bar{e}_n$ пространства $\mathbb{R}^m$, которые можно разложить по векторам базиса $\bar{f}_j$ и записать

$$A\bar{e}_i = a_{ij}\bar{f}_j \left(i = \overline{1,n},\ j = \overline{1,m}\right) \tag{4.2}$$

или в подробной записи

$$A\bar{e}_1 = a_{11}\bar{f}_1 + a_{12}\bar{f}_2 + \ldots + a_{1m}\bar{f}_m,$$

$$A\bar{e}_2 = a_{21}\bar{f}_1 + a_{22}\bar{f}_2 + \ldots + a_{2m}\bar{f}_m,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$A\bar{e}_n = a_{n1}\bar{f}_1 + a_{n2}\bar{f}_2 + \ldots + a_{nm}\bar{f}_m.$$

Числа a_{ij} определяют матрицу

$$A_{(\bar{e}_i, \bar{f}_j)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & a_{3n} \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{nm} \end{pmatrix}$$

размера $m \times n$, называемую **матрицей оператора** A в базисах $\{\bar{e}_i\}$ и $\{\bar{f}_j\}$. Заметим, что в s-м столбце матрицы A записаны координаты вектора $A\bar{e}_s$ относительно базиса $\{\bar{f}_j\}$.

Из теоремы 1 следует, что линейный оператор полностью определяется заданием его матрицы относительно данных базисов, так как она указывает образы базисных векторов. Это значит, что, зная матрицу A, можно найти результат действия линейного оператора на любой вектор. Покажем, как это сделать.

Пусть $\overline{x} = \xi_i \overline{e}_i$ $\overline{y} = A\overline{x} = \eta_j \overline{f_j}$. Требуется выразить координаты η_j вектора $A\overline{x}$ через числа ξ_i и a_{ij}. Находим, используя формулы (4.2), $\eta_i \overline{f}_j = A\overline{x} = A\left(\xi_1 \overline{e}_i\right) = \xi_1 A\overline{e}_i = \xi_i a_{ij} \overline{f}_j$. Отсюда следует, что

$$\eta_i \overline{f}_j = \xi_i a_{ij} \left(i = \overline{1,n}, j = \overline{1,m}\right) \qquad (4.3)$$

или в матричной форме записи

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}.$$

Таким образом, s-я координата вектора $A\overline{x}$ есть линейная комбинация координат вектора $\overline{x}$. Коэффициенты этой линейной комбинации образуют s-ю строку матрицы A оператора.

Итак, после выбора базисов $\left\{\overline{e_i}\right\}$ и $\left\{\overline{f_j}\right\}$ пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ каждому линейному оператору соответствует единственная матрица A. Если задана произвольная матрица A размера $m \times n$, то ее можно считать матрицей линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, полагая координатами векторов $A\overline{e}_i$ столбцы этой матрицы. Таким образом, между всеми матрицами размера $m \times n$ и всеми линейными операторами, действующими из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$ с фиксированными базисами, устанавливается взаимно однозначное соответствие.

Например, нулевой оператор в любых базисах имеет нулевую матрицу.

Рассмотрим оператор $\Pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ проектирования, где $\mathbb{R}^3$ и $\mathbb{R}^2$ — арифметические линейные пространства. Зафиксируем базисы $\overline{e}_1 = (1,\ 0,\ 0)$, $\overline{e}_2 = (0,\ 1,\ 0)$, $\overline{e}_3 = (0,\ 0,\ 1)$ в $\mathbb{R}^3$ и $\overline{f}_1 = (1,\ 0)$, $\overline{f}_2 = (0,\ 1)$ в $\mathbb{R}^2$. Тогда $\Pi\overline{e}_1 = (1,\ 0)$, $\Pi\overline{e}_2 = (0,\ 1)$, $\Pi\overline{e}_3 = (0,\ 0)$.

Матрица оператора Π в этих базисах имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Матрица линейного оператора, действующего из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^1$ будет состоять из одной строки, а действующего из $\mathbb{R}^1$ в $\mathbb{R}^n$ — из одного столбца. Соотношения (4.3) сохраняются при условии $m = n$.

Пример. Является ли линейным отображение $A\overline{x} = (2x_2,\ x_1,\ +x_3 - x_3)$? Если да, то запишите матрицу отображения.

Решение. Проверим условия линейности, $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$, $\overline{y} = (y_1,\ y_2,\ y_3)$.

Тогда $\overline{x} + \overline{y} = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2,\ x_3 + y_3)$.

$$A\left(\overline{x} + \overline{y}\right) = (2x_2 + 2y_2,\ x_1 + y_1 + x_3 + y_3,\ -x_3 - y_3)$$

$$= (2x_2,\ x_1 + x_3,\ -x_3) + (2y_2,\ y_1 + y_3,\ -y_3) = A\overline{x} + A\overline{y}$$

$$\text{и } A\left(\alpha\overline{x}\right) = (2\alpha x_2,\ \alpha x_1 + \alpha x_3,\ -\alpha x_3) = \alpha(2x_2,\ x_1 + x_3,\ -x_3) = \alpha A\overline{x}.$$

Отображение является линейным.

Найдем его матрицу в базисе $\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \overline{e_3}$. $A\overline{e}_1 = (0,\ 1,\ 0)$, $A\overline{e}_2 = (2,\ 0,\ 0)$, $A\overline{e}_3 = (0,\ 1,\ -1)$.

Тогда $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

Мы видели, что матрица линейного оператора зависит от выбора базиса. Запишем закон изменения матрицы линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при переходе от одного базиса к другому.

Обозначим матрицу оператора A в базисе $\left\{\overline{e_i}\right\}$ через A, а в базисе $\left\{\overline{f_j}\right\}$ — через B. Матрица C — матрица перехода от старого базиса к новому. Тогда следующим соотношением определяется закон изменения матрицы линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ при переходе от одного базиса к другому:

$$B = C^{-1}AC.$$

Теорема 2. Определитель матрицы линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не изменяется при изменении базиса.

Из теоремы 2 следует, что если матрица линейного оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не вырождена в одном из базисов, то она не вырождена и во всех остальных.

4.4. Область значений линейного оператора. Ранг линейного оператора

Пусть линейный оператор A действует из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Множество $T(A)$ всех векторов $\overline{y} = A\overline{x}\left(\overline{x} \in \mathbb{R}^n\right)$ называется **областью значений оператора** A.

Теорема 3. Область значений линейного оператора A, действующего из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, есть линейное подпространство размерности, равной рангу матрицы оператора A, относительно любых базисов этих пространств.

Число r называют **рангом оператора** A.

Нуль-многообразием $N(A)$, или **ядром**, оператора A, действующего из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, называется множество всех тех векторов $\overline{x}$ из $\mathbb{R}^n$, для которых $A\overline{x} = 0$.

Из (3.12) следует, что координаты векторов $\overline{x} = \xi_1 \overline{e}_i$, принадлежащих нуль-многообразию $N(A)$ удовлетворяют системе однородных уравнений

$$\xi_i a_{ij} = 0,$$

где $\left(a_{ij}\right)$ — матрица линейного оператора A в базисах $\left\{\overline{e}_i\right\}$ и $\left\{\overline{f}_j\right\}$. Множество $N(A)$ образует линейное подпространство размерности n—r, где r — ранг оператора $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

4.5. Действия над линейными операторами

Пусть дано два линейных оператора A и B, отображающих пространство $\mathbb{R}^n$ с базисом $\left\{\overline{e}_i\right\} = \left(\overline{e}_1,\ \overline{e}_2,\ \ldots,\ \overline{e}_n\right)$ в линейное пространство $\mathbb{R}^m$ с базисом $\left\{\overline{f}_j\right\} = \left(\overline{f}_1,\ \overline{f}_2,\ \ldots,\ \overline{f}_m\right)$. Матрицы этих операторов в выбранных базисах обозначим $A = \left(a_{ij}\right),\ B = \left(b_{ij}\right)$.

1. Равенство линейных операторов. Два линейных оператора A и B, действующих из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, называют равными (пишут $A = B$), если для любого вектора $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ выполняется условие $A\overline{x} = B\overline{x}$. Очевидно, что равные операторы имеют одинаковые матрицы в одних и тех же базисах.

2. Сложение линейных операторов. Суммой линейных операторов A и B называется оператор C, обозначаемый $A+B$, определяемый равенством $C\overline{x}=(A+B)\overline{x}=A\overline{x}+B\overline{x}$. Оператор $C:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ является линейным. (Предлагаем самостоятельно доказать линейность оператора C.)

При сложении линейных операторов их матрицы относительно одних и тех же базисов складываются.

3. Умножение оператора на число. Произведением линейного оператора A на число α называется оператор B (обозначается $B=\alpha A$), определяемый условием $B\overline{x}=(\alpha A)\overline{x}=\alpha A\overline{x}$.

Оператор B является линейным. Матрица оператора B равна произведению матрицы оператора A на число α.

4. Композиция линейных операторов. Пусть A — линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$, а B — линейный оператор, действующий из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^s$. В результате возникает отображение C (обозначаемое $C=B\circ A$) линейного пространства $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^s$, которое можно определить формулой $C\overline{x}=(B\circ A)\overline{x}=B\left(A\overline{x}\right)$. Оператор C называется композицией или суперпозицией операторов A и B.

Оператор C линеен, а его матрица $C=B\cdot A$, т. е. матрица C композиции линейных операторов A и B является произведением матриц этих операторов.

5. Обратный оператор. Если линейный оператор A с невырожденной матрицей действует из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^n$, то для него можно определить обратный оператор B условием $B\circ A=E$, где $E\overline{x}=\overline{x}$ для всех $\overline{x}$. Матрицы взаимно обратных операторов взаимно обратны, так как их произведение дает единичную матрицу.

Множество всех линейных операторов $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ образует линейное пространство, если в качестве внешней операции принять умножение оператора на число, а в качестве внутренней — сложение операторов. Предлагается доказать, что его размерность равна $n\times m$.

4.2. Собственные векторы и собственные числа линейного оператора

Пусть $A:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ — линейный оператор и A — его матрица относительно базиса $\overline{e}_i$.

Собственным вектором линейного оператора A (матрицы A) называется ненулевой вектор $\bar{x}$, такой, что

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x}. \tag{4.4}$$

Число λ называется собственным числом, отвечающим собственному вектору $\bar{x}$.

Для единичной матрицы E любой вектор $\bar{x}$ является собственным, с собственным числом, равным 1, так как $E\bar{x} = \bar{x}$, что следует из формул (4.3).

Получим правило отыскания собственных чисел и собственных векторов матрицы. Соотношение (4.4) можно переписать в виде $A\bar{x} = \lambda E\bar{x}$ или $A\bar{x} - \lambda E\bar{x} = 0$, т. е.

$$(A - \lambda E)\bar{x} = 0. \tag{4.5}$$

Соотношение (4.5) представляет собой матричную запись однородной системы n уравнений с n неизвестными, определитель которой равен $\det(A - \lambda E)$.

Для того чтобы система имела нетривиальное решение, необходимо и достаточно, чтобы

$$\det(A - \lambda E) = 0. \tag{4.6}$$

Равенство (4.2) представляет собой уравнение относительно λ. Это **уравнение** называется **характеристическим.**

В подробной записи уравнение (4.6) имеет вид

$$P(\lambda)\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{22} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Решив это уравнение, найдем собственные чиста $\lambda = \lambda_i$ матрицы. Подставляя их поочередно в систему (4.5) и решая ее после этого, найдем собственные векторы, отвечающие этим собственным числам. Среди корней характеристического уравнения $P(\lambda) = 0$ могут быть и кратные.

Свойства собственных векторов

1. Любая линейная комбинация собственных векторов, отвечающих одному и тому же собственному числу, является также собственным вектором с тем же собственным числом.

Следствие. Все собственные векторы, отвечающие одному и тому же собственному числу, вместе с нулевым вектором образуют линейное подпространство.

Это подпространство является линейной оболочкой собственных векторов $\overline{x_1},\ \overline{x_2},\ \ldots,\ \overline{x_m}$, отвечающих собственному числу λ.

2. Если $\overline{x_1},\ \overline{x_2},\ \ldots,\ \overline{x_k}$ — собственные векторы и отвечают попарно различным собственным числам $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_k$, то система векторов $\overline{x_1},\ \overline{x_2},\ \ldots,\ \overline{x_k}$ линейно независима.

3. Собственные числа линейного оператора $A:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ не изменяются при изменении базиса.

Пример. Докажите, что вектор $\overline{x}(1,\ 2,\ 1)^T$ является собственным для матрицы $A=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}$, и найдите соответствующее ему собственное число. Найдите другие собственные числа и отвечающие им собственные векторы.

Решение. $A\overline{x}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1-6+4 \\ 4-14+8 \\ 6-14+7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}=(-1)\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Отсюда следует, что вектор $\overline{x}=(1,\ 2,\ 1)^T$ является собственным и отвечает собственному числу $\lambda=-1$.

Составляем характеристическое уравнение $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 4 \\ 4 & -7-\lambda & 8 \\ 6 & -7 & 7-\lambda \end{vmatrix}=0$. Вычисляя этот определитель, получим $(\lambda+1)^2(\lambda-3)=0$, $\lambda_1=-1,\ \lambda_2=3$.

Запишем систему для определения собственного вектора, отвечающего собственному числу $\lambda=3$:

$$\begin{cases} -2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 4x_1-10x_2+8x_3=0, \\ 6x_1-7x_2+4x_3=0. \end{cases}.$$

Третье уравнение равно разности второго и первого, поэтому его можно вычеркнуть из системы. Мы получили систему

$$\begin{cases} -2x_1-3x_2+4x_3=0, \\ 2x_1-5x_2+4x_3=0. \end{cases}.$$

В качестве свободного неизвестного можно выбрать x_3 и выразить через него неизвестные x_1, x_2. Получим $x_1 = \frac{1}{2}x_3$, $x_2 = x_3$.

Полагая $x_3 = 2$, найдем собственный вектор $(1,\ 2,\ 2)$.

Проверка:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-6+8 \\ 4-14+16 \\ 6-14+14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix},$$

следовательно, вектор $\overline{x} = (1,\ 2,\ 2)^T$ собственный и отвечает собственному числу $\lambda = 3$. Собственными векторами, отвечающими числу $\lambda = 3$, будут и векторы $(1,\ 2,\ 2)^T$, где $t \neq 0$. Если $\overline{x}$ — собственный вектор, то $t\overline{x}$ при $t \neq 0$ — тоже собственный.

Заметим, что собственному числу $\lambda = -1$ кратности 2 отвечает лишь один с точностью до числового множителя собственный вектор, т. к. в рассматриваемом примере $\operatorname{rang}(A - \lambda E) = 2$ при $\lambda = -1$. Таким образом, матрица A имеет лишь два линейно независимых собственных вектора.

Если существует базис $\{\overline{e_i}\}$, состоящий из собственных векторов оператора $A: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, то в этом базисе его матрица имеет диагональный вид, поскольку $A\overline{e_i} = \lambda\overline{e_i}$. При этом по диагонали расположены собственные числа оператора A. Но не всякий линейный оператор имеет такой базис, поскольку собственных векторов может быть менее n (см. пример выше). Рассмотрим частный класс линейных операторов, для которых такой базис всегда существует.

Линейный оператор $A: E^n \to E^n$, действующий в евклидовом пространстве E^n, называется **симметрическим**, или **самосопряженным**, если для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из E^n выполняется условие $(A\overline{x}, \overline{y}) = (\overline{x}, A\overline{y})$.

Свойства симметрического линейного оператора

1. Линейный оператор A является симметрическим тогда и только тогда, когда его матрица A в любом ортонормированном базисе симметрична, т. е. совпадает с транспонированной матрицей A^T.

2. Собственные векторы симметрического линейного оператора A, отвечающие различным собственным числам λ_1 и λ_2 $(\lambda_1 \neq \lambda_2)$, ортогональны.

3. Собственному числу кратности m симметрического линейного оператора соответствует система из m собственных векторов этого оператора.

4. Для всякого симметрического линейного оператора (симметричной матрицы) существует ортонормированный базис, состоящий из его собственных векторов.

4.7. Линейные формы

Отображение L линейного пространства $\mathbb{R}$ во множество чисел называется линейной формой, или линейным функционалом, если для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathbb{R}$ и любых чисел α и β выполняется условие $L\left(\alpha\overline{x}+\beta\overline{y}\right)=\alpha L\left(\overline{x}\right)+\beta L\left(\overline{y}\right)$.

Например, множество всех интегрируемых на (a,b) функций образует линейное пространство. Линейную форму на нем можно определить соотношением

$$L\left[\varphi(t)\right]=\int_a^b \varphi(t)\,dt.$$

Пусть дано линейное пространство $\mathbb{R}^n$ с выбранным в нем базисом $\left\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \ldots,\ \overline{e_n}\right\}$ и $\overline{x}=x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+\ldots+x_n\overline{e_n}$ — любой вектор из $\mathbb{R}^n$. Если $L\left(\overline{x}\right)$ — произвольная линейная форма, заданная на $\mathbb{R}^n$, то $L\left(\overline{x}\right)=L\left(x_1\overline{e_1}+x_2\overline{e_2}+\ldots+x_n\overline{e_n}\right)=x_1L\left(\overline{e_1}\right)+x_2L\left(\overline{e_2}\right)+\ldots+x_nL\left(\overline{e_n}\right)$. Обозначим $L\left(\overline{e_1}\right)=a_1,\ L\left(\overline{e_2}\right)=a_2,\ \ldots,\ L\left(\overline{e_n}\right)=a_n$. Числа a_i не зависят от выбора вектора $\overline{x}$, а зависят только от выбора базиса. Эти числа называются коэффициентами линейной формы в базисе $\left\{\overline{e_i}\right\}$. Теперь можем записать $L\left(\overline{x}\right)=a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n$ — общий вид линейной формы.

Если перейдем к новому базису $\overline{f_i}$ по формулам $\overline{f_i}=c_{jk}\overline{e_k}$ и коэффициенты линейной формы L в новом базисе обозначим через b_j, то $b_j=L\left(\overline{f_j}\right)=L\left(c_{jk}\overline{e_k}\right)=c_{jk}L\left(\overline{e_k}\right)=c_{jk}a_k$, т. е. $b_j=c_{jk}a_k$. Таким образом, коэффициенты линейной формы преобразуются по тому же закону, что и базисные векторы, т. е. $(b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_n)=(a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_n)\cdot C$, где C — матрица перехода от старого базиса к новому.

Над линейными формами в $\mathbb{R}^n$ можно ввести операции сложения и умножения на число следующим образом. Пусть относительно некоторого базиса даны две линейные формы — $L_1\left(\overline{x}\right)=a_i x_i$ и $L_2\left(\overline{x}\right)=b_i x_i$. Тогда их суммой называют линейную форму $L_3\left(\overline{x}\right)$, определенную равенством $L_3\left(\overline{x}\right)=\left(a_i+b_i\right)x_i$, а произведением линейной формы $L_1\left(\overline{x}\right)$ на число α называют линейную форму вида $L_1\left(\overline{x}\right)=\left(\alpha a_i\right)x_i$. Легко показать, что введенные операции удовлетворяют всем аксиомам линейного пространства. Следовательно, множество всех линейных форм, заданных на $\mathbb{R}^n$, образует линейное пространство, обозначаемое $\mathbb{R}^n$. Его векторы, составленные из коэффициентов соответствующих линейных форм, являются примером векторов типа $(1\times n)$, т. е. векторов-строк.

4.8. Билинейные и квадратичные формы

Говорят, что на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$ задана билинейная форма B, если имеется правило, позволяющее любой паре векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathbb{R}^n$ сопоставить число $B\left(\overline{x},\overline{y}\right)$, причем это правило удовлетворяет условиям

$$B\left(\alpha\overline{x}_1+\beta\overline{x}_2,\ \overline{y}\right)=\alpha\beta\left(\overline{x}_1,\ \overline{y}\right)+\beta B\left(\overline{x_2},\ \overline{y}\right), \tag{4.7}$$

$$B\left(\overline{x},\mu\overline{y}_1+\nu\overline{y_2}\right)=\mu B\left(\overline{x},\ \overline{y_1}\right)+\nu B\left(\overline{x},\ \overline{y_2}\right),$$

где α, β, μ, ν — любые числа, а $\overline{x}$, $\overline{y}$, $\overline{x_1}$, $\overline{x_2}$, $\overline{y}_1$, $\overline{y}_2$ — любые векторы из $\mathbb{R}^n$.

Из (4.7) следует, что билинейная форма есть линейная форма относительно первого аргумента при фиксированном втором и линейная форма относительно второго аргумента при фиксированном первом.

Пусть $\left\{\overline{e_i}\right\}=\left\{\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \ldots,\ \overline{e_n}\right\}$ — произвольный базис $\mathbb{R}^n$ и $\overline{x}=\xi_i\overline{e_i}$, $\overline{y}=\eta_i\overline{e_i}$ — два произвольных вектора из $\mathbb{R}^n$, тогда

$$B\left(\overline{x},\overline{y}\right)=\xi_i\eta_1 b_{ij}\ — \tag{4.8}$$

общий вид билинейной формы.

Запишем соотношение (4.8) при $n = 3$:

$$B(\overline{x},\overline{y}) = \xi_1\eta_1 b_{11} + \xi_1\eta_2 b_{12} + \xi_2\eta_1 b_{21} + \xi_1\eta_3 b_{13} + \xi_3\eta_1 b_{31} + \\ + \xi_2\eta_3 b_{23} + \xi_3\eta_2 b_{32} + \xi_2\eta_2 b_{22} + \xi_3\eta_3 b_{33}.$$

Числа b_{ij} называются коэффициентами билинейной формы. Из этих чисел можно составить матрицу

$$B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & \dots & b_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & \dots & b_{nn} \end{pmatrix},$$

называемую матрицей билинейной формы относительно базиса $\{\overline{e_i}\} = \{\overline{e_1},\ \overline{e_2},\ \dots,\ \overline{e_n}\}$. Пусть $\overline{f_j} = c_{ij}\overline{e_i}$, $C = (c_{ij})$ — формулы перехода от базиса $\{\overline{e_i}\}$ к базису $\{\overline{f_j}\}$. Коэффициенты билинейной формы $B(\overline{x},\overline{y})$ в новом базисе обозначим $\widetilde{b}_{ij}$, а ее матрицу — через $\widetilde{B}$. Тогда

$$\widetilde{B} = C^T BC. \tag{4.9}$$

Теорема 4. Ранг матрицы билинейной формы не изменяется при изменении базиса.

Теорема 5. Если матрица билинейной формы не вырождена в одном базисе, то она не вырождена и во всех остальных.

Теорема 6. Знак определителя матрицы билинейной формы не изменяется при изменении базиса.

Билинейная форма $B(\overline{x},\overline{y})$ называется **симметричной**, если $B(\overline{x},\overline{y}) = B(\overline{y},\overline{x})$ для любых векторов $\overline{x}$ и $\overline{y}$ из $\mathbb{R}^n$.

Если билинейная форма $B(\overline{x},\overline{y})$ симметрична, то относительно любого базиса $B = B^T$.

Функция $B(\overline{x},\overline{x})$ одного векторного аргумента $\overline{x}$, заданного на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$, получающаяся из симметричной билинейной формы $B(\overline{x},\overline{y})$ при $\overline{x} = \overline{y}$, называется **квадратичной формой.** Полагая в (4.8) $\overline{x} = \overline{y}$, $\eta_j = \xi_j$, получаем общий вид квадратичной формы

$$B(\overline{x},\ \overline{x}) = \xi_i\xi_i b_{ij} \tag{4.10}$$

Соотношение (4.6) можно принять за новое определение квадратичной формы. При $n=3$ квадратичная форма в полной записи имеет вид

$$B\left(\overline{x},\overline{x}\right)=b_{11}\left(\xi_1\right)^2+b_{22}\left(\xi_2\right)^2+b_{33}\left(\xi_3\right)^2+2b_{12}\xi_1\xi_2+2b_{13}\xi_1\xi_3+2b_{23}\xi_2\xi_3.$$

При этом учтено, что $b_{ik}=b_{ki}$, и приведены подобные члены.

Вид квадратичной формы $B\left(\overline{x},\overline{x}\right)=b_{11}\left(\xi_1\right)^2+b_{22}\left(\xi_2\right)^2+b_{33}\left(\xi_3\right)^2+\ldots+b_n\left(\xi_n\right)^2$ называется **каноническим**.

Теорема *7*. Всякая квадратичная форма, заданная в $\mathbb{R}^n$, путем перехода к новому базису может быть приведена к каноническому виду.

Теорему примем без доказательства.

Теорема 8 (закон инерции квадратичных форм). Число m_1 отрицательных коэффициентов и число m_2 положительных коэффициентов в каноническом виде квадратичной формы не зависит от выбора преобразований, приводящих квадратичную форму к каноническому виду.

Теорему также примем без доказательства.

Число m_1 называется **отрицательным индексом инерции**, m_2 — **положительным индексом инерции**, а разность m_2-m_1 — сигнатурой квадратичной формы.

Квадратичная форма называется **невырожденной**, если ее матрица невырождена. Из (4.9) следует, что если квадратичная форма не вырождена в одном базисе, то она не вырождена и во всех остальных.

Невырожденная квадратичная форма называется **положительно определенной,** если для любого $\overline{x}\neq 0$ из $\mathbb{R}^n$ выполняется $B\left(\overline{x},\overline{x}\right)>0$, и **отрицательно определенной**, если $B\left(\overline{x},\overline{x}\right)<0$. Если же для одних векторов $B\left(\overline{x},\overline{x}\right)>0$, а для других $B\left(\overline{x},\overline{x}\right)<0$, то квадратичная форма называется **неопределенной**.

Миноры $\triangle_1=b_{11},\triangle_2=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\end{vmatrix},\ldots,\triangle_n=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1n}\\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{1n}\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ b_{n1} & b_{n2} & \ldots & b_{nn}\end{pmatrix}$, в которых $b_{ik}=b_{ki}$, называются **главными**.

Теорема 9 (критерий Сильвестра). Квадратичная линейная форма $B(\overline{x},\overline{x})$, заданная в $\mathbb{R}^n$, положительно определенна тогда и только тогда, когда все главные миноры ее матрицы положительны, и отрицательно определенна, если все ее главные миноры отличны от нуля, а их знаки чередуются, начиная с отрицательного.

Теорему примем без доказательства.

Теорема 10. В евклидовом линейном пространстве E^n существует ортонормированный базис $\left(\overline{f_1},\overline{f_2},\ldots,\overline{f_n}\right)$, в котором квадратичная форма имеет канонический вид.

Векторы ортонормированного базиса, в котором квадратичная форма имеет канонический вид, называются **главными осями квадратичной формы**.

Алгоритм приведения квадратичной формы к главным осям

1. По квадратичной форме составляем симметричную матрицу $B=(b_{ik})$.

2. Находим собственные числа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_n$ матрицы B и записываем канонический вид квадратичной формы $B(\overline{x},\overline{x})=\lambda_1(\eta_1)^2+$ $+\lambda_2(\eta_2)^2+\ldots+\lambda_n(\eta_n)^2$.

3. Находим собственные векторы матрицы B. При этом если какое-нибудь собственное число λ_i имеет кратность m, то ему будет соответствовать система из m собственных линейно независимых векторов. Полученную систему из m векторов ортогонализируем методом, описанным в п. 3.7. Проделав такую операцию с каждым собственным вектором, получим ортогональный базис. Пронормировав его, найдем искомый ортонормированный базис.

4. Записываем выражение новых координат $\eta_1,\ \eta_2,\ \ldots,\ \eta_n$ через старые $\xi_1,\ \xi_2,\ \ldots,\ \xi_n$ и наоборот.

Пример. Привести к главным осям квадратичную форму $Q(\overline{x})=2x_1^2+x_2^2-4x_1x_2-4x_2x_3$.

Решение

Записываем матрицу $A=\begin{pmatrix}2&-2&0\\-2&1&-2\\0&-2&0\end{pmatrix}$ данной квадратичной формы и находим собственные числа этой матрицы, решая уравнение

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & -2 & 0 \\ -2 & 1-\lambda & -2 \\ 0 & -2 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 6\lambda - 8 = -(\lambda+2)(\lambda^2 - 5\lambda + 4) = 0.$$

Имеем $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -2$. Записываем канонический вид квадратичной формы

$$Q(\overline{x}) = 4y_1^2 + y_2^2 - 2y_3^2.$$

Находим единичные собственные векторы матрицы A: $\overline{f_1} = \left\{\frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{3}\right\}$,$\overline{f_2} = \left\{\frac{2}{3},\ \frac{1}{3},\ -\frac{2}{3}\right\}$, $\overline{f_3} = \left\{\frac{1}{3},\ \frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right\}$, образующие новый ортонормированный базис. По формулам (3.13) получаем

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Определите, какие из следующих функций $A: V_3 \to V_3$ являются линейными операторами. Для линейных операторов найдите матрицу в базисе $\overline{i}, \overline{j}, \overline{k}$.

а) $A\overline{x} = \overline{a}$ ($\overline{a}$ — фиксированный вектор);

б) $A\overline{x} = \overline{x} + \overline{i}$;

в) $A\overline{x} = (\xi_1,\ \xi_1 + \xi_2,\ \xi_2 + \xi_3)$; где $\overline{x} = (\xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3)$

г) $A\overline{x} = (\xi_1,\ \xi_2^2,\ \xi_3)$;

д) $A\overline{x}(0, \cos\xi_2,\ \cos\xi_3)$.

Ответ: в), $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Пусть $\overline{x} = (x_1,\ x_2,\ x_3)$ — произвольный вектор из $\mathbb{R}^3$, A и $B: \mathbb{R}_3 \to \mathbb{R}_3$ — линейные операторы, определенные соотношениями

$A\overline{x} = (x_2 + 2x_3,\ 2x_1 + x_3,\ x_1 + 2x_2)$, $B\overline{x} = (x_2 - x_3,\ x_1 - x_3,\ x_1 - x_2)$.

Найдите: а) матрицы операторов A и B относительно канонического базиса $\overline{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$, $\overline{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\overline{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$; б) векторы $A\bar{c}$, $B\bar{c}$, $A\left(B\bar{c}\right)$, $B\left(A\bar{c}\right)$, где $\bar{c}=(2,4,-3)$, двумя способами, и не используя понятие матрицы линейного оператора.

Ответ: *а*) $\left(B\bar{c}\right)=(1,\ 12,\ 17)$, *б*) $\left(A\bar{c}\right)=(-9,\ 12,\ -3)$.

3. Дана матрица $A=\begin{pmatrix}16 & 0 & 0\\ 6 & 2 & 2\\ -3 & 1 & 3\end{pmatrix}$. Докажите, что вектор $\bar{x}=(0,\ 2,\ -1)$ является собственным этой матрицы и найдите отвечающее ему собственное число. Найдите все собственные числа и собственные векторы этой матрицы и сделайте проверку.

Ответ: собственные числа $1;\ 4;\ 16$

4. Пусть матрица A не вырождена. Докажите, что если вектор с — собственный матрицы и отвечает собственному числу λ, то при этом $\lambda\neq 0$ и вектор $\bar{x}$ также собственный и для матрицы A^{-1} и отвечает собственному числу $\frac{1}{\lambda}$.

5. Докажите, что если вектор $\bar{x}$ — собственный для матрицы A и отвечает собственному числу λ, то этот вектор является собственным и для матрицы $A^n=A\cdot A\cdot\ldots\cdot A$ и отвечает собственному числу λ^n.

6. Квадратичные формы

а) $B\left(\bar{x},\ \bar{x}\right)=2x_2-2xy+y^2-2yz+2z^2$,

б) $B\left(\bar{x},\ \bar{x}\right)=5x_2-4xy+6y^2-4yz+7z^2$,

приведите к главным осям и найдите соответствующие преобразования системы координат.

Ответ: а) $2y_1^2+3z_1^2$; $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt5} & \frac{2}{\sqrt5} & \frac{1}{\sqrt5}\\ \frac{1}{\sqrt2} & 0 & \frac{1}{\sqrt2}\\ \frac{1}{\sqrt3} & -\frac{2}{\sqrt3} & \frac{1}{\sqrt3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$;

б) $\lambda^3-18\lambda^2-99\lambda+162=0$; $3x_1+6y_1+9z_1$; $\begin{pmatrix}x_1\\ y_1\\ z_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{2}{3}\\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{2}{3}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

Библиографический список

1. Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Ч. 1 / Д. Т. Письменный. Москва : Рольф, 2000.
2. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер, Б. А. Путко, И. М. Тришин, М. Н. Фридман. Москва : ЮНИТИ, 2003.
3. Шипачев В. С. Основы высшей математики / В. С. Шипачев. Москва : Высшая школа, 1994.
4. Данко П. Е. Высшая математика в упражнениях и задачах. В 2 ч. Ч. 1 / П. Е. Данко, А. Г. Попов, Т. Я. Кожевникова. Москва : Высшая школа, 1999.
5. Сборник задач по высшей математике / под ред. Г. И. Кручковича. Москва : Высшая школа, 1973.
6. Красс М. С. Математика для экономистов / М. С. Красс, Б. П. Чупрынов. Санкт-Петербург : Питер, 2004.
7. Сборник задач по высшей математике для экономистов / под ред. В. И. Ермакова. Москва : ИНФРА-М, 2007.
8. Рублев А. Н. Линейная алгебра / А. Н. Рублев. Москва : Высшая школа, 1963.
9. Ильин В. А. Линейная алгебра / В. А. Ильин, Э. Г. Позднях. Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2005.

ЛИДЕР УНИВЕРСИТЕТСКОГО КНИГОИЗДАНИЯ
УНИВЕРСИТЕТСКАЯ КНИГА
2018

9 785799 627768