D. A. Serkov, An approach to analysis of the set of truth: unlocking of predicate, *Vestn. Udmurtsk. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki*, 2016, Volume 26, Issue 4, 525–534

DOI: https://doi.org/10.20537/vm160407

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

УДК 510.635, 517.988.52, 519.833

© *Д. А. Серков*

ОБ ОДНОМ ПОДХОДЕ К АНАЛИЗУ МНОЖЕСТВА ИСТИННОСТИ: РАЗМЫКАНИЕ ПРЕДИКАТА

Под термином «размыкание предиката» понимается сведение задачи поиска и изучения свойств множества истинности заданного предиката к задаче поиска и изучения свойств неподвижных точек некоторого отображения. Размыкание предиката дает дополнительные возможность анализа его множества истинности, а также позволяет строить элементы этого множества с теми или иными свойствами. Известны примеры размыкания нетривиальных предикатов, таких как предикат «быть стабильным (слабо инвариантным) множеством», предикат «быть неупреждающим селектором», предикат «быть седловой точкой», предикат «быть равновесием Нэша». В упомянутых случаях вопрос об априорной оценке возможности размыкания того или иного интересующего нас предиката и о построении соответствующего размыкающего отображения оставался за рамками рассмотрения: размыкающие отображения предоставлялись как готовые объекты. В предлагаемой заметке мы постараемся отчасти закрыть этот пробел: приводятся формальное определение операции размыкания предиката, способы построения и исчисления размыкающих отображений и их основные свойства. Описываемый подход приме́ним во всех упомянутых выше положительных примерах. В качестве иллюстрации проведено следующее этому способу построение размыкающего отображения для предиката «быть нэшевским равновесием».

Ключевые слова: множество истинности предиката, неподвижные точки отображения, равновесие Нэша.

DOI: 10.20537/vm160407

Введение

Под термином «размыкание предиката» здесь понимается сведение задачи поиска и/или изучения свойств множества истинности заданного предиката к задаче поиска и/или изучения свойств неподвижных точек некоторого отображения. Понятно, что размыкание предиката, если оно осуществлено, дает (как минимум дополнительные) возможности анализа его области истинности и построения элементов этой области с теми или иными свойствами. Данный прием активно используется в различных областях математики: при изучении дифференциальных уравнений и дифференциальных включений; в теории игр — при исследовании седловых точек (см. [1]) и равновесий Нэша (см. [2,3]); в динамических играх — при построении стабильных (слабо инвариантных) множеств (см. [4,5]) и неупреждающих селекторов многозначных отображений (см. [6,7]). Вместе с тем, во всех этих примерах «размыкающее» отображение выдается как готовый продукт: вопрос возможности разомкнуть тот или иной интересующий нас предикат и способ построения соответствующего размыкающего отображения оставались за рамками рассмотрения. В настоящей статье мы наметим путь построения размыкающих отображений для некоторых видов предикатов: приведем формальное определение операции размыкания предиката, способы построения и исчисления размыкающих отображений и их основные свойства. В качестве иллюстрации будет проведено «рутинное» построение размыкающего отображения для предиката «быть нэшевским равновесием». Описываемый подход далек от универсальности, но по крайней мере приме́ним во всех упомянутых выше положительных примерах.

§ 1. Обозначения и определения общего характера

1. В дальнейшем используется теоретико-множественная символика (кванторы, пропозициональные связки, $\varnothing$ — пустое множество); $\overset{\mathrm{def}}{=}$ — равенство по определению; $\overset{\mathrm{def}}{\Leftrightarrow}$ — эквивалентность по определению; def заменяет фразу «по определению». Принимаем аксиому выбора. Семейством называем множество, все элементы которого — множества. Через $\mathcal{P}(T)$ (через

$\mathcal{P}'(T)$) условимся обозначать семейство всех (всех непустых) подмножеств (п/м) произвольного множества T; семейство $\mathcal{P}(T)$ именуем также булеаном множества T. Если A и B — непустые множества, то B^A есть def множество всех отображений из множества A в множество B (см. [9, с. 77]). Если при этом $f \in B^A$ и $C \in \mathcal{P}'(A)$, то $(f\,|\,C) \in B^C$ есть def сужение f на множество C:

$$(f\,|\,C)(x) \overset{\text{def}}{=} f(x) \qquad \forall x \in C. \tag{1.1}$$

Полагаем, также, что $f(C)$ — def образ множества $C \in \mathcal{P}(A)$ при отображении f: $f(C) \overset{\text{def}}{=} \{f(x) : x \in C\}$. При $f \in \mathcal{P}(B)^A$ будем также называть f многозначным отображением (м/о) или мультифункцией (м/ф) из A в B. В случае, когда $F \in \mathcal{P}'(B^A)$ полагаем $\big(F\,|\,C\big) \overset{\text{def}}{=} \{(f\,|\,C) : f \in F\}$. Если $f \in B^A$, то обозначим f^{-1} мультифункцию из B в A вида

$$f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \{a \in A \mid b = f(a)\}, & b \in f(A), \\ \varnothing, & b \notin f(A), \end{cases} \qquad \forall b \in B.$$

В случае, когда $f \in \mathcal{P}(B)^A$, то есть f — мультифункция, полагаем

$$f^{-1}(b) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \{a \in A \mid b \in f(a)\}, & b \in \bigcup f(A), \\ \varnothing, & b \notin \bigcup f(A), \end{cases} \qquad \forall b \in B.$$

Для отображения $f \in X^X$ обозначим $\mathbf{Fix}(f)$ множество всех его неподвижных точек: $\mathbf{Fix}(f) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid f(x) = x\}$. Если f — мультифункция, множество $\mathbf{Fix}(f)$ определяется как $\mathbf{Fix}(f) \overset{\text{def}}{=} \{x \in X \mid x \in f(x)\}$.

2. Для всякого непустого множества X и отношения частичного порядка $\preccurlyeq \in \mathcal{P}'(X \times X)$, определенного на нем, обозначим $(X, \preccurlyeq)$ соответствующее частично упорядоченное множество (ЧУМ). Для $Y \in \mathcal{P}(X)$ обозначим $\top_Y$ и $\bot_Y$ наибольший и наименьший элементы множества Y соответственно, если они существуют. Назовем ЧУМ *полной решеткой*, если каждое его подмножество имеет верхнюю и нижнюю грани.

3. Предикат P на непустом множестве X будем отождествлять с одноименной функцией из $\{0,1\}^X$. Будем говорить, что для $x \in X$ *выполняется предикат* P, и записывать это через $P(x)$, если и только если $P(x) = 1$. Множество всех $x \in X$, для которых выполняется предикат P, назовем *множеством истинности предиката* P. В соответствии с определением обратного отображения будем обозначать это множество $P^{-1}(1)$. Множество всех предикатов на X обозначим $\mathfrak{PR}(X)$. Будем называть *размыканием предиката* P операцию поиска и/или построения отображения $\mathcal{F}_P \in \mathcal{P}(X)^X$ такого, что

$$\mathbf{Fix}(\mathcal{F}_P) = P^{-1}(1). \tag{1.2}$$

При этом отображение $\mathcal{F}_P$, обладающее свойством (1.2), будем называть *размыкающим* (для предиката P).

§ 2. Исчисление размыкающих отображений

2.1. Порядок, сужение, логические операции

1. Для всякого предиката P, заданного на непустом множестве X, обозначим $\mathfrak{UM}(P)$ множество всех размыкающих отображений предиката P:

$$\mathfrak{UM}(P) \overset{\text{def}}{=} \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \mathbf{Fix}(f) = P^{-1}(1)\}.$$

Таким образом, $\mathfrak{UM}(P) \in \mathcal{P}'(\mathcal{P}(X)^X)$. На множестве $\mathcal{P}(X)^X$ введем частичный порядок $\preccurlyeq$, полагая $(g \preccurlyeq f) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (g(x) \subset f(x)\ \forall x \in X)\ \forall f, g \in \mathcal{P}(X)^X$. Заметим, что для любых $f, g \in \mathcal{P}(X)^X$ выполняется

$$(g \preccurlyeq f) \Leftrightarrow (g^{-1} \preccurlyeq f^{-1}). \tag{2.1}$$

Легко видеть, что ЧУМ $(\mathcal{P}(X)^X, \preccurlyeq)$ — полная решетка. Нетрудно также проверить, что для любого предиката $P \in \mathfrak{PR}(P)$ ЧУМ $(\mathfrak{UM}(P), \preccurlyeq)$ образует полную подрешетку в $(\mathcal{P}(X)^X, \preccurlyeq)$ и при этом выполняются равенства

$$\top_{\mathfrak{UM}(P)}(x) = \begin{cases} X, & P(x), \\ X \setminus \{x\}, & \neg P(x), \end{cases} \qquad \bot_{\mathfrak{UM}(P)}(x) = \begin{cases} \{x\}, & P(x), \\ \varnothing, & \neg P(x). \end{cases}$$

В силу определения имеем

$$\top_{\mathfrak{UM}(P)} = \top^{-1}_{\mathfrak{UM}(P)}, \qquad \bot_{\mathfrak{UM}(P)} = \bot^{-1}_{\mathfrak{UM}(P)}. \tag{2.2}$$

Лемма 1. *Для любого $f \in \mathcal{P}(X)^X$ справедливы соотношения*

$$(f \preccurlyeq \top_{\mathfrak{UM}(P)}) \Rightarrow (\mathbf{Fix}(f) \subset P^{-1}(1)),$$

$$(\bot_{\mathfrak{UM}(P)} \preccurlyeq f) \Rightarrow (P^{-1}(1) \subset \mathbf{Fix}(f)).$$

Как следствие,

$$\mathfrak{UM}(P) = \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \bot_{\mathfrak{UM}(P)} \preccurlyeq f \preccurlyeq \top_{\mathfrak{UM}(P)}\}, \tag{2.3}$$

$$(f \in \mathfrak{UM}(P)) \Leftrightarrow (f^{-1} \in \mathfrak{UM}(P)). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{P}(X)^X$ таково, что $f \preccurlyeq \top_{\mathfrak{UM}(P)}$. Тогда для произвольного $x \in X$ имеем импликации

$$(x \in f(x)) \Rightarrow (x \in \top_{\mathfrak{UM}(P)}(x)) \Rightarrow P(x).$$

Таким образом,

$$\mathbf{Fix}(f) \subset P^{-1}(1). \tag{2.5}$$

Напротив, если $\bot_{\mathfrak{UM}(P)} \preccurlyeq f$, то для любого $x \in X$ выполняется

$$P(x) \Rightarrow (x \in \bot_{\mathfrak{UM}(P)}(x)) \Rightarrow (x \in f(x)).$$

Следовательно,

$$P^{-1}(1) \subset \mathbf{Fix}(f). \tag{2.6}$$

Совокупность вложений (2.5), (2.6) дает включение $f \in \mathfrak{UM}(P)$. Так как f было выбрано произвольно, имеем вложение

$$\mathfrak{UM}(P) \supset \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \bot_{\mathfrak{UM}(P)} \preccurlyeq f \preccurlyeq \top_{\mathfrak{UM}(P)}\}.$$

Обратное вложение выполняется в силу определений наибольшего и наименьшего элементов. Эквивалентность (2.4) сразу следует из (2.1), (2.2) и (2.3). Этим завершается доказательство. □

Отметим еще одну конструкцию размыкающего отображения для предиката $P \in \mathfrak{PR}(X)$, следующую из (2.3):

$$F_P(x) = P^{-1}(1), \qquad x \in X.$$

2. Для любых $\phi \in \mathcal{P}(X)^X$ и $Y \in \mathcal{P}'(X)$ обозначим $[\phi \,|\, Y]$ отображение вида

$$[\phi \,|\, Y](y) \overset{\text{def}}{=} Y \cap \phi(y) \qquad \forall y \in Y.$$

Напомним, что при этом для всякого $P \in \mathfrak{PR}(X)$ отображение $(P \,|\, Y) \in \mathfrak{PR}(Y) \overset{\text{def}}{=} \{0,1\}^Y$ определено (см. (1.1)) равенствами $(P \,|\, Y)(y) \overset{\text{def}}{=} P(y)$ $y \in Y$.

Лемма 2. *Для любых $P \in \mathfrak{PR}(X)$, $Y \in \mathcal{P}'(X)$ выполняется равенство*

$$\mathfrak{UM}((P \,|\, Y)) = \{[\phi \,|\, Y] : \phi \in \mathfrak{UM}(P)\}. \tag{2.7}$$

Доказательство. Фиксируем $P \in \mathfrak{PR}(X)$ и $Y \in \mathcal{P}'(X)$. Тогда для любых $y \in Y$ и $\phi \in \mathfrak{UM}(P)$

$$(y \in \mathbf{Fix}([\phi\,|\,Y])) \Leftrightarrow (y \in [\phi\,|\,Y](y)) \Leftrightarrow (y \in \phi(y)) \Leftrightarrow (y \in \mathbf{Fix}(\phi)) \Leftrightarrow P(y) \Leftrightarrow (P\,|\,Y)(y).$$

Третья и шестая эквиваленции следуют из предположения $y \in Y$ и определения сужения функции (1.1). Так как y выбиралось произвольно, имеем включение $[\phi\,|\,Y] \in \mathfrak{UM}((P\,|\,Y))$. В силу произвольного выбора ϕ выполнено вложение

$$\{[\phi\,|\,Y] : \phi \in \mathfrak{UM}(P)\} \subset \mathfrak{UM}((P\,|\,Y)). \tag{2.8}$$

Для обоснования обратного вложения фиксируем произвольное отображение $\phi_Y \in \mathfrak{UM}((P\,|\,Y))$ и обозначим ϕ_X отображение из $\mathcal{P}(X)^X$ вида

$$\phi_X(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \phi_Y(z), & z \in Y, \\ P^{-1}(1), & z \notin Y. \end{cases}$$

Легко видеть, что $\phi_Y = [\phi_X\,|\,Y]$. Представив множество истинности $P^{-1}(1)$ предиката P в виде суммы $(P^{-1}(1) \cap Y) \cup (P^{-1}(1) \setminus Y)$, также легко проверить, что $\mathbf{Fix}(\phi_X) = P^{-1}(1)$. То есть $\phi_X \in \mathfrak{UM}(P)$. Следовательно, выполнено вложение, обратное (2.8). Таким образом, справедливо равенство (2.7). Доказательство закончено.

3. Далее приводится построение размыкающих отображений для операций логики высказываний на основе размыкающих отображений входящих в них предикатов. Пусть $P, Q \in \mathfrak{PR}(X)$.

Лемма 3. *Выполняются равенства*

$$\mathfrak{UM}(\neg P) = \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P) : f(x) = X \setminus g(x)\ \forall x \in X\}, \tag{2.9}$$

$$\mathfrak{UM}(P \& Q) = \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P)\ \exists q \in \mathfrak{UM}(Q) : f(x) = g(x) \cap q(x)\ \forall x \in X\}, \tag{2.10}$$

$$\mathfrak{UM}(P \vee Q) = \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P)\ \exists q \in \mathfrak{UM}(Q) : f(x) = g(x) \cup q(x)\ \forall x \in X\}. \tag{2.11}$$

Доказательство. Докажем, например, равенство (2.10). Фиксируем $P, Q \in \mathfrak{PR}(X)$ и $\phi \in \mathfrak{UM}(P \& Q)$. Тогда для любого $x \in X$

$$(x \in \phi(x)) \Leftrightarrow (x \in P^{-1}(1) \cap Q^{-1}(1)). \tag{2.12}$$

Положим

$$\phi_P(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \phi(z) \cup \{z\}, & z \in P^{-1}(1) \setminus Q^{-1}(1), \\ \phi(z), & z \notin P^{-1}(1) \setminus Q^{-1}(1), \end{cases} \quad \phi_Q(z) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \phi(z) \cup \{z\}, & z \in Q^{-1}(1) \setminus P^{-1}(1), \\ \phi(z), & z \notin Q^{-1}(1) \setminus P^{-1}(1). \end{cases}$$

Так как

$$X \setminus (P^{-1}(1) \setminus Q^{-1}(1)) = (P^{-1}(1) \cap Q^{-1}(1)) \cup (X \setminus P^{-1}(1)),$$

в силу выбора ϕ (см. (2.12)) имеем $(x \in \phi_P(x)) \Leftrightarrow P(x)$. Следовательно, $\phi_P \in \mathfrak{UM}(P)$. Аналогично получаем включение $\phi_Q \in \mathfrak{UM}(Q)$. Легко проверяется, что $\phi(x) = \phi_P(x) \cap \phi_Q(x)\ \forall x \in X$. В силу произвольного выбора ϕ имеем вложение

$$\mathfrak{UM}(P \& Q) \subset \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P)\ \exists q \in \mathfrak{UM}(Q) : f(x) = g(x) \cap q(x)\ \forall x \in X\}.$$

Докажем обратное вложение. Пусть $g \in \mathfrak{UM}(P)$ и $q \in \mathfrak{UM}(Q)$ и $f \in \mathcal{P}(X)^X$ таково, что $f(x) = g(x) \cap q(x)\ \forall x \in X$. Тогда для любого $x \in X$ имеем

$$(x \in \mathbf{Fix}(f)) \Leftrightarrow (x \in f(x)) \Leftrightarrow (x \in g(x) \cap q(x)) \Leftrightarrow (x \in \mathbf{Fix}(g) \cap \mathbf{Fix}(q)) \Leftrightarrow (P(x) \& Q(x)).$$

То есть $f \in \mathfrak{UM}(P \& Q)$. Так как g и q выбирались произвольно, имеем искомое вложение:

$$\mathfrak{UM}(P \& Q) \supset \{f \in \mathcal{P}(X)^X \mid \exists g \in \mathfrak{UM}(P)\ \exists q \in \mathfrak{UM}(Q) : f(x) = g(x) \cap q(x)\ \forall x \in X\}.$$

Таким образом, выполнено (2.10). Соотношения (2.9) и (2.11) доказываются аналогично. Доказательство закончено. $\square$

Замечание 1. Понятно, что, используя указанные соотношения, можно построить размыкающее отображение многих других выражений логики высказываний на основе размыкающих отображений входящих в них предикатов.

2.2. Размыкание предиката на прямом произведении

1. Пусть имеются непустые множества $\mathcal{I}$, $(X_\iota)_{\iota\in\mathcal{I}}$ и

$$X \overset{\text{def}}{=} \prod_{\iota\in\mathcal{I}} X_\iota. \tag{2.13}$$

При этом элемент $x \in X$ назовем *кортежем из* X (или просто *кортежем*, если множество X фиксировано) и обозначим через x_ι ι-ую компоненту кортежа x: $x_\iota \overset{\text{def}}{=} (x\,|\,\{\iota\}) \in X_\iota$. Обозначим $(y, x_{-\iota})$ кортеж из X, который получается подстановкой элемента $y \in X_\iota$ в ι-ю компоненту кортежа $x \in X$:

$$(y, x_{-\iota})_\jmath \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} y, & \jmath = \iota, \\ x_\jmath, & \jmath \in \mathcal{I}\setminus\{\iota\}, \end{cases} \qquad \forall x \in X \ \forall y \in X_\iota \ \forall \iota \in \mathcal{I}. \tag{2.14}$$

Замечание 2. В случае когда индексное множество $\mathcal{I}$ состоит из одного элемента, определение (2.14) дает тождество

$$(y, x_{-\iota}) = y \qquad \forall x \in X \ \forall y \in X_\iota \ \forall \iota \in \mathcal{I}. \tag{2.15}$$

2. Пусть $P \in \mathfrak{PR}(X)$. Зададим отображения $\mathcal{B}_\iota \in \mathcal{P}(X_\iota)^X$ вида

$$\mathcal{B}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X_\iota \mid P((y, x_{-\iota}))\} \qquad \forall x \in X \ \forall \iota \in \mathcal{I}. \tag{2.16}$$

На основе отображений $\mathcal{B}_\iota$ построим отображения $\mathcal{C}_\iota, \mathcal{D}_\iota \in \mathcal{P}(X)^X$, полагая

$$\mathcal{C}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \{z \in X \mid z_\iota \in \mathcal{B}_\iota(x)\}, \quad \mathcal{D}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \{(y, x_{-\iota}) \in X \mid y \in \mathcal{B}_\iota(x)\} \qquad \forall x \in X \ \forall \iota \in \mathcal{I}. \tag{2.17}$$

Замечание 3. Сразу отметим следующий из этих определений вид отображения $\mathcal{C}_\iota$, в случае когда $\mathcal{I}$ — синглетон (см. (2.15), (2.16) и (2.17)):

$$\mathcal{C}_\iota(x) = \mathcal{D}_\iota(x) = \{y \in X \mid P(y)\} = P^{-1}(1) \qquad \forall x \in X \ \forall \iota \in \mathcal{I}.$$

Лемма 4. *Для любого $\iota \in \mathcal{I}$ выполняются включения $\mathcal{C}_\iota \in \mathfrak{UM}(P)$, $\mathcal{D}_\iota \in \mathfrak{UM}(P)$.*

Доказательство. Проверим включение $\mathcal{C}_\iota \in \mathfrak{UM}(P)$. Зафиксируем $\iota \in \mathcal{I}$. Пусть $x \in X$ такой, что $x \in \mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota)$. Тогда, по определению, имеем $x \in \mathcal{C}_\iota(x)$. Воспользуемся представлением (см. (2.14)) $x = (x_\iota, x_{-\iota})$. Из (2.17) получим $x_\iota \in \mathcal{B}_\iota(x)$. Значит (см. (2.16)), $P((x_\iota, x_{-\iota}))$. Еще раз пользуясь равенством $x = (x_\iota, x_{-\iota})$, получим $P(x)$. И, следовательно, x лежит в правой части (1.2). Так как x был выбран произвольно, получаем вложение

$$\mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota) \subset \{x \in X \mid P(x)\}. \tag{2.18}$$

Проверим обратное вложение. Пусть $x \in X$ такой, что $P(x)$. Тогда $P((x_\iota, x_{-\iota}))$. Значит, $x_\iota \in \mathcal{B}_\iota(x)$. Откуда следует $x \in \mathcal{C}_\iota(x)$, то есть $x \in \mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota)$. Так как x был выбран произвольно, получаем вложение $\{x \in X \mid P(x)\} \subset \mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota)$. С учетом (2.18) получим $\mathbf{Fix}(\mathcal{C}_\iota) = \{x \in X \mid P(x)\}$. Так как индекс ι был выбран произвольно, получаем первое включение. Второе включение проверяется аналогично. Доказательство закончено. $\square$

2.3. Размыкание конъюнкции предикатов на прямом произведении

Важным частным случаем являются высказывания, представленные конъюнкцией заданного семейства предикатов. Далее приводится построение размыкающего отображения, использующее специфику конъюнкции предикатов.

Пусть для непустого множества индексов $\mathcal{J}$ задано семейство $P_\jmath \in \mathfrak{PR}(X)$, $\jmath \in \mathcal{J}$, предикатов на прямом произведении X (см. (2.13)). Зададим отображения $\mathcal{B}_{\iota\jmath} \in \mathcal{P}(X_\iota)^X$ вида

$$\mathcal{B}_{\iota\jmath}(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X_\iota \mid P_\jmath((y, x_{-\iota}))\} \qquad \forall x \in X\ \forall \iota \in \mathcal{I}\ \forall \jmath \in \mathcal{J}. \tag{2.19}$$

На основе отображений $\mathcal{B}_{\iota\jmath}$ построим отображения $\mathcal{C}_{\iota\jmath} \in \mathcal{P}(X)^X$, полагая

$$\mathcal{C}_{\iota\jmath}(x) \overset{\text{def}}{=} \{z \in X \mid z_\iota \in \mathcal{B}_{\iota\jmath}(x)\} \qquad \forall x \in X\ \forall \iota \in \mathcal{I}\ \forall \jmath \in \mathcal{J}. \tag{2.20}$$

Пусть предикат $P \in \mathfrak{PR}(X)$ имеет вид $P(x) \overset{\text{def}}{\Leftrightarrow} (P_\jmath(x)\ \forall \jmath \in \mathcal{J})$, $x \in X$. Предположим, что мощность множества $\mathcal{J}$ не превосходит мощности множества $\mathcal{I}$ и $g \in \mathcal{I}^{\mathcal{J}}$ — произвольная биекция, реализующая вложение $\mathcal{J}$ в $\mathcal{I}$.

Зададим отображения $\mathcal{B}_\jmath \in \mathcal{P}(X_\jmath)^X$ вида

$$\mathcal{B}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \begin{cases} \mathcal{B}_{\iota g^{-1}(\iota)}(x)((y, x_{-\iota})), & \iota \in g(\mathcal{J}), \\ X_\iota, & \iota \notin g(\mathcal{J}), \end{cases} \qquad \forall x \in X\ \forall \iota \in \mathcal{I}, \tag{2.21}$$

на их основе построим отображение $\mathcal{F}_P \in \mathcal{P}(X)^X$ следующим образом:

$$\mathcal{F}_P(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_\iota(x) \qquad \forall x \in X. \tag{2.22}$$

Лемма 5. *Справедливо включение $\mathcal{F}_P \in \mathfrak{UM}(P)$.*

Замечание 4. Еще раз остановимся на случае одноэлементного множества $\mathcal{I}$: с учетом (2.15) лемма 5 сводится к очевидному равенству $\{x \in X \mid P(x)\} = P^{-1}(1)$. Таким образом, каких-либо преимуществ можно ожидать лишь в случае нетривиального разложения множества X в прямое произведение сомножителей.

Доказательство. Для любых $x \in X$ и $\iota \in \mathcal{I}$ положим $\mathcal{C}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \{z \in X \mid z_\iota \in \mathcal{B}_\iota(x)\}$. Тогда, с учетом равенств $\mathcal{C}_\iota(x) = X\ \iota \notin g(\mathcal{J})$ (см. (2.20), (2.21)), имеем

$$\bigcap_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(x) = \bigcap_{\iota \in g(\mathcal{J})} \mathcal{C}_{\iota g^{-1}(\iota)}(x) = \bigcap_{\jmath \in \mathcal{J}} \mathcal{C}_{g(\jmath)\jmath}(x) \qquad \forall x \in X.$$

Из (2.10) и леммы 4 следует, что для отображения $G(x) \overset{\text{def}}{=} \bigcap_{\jmath \in \mathcal{J}} \mathcal{C}_{g(\jmath)\jmath}(x)$ $\forall x \in X$ выполняется включение $G \in \mathfrak{UM}(P)$. Для завершения доказательства теперь достаточно проверить равенство

$$\bigcap_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(x) = \prod_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_\iota(x) \qquad \forall x \in X. \tag{2.23}$$

С учетом определения $\mathcal{C}_\iota$ для любых $\jmath \in \mathcal{I}$ и $z \in X$ имеем равенство $\big(\bigcap_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(z) \,|\, \{\jmath\}\big) = \mathcal{B}_\jmath(z)$. Следовательно, для любого $y \in X$ верно

$$(y \in \bigcap_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(x)) \Leftrightarrow (y_\jmath \in \big(\bigcap_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{C}_\iota(x) \,|\, \{\jmath\}\big)\ \forall \jmath \in \mathcal{I}) \Leftrightarrow (y_\jmath \in \mathcal{B}_\jmath(x)\ \forall \jmath \in \mathcal{I}) \Leftrightarrow (y \in \prod_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_\iota(x)).$$

Доказательство закончено. □

МАТЕМАТИКА 2016. Т. 26. Вып. 4

§ 3. Пример: равновесие Нэша

1. Пусть (X, J) — игра с $\mathcal{I}$ игроками в нормальной форме: $X \overset{\text{def}}{=} \prod_{\iota \in I} X_\iota$, $J \overset{\text{def}}{=} (J_\iota)_{\iota \in \mathcal{I}}$. Здесь X_ι — множество стратегий, а J_ι — функция выигрыша ι-го игрока: $J_\iota : X \mapsto \mathbb{R}$, $\iota \in \mathcal{I}$. Обозначим через P_N предикат «быть равновесием Нэша» в игре (X, J):

$$P_N(x) \Leftrightarrow (J_\iota(z, x_{-\iota}) \leqslant J_\iota(x) \ \forall z \in X_\iota \ \forall \iota \in \mathcal{I}) \qquad \forall x \in X.$$

Как видим, имеет место случай $\mathcal{I} = \mathcal{J}$ и предикат $P_N \in \mathfrak{PR}(X)$ представлен конъюнкцией предикатов $P_\iota \in \mathfrak{PR}(X)$, $\iota \in \mathcal{I}$, вида

$$P_\iota(x) \Leftrightarrow (J_\iota(z, x_{-\iota}) \leqslant J_\iota(x) \ \forall z \in X_\iota) \qquad \forall x \in X.$$

Следуя (2.19), запишем соответствующие предикатам P_ι отображения $\mathcal{B}_\iota \in \mathcal{P}(X_\iota)^X$:

$$\begin{aligned}\mathcal{B}_\iota(x) \overset{\text{def}}{=} \{y \in X_\iota \mid P_\iota((y, x_{-\iota}))\} = \{y \in X_\iota \mid J_\iota(z, x_{-\iota}) \leqslant J_\iota(y, x_{-\iota}), \ \forall z \in X_\iota\} = \\ = \{y \in X_\iota \mid \sup_{z \in X_\iota} J_\iota(z, x_{-\iota}) \leqslant J_\iota(y, x_{-\iota})\} = \operatorname*{argmax}_{y \in X_\iota} J_\iota(y, x_{-\iota});\end{aligned}$$

построим отображение $\mathcal{F}_{P_N} \in \mathfrak{UM}(P_N)$ вида (2.22):

$$\mathcal{F}_{P_N}(x) \overset{\text{def}}{=} \prod_{\iota \in \mathcal{I}} \mathcal{B}_\iota(x) = \prod_{\iota \in \mathcal{I}} \operatorname*{argmax}_{y \in X_\iota} J_\iota(y, x_{-\iota}) \qquad \forall x \in X.$$

2. Отображение $\mathcal{F}_{P_N}$, в силу леммы 5, является размыкающим для предиката P_N: $\mathcal{F}_{P_N} \in \mathfrak{UM}(P_N)$. Воспользуемся этим фактом для описания множества равновесий Нэша в случае, когда функции выигрыша J_ι непрерывны, а множества X_ι суть компакты.

Введем обозначения. Пусть Z — непустое множество и $F \in \mathcal{P}(Z)^Z$ — многозначное отображение. По заданному отображению F определим отображение $\hat{F} \in \mathcal{P}(Z)^{\mathcal{P}(Z)}$ следующим образом:

$$\hat{F}(Y) \overset{\text{def}}{=} \left(\bigcup_{y \in Y} F(y) \right) \bigcap Y = \bigcup_{y \in Y} F(y) \cap Y.$$

Заметим, что множество $\hat{F}(Y)$ является множеством «кандидатов» из множества Y во множество неподвижных точек: легко проверить от противного, что элементы из Y, не попавшие в $\hat{F}(Y)$, заведомо не принадлежат $\mathbf{Fix}(F)$.

Обозначим через $\mathbb{O}(Z)$ множество всех покрытий Z, то есть всех подмножеств $(O_\kappa)_K \subset \mathcal{P}(Z)$ таких, что $\cup_{\kappa \in K} O_\kappa = Z$. Пусть $\tau(Z)$ — некоторая топология в Z (множество всех открытых множеств). Обозначим через $\mathbb{O}_{\text{fo}}(Z)$ ($\mathbb{O}_{\text{fc}}(Z)$) множество всех конечных открытых (замкнутых) покрытий Z.

Теорема 1 (см. [8, теорема 2]). *Пусть Z — компактное хаусдорфово пространство, а отображение F имеет замкнутый график. Тогда*

$$\mathbf{Fix}(F) = \bigcap_{(O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\text{fo}}(Z)} \bigcup_{\kappa \in K} \hat{F}(O_\kappa) = \bigcap_{(O_\kappa)_I \in \mathbb{O}_{\text{fc}}(Z)} \bigcup_{\kappa \in K} \hat{F}(O_\kappa). \tag{3.1}$$

В частности, множество $\mathbf{Fix}(F)$ не пусто, если и только если выполнено условие

$$\forall (O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\text{fc}}(Z) \quad \exists \bar{\kappa} \in K \quad \hat{F}(O_{\bar{\kappa}}) \neq \varnothing. \tag{3.2}$$

Замечание 5. В соответствии с [8, теорема 3], если Z метризуемо, условие (3.2) принимает вид

$$\forall \delta > 0 \quad \exists z_\delta \in Z \qquad \mathbf{d}(z_\delta, F(z_\delta)) \leqslant \delta. \tag{3.3}$$

Вернемся к задаче поиска равновесий Нэша. Если множества стратегий Z_ι — топологические пространства, то полагаем, что произведение Z наделено топологией тихоновского произведения [10]. Из леммы 5 и теоремы 1 следует

Теорема 2. *Пусть X_ι, $\iota \in \mathcal{I}$, — компактные хаусдорфовы пространства, для любого $\iota \in \mathcal{I}$ функция J_ι полунепрерывна сверху на X, функция $J_\iota(z,\cdot)$ полунепрерывна снизу на $X_{-\iota}$ при любом $z \in X_\iota$. При этих условиях для множества $P_N^{-1}(1)$ равновесий Нэша выполняются равенства*

$$P_N^{-1}(1) = \bigcap_{(O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\mathrm{fo}}(X)} \bigcup_{\kappa\in K} \hat{\mathcal{F}}_{P_N}(O_\kappa) = \bigcap_{(O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\mathrm{fc}}(X)} \bigcup_{\kappa\in K} \hat{\mathcal{F}}_{P_N}(O_\kappa).$$

В частности, равновесие Нэша достигается тогда и только тогда, когда в произвольном покрытии $(O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\mathrm{fc}}(X)$ найдется множество $O_{\bar\kappa} \in (O_\kappa)_K$, содержащее два последовательных приближения Курно

$$\forall (O_\kappa)_K \in \mathbb{O}_{\mathrm{fc}}(X) \quad \exists\, \bar\kappa \in K \quad \exists\, x, x' \in O_{\bar\kappa} \quad x' \in \mathcal{F}_{P_N}(x). \tag{3.4}$$

Замечание 6. В случае когда топология пространства X метризуема, условие (3.4) принимает вид (3.3): $\forall\,\delta > 0\ \exists\, x_\delta \in X\ \mathbf{d}(x_\delta, \mathcal{F}_{P_N}(x_\delta)) \leqslant \delta$.

Отметим также, что в теоремах [8, теоремы 4, 5] неверно сформулированы условия на функции φ и J_i: при таких условиях приведенные доказательства некорректны. Правильные для функций J_i условия должны быть эквивалентны, а для функции φ — аналогичны условиям на функции J_ι, приведенным в теореме 2; для функции φ эти условия сводятся к требованию непрерывности.

Д о к а з а т е л ь с т в о. В силу леммы 5 имеем равенство $P_N^{-1}(1) = \mathbf{Fix}(\mathcal{F}_{P_N})$.

Для обоснования утверждений теоремы 2 остается проверить применимость равенств (3.1) к отображению $\mathcal{F}_{P_N}$. Компактность и хаусдорфовость пространства X следует из определения топологии тихоновского произведения, а также из компактности и хаусдорфовости порождающих его пространств X_ι.

Проверим замкнутость графика отображения $\mathcal{F}_{P_N}$. Отметим, что для любых $x \in X$ и $\iota \in \mathcal{I}$, в силу полунепрерывности сверху J_ι и компактности X_ι, множество $\operatorname{argmax}_{y\in X_\iota} J_\iota(y, x_{-\iota})$ определено и не пусто. Значит, для любого $x \in X$ определено и не пусто множество $\mathcal{F}_{P_N}(x)$. График $\mathbb{G}(\mathcal{F}_{P_N})$ отображения $\mathcal{F}_{P_N}$ представляется пересечением графиков $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ отображений $\mathcal{C}_\iota$ (см. (2.17), (2.23)):

$$\mathbb{G}(\mathcal{F}_{P_N}) = \bigcap_{\iota\in\mathcal{I}} \mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota).$$

Следовательно, в силу аксиом семейства замкнутых множеств замкнутость множеств $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ влечет замкнутость $\mathbb{G}(\mathcal{F}_{P_N})$. С другой стороны, для любого $\iota \in \mathcal{I}$ график $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ можно представить в виде

$$\begin{aligned}
&\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota) = \{(z,w) \in X^2 \mid w \in \mathcal{C}_\iota(z)\} = \{(z,w) \in X^2 \mid w_\iota \in \mathcal{B}_\iota(z)\} = \\
&= \{(z,w) \in X^2 \mid w_\iota \in \operatorname*{argmax}_{y\in X_\iota} J_\iota((y, z_{-\iota}))\} = \{(z,w) \in X^2 \mid J_\iota((w_\iota, z_{-\iota})) \geqslant \max_{y\in X_\iota} J_\iota((y, z_{-\iota}))\} = \\
&\qquad\qquad = \{((z_\iota, x_{-\iota}), (x_\iota, z_{-\iota})) : (z \in X)\&(J_\iota((x_\iota, x_{-\iota})) \geqslant \max_{y\in X_\iota} J_\iota((y, x_{-\iota})))\}.
\end{aligned}$$

Исходя из полунепрерывности снизу на $X_{-\iota}$ функции $J_\iota(y,\cdot)$ при каждом $y \in X_\iota$, проверяется, что функция $x \mapsto \max_{y\in X_\iota} J_\iota((y, x_{-\iota}))$ полунепрерывна снизу на X. Тогда, с учетом полунепрерывности сверху на X функции J_ι, получаем, что множество

$$H \stackrel{\mathrm{def}}{=} \{x \in X \mid J_\iota((x_\iota, x_{-\iota})) \geqslant \max_{y\in X_\iota} J_\iota((y, x_{-\iota}))\}$$

замкнуто в X. Следовательно, $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ гомеоморфно $((z,w) \leftrightarrow ((w_\iota, z_{-\iota}), (z_\iota, w_{-\iota})))$ прямому произведению замкнутых множеств H и X. Значит, множество $\mathbb{G}(\mathcal{C}_\iota)$ замкнуто. Этим завершается доказательство теоремы. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem // Duke Mathematical Journal. 1941. Vol. 8. No. 3. P. 457–459. DOI: 10.1215/S0012-7094-41-00838-4
2. Nash J. Non-cooperative games // Annals of Mathematics. 1951. Vol. 54. No. 2. P. 286–295. DOI: 10.2307/1969529
3. Nikaido H. On von Neumann's minimax theorem // Pacific Journal of Mathematics. 1954. Vol. 4. No. 1. P. 65–72. DOI: 10.2140/pjm.1954.4.65
4. Ченцов А.Г. О структуре одной игровой задачи сближения // Доклады АН СССР. 1975. Т. 224. № 6. С. 1272–1275.
5. Ченцов А.Г. К игровой задаче наведения // Доклады АН СССР. 1976. Т. 226. № 1. С. 73–76.
6. Ченцов А.Г. Неупреждающие селекторы многозначных отображений // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1998. № 2. С. 1–64.
7. Ченцов А.Г. Наследственные мультиселекторы многозначных отображений и их построение итерационными методами // Дифференциальные уравнения и процессы управления. 1999. № 3. С. 1–54.
8. Serkov D.A. On fixed point theory and its applications to equilibrium models // Bulletin of the South Ural State University. Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software. 2016. Vol. 9. No. 1. P. 20–31. DOI: 10.14529/mmp160102
9. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. Москва: Мир, 1970. 416 с.
10. Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986. 752 с.

Поступила в редакцию 26.10.2016

Серков Дмитрий Александрович, д. ф.-м. н., ведущий научный сотрудник, Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН, 620990, Россия, г. Екатеринбург, ул. С. Ковалевской, 16; профессор, кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики, Институт радиоэлектроники и информационных технологий, Уральский федеральный университет, 620002, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 32.
E-mail: serkov@imm.uran.ru

D. A. Serkov

An approach to analysis of the set of truth: unlocking of predicate

Citation: *Vestnik Udmurtskogo Universiteta. Matematika. Mekhanika. Komp'yuternye Nauki*, 2016, vol. 26, issue 4, pp. 525–534 (in Russian).

Keywords: truth set of predicate, fixed points of map, Nash equilibrium.

MSC2010: 06E30, 47H04, 47H10, 91B50

DOI: 10.20537/vm160407

The term “predicate unlocking” is understood as the reduction of the problem of finding and studying the set of truth of a predicate to the problem of finding and studying the set of fix points of a map. Predicate unlocking provides opportunities for additional investigation of the truth set and also allows one to build the elements of this set with particular properties. There are examples of nontrivial predicate unlocking such as: the predicate “be a stable (weakly invariant) set”, the predicate “be a nonanticipatory selector”, the predicate “be a saddle point”, and the predicate “be a Nash equilibrium”. In these cases, the question of the a priori evaluation of the possibility of unlocking this or other predicate of interest and the question of constructing a corresponding unlocking map remained beyond consideration: the unlocking mappings were provided as ready-made objects. In this note we try to partly close this gap: we provide a formal definition of the predicate unlocking operation, methods for constructing and calculating of the unlocking mappings and their basic properties. As an illustration, the “routine” construction of unlocking mapping for the predicate “be a Nash equilibrium” is carried out. The described approach is far from universality, but, at least, it can be applied to all aforementioned positive examples.

REFERENCES

1. Kakutani S. A generalization of Brouwer's fixed point theorem, *Duke Mathematical Journal*, 1941, vol. 8, no. 3, pp. 457–459. DOI: 10.1215/S0012-7094-41-00838-4
2. Nash J. Non-cooperative games, *Annals of Mathematics*, 1951, vol. 54, no. 2, pp. 286–295. DOI: 10.2307/1969529
3. Nikaido H. On von Neumann's minimax theorem, *Pacific Journal of Mathematics*, 1954, vol. 4, no. 1, pp. 65–72. DOI: 10.2140/pjm.1954.4.65
4. Chentsov A.G. On the structure of a game problem of convergence, *Sov. Math. Dokl.*, 1975, vol. 16, no. 5, pp. 1404–1408.
5. Chentsov A.G. On a game problem of guidance, *Sov. Math., Dokl.*, 1976, vol. 17, pp. 73–77.
6. Chentsov A.G. Non-anticipating selections of multivalued mappings, *Differ. Uravn. Protsessy Upr.*, 1998, no. 2. pp. 1–64 (in Russian).
7. Chentsov A.G. Hereditary multiselectors of multivalued mappings and their construction by iterative methods, *Differ. Uravn. Protsessy Upr.*, 1999, no. 3. pp. 1–54 (in Russian).
8. Serkov D.A. On fixed point theory and its applications to equilibrium models, *Bulletin of the South Ural State University, Ser. Mathematical Modelling, Programming and Computer Software*, 2016, vol. 9, no. 1, pp. 20–31. DOI: 10.14529/mmp160102
9. Kuratowski K., Mostowski A. *Teoriya mnozhestv* (Theory of sets), Moscow: Mir, 1970, 416 p.
10. Engelking R. *General topology*, Warszawa: PWN, 1985, 752 p.

Received 26.10.2016

Serkov Dmitrii Aleksandrovich, Doctor of Physics and Mathematics, Leading Researcher, N.N. Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics, Ural Branch of the Russian Academy of Sciences, ul. S. Kovalevskoi, 16, Yekaterinburg, 620990, Russia;
Professor, Institute of Radioelectronics and Information Technologies, Ural Federal University, ul. Mira, 32, Yekaterinburg, 620002, Russia.
E-mail: serkov@imm.uran.ru