Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования
"Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина"

На правах рукописи

Бондарь Евгения Алексеевна

УДК 512.53

Моноиды сильных эндоморфизмов гиперграфов

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

Диссертация на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель
Жучок Юрий Владимирович,
кандидат физико-математических наук, доцент

Екатеринбург — 2016

СОДЕРЖАНИЕ

Введение 4

Раздел 1. **Общие сведения** 16

1.1. Некоторые понятия теории полугрупп 16

1.2. Графы, гиперграфы и их эндоморфизмы. 20

1.3. Эндоморфизмы отношений эквивалентности 24

1.4. $\mathscr{H}$-, и $\mathscr{R}$-сечения конечной симметрической полугруппы 31

Раздел 2. **Точные представления моноидов сильных эндоморфизмов гиперграфов** 33

2.1. Сильные эндоморфизмы бесконечных графов 33

2.1.1. Об одном классе бесконечных графов 33

2.1.2. Сильные эндоморфизмы бесконечных графов выделенного класса 35

2.1.3. Случай произвольных бесконечных графов 40

2.2. Моноиды сильных эндоморфизмов n-однородных гиперграфов . . 41

2.2.1. Некоторые свойства n-однородных гиперграфов 41

2.2.2. Точные представления моноидов сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов 45

2.3. Сильные эндоморфизмы бесконечных n-однородных гиперграфов 51

2.3.1. Точное представление моноидов сильных эндоморфизмов гиперграфов из одного класса 51

2.3.2. Случай произвольных n-однородных гиперграфов 54

2.4. Регулярность моноидов сильных эндоморфизмов n-однородных гиперграфов 55

2.4.1. Конечный случай 56

2.4.2. Бесконечный случай 57

2.5. Об определяемости гиперграфов сильными эндоморфизмами. . . 58

Раздел 3. **Описание $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечений моноидов сильных эндоморфизмов конечных графов** **61**

3.1. $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечения моноидов сильных эндоморфизмов конечных графов 61

3.1.1. Предварительные сведения 61

3.1.2. $\mathscr{R}$- и $\mathscr{L}$- сечений моноида сильных эндоморфизмов графа 64

3.1.3. $\mathscr{H}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов графа 67

3.2. $\mathscr{L}$-сечения конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ 70

3.2.1. Определения L-семейства 71

3.2.2. Описание $\mathscr{L}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$ 77

3.2.3. Число $\mathscr{L}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$. 90

3.2.4. Классификация $\mathscr{L}$-сечений $\mathscr{T}_n$ до изоморфизма 94

Заключение **102**

ЛИТЕРАТУРА **104**

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. К производным структурам данного математического объекта относят различные алгебраические системы, связанные с исходным объектом. В алгебре исследования производных структур восходят к работам Галуа (XIX век). Со второй половины XX века понятие производных структур приобретает общематематическую значимость: изучение производных структур различных математических объектов становится одним из мощных течений в математике. Достаточно вспомнить, например, полугруппы непрерывных линейных операторов банаховых пространств в функциональном анализе, группы путей в топологии, синтаксические моноиды в теории автоматов. Производные структуры математического объекта зачастую несут существенную информацию об этом объекте и к тому же дают удобный язык для его описания. О важности изучения производных структур свидетельствует появление на стыке алгебры и других областей математики таких активно развивающихся дисциплин, как алгебраическая геометрия, алгебраическая топология, алгебраическая теория автоматов и т.д.

В алгебре типичными примерами производных структур алгебраических систем являются, например, группа автоморфизмов, моноид эндоморфизмов, полугруппы соответствий, решетка подсистем, решетка конгруэнций.

Рассмотрим основные постановки задач, связанные с производными структурами. При этом мы следуем классификации таких постановок, данной в монографии Л. Н. Шеврина и А. Я. Овсянникова [20] применительно к производным решеткам. Отметим, что в силу многочисленности исследований в данной области, мы не претендуем на исчерпывающий обзор литературы. Множество примеров читатель может найти, например, в монографиях [20] или [53].

Направление 1. *Классификация производных структур, задача представимости.* Естественно возникает задача выяснить, обладает ли всякая производная структура данного класса алгебраических систем какими-то специфическими свойствами. Здесь возникает широкий диапазон возможностей - от случаев, когда производные структуры оказываются настолько специфичными, что их удается полностью классифицировать, до противоположных случаев, когда в качестве производной структуры может быть реализован любой алгебраический объект подходящего типа. Например, Хедрлин и Ламбек в [38] показали, что любой моноид изоморфен полугруппе эндоморфизмов некоторой полугруппы. Примером результатов другого сорта является работа А. Я. Айзенштат [1], в которой описаны определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечных цепей. В некоторых случаях удается выяснить строение производной структуры алгебраической системы (найти точное представление полугруппы), построив инъективный гомоморфизм в более простую или хорошо изученную полугруппу. Основной сложностью в решении таких задач, по-видимому, является отсутствие подходящих теоретико-полугрупповых конструкций. После получения Кроном и Роудзом структурной теоремы для конечных моноидов в теории полугрупп начала активно использоваться конструкция сплетения и ее различные модификации. Например, Флейшером [17] была введена конструкция сплетения моноида с малой категорией как обобщение сплетения моноидов, а в [36] эта конструкция была использована для описания точного представления моноида эндоморфизмов произвольного действия. В. М. Усенко [16] с помощью обобщения конструкции двойного полупрямого произведения описал полугруппу эндоморфизмов вполне 0-простых полугрупп.

Направление 2. *Определяемость производной структурой.* Вопрос заключается в следующем: что можно сказать о двух алгебраических системах A и B, если их производные стуктуры одного и того же типа изоморфны? Говорят, что алгебраическая система A из некоторого класса Ω определяется своей производной структурой в классе Ω, если для любой алгебраической системы $B \in \Omega$ из изоморфизма производных структур, соответствующих A и B следует, что $A \cong B$. Так, Б.М. Шайн показал определяемость своими полугруппами эндоморфизмов с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма упорядоченных множеств, решеток, дистрибутивных решеток и булевых алгебр в [55], а определяемость свободного моноида и свободной полугруппы своими полугруппамми эндоморфизмов, показали Г. Машевицкий и Б. М. Шайн в [47]. Вместе с тем, существуют примеры алгебраических систем, которые не определяются своими полугруппами эндоморфизмов. Например, Л. Б. Шнеперман [21] показал, что рефлексивные графы не определяются полугруппой своих эндоморфизмов.

Направление 3. *Изучение объектов с ограничениями на производные структуры.* Например, для производных решеток рассматриваются ограничения типа дистрибутивности или модулярности, а для производных моноидов часто рассматривается ограничение регулярности: в [34], [56], например, изучаются графы с регулярными моноидами эндоморфизмов. Напомним, что моноид называется регулярным, если для каждого его элемента a существует такой элемент b, что $a = aba$ [10].

Направление 4. *Взаимосвязь между различными производными структурами одного и того же объекта.* Классическим примером жесткой взаимосвязи является теория Галуа: решетка подполей заданного расширения поля однозначно восстанавливается по группе автоморфизмов этого расширения. Противоположной ситуацией является независимость производных структур, когда свойства одной производной структуры никак не влияют на свойства другой производной структуры того же объекта. Независимость производных структур для основных классов алгебраических систем изучалась В.А. Баранским [3].

Областью наших интересов являются полугруппы сильных эндоморфизмов графов и их естественных обобщений — гиперграфов — в рамках направлений 1–3. Под «графом» везде далее будем понимать неориентированный граф без кратных рёбер. Понятие сильного эндоморфизма графа ввел в 1958 г. Чулик [26]. Пусть $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин V и множеством рёбер E. Отображение $f : V \to V$ называется *сильным эндоморфизмом* графа G, если $\{x, y\} \in E \Leftrightarrow \{xf, yf\} \in E$ для любых $x, y \in V$. Точное представление моноида сильных эндоморфизмов конечного графа в виде сплетения группы подстановок и малой категории найдено Кнауэром и Нипорте [41]. При этом было показано, что для бесконечного случая данная теорема неверна. Естественно возникает задача:

Задача 1. Найти точное представление моноида сильных эндоморфизмов бесконечного графа.

Гиперграфы [8] представляют собой обобщения графов, когда ребрами могут быть произвольные подмножества множества вершин, а не только двух- и одноэлементные подмножества. На сегодняшний день теория гиперграфов — бурно развивающийся раздел математики на стыке теории графов, комбинаторики, топологии и компьютерных наук.

Задача 2. Найти точное представление моноидов сильных эндоморфизмов конечных и бесконечных гиперграфов.

В рамках направления 1 естественно также изучать моноиды сильных эндоморфизмов при помощи сечений относительно подходящих эквивалентностей. Для произвольного отношения эквивалентности ρ на полугруппе S подполугруппа S' полугруппы S называется ρ-сечением [27] (в некоторых источниках "трансверсалью") S, если S' содержит в точности по одному представителю из каждого класса эквивалентности. Естественно изучать сечения относительно эквиваленностей, связанных со строением исходной полугруппы, в частности, для отношений Грина. Понятно, что сечение представляет собой подполугруппу исходной полугруппы, на которой данное отношение эквивалентности тривиально. Однако сечения данной полугруппы для заданного отношения эквивалентности вообще говоря может даже не существовать. К первым работам в этом направлении, по-видимому, следует отнести Блайза (1982 г.). Ряд его работ посвящен изучению регулярных полугрупп при помощи инверсных трансверсалей (см., напр., обзор [25]). Первый пример сечения отношений Грина (пример $\mathscr{H}$-сечения) был построен Реннером для инверсной полугруппы [54]. На сегодняшний день сечения отношений Грина уже изучались на инверсной полугруппе [28], [51], симметрической полугруппе [52], инверсной 0-категории [7], и др. Таким образом, естественно появляется следующая задача.

Задача 3. Выяснить, существуют ли сечения отношений Грина на моноиде сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа. В случае, если такие сечения существуют, описать их.

Следующая задача возникла при решении задачи 3: оказалось, что описание $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$-, $\mathscr{H}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов тесно связано с описанием этих сечений на конечной симметрической полугруппе $\mathscr{T}_n$. Все $\mathscr{H}$- и $\mathscr{R}$-сечения для конечной симммметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ описал В. А. Пехтерев [52] в 2005 г. Было показано, что существует единственное с точностью до изоморфизма $\mathscr{R}$-сечение $\mathscr{T}(X)$. Пара неизоморфных $\mathscr{L}$-сечений $\mathscr{T}_4$ была построена И. Б. Кожуховым в [42, 2007 г.]. Вопрос описания и классификации $\mathscr{L}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$ до настоящего времени оставался открытым и явно формулировался в литературе (см., напр., [28]).

Задача 4. Описание и классификация $\mathscr{L}$-сечений конечной симметрической полугруппы.

Перейдем теперь к направлению 2. В [41] было показано, что моноид сильных эндоморфизмов конечного графа является регулярным. Условия, при которых моноид сильных эндоморфизмов произвольного (необязательно конечного) графа является регулярным найдены в [35].

Задача 5. Найти условия, при которых моноиды сильных эндоморфизмов гиперграфов являются регулярными.

Наконец, в рамках направления 3 естественно найти ответ на следующий вопрос.

Задача 6. Определяется ли гиперграф своим моноидом сильных эндоморфизмов?

Цель работы — решить задачи 1–6.

Методы исследования. В работе применяются методы теории полугрупп, связанные с конструкциями сплетения моноида с малой категорией; комбинаторные методы; методы теории графов и гиперграфов.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми.

Апробация и публикации. Основные результаты диссертационной работы были представлены на VIII Международной алгебраической конференции в Украине (г. Луганск, июль 2011 г.), XIV и XV Международных научных конференциях имени академика Михаила Кравчука (г. Киев, апрель 2012 г. и май 2014 г.), Международной математической конференции, посвященной 70-летию В. В. Кириченко (г. Николаев, июнь 2012 г.), IX Международной алгебраической конференции в Украине (г. Львов, июль 2013 г.), Международной алгебраической конференции, посвященной 100-летию со дня рождения Л. А. Калужнина (г. Киев, июль 2014 г.), Международной конференции и школе молодого ученого «Группы и графы, алгоритмы и автоматы», посвященной 80-летию В. А. Белоногова и 70-летию В. А. Баранского (Екатеринбург, август 2015 г.), а также на X Международной алгебраической конференции в Украине, посвященной 70-летию Ю. А. Дрозда (Одесса, август 2015 г.).

Автор выступал с докладами по теме диссертации на семинаре кафедры алгебры и системного анализа (Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко, 2011–2013 гг.), семинаре «Алгебраические системы» под руководством профессора Л. Н. Шеврина (Уральский федеральный университет, октябрь 2014 г., март 2015 г., март 2016 г.).

По результатам исследования опубликовано 15 работ: 7 научных статей и 8 тезисов докладов на научных конференциях. Основные результаты диссертации опубликованы в [57]–[63]. Из них статьи [57], [58], [60]–[63] опубликованы в изданиях из списка, рекомендованного ВАК РФ. Статья [60] является переводом статьи [57].

Личный вклад автора. Диссертация является самостоятельной научной работой, которая содержит собственные идеи автора, позволившие решить поставленные задачи. Работа содержит теоретические и методические положения и выводы, сформулированные автором лично. Научному руководителю принадлежат постановки задач, обсуждения возможных путей решения, а также теоремы 7–8 в статье [57] и теорема 4.1. в статье [58]. Утверждения указанных теорем на защиту не выносятся. Использованные в диссертации идеи или положения других авторов имеют соответствующие ссылки.

Структура и содержание диссертации

Диссертация состоит из введения, трёх разделов и списка литературы. Объем диссертации составляет 110 страниц. Основные результаты диссертации полностью решают задачи 1, 3, 4, и задачи 2, 5, 6 — для случая n-однородных гиперграфов. Первый раздел содержит основные определения и некоторые предварительные сведения. Второй раздел посвящен в основном изучению представлений моноидов сильных эндоморфизмов графов и гиперграфов. Третий — описанию $\mathscr{R}$-, $\mathscr{L}$-, $\mathscr{H}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов конечных графов. Основные результаты работы выделены далее жирным шрифтом.

Первый раздел диссертации состоит из четырех параграфов и содержит общие теоретические сведения и определения. В § 1.1 приведены сведения из теории полугрупп, касающиеся таких объектов как полугруппы преобразований, бинарные отношения, отношения Грина, сплетение моноида с малой категорией. § 1.2 посвящен графам, гиперграфам и их эндоморфизмам. В § 1.3 различные типы эндоморфизмов проиллюстрированы на примере графа произвольного отношения эквивалентности. В частности, для случая графа эквивалентности получен ответ на вопрос Ботчера и Кнауэра при каких условиях множество всех полусильных (локально сильных, квазисильных) эндоморфизмов неориентированного графа будет полугруппой (утверждение 1.3.1, утверждение 1.3.2, утверждение 1.3.3). В § 1.4 содержится определение сечения полугруппы относительно бинарного отношения, а также описание $\mathscr{H}$-, и $\mathscr{R}$-сечений симметрической полугруппы [52].

Во втором разделе диссертации изучаются точные представления моноидов сильных эндоморфизмов конечных и бесконечных графов и n-однородных гиперграфов, проверяется регулярность этих моноидов, а также рассмотрен вопрос определяемости n-однородных гиперграфов своими моноидами сильных эндоморфизмов. Раздел состоит из пяти параграфов.

§ 2.1 посвящен сильным эндоморфизмам бесконечных графов (далее $\operatorname{SEnd} G$). В пункте 2.1.1 мы выделяем такой класс бесконечных графов, в котором моноид $\operatorname{SEnd} G$ изоморфен сплетению полугруппы с некоторой малой категорией (пункт 2.1.2, теорема 2.1.1). Этот результат дополняет теорему Кнауэра–Нипорте [41] о представлении моноида сильных эндоморфизмов конечных графов. Доказательство основано на свойствах сильных эндоморфизмов выделенного класса бесконечных графов, а также разложении [41] произвольного графа на лексикографическое произведение своего канонического сильного фактор-графа и подходящих 0-графов. Далее, в пункте 2.1.3 мы показываем, что все сильные эндоморфизмы произвольного бесконечного графа, сохраняющие некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин этого графа, образуют подмоноид моноида $\mathrm{SEnd}\,G$, изоморфный сплетению полугруппы с некоторой малой категорией (**теорема 2.1.3**). Оказывается, что сильные эндоморфизмы канонического сильного фактор-графа графа G, индуцируемые эндоморфизмами из указанного подмоноида обладают тем же свойством инъективности, что и сильные эндоморфизмы канонического сильного фактор-графов бесконечных графов из класса выделенного в пункте 2.1.1. Этот факт позволяет перенести доказательство теоремы 2.1.1 на доказательство теоремы 2.1.3 почти без изменений. Теорема 2.1.3 обобщает теорему 2.1.1: класс графов, выделенных в пункте 2.1.1 представляет собой случай, когда все сильные эндоморфизмы графа сохраняют указанную эквивалентность. Теорема 2.1.3 является основными результатом § 2.1.

§ 2.2 посвящен исследованию точных представлений моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов. Основным результатом этого параграфа является **теорема 2.2.1** о представлении моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов в виде сплетения группы с некоторой малой категорией, которая представляет собой аналог теоремы Кнауэра–Нипорте [41] для n-однородных гиперграфов. Доказательства основываются на свойствах сильных эндоморфизмов n-однородных гиперграфов, а также на ряде вспомогательных понятий и конструкций, естественно обобщающих аналогичные для графов. Так, мы определяем окрестность вершины гиперграфа, канонический сильный фактор-гиперграф, обобщенное лексикографическое произведение гиперграфов, а также показываем справедливость разложения произвольного n-однородного гиперграфа в произведение своего канонического сильного фактор-гиперграфа и подходящих 0-однородных гиперграфов. Теорема 2.2.2 дает представление моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов унарными отношениями. Показано, что представление конечных n-однородных гиперграфов не работает в бесконечном случае.

§ 2.3 посвящен исследованию моноида сильных эндоморфизмов бесконечных n-однородных гиперграфов (далее $\mathrm{SEnd}\, H$). Теорема 2.3.1 (пункт 2.3.1) представляет собой аналог теоремы 2.1.1 для бесконечных n-однородных гиперграфов, доказательство во многом аналогично доказательству теоремы 2.1.1), но опирается на вспомогательные утверждения из пункта 2.3.1. По аналогии с пунктом 2.1.3 в пункте 2.3.2 рассматриваются сильные эндоморфизмы произвольных n-однородных гиперграфов, сохраняющие некоторую эквивалентность на множестве вершин данного гиперграфа. Основным результатам этого параграфа 2.3 является **теорема 2.3.2** о том, что все сильные эндоморфизмы произвольного бесконечного n-однородного гиперграфа H, сохраняющие некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин этого гиперграфа, образуют подмоноид моноида $\mathrm{SEnd}\, H$, изоморфный сплетению полугруппы с некоторой малой категорией. Теорема 2.3.2 обобщает теорему 2.3.1 и, в частности, если гиперграф H конечен, то получим теорему 2.2.1.

§ 2.4 посвящен исследованию регулярности моноидов сильных эндоморфизмов n-однородных гиперграфов. В теореме 2.4.1 доказана регулярность моноидов сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов, используя представление из теоремы 2.2.2. В теореме 2.4.2 исследуются условия, при которых моноид сильных эндоморфизмов выделенного класса бесконечных n-однородных гиперграфов будет регулярным. Доказательство использует представление из теоремы 2.3.1 и имеет дело с композицией преобразований и морфизмов.

В параграфе 2.5 мы касаемся вопроса определяемости графов и гиперграфов своими моноидами сильных эндоморфизмов. Основным результатом этого параграфа является теорема 2.5.1, утверждающая, что n-однородные гиперграфы определяются своим моноидом сильных эндоморфизмов тогда и только тогда, когда $n = 0$.

Третий раздел посвящен описанию $\mathscr{R}$-, $\mathscr{L}$- и $\mathscr{H}$-сечений полугруппы сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных рёбер. Раздел состоит из двух параграфов. В § 3.1 дано описание указанных сечений. Пусть G далее обозначает конечный неориентированный граф без кратных рёбер. Теоремы 3.1.2-3.1.4 показывают, что описание $\mathscr{R}$-, $\mathscr{L}$- и $\mathscr{H}$ сечений моноида $\operatorname{SEnd} G$ сводится к описанию соответствующих сечений на симметрических полугруппах, которые уже полностью или частично изучены [52, 42]. При этом $\mathscr{R}$-сечение моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных рёбер можно построить всегда, оно единственно с точностью до изоморфизма и представляет собой прямое произведение $\mathscr{R}$-сечений подходящих симметрических полугрупп (**теорема 3.1.2**). **Теорема 3.1.3** показывает, что любое $\mathscr{L}$-сечение моноида $\operatorname{SEnd} G$ также представляет собой прямое произведение $\mathscr{R}$-сечений подходящих симметрических полугрупп. Однако полное описание $\mathscr{L}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа сводится к вопросу об описании $\mathscr{L}$-сечений симметрической полугруппы, неизвестное до сих пор. В **теореме 3.1.4** показано, что $\mathscr{H}$-сечение моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа можно построить тогда и только тогда, когда все классы из канонического сильного фактор-графа одно- или двухэлементны, а сам моноид удовлетворяет некоторому дополнительному ограничению. В таком случае полученное $\mathscr{H}$-сечение моноида $\operatorname{SEnd} G$ будет единственным. Доказательства упомянутых результатов § 3.1 основаны на разложении моноида сильных эндоморфизмов конечных неориентированных графов в виде сплетения группы с малой категорией, на свойствах преобразований, находящихся в отношениях $\mathscr{R}$, $\mathscr{L}$, $\mathscr{H}$ и на том факте, что если два преобразования находятся в отношении $\mathscr{R}$ ($\mathscr{L}$, $\mathscr{H}$) и принадлежат сечению, то эти преобразования равны.

§ 3.2 посвящен описанию и классификации $\mathscr{L}$-сечений конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$. Напомним, что $\mathscr{L}$-сечение конечной симметрической полугруппы на множестве X содержит в точности по одному преобразованию с непустым образом $M \subseteq X$ для каждого подмножества M из X. Ключевую роль в построении такой полугруппы, как оказалось, играет «правильный» выбор ядер преобразований. Оказалось, что ядра преобразований, входящих в $\mathscr{L}$-сечение полугруппы $\mathscr{T}_n$ можно представить в виде полного бинарного дерева с некоторыми дополнительными ограничениями. Эту структуру отражает собой понятие L-семейства (определение 3.2.2), введенное в пункте 3.2.2. В этом пункте даны три эквивалентных определения L-семейства множества X: 1) как некоторого иерархического семейства подмножеств множества X; 2) в терминах бинарных деревьев; 3) в терминах последовательностей и подпоследовательностей.

Пункт 3.2.2 посвящен непосредственно описанию $\mathscr{L}$-сечений конечной симметрической полугруппы. В первой части этого пункта мы строим некоторую полугруппу L_X^Γ, зависящую от L-семейства на множестве X. Элементами этой полугруппы являются индуктивно определенные преобразования α_M (определение 3.2.5), где M — произвольное непустое подмножество из X, а строение α_M на каждом шаге индуктивного построения связано со строением L-семейства Γ. Одним из основных результатов § 3.2 является **теорема 3.2.1** о том, что для всякого L-семейства Γ множества X множество L_X^Γ представляет собой $\mathscr{L}$-сечение конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$, и наоборот, каждое $\mathscr{L}$-сечение конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ является L_X^Γ для подходящего L-семейства Γ на X. Для доказательства первого утверждения теоремы 3.2.1 потребовалась одна вспомогательная лемма. Доказательству второй части этой теоремы посвящен ряд вспомогательных утверждений пункта 3.2.2, цель которых — доказать, что совокупность всех ядер преобразований из $\mathscr{L}$-сечения является L-семейством.

В пункте 3.2.3 показано, как пересчитать различные $\mathscr{L}$-сечения $\mathscr{T}_n$. Мы выделяем множество пар бинарных деревьев на s- и t-элементных множествах, соответственно (определение 3.2.6), число которых представляет собой число всех возможных L-семейств на $s+t$-элементном множестве (утверждение 3.2.2). Определение 3.2.6 на самом деле дает алгоритм для подсчета указанных пар. В работе приведены начальные значения числа L-семейств на n-элементном множестве для $n \leqslant 30$, рассчитанные с помощью компьютерной программы, основанной на нашем алгоритме.

В пункте 3.2.3 также введено важное понятие подобия L-семейств (определение 3.2.7). С помощью этого понятия выделены одинаковые $\mathscr{L}$-сечения, соответствующие различным L-семействам. Число различных $\mathscr{L}$-сечений конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ дает **теорема 3.2.2**.

Пункт 3.2.4 посвящен доказательству третьего основного результата § 3.2 — **теоремы 3.2.3**, в которой мы классифицируем все $\mathscr{L}$-сечения с точностью до изоморфизма. Теорема 3.2.3 утверждает, что два $\mathscr{L}$-сечения $\mathscr{T}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда подобны соответствующие им L-семейства. Доказательство основано на использовании нетривиальных свойств изоморфных $\mathscr{L}$-сечений и $\mathscr{L}$-сечений с подобными L-семействами.

Автор искренне благодарен научному руководителю Ю. В. Жучку за постановку задач и постоянное внимание к работе. Глубокую признательность за всесторонюю поддержку, за ценные и конструктивные замечания, направленные на улучшение текста диссертации, автор выражает М.В. Волкову. Автор также благодарит Е.А. Перминова за полезные обсуждения и советы, и всех участников семинара Л.Н. Шеврина за творческую и доброжелательную атмосферу.

РАЗДЕЛ 1
ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе собраны основные обозначения и необходимые теоретические сведения из теории полугрупп и теории графов. § 1.1 посвящен некоторым самым общим понятиям и конструкциям теории полугрупп. § 1.2 содержит определения, касающиеся графов, гиперграфов и их эндоморфизмов. В § 1.3 различные типы эндоморфизмов графа проиллюстрированы на примере графа произвольного отношения эквивалентности. Описаны полусильные, локально сильные и квазисильные эндоморфизмы отношения эквивалентности, найдены необходимые и достаточные условия, когда множество таких эндоморфизмов образует полугруппу, и доказана регулярность этих полугрупп.

Результаты § 1.3 опубликованы в [61, 68]. В § 1.4 содержатся определения сечения, трансверсали, а также описание $\mathscr{H}$- и $\mathscr{R}$-сечений конечной симметрической полугруппы.

1.1. Некоторые понятия теории полугрупп

Неопределенные понятия из пункта 1.1 и более подробные сведения читатель может найти, например, в [4], [10].

Элементарные понятия. *Бинарной операцией* на множестве S называется любое отображение множества всех упорядоченных пар из $S \times S$ в S. *Полугруппой* называется система $(S, \cdot)$, которая состоит из з непустого множества S и ассоциативной операции "$\cdot$", то есть такой, что $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$ для любых $a,\ b,\ c \in S$. Пусть S далее — произвольная полугруппа.

Элемент $e \in S$ называется *единицей* (*нулём*) если $ea = ae = a$ $(ea = ae = e)$ для всех $a \in S$. Полугруппа с единицей называется *моноидом.*

Любую полугруппу S можна вложить в полугруппу с единицей (нулем), присоединив к ней элемент 1 (0), и доопределив на множестве $S = S \cup \{1\}$

($S = S \cup \{0\}$) операцию $1 \cdot 1 = 1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ ($0 \cdot 0 = 0 \cdot x = x \cdot 0 = 0$).

Через S^1 (S^0) обозначают полугруппу S, если она содержит 1 (0), или, в противном случае, полугруппу S с присоединенной 1 (0).

Напомним, что моноид S называется *регулярным*, если для каждого его элемента a существует такой элемент b, что $a = aba$ (см., напр., [10]).

Полугруппы преобразований. Для любых непустых множеств X, Y *множество всех отображений* из X в Y будем обозначать через $\mathrm{Map}\,(X, Y)$. Если $\alpha \in \mathrm{Map}\,(X, Y)$, то через $\mathrm{im}\,(\alpha)$ будем обозначать область значений отображения α. Мощность $|\,\mathrm{im}\,(\alpha)|$ называется рангом преобразования и обозначается через $\mathrm{rk}\,(\alpha)$. Образ элемента $x \in X$ при отображении α будем обозначать через $x\alpha$. Ядро α будем обозначать через $\ker \alpha$. Напомним, что $\ker \alpha = \{(a, b) \in X \times X \mid a\alpha = b\alpha\}$. Если X' — произвольное непустое подмножество X, то через $\alpha|_{X'}$ будем обозначать ограничение отображения α на X'.

Пусть X — произвольное непустое множество. Преобразованием множества X называется всякое отображение этого множества в себя. Множество всех преобразований множества X вместе с операцией $x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta$ для всякого $x \in X$, образовует полугруппу. Эта полугруппа называется *симметрической полугрупппой* и будет обозначаться через $\mathscr{T}(X)$ или $\mathscr{T}_n$, если $|X| = n$. Множество всех взаимнооднозначных преобразований множества X (перестановок) называется *симметрической группой* и обозначается $\mathscr{S}(X)$. *Тождественное преобразование* множества X будет обозначаться id_X, а для *константного преобразования* с одноэлементным образом $\{x\}$, $x \in X$, будем писать c_x.

Отметим, что композиция отображений везде в работе осуществляется слева направо.

Бинарные отношения. Под бинарным отношением на множестве X мы понимаем подмножество ρ декартового произведения $X \times X$. Если a, b — элементы множества X и $(a, b) \in \rho$, то будем также писать $a\ \rho\ b$ и говорить «a находится в отношении ρ с b».

Если ρ и σ — отношения на X, то их композиция $\rho \circ \sigma$ определяется следующим образом: $(a, b) \in \rho \circ \sigma$, если существует такой элемент $x \in X$, что

$(a, x) \in \rho$ и $(x, b) \in \sigma$. Бинарная операция «$\circ$» ассоциативна, и, таким образом, множество всех бинарных отношений является полугруппой относительно операции «$\circ$».

Отношение ρ на множестве X называется *эквивалентностью*, если оно является рефлексивным, транзитивным и симметричным. Любое отношение эквивалентности определяет разбиение множества на классы эквивалентности, которые не пересекаются. Множество таких классов называется фактор-множеством и обозначается X/ρ. Через a_ρ обозначается класс эквивалентности множества X по ρ, который содержит $a \in X$. Множество всех отношений эквивалентности на X обозначим через $\mathrm{Eq}\,(X)$.

Через i_X обозначается диагональное отношение на множестве X, а через w_X — универсальное отношение: $i_X = \{(a, a) \mid a \in X\}$, $\mathrm{w}_X = X \times X$. Бинарное отношение называется *тривиальным*, если оно диагонально или универсально.

Отношения Грина. *Левым (правым) идеалом* [10] называется такое непустое подмножество A из S, что $SA \subseteq A$ $(AS \subseteq A)$. *Двусторонним идеалом*, или просто идеалом называется такое подмножество, которое является и правым, и левым идеалом.

На любой полугруппе всегда можно определить пять отношений эквивалентности $\mathscr{L}, \mathscr{R}, \mathscr{H}, \mathscr{D}, \mathscr{J}$, так называемые отношения Грина. Два элемента полугруппы S называются $\mathscr{L}$-($\mathscr{R}$-)эквивалентными, если они порождают один и тот же главный левый (правый) идеал в S и $\mathscr{J}$-эквивалентными, если они порождают один и тот же главный двусторонний идеал. Композиция отношений эквивалентности $\mathscr{L}$ и $\mathscr{R}$ обозначается через $\mathscr{D}$, а их пересечение — через $\mathscr{H}$.

Описание отношений Грина на конечной симметрической полугруппе хорошо известно (см., например, [10]): если $\alpha, \beta \in \mathscr{T}(X)$ — произвольные преобразования, то

$\alpha \mathscr{L} \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}\,(\alpha) = \mathrm{im}\,(\beta)$;

$\alpha \mathscr{R} \beta \Leftrightarrow \ker \alpha = \ker \beta$;

$\alpha \mathscr{H} \beta \Leftrightarrow \mathrm{im}\,(\alpha) = \mathrm{im}\,(\beta)$ и $\ker \alpha = \ker \beta$;

$\alpha \mathscr{D} \beta \Leftrightarrow |\,\mathrm{im}\,(\alpha)| = |\,\mathrm{im}\,(\beta)|$;

$\mathscr{D} = \mathscr{J}$.

Сплетение моноида с малой категорией.

Говорят, что задана *категория* $\mathscr{C}$ [4], если задан *класс* $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$ элементов, которые называются *объектами*, и для каждой пары объектов (A, B) из $\mathscr{C}$ задано множество $\mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$, которое называется множеством *морфизмов* A в B. При этом

1. для любых двух морфизмов $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ и $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, C)$ определена композиция морфизмов fg;
2. композиция морфизмов ассоциативна, то есть $f(gh) = (fg)h$ для любых $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$, $g \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(B, C)$, $h \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(C, D)$;
3. для каждого объекта A из $\mathscr{C}$ существует тождественный морфизм $\mathrm{id}_A \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A)$ такой, что $\mathrm{id}_A f = f\,\mathrm{id}_A = f$ для любого $f \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$;
4. множества морфизмов для разных пар объектов попарно не пересекаются.

Класс элементов отличается от *множества* тем, что класс не может быть элементом никакого другого класса, в частности множества. Категория называется *малой*, если класс её объектов является множеством.

Теперь можем определить сплетение моноида с малой категорией (см., напр., [39, 40]). Пусть $\mathscr{C}$ — малая категория, R — произвольный моноид, действующий справа на $\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}$. Обозначим $\mathrm{Mor}\,\mathscr{C} = \bigcup_{A,B\in \mathrm{Ob}\,\mathscr{C}} \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B)$ и рассмотрим

$$W = \{(r, f) \mid r \in R, f \in \mathrm{Map}\,(\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \mathrm{Mor}\,\mathscr{C}),\ \ Af \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, Ar)\}\,,$$

где Ar — действие r на A. Определим произведение произвольных элементов $(r, f), (p, g) \in W$ по правилу

$$(r, f)(p, g) = (rp, fg_r),$$

где $A(fg_r) = (Af)((Ar)g)$ для всех $A \in Ob\mathscr{C}$, и $(Af)((Ar)g)$ является композицией морфизмов в $\mathscr{C}$.

Множество W с такой операцией умножения образовует моноид с единицей $(1, e)$, где $e \in \mathrm{Map}\,(\mathrm{Ob}\,\mathscr{C}, \mathrm{Mor}\,\mathscr{C})$ такой, что $Ae \in \mathrm{Mor}_{\mathscr{C}}(A, A)$ — тождественный морфизм id_A для любого объекта A из $\mathscr{C}$.

Моноид W называется *сплетением моноида R с категорией $\mathscr{C}$* и обозначается $R \operatorname{wr} \mathscr{C}$. Отметим, что приведенная тут нами конструкция является двойственной к конструкции из [17], и использованной в [41], где произведение элементов было определено по правилу:

$$(r, f)(p, g) = (rp, f_p g),$$

в связи с тем, что порядок выполнения композиции отображений осуществлялся в указанных работах справа на лево.

Пример 1.1.1. Рассмотрим для ясности умножение элементов сплетения на примере. Пусть $\operatorname{Ob}\mathscr{C} = \{X_1 = \{1, 2\}, X_2 = \{3\}\}$, а для любых $A, B \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$ положим $\operatorname{Mor}_{\mathscr{C}}(A, B) = \operatorname{Map}(A, B)$. Симметрическая полугруппа

$$\mathscr{T}(\operatorname{Ob}\mathscr{C}) = \{\mathrm{id}_{\operatorname{Ob}\mathscr{C}}, c_{X_1}, c_{X_2}, \left(\begin{smallmatrix} X_1 & X_2 \\ X_2 & X_1 \end{smallmatrix}\right)\}$$

действует справа на множестве $\operatorname{Ob}\mathscr{C}$. Рассмотрим сплетение $\mathscr{T}(\operatorname{Ob}\mathscr{C}) \operatorname{wr} \mathscr{C}$ и элементы $(c_{X_1}, f), (c_{X_2}, g) \in \mathscr{T}(\operatorname{Ob}\mathscr{C}) \operatorname{wr} \mathscr{C}$:

$$(c_{X_1}, f) = \left(c_{X_1}, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \right), (c_{X_2}, g) = \left(c_{X_1}, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \right)$$

По определению $(c_{X_1}, f)(c_{X_1}, g) = (c_{X_1} c_{X_1}, f g_{c_{X_1}}) = (c_{X_1}, f g_{c_{X_1}})$, где $f g_{c_{X_1}}$ — это произведение соответствующих морфизмов $Af \in \operatorname{Mor}_{\mathscr{C}}(A, Ac_{X_1})$, $Ag_{c_{X_1}} \in \operatorname{Mor}_{\mathscr{C}}(Ac_{X_1}, (Ac_{X_1})c_{X_1})$ для любого $A \in \operatorname{Ob}\mathscr{C}$:

$$X_1(f g_{c_{X_1}}) = (X_1 f)((X_1 c_{X_1})g) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right),$$

$$X_2(f g_{c_{X_2}}) = (X_2 f)((X_2 c_{X_2})g) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 2 \end{smallmatrix}\right)\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right).$$

Таким образом, $(c_{X_1}, f)(c_{X_1}, g) = (c_{X_1} c_{X_1}, f g_{c_{X_1}}) = \left(c_{X_1}, \begin{pmatrix} X_1 & X_2 \\ \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) & \left(\begin{smallmatrix} 3 \\ 1 \end{smallmatrix}\right) \end{pmatrix} \right)$.

1.2. Графы, гиперграфы и их эндоморфизмы.

Термины и понятия этого пункта соответствуют [6], [40].

Пусть V — произвольное множество, E — некоторая множество неупорядоченных пар различных элементов из V. Пара $G = (V, E)$ называется *неориентированным графом* [18] с множеством вершин V и множеством рёбер E. Множество вершин и рёбер графа G будем обозначать также через $V(G)$ и $E(G)$ соответственно. Для краткости также будем часто писать G для множества вершин графа G. Под графом с *петлями* будем понимать граф с ребрами, которые соединяют вершины сами с собой. Если пара вершин соединяется несколькими ребрами одного направления, то ребра называют кратными. Везде далее под «графом» будем понимать неориентированный граф с петлями и без кратных рёбер, если не будет сказано иное.

Две вершины x и y графа G называются *смежными*, если множество $\{x, y\}$ является ребром этого графа. Если $e = \{x, y\}$, то говорят, что x и e (y и e) инцидентны. *Окрестностью* $N(x)$ вершины $x \in G$ называется множество всех вершин графа G, смежных с вершиной x.

Эндоморфизмом графа G называется отображение $f : G \to G$ для которого из того, что $\{x, y\} \in E$ следует $\{xf, yf\} \in E$ для любых $x, y \in V$. Если f биективно и f^{-1} тоже эндомоморфизм, то f называется *изоморфизмом.*

Эндоморфизм $f : G \to G$ называется *сильным эндоморфизмом*, если из того, что $\{xf, yf\} \in E$ следует $\{x, y\} \in E$ для любых $x, y \in V$. Группа всех автоморфизмов графа G обозначается $\operatorname{Aut} G$, а моноид его сильных эндоморфизмов — через $\operatorname{SEnd} G$. Сильные эндоморфизмы изучались в [13, 14, 41].

Сейчас мы увидим, что в зависимости от степени накладываемых условий на эндоморфизмы, в литературе также встречаются и другие, «промежуточные», типы эндоморфизмов (см. [40]).

Эндоморфизм $f \in \operatorname{End} G$ называется *полусильным* эндоморфизмом, если для любых $x, y \in E$ из условия $(xf, yf) \in E$ следует, что существуют прообразы $x', y' \in V$, т. е. $xf = x'f$, $yf = y'f$ такие, что $(x', y') \in E$. Множество всех полусильных эндоморфизмов графа G обозначается $\operatorname{HEnd} G$.

Эндоморфизм $f \in \operatorname{End} G$ называется *локально сильным* эндоморфизмом, если для любых $x, y \in V$ из условия $(xf, yf) \in E$ следует, что для каждого прообраза $x' \in V$ элемента xf существует такой прообраз $y' \in V$ элемента yf, что $(x', y') \in E$, и аналогичное утверждение справедливо для каждого прообраза yf. Множество всех локально сильных эндоморфизмов G обозначается $\mathrm{LEnd}\, G$.

Эндоморфизм $f \in \mathrm{End}\, G$ называется *квазисильным* эндоморфизмом, если для любых $x, y \in V$ из условия $(xf, yf) \in E$ следует, что существует такой прообраз $x' \in V$ элемента xf, что для любого прообраза $y' \in V$ элемента yf выполняется $(x', y') \in E$, и аналогичное утверждение справедливо для каждого прообраза yf. Множество всех квазисильных эндоморфизмов реляционной системы G обозначается $\mathrm{QEnd}\, G$.

Таким образом, для графа G имеем цепочку включений

$$\mathrm{End}\, G \supseteq \mathrm{HEnd}\, G \supseteq \mathrm{LEnd}\, G \supseteq \mathrm{QEnd}\, G \supseteq \mathrm{SEnd}\, G \supseteq \mathrm{Aut}\, G.$$

Пусть (X, i_X), (X, w_X) обозначают графы, соответственно, тождественного и универсального отношения на множестве X. Очевидно,

$$\begin{aligned}\mathscr{T}(X) = \mathrm{End}\,(X, i_X) = \mathrm{HEnd}\,(X, i_X) = \mathrm{LEnd}\,(X, i_X) \supseteq \\ \supseteq \mathrm{QEnd}\,(X, i_X) = \mathrm{SEnd}\,(X, i_X) = \mathrm{Aut}\,(X, i_X) = \mathscr{S}(X),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathscr{T}(X) = \mathrm{End}\,(X, \mathrm{w}_X) = \mathrm{HEnd}\,(X, \mathrm{w}_X) = \mathrm{LEnd}\,(X, \mathrm{w}_X) = \\ = \mathrm{QEnd}\,(X, \mathrm{w}_X) = \mathrm{SEnd}\,(X, \mathrm{w}_X) \supseteq \mathrm{Aut}\,(X, \mathrm{w}_X) = \mathscr{S}(X).\end{aligned}$$

Гиперграфы. Пусть V — произвольное непустое множество, $\mathcal{E}$ — семейство непустых (необязательно разных) подмножеств из V. Пара $(V, \mathcal{E})$ называется *гиперграфом* [6, 8] с множеством вершин V и множеством рёбер $\mathcal{E}$. Через H будем обозначать произвольный гиперграф $(V, \mathcal{E})$. Множество вершин и множество рёбер гиперграфа H будем обозначать также через $V(H)$ и $\mathcal{E}(H)$, соответственно. Для краткости также будем часто писать H для множества вершин гиперграфа H. Равные подмножества в $\mathcal{E}$ называются *кратными ребрами*. Если вершина $x \in V$ принадлежит ребру $e \in \mathcal{E}$, говорят, что они *инцидентны*. Число вершин, инцидентных данному ребру $e \in \mathcal{E}$ называется *степенью ребра e* и обозначается $|e|$. Максимальная степень ребра в гиперграфе называется *рангом* гиперграфа. *Степень* $\rho(v)$ *вершины* $v \in V$ — это число рёбер, инцидентных вершине v.

Пример 1.2.1. Пусть $V(H) = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $\mathcal{E}(H) = \{e_1 = \{1, 2, 4\},\ e_1 = \{4, 5\},\ e_3 = \{3\}\}$. Нетрудно видеть, что например, $|e_2| = 2$, $|e_3| = 3$, а $\rho(4) = 2$, $\rho(3) = 1$.

Пусть $H = (V, \mathcal{E})$ — произвольный гиперграф, n — целое неотрицательное число. Если в гиперграфе H нет кратных рёбер и степень любого ребра e равна n, то гиперграф H называется *n-однородным гиперграфом* [6]. Обозначим через C_n класс всех n-однородных гиперграфов.

Под *окрестностью* $\mathcal{N}(x)$ вершины x гиперграфа $H \in C_n$, $n \geqslant 2$, будем понимать семейство таких подмножеств $A \subseteq V$, что

$$|A| = n - 1 \ \&\ A \cup \{x\} \in \mathcal{E}.$$

Преобразование $\varphi : V \to V$ множества вершин гиперграфа $H \in C_n$ называется *эндоморфизмом гиперграфа* [15], если для любого $A \subseteq V$ из того, что $A \in \mathcal{E}$ следует $A\varphi \in \ \mathcal{E}$.

Множество всех эндоморфизмов гиперграфа H образует моноид относительно композиции преобразований и обозначается через $\operatorname{End} H$. Везде далее композиция отображений осуществляется слева направо.

Эндоморфизм $\varphi : V \to V$ гиперграфа $H \in C_n$ называется *сильным эндоморфизмом* гиперграфа, если для любого $A \subseteq V$, $|A| = n$, из того, что $A\varphi \in \mathcal{E}$ следует $A \in \mathcal{E}$.

Через $\operatorname{SEnd} H$ обозначим множество всех сильных эндоморфизмов гирпеграфа H. Понятно, что $\operatorname{SEnd} H$ является подмоноидом моноида $\operatorname{End} H$.

Если ранг гиперграфа H равен 2, то определение эндоморфизма (сильного эндоморфизма) n-однородного гиперграфа совпадает с определением эндоморфизма (сильного эндоморфизма [41]) неориентированного графа. Однако, если множество рёбер гиперграфа задано только лишь одноэлементными подмножествами, то при рассмотрении сильных эндоморфизмов этого гиперграфа следует вносить ясность, что представляет собой этот гиперграф — 1-однородный гиперграф, или обычный граф с петлями. Потому как в этом случае определения сильного эндоморфизма для неориентированного графа (O_1) и сильного эндоморфизма для n-однородного гиперграфа (O_2) неэквивалентны. Так, например, любое константное преобразование полного 1-однородного гиперграфа будет сильным эндоморфизмом согласно (O_2), но не будет сильным согласно (O_1). Очевидно, что по определению (O_1) константное преобразование будет сильным эндоморфизмом графа G тогда и только тогда, когда G либо вполне несвязный граф (граф без рёбер), либо полный граф с петлями (каждая пара вершин соединена ребром).

1.3. Эндоморфизмы отношений эквивалентности

В [29] поставлен вопрос, при каких условиях множество всех полусильных (локально сильных, квазисильных) эндоморфизмов неориентированного графа будет полугруппой. В [24], например, показано, что множество всех локально сильных эндоморфизмов неориентированной цепи образует моноид, только если длина цепи l — простое число или равное 4, для ориентированной цепи — также при $l = 8$. Рассмотрим ситуацию, когда граф представляет некоторое отношение эквивалентности. Граф отношения эквивалентности $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$ на множестве X будем обозначать (X, α).

Утверждение 1.3.1. *Имеют место следующие утверждения:*

(i) *преобразование* $f \in \mathscr{T}(X)$ *является эндоморфизмом отношения* $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$ *тогда и только тогда, когда для любого* $A \in X/\alpha$ *существует* $B \in X/\alpha$ *такое, что* $Af \subseteq B$ (см. [22])*;*

(ii) *эндоморфизм* $f \in \mathrm{End}\,(X, \alpha)$ *отношения* $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$ *является полусильным тогда и только тогда, когда для любого* $B \in X/\alpha$ *такого, что* $B \cap \mathrm{im}\,(f) \neq \varnothing$*, и любых* $a, b \in B \cap \mathrm{im}\,(f)$ *существует* $A \in X/\alpha$ *такой, что* $a, b \in Af$*;*

(iii) *эндоморфизм* $f \in \mathrm{End}\,(X, \alpha)$ *отношения* $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$ *является локально сильным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда для любых*

$A, B, C \in X/\alpha$ из того, что $Af \subseteq C$ и $Bf \subseteq C$ следует $Af = Bf$;

(iv) *для всякого $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$ справедливо $\mathrm{QEnd}\,(X, \alpha) = \mathrm{SEnd}\,(X, \alpha)$.*

Доказательство. (ii) ($\Rightarrow$) Пусть f – полусильный эндоморфизм отношения эквивалентности α, $B \in X/\alpha$, $B \cap \mathrm{im}\,(f) \neq \varnothing$. Предположим, что $a, b \in B \cap \mathrm{im}\,(f)$, следовательно, $(a, b) \in \alpha$. Так как $f \in \mathrm{HEnd}\,(X, \alpha)$, то среди множества прообразов af^{-1}, bf^{-1} найдутся такие элементы a' и b' соответственно, что $(a', b') \in \alpha$, то есть $a', b' \in C$ для некоторого $C \in X/\alpha$. Следовательно, $a'f = a$, $b'f = b \in Cf$.

($\Leftarrow$) Пусть $f \in \mathrm{End}\,(X, \alpha)$ – произвольный эндоморфизм, $(a', b') \in \alpha$ для некоторых $a', b' \in \mathrm{im}\,(f)$. Тогда $a', b' \in B \cap \mathrm{im}\,(f)$ для некоторого $B \in X/\alpha$ и по условию леммы в X/α существует такой класс эквивалентности A, что $a', b' \in Af$. Следовательно, существуют прообразы $a \in a'f^{-1}$, $b \in b'f^{-1}$, для которых $(a, b) \in \alpha$: в самом деле, для любой пары (x, y) из $(a'f^{-1} \cap A) \times (b'f^{-1} \cap A)$, очевидно, $(x, y) \in \alpha$. Таким образом, $f \in \mathrm{HEnd}\,(X, \alpha)$.

(iii) ($\Rightarrow$) Пусть $f \in \mathrm{LEnd}\,(X, \alpha)$ и выполняются включения $Af \subseteq C$, $Bf \subseteq C$ для некоторых $A, B, C \in X/\alpha$. Предположим, что $Af \neq Bf$, тогда $A \neq B$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $y \notin Af$, $y \in Bf$ для некоторого $y \in C$. Для любого $x \in Af$, очевидно, $(x, y) \in \alpha$, но для прообраза $x' \in xf^{-1} \cap A$ не существует такого прообраза y' элемента y, что $(x', y') \in \alpha$, а это противоречит условию $f \in \mathrm{LEnd}\,(X, \alpha)$.

($\Leftarrow$) Пусть $f \in \mathrm{End}\,(X, \alpha)$ – произвольный эндоморфизм и включения $Af \subseteq C$, $Bf \subseteq C$ для любых $A, B, C \in X/\alpha$ влекут $Af = Bf$. Тогда для любых $x, y \in C \cap \mathrm{im}\,(f)$ из условия $(x, y) \in \alpha$ следует, что для каждого прообраза $x' \in xf^{-1}$ существует $y' \in yf^{-1} \cap (x')_\alpha$ такой, что $(x', y') \in \alpha$. Аналогичное утверждение справедливо для каждого прообраза yf^{-1}. Таким образом, f – локально сильный эндоморфизм отношения $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$.

(iv) Очевидно, достаточно доказать включение

$$\mathrm{QEnd}\,(X, \alpha) \subseteq \mathrm{SEnd}\,(X, \alpha).$$

Пусть $f \in \mathrm{QEnd}\,(X, \alpha)$. Отметим, что так как f – квазисильный, то для любого

$c \in \mathrm{im}\,(f)$ в cf^{-1} существует прообраз c', α-эквивалентный любому другому прообразу элемента c. Следовательно, все прообразы любого фиксированного элемента находятся в одном и том же классе эквивалентности, то есть несколько классов не могут одновременно отображаться в c.

Пусть $a, b \in \mathrm{im}\,(f)$ и $(a, b) \in \alpha$. По определению в af^{-1} существует такой элемент x, что $(x, y) \in \alpha$ для любого $y \in bf^{-1}$. Так как $af^{-1} \subseteq x_\alpha$, последнее равносильно условию: для любых $x \in af^{-1}$ и $y \in bf^{-1}$ выполняется $(x, y) \in \alpha$. Таким образом, f – сильный эндоморфизм. $\square$

Напомним, что моноид сильных эндоморфизмов произвольного неориентированного графа описан в [41] (теорема 2.1.2 этой диссертации). В частности, нетрудно видеть из этой теоремы, что для отношения эквивалентности α моноид $\mathrm{SEnd}\,(X, \alpha)$ изоморфен сплетению симметрической группы с подходящей малой категорией. Таким образом, множество $\mathrm{QEnd}\,(X, \alpha)$ является полугруппой для любого отношения эквивалентности. Можно ли сказать то же самое для множеств полусильных и локально сильных эндоморфизмов произвольного отношения эквивалентности? Нетрудно убедиться, что если $|X| \leqslant 2$, то $\mathrm{End}\,(X, \alpha) = \mathrm{HEnd}\,(X, \alpha) = \mathrm{LEnd}\,(X, \alpha)$. Однако в общем случае ответ отрицательный.

Действительно, пусть, например, $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $\alpha = \{1, 2\}^2 \cup \{3\}^2 \cup \{4\}^2$. Тогда по утверждению 1.3.1, (ii) имеем $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \in$ $\in \mathrm{HEnd}\,(X, \alpha)$, однако произведение $fg = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right) \notin \mathrm{HEnd}\,(X, \alpha)$. Множество всех полусильных эндоморфизмов отношения эквивалентности в общем случае не является полугруппой.

Пусть теперь на X задана эквивалентность $\alpha = \{1, 2\}^2 \cup \{3, 4\}^2$. Эндоморфизмы $f = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$, $g = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ удовлетворяют пункту (iii) утвеждения 1.3.1, а их произведение $fg = \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{smallmatrix}\right)$ не является локально сильным эндоморфизмом.

Как показывают следующие два утверждения множества $\mathrm{HEnd}\,(X, \alpha)$ и $\mathrm{LEnd}\,(X, \alpha)$ в общем случае почти никогда не образовуют полугруппу.

Утверждение 1.3.2. *Пусть* $|X| > 2$, $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$. *Множество* $\mathrm{HEnd}\,(X, \alpha)$

всех полусильных эндоморфизмов отношения эквивалентности α является полугруппой тогда и только тогда, когда α – тривиальное отношение эквивалентности.

Доказательство. Пусть $\mathrm{HEnd}\,(X,\alpha)$ – полугруппа, α – нетривиальное отношение эквивалентности на X. Тогда в фактор-множестве X/α найдется класс с мощностью > 1, обозначим его через A. Пусть $B \in X/\alpha$ – произвольный фиксированный класс, а $\delta : X/\alpha \to X$ – отображение, которое ставит в соответствие каждому классу произвольный фиксированный элемент из этого класса. Обозначим через y элемент из A, отличный от $A\delta$. Рассмотрим следующие полусильные эндоморфизмы f и g:

$$xf = C\delta, \text{ если } \ x \in C, \quad C \in X/\alpha,$$

$$xg = \begin{cases} x, & \text{если } x \in A, \\ y, & \text{если } x \in B, \\ x_\alpha\delta, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $fg = \left(\begin{smallmatrix} A & B & C & D & \cdots \\ A\delta & y & C\delta & D\delta & \cdots \end{smallmatrix}\right)$. Таким образом, для класса A и элементов $A\delta, y \in A \cap \mathrm{im}\,(fg)$ не выполняется (ii) утверждения 1.3.1. Следовательно, $fg \notin \mathrm{HEnd}\,(X,\alpha)$, что противоречит начальному предположению.

С другой стороны, если α – тривиально, то, как было отмечено в начале этого параграфа, $\mathrm{HEnd}\,(X,\alpha) = \mathscr{T}(X)$. $\square$

Утверждение 1.3.3. *Множество* $\mathrm{LEnd}\,(X,\alpha)$ *всех локально сильных эндоморфизмов отношения эквивалентности α на множестве $X \neq \varnothing$ является полугруппой тогда и только тогда, когда $\alpha = \mathrm{w}_A \cup i_{X\setminus A}$ для некоторого $A \subseteq X$.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Пусть $\mathrm{LEnd}\,(X,\alpha)$ – полугруппа. Если $|X| < 4$, то α такое, как указано в условии данного утверждения. Пусть $|X| \geqslant 4$ и $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$ такое, что $\alpha \neq \mathrm{w}_A \cup i_{X\setminus A}$ для любого $A \subseteq X$. Тогда фактор-множество X/α содержит хотя бы два класса эквивалентности A, B с мощностью $\geqslant 2$. Пусть $a, a' \in A$, $a \neq a'$, $b \in B$. Рассмотрим следующие локально сильные эндоморфизмы:

$$x\phi = \begin{cases} a, & \text{если } x \in A, \\ b, & \text{если } x \in B, \\ x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \qquad x\psi = \begin{cases} a, & \text{если } x = a \text{ или } x \in B, x \neq b, \\ a', & \text{если } x = b \text{ или } x \in A, x \neq a, \\ x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Для любого $x \in X$ имеем

$$x(\phi\psi) = \begin{cases} a, & \text{если } x \in A, \\ a', & \text{если } x \in B, \\ x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Следовательно, $\phi\psi \notin \mathrm{LEnd}\,(X, \alpha)$, что противоречит исходному предположению.

($\Leftarrow$) Пусть $\alpha = \mathrm{w}_A \cup i_{X \setminus A}$ для некоторого $A \subseteq X$. Если $|A| \leqslant 1$ или $A = X$, то $\alpha = i_X$ или $\alpha = \mathrm{w}_X$ и, следовательно, $\mathrm{LEnd}\,(X, \alpha) = \mathscr{T}(X)$ – полугруппа. Пусть $|A| \geqslant 2$. Учитывая, что X/α содержит единственный класс эквивалентности неединичной мощности, согласно (iii) утверждения 1.3.1, все элементы из $\mathrm{LEnd}\,(X, \alpha)$ представляют собой объединение трех попарно непересекающихся множеств:

$$\Phi_1 = \{\phi \in \mathscr{T}(X) |\ \phi|_A \in \mathscr{T}(A),\ \phi|_A \notin I(A),\ \phi|_{X \setminus A} \in \mathscr{T}(X \setminus A)\},$$

$$\Phi_2 = \{\phi \in \mathscr{T}(X) |\ \phi|_A \in I(A),\ \mathrm{im}\,(\phi) \subseteq X \setminus A\},$$

$$\Phi_3 = \bigcup_{a \in A} \Phi^{(a)},$$

$$\Phi^{(a)} = \{\phi \in \mathscr{T}(X) |\ \phi|_A \in I(A),\ \ a \in \mathrm{im}\,(\phi),\ \ \mathrm{im}\,(\phi) \subseteq (X \setminus A) \cup \{a\}\}.$$

Нетрудно видеть, что $\Phi_1 \cup \Phi_2 \cup \Phi_3$ замкнуто по умножению. Таким образом, множество $\mathrm{LEnd}\,(X, \alpha)$ образует подполугруппу $\mathscr{T}(X)$. $\square$

Отметим, что если X – конечно, $|A| \leqslant 1$ или $A = X$, очевидно $|\,\mathrm{LEnd}\,(X, \alpha)| = |X|^{|X|}$.

Как известно ([12], с. 210), число всех сюръективных отображений $sur\ n^m$ из m-элементного множества в n-элементное множество равно $n!S(m, n)$, где $S(m, n)$ – число Стирлинга второго рода.

Следствие 1.3.1. *Пусть X – конечное множество, $\alpha = \mathrm{w}_A \cup i_{X\setminus A}$ для некоторого $A \subset X$, $|A| \geqslant 2$. Тогда*

$$|\operatorname{LEnd}(X,\alpha)| = (k^k - k)l^l + l^{l+1} + k\sum_{m=1}^{l+1} C_l^{m-1} sur\ m^{(l+1)},$$

где k – мощность множества A, l – мощность множества $X\setminus A$.

Доказательство. Пусть $A \subseteq X$ – произвольное непустое подмножество. Через $I(A)$ будем обозначать множество всех константных отображений

$$\nu_t : A \to X : a \mapsto t,\ t \in X.$$

Нетрудно видеть, что $|\Phi_1| = (k^k - k)l^l$, $|\Phi_2| = l^{l+1}$. Так как для произвольного преобразования из $\varphi \in \Phi^{(a)}$ ранга m, $m \leqslant l+1$ справедливо $\varphi|_A \in I(A)$, то $\Phi^{(a)}$ равномощно множеству всех сюръективных преобразований из $l+1$-элементного множества в m-элементное. Причем поскольку элемент a определен и фиксирован, то остальные $m-1$ элементов можно выбрать C_l^{m-1} способами. Таким образом,

$$|\Phi^{(a)}| = sur\ 1^{l+1} + C_l^1 sur\ 2^{l+1} + C_l^2 sur\ 3^{l+1} + \dots$$
$$\dots + C_l^{l-1} sur\ l^{l+1} + sur\ (l+1)^{l+1} = \sum_{m=1}^{l+1} C_l^{m-1} sur\ m^{(l+1)},$$

и, следовательно, $|\Phi_3| = k|\Phi^{(a)}| = k\sum\limits_{m=1}^{l+1} C_l^{m-1} sur\ m^{(l+1)}$. Поскольку $\Phi_1 \cap \Phi_2 \cap \Phi_3 = \varnothing$, получаем искомую формулу. $\square$

Регулярность полугрупп эндоморфизмов отношения эквивалентности. Хорошо известно, что полугруппа $\mathscr{T}(X)$ регулярна, однако не каждая подполугруппа этой полугруппы регулярна. Естественно возникает вопрос исследование регулярности различных ее подполугрупп.

Условия регулярности полугрупп эндоморфизмов упорядоченного и квазиупорядоченного множеств исследованы в [11], а для конечных и счетных цепей в [2], [9]. Классы двудольных и рефлексивных графов, у которых моноид эндоморфизмов регулярен (далее End-регулярные графы) выделены в [23, 33, 56]. В

[45] рассматриваются бесконечное семейство End-регулярных графов, а также способ построения других нетривиальных End-регулярных графов на основе уже имеющегося с таким свойством. В [34], [37] исследуются End-регулярные графы, полученные при помощи сплетения и объединения графов с различными ограничениями (например, сплетения End-регулярных и SEnd-регулярных графов).

Целый ряд работ китайских математиков посвящен изучению отношений Грина и регулярных элементов разных полугрупп и подполугрупп эндоморфизмов графов эквивалентностей: эндоморфизмы изучались в [49, 46]; сильные эндоморфизмы в [30], изоморфизмы в [31, 32].

Следствие 1.3.2. *Пусть X — конечное множество. Полугруппы* $\mathrm{HEnd}\,(X,\alpha)$, $\mathrm{LEnd}\,(X,\alpha)$, $\mathrm{QEnd}\,(X,\alpha)$ *регулярны.*

Доказательство. Поскольку множество $\mathrm{HEnd}\,(X,\alpha)$ является полугруппой только если $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$ тривиально, а в таком случае $\mathrm{HEnd}\,(X,\alpha) = \mathscr{T}(X)$, то полугруппа $\mathrm{HEnd}\,(X,\alpha)$ регулярна.

Рассмотрим полугруппу $\mathrm{LEnd}\,(X,\alpha)$. По утверждению 1.3.3 $\alpha = \mathrm{w}_A \cup i_{X\setminus A}$, $A \subseteq X$. Если $|A| \leqslant 1$ или $A = X$, то $\mathrm{LEnd}\,(X,\alpha) = \mathscr{T}(X)$, следовательно $\mathrm{LEnd}\,(X,\alpha)$ регулярна. Пусть $\varphi \in \mathrm{LEnd}\,(X,\alpha)$ – произвольный локально сильный эндоморфизм. Построим такой $\psi \in \mathrm{LEnd}\,(X,\alpha)$, для которого $\varphi = \varphi\psi\varphi$. Рассмотрим возможные случаи.

Если $\varphi \in \Phi_1$, то определим преобразование ψ множества X следующим образом:

$$x\psi = \begin{cases} y, y \in x\phi^{-1}, & \text{если } x \in \mathrm{im}\,(\phi), \\ x, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно видеть, что $\psi|_A \in \mathscr{T}(A)$, $\psi|_{X\setminus A} \in \mathscr{T}(X\setminus A)$ и $\varphi = \varphi\psi\varphi$. Поскольку ранг $\varphi|_A$ всегда $\geqslant 2$, имеем $\psi|_A \notin I(A)$. Таким образом, $\psi \in \Phi_1$.

Пусть $\varphi \in \Phi_2$, $b \in X\setminus A$ – произвольный фиксированный элемент. Положим

$$x\psi = \begin{cases} y, y \in x\phi^{-1}, & \text{если } x \in \mathrm{im}\,(\phi), \\ b, & \text{если } x \in A, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Тогда $\psi \in \Phi_2 \cup \Phi_3$ и $\varphi = \varphi\psi\varphi$.

Пусть $\varphi \in \Phi^{(a)} \subseteq \Phi_3$, $a \in A$. Определим ψ так, что

$$x\psi = \begin{cases} y, y \in x\phi^{-1}, & \text{если } x \in \mathrm{im}\,(\phi), \\ a\psi, & \text{если } x \in A\backslash\{a\}, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

В этом случае $\psi \in \Phi_2 \cup \Phi_3$ и $\varphi = \varphi\psi\varphi$.

Как известно, если X – конечное множество, то моноид $\mathrm{SEnd}\,(X, \alpha)$ регулярен (см., напр., [41]). Таким образом, для любой эквивалентности $\alpha \in \mathrm{Eq}\,(X)$, где X – конечное множество, полугруппа $\mathrm{QEnd}\,(X, \alpha)$ является регулярной. $\square$

1.4. $\mathscr{H}$-, и $\mathscr{R}$-сечения конечной симметрической полугруппы

В литературе часто встречается родственное к понятию «сечение» понятие «трансверсаль» («inverse transversal» [25], «semilatice transversal» [50]). Мы будем придерживаться определений, принятых в [27]. Там же читатель может найти дополнительную информацию о строении известных сечений конечной симметрической полугруппы.

Если $D = \{Y_i \mid i \in I\}$ — совокупность некоторых подмножеств данного множества X, то *трансверсалью* семейства D называется множество всех представителей, взятых в точности по одному из каждого подмножества $Y_i, i \in I$. Пусть S — некоторая полугруппа и ρ — эквивалентность на ней. Подполугруппа полугруппы S называется *ρ-сечением* S [27], если она содержит в точности по одному представителю из каждого класса эквивалентности.

Для конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ описаны $\mathscr{H}$-, и $\mathscr{R}$-сечения [52]. Для полноты покажем, как устроены $\mathscr{H}$-, и $\mathscr{R}$-сечения полугруппы $\mathscr{T}_n$. Так, для $\mathscr{H}$-сечений конечной симметрической полугруппы имеем

Теорема 1.4.1. *[52] Справедливы следующие утверждения:*

(i) *если $\mathscr{T}_1$, то существует единственное $\mathscr{H}$-сечение $H = \mathscr{T}_1$;*

(ii) *если $\mathscr{T}_2$, то существует единственное $\mathscr{H}$-сечение*

$$H = \left\{ i_{\{1,2\}}, c_1, c_2 \right\};$$

(iii) *для $n > 2$ полугруппа $\mathscr{T}_n$ не имеет $\mathscr{H}$-сечений.*

Пусть $N = \{1, 2, \ldots, n\}$. Зафиксируем линейный порядок на N:

$$N = \{u_1 \prec u_2 \prec \ldots \prec u_n\}.$$

Для непустого множества $A \subset N$ обозначим через $\min(A, \prec)$ минимальный элемент A относительно порядка $\prec$. Если A, B не пересекаются, будем говорить, что $A \prec B$, если $\min(A, \prec) \prec \min(B, \prec)$. Пусть $R(\prec)$ обозначает множество всех элементов $\mathscr{T}_n$, вида

$$\begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \ldots & A_k \\ u_1 & u_2 & \ldots & u_k \end{pmatrix},$$

где $A_1 \prec A_2 \prec \ldots \prec A_k$. Имеет место

Теорема 1.4.2. *[52] Справедливы следующие утверждения:*

(i) *для любого линейного порядка $\prec$ на N множестве $R(\prec)$ является $\mathscr{R}$-сечением полугруппы $\mathscr{T}_n$;*

(ii) *для двух линейных порядков $\prec_1$ и $\prec_2$ на множестве N равенство $R(\prec_1) = R(\prec_2)$ выполняется тогда и только тогда, когда $\prec_1 = \prec_2$;*

(iii) *всякое $\mathscr{R}$-сечение полугруппы $\mathscr{T}_n$ имеет вид $R(\prec)$ для некоторого линейного порядка $\prec$ на N.*

РАЗДЕЛ 2
ТОЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОНОИДОВ СИЛЬНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ ГИПЕРГРАФОВ

В этом разделе найдены точные представления моноидов сильных эндоморфизмов бесконечных графов, а также конечных и бесконечных n-однородных гиперграфов. Для n-однородных гиперграфов исследуется свойство регулярности рассматриваемых моноидов. Мы также коснемся вопроса определяемости гиперграфов своими моноидами сильных эндоморфизмов.

Результаты этого раздела, касающиеся конечных n-однородных гиперграфов опубликованы в работах [60, 71], бесконечных графов и n-однородных гиперграфов в [58, 70], произвольных графов и n-однородных гиперграфов в [65].

2.1. Сильные эндоморфизмы бесконечных графов

В настоящем пункте мы определим один класс бесконечных графов, моноид всех сильных эндоморфизмов которых изоморфен сплетению моноида преобразований и некоторой малой категории. Будет также показано, что аналогичный результат справедлив для некоторого подмоноида моноида сильных эндоморфизмов произвольного бесконечного графа.

2.1.1. Об одном классе бесконечных графов. Пусть $G = (V, E)$ — произвольный граф. Напомним, что окрестностью $N(x)$ вершины $x \in V$ называется множество всех вершин графа G, смежных с вершиной x. На множестве вершин графа V определим отношение эквивалентности ν по правилу

$$x \; \nu \; y \Leftrightarrow N(x) = N(y).$$

Каноническим сильным фактор-графом G/ν [41] называется граф, множество вершин которого — фактор-множество V/ν, а множество $\{a_\nu, b_\nu\}$ является ребром тогда и только тогда, когда $\{a,b\} \in E(G)$.

Пусть $\mathfrak{G}$ — класс всех бесконечных графов G, для которых при любом $\varphi \in \operatorname{SEnd} G$ выполняется условие:

$$\forall\, x_\nu \in V(G)/\nu \;\; \exists\, y_\nu \in V(G)/\nu : x_\nu\varphi \subseteq y_\nu. \tag{2.1}$$

Определенный таким образом класс $\mathfrak{G}$ непуст. Рассмотрим, например, бесконечный граф изображенный на рис. 2.1:

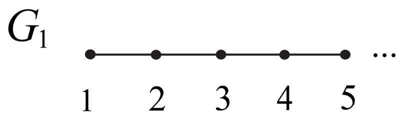


Рис. 2.1. Граф G_1 из класса $\mathfrak{G}$.

Пусть $k \in V(G_1)$ — фиксированное число. Тогда преобразование

$$x\varphi_k = x + k - 1$$

задает сильный эндоморфизм графа G_1. Более того, все сильные эндоморфизмы графа G_1 исчерпываются сильными эндоморфизмами вида φ_k, $k \in V(G_1)$.

Понятно, что тождественное преобразование является сильным эндоморфизмом, который можно представить как φ_1.

Пусть $\varphi \in \operatorname{SEnd} G_1$ и $a, b \in V(G_1)$ такие, что $a\varphi = b$. Если $a = b = 1$, то $\varphi = \varphi_1$.

Если $b = 1$, а элемент $a \neq 1$, то $(a-1)\varphi = 2 = (a+1)\varphi$. Тогда, поскольку $\{a+1, a+2\} \in E(G_1)$, то $\{a+1, a+2\}\varphi = \{(a-1)\varphi, (a+2)\varphi\} \in E(G_1)$, откуда $\{a-1, a+2\} \in E(G_1)$ и мы приходим к противоречию.

Пусть $b \neq 1$ (a — произвольный), тогда $(a+1)\varphi$ может быть равным либо $b+1$, либо $b-1$. Предположим сначала, что $(a+1)\varphi = b-1$. В случае, если $(a+2)\varphi = b$, получаем, что $(a+3)\varphi$ равно $b-1$ или $b+1$. В каждом из этих случаев имеем тогда $\{a, a+3\} \in E(G_1)$, поскольку φ — сильный эндоморфизм. Следовательно, $(a+2)\varphi = b-2$. Аналогично рассуждая можно показать,что вся последовательность образов $a\varphi, (a+1)\varphi, (a+2)\varphi, \ldots, (a+b-1)\varphi$ убывает.

Тогда $(a+b-1)\varphi = 1$, где $a+b-1 \neq 1$ и, как было показано выше, в этом случае получаем противоречие. Следовательно, $(a+1)\varphi = b+1$.

Рассуждая также, получаем $(a+2)\varphi = b+2$, $(a+3)\varphi = b+3$ и т.д. Тогда если $a = 1$, то единственным образом получаем

$$1\varphi = b,\ 2\varphi = b+1,\ 3\varphi = b+2,\ \ldots, n\varphi = b+n-1, \ldots$$

и, следовательно, $\varphi = \varphi_b$.

Кроме того, поскольку все классы эквивалентности по отношению ν одноэлементны, то для всякого класса $x_\nu \in V(G_1/\nu)$ имеем

$$x_\nu \varphi_k = \{x\varphi_k\} = \{x+k-1\} = (x+k-1)_\nu,$$

т. е. выполняется условие (2.1). Таким образом, $G_1 \in \mathfrak{G}$.

Заметим, что класс $\mathfrak{G}$ не совпадает с классом всех бесконечных графов. Например, граф G_2, изображенный на рис. 2.2, не принадлежит классу $\mathfrak{G}$.

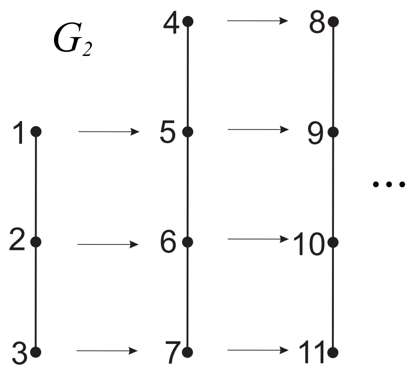


Рис. 2.2. Граф G_2, не принадлежащий классу $\mathfrak{G}$.

Действительно, пусть преобразование γ графа G_2 такое, как показано на рисунке. Нетрудно убедиться, что γ — сильный эндоморфизм, при этом в точности две вершины этого графа ν-эквивалентны и образуют единственный двухэлементный класс $1_\nu = \{1, 3\}$ в каноническом сильном фактор-графе G_2/ν. Однако $1\gamma = 5 \in 5_\nu$, а $3\gamma = 7 \in 7_\nu$, следовательно, для класса 1_ν условие (2.1) не выполняется.

2.1.2. Сильные эндоморфизмы бесконечных графов выделенного класса. Обозначим через $\mathrm{SMon}\, G$ полугрупппу всех сильных инъективных эндоморфизмов графа G. Элементы из $\mathrm{SMon}\,G$ будем называть сильными мономорфизмами. Понятно, что если граф G конечный, то $\mathrm{SMon}\,G = \mathrm{Aut}\,G$.

Лемма 2.1.1. *Пусть G — произвольный граф класса $\mathfrak{G}$. Преобразование φ графа G будет его сильным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда преобразование*

$$\varphi^* : G/\nu \to G/\nu : x_\nu \mapsto (x\varphi)_\nu$$

является сильным мономорфизмом фактор-графа G/ν.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{SEnd}\,G$, тогда φ отображает элементы из разных классов эквивалентности ν в элементы разных классов. Действительно, если $x, y \in V(G)$ такие, что $x_\nu \neq y_\nu$, то не нарушая общности рассуждений можно предположить, что существует вершина $a \in N(x)$, которая не принадлежит $N(y)$. Тогда $\{x, a\}\varphi = \{x\varphi, a\varphi\} \in E(G)$, и $\{y, a\}\varphi = \{y\varphi, a\varphi\} \notin E(G)$, следовательно, $(x\varphi)_\nu \neq (y\varphi)_\nu$. Таким образом, φ^* инъективно.

Пусть $x, y \in V(G)$. Тогда

$$\{x_\nu, y_\nu\} \in E(G/\nu) \Leftrightarrow \{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{x\varphi, y\varphi\} \in E(G) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{(x\varphi)_\nu, (y\varphi)_\nu\} = \{x_\nu, y_\nu\}\varphi^* \in E(G/\nu).$$

Таким образом, φ^* — сильный мономорфизм графа G/ν.

Пусть теперь преобразование φ графа G такое, что $\varphi^* \in \mathrm{SMon}\,G/\nu$. Тогда для любых $x, y \in V(G)$

$$\{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{x_\nu, y_\nu\} \in E(G/\nu) \Leftrightarrow \{x_\nu, y_\nu\}\varphi^* =$$

$$= \{(x\varphi)_\nu, (y\varphi)_\nu\} \in E(G/\nu) \Leftrightarrow \{x\varphi, y\varphi\} \in E(G).$$

$\square$

Утверждение 2.1.1. *Для каждого графа G класса $\mathfrak{G}$ справедливо*

$$\mathrm{SEnd}\,G/\nu = \mathrm{SMon}\,G/\nu.$$

Доказательство. Пусть $\pi \in \mathrm{SEnd}\,G/\nu$. Зафиксируем в каждом классе $A \in V(G)/\nu$ по представителю $\hat{A}$ и определим на множестве $V(G)$ преобразование

$\hat{\pi}$, полагая $a\hat{\pi} = \widehat{a_\nu\pi}$ для всех $a \in V(G)$. Для любых не ν-эквивалентных $x, y \in V(G)$

$$\{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{x_\nu, y_\nu\} \in E(G/\nu) \Leftrightarrow \{x_\nu\pi, y_\nu\pi\} \in E(G/\nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\widehat{x_\nu\pi}, \widehat{y_\nu\pi}\} = \{x, y\}\hat{\pi} \in E(G).$$

Если же $x\nu y$, то

$$\{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{x_\nu\} \in E(G/\nu) \Leftrightarrow \{x_\nu\pi\} \in E(G/\nu) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{\widehat{x_\nu\pi}\} = \{x, y\}\hat{\pi} \in E(G).$$

Таким образом, $\hat{\pi} \in \operatorname{SEnd} G$. Из построения $\hat{\pi}$ видно, что $\hat{\pi}^* = \pi$, следовательно, согласно Лемме 2.1.1 $\pi \in \operatorname{SMon} G/\nu$. □

Определение 2.1.1. *Обобщенным лексикографическим произведением* $U[(Y_u)_{u\in U}]$ *графа* G *и графов* $(Y_u)_{u\in U}$ называется такой граф, у которого

$$V(U[(Y_u)_{u\in U}]) = \{(u, y_u) | u \in U, y_u \in Y_u\},$$

а $\{(u, y_u), (v, y'_v)\}$ является ребром $U[(Y_u)_{u\in U}]$ тогда и только тогда, когда $\{u, v\} \in E(U)$ или $u = v$ и $\{y_u, y'_u\} \in E(Y_u)$.

Вполне несвязный граф, т. е. граф без рёбер называется *0-графом.*

Предложение 2.1.1. [41] *Пусть* G *— произвольный неориентированный граф без кратных рёбер,* $U = G/\nu$ *— его канонический сильный фактор-граф,* Y_u*,* $u \in U$ *— 0-графы такие, что* $|Y_u| = |u|$ *для всех* $u \in U$*. Тогда*

$$G \cong U[(Y_u)_{u\in U}].$$

Далее будем отождествлять вершины графа G и соответствующие им элементы из обобщенного лексикографического произведения $U[(Y_u)_{u\in U}]$. Пусть $G = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — произвольный граф класса $\mathfrak{G}$. Определим малую категорию $\mathcal{K}_G$, полагая $\operatorname{Ob}\mathcal{K}_G = \{Y_u \mid u \in U\}$, и обозначая для любых двух объектов $Y_u, Y_v \in \operatorname{Ob}\mathcal{K}_G$ через $\operatorname{Mor}_{\mathcal{K}}(Y_u, Y_v)$ множество всех отображений из Y_u в Y_v. Тогда

$$\operatorname{Mor}\mathcal{K}_G = \bigcup_{u,v\in U} \operatorname{Mor}_{\mathcal{K}_G}(Y_u, Y_v)$$

и моноид $\mathrm{SMon}\,U$ естественно действует справа на $\mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_G$:

$$Y_u\alpha = Y_{u\alpha},\ \alpha \in \mathrm{SMon}\,U.$$

Таким образом, получаем сплетение $\mathrm{SMon}\,U$ wr $\mathcal{K}_G$ моноида $\mathrm{SMon}\,U$ и малой категории $\mathcal{K}_G$.

Пусть $(\alpha, f) \in \mathrm{SMon}\,U$ wr $\mathcal{K}_G$, где $\alpha \in \mathrm{SMon}\,U$, $f \in \mathrm{Map}\,(\mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_G, \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}_G)$. Тогда $Y_u f \in \mathrm{Map}(Y_u, Y_{u\alpha})$ для всех $Y_u \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_G$. Через f_u будем обозначать $Y_u f$, где $y_u f_u \in Y_{u\alpha}$ для всех $y_u \in Y_u$. Одним из основных результатов этой работы является

Теорема 2.1.1. *Пусть $G = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — произвольный граф класса $\mathfrak{G}$, $\mathcal{K}_G$ — малая категория, определенная ранее. Тогда*

$$\mathrm{SEnd}\,G \cong \mathrm{SMon}\,U \text{ wr } \mathcal{K}_G.$$

Доказательство. Пусть $G \in \mathfrak{G}$ — произвольный граф, $\zeta \in \mathrm{SEnd}\,G$. По Лемме 2.1.1 преобразование $\zeta^* \in \mathrm{SMon}\,U$. Определим отображение

$$p : \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_G \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}_G : Y_u \mapsto p_u,$$

где для каждого $u \in U$ имеем

$$p_u : Y_u \to Y_{u\zeta^*} : y_u \mapsto y_v, \quad \text{если } (u, y_u)\zeta = (v, y_v).$$

Таким образом, $(u, y_u)\zeta = (u\zeta^*, y_u p_u)$, и корректно заданным будет отображение:

$$\xi : \mathrm{SEnd}\,G \to \mathrm{SMon}\,U \text{ wr } \mathcal{K}_G : \zeta \mapsto (\zeta^*, p).$$

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{SEnd}\,G$ и $\varphi\xi = (\varphi^*, g), \psi\xi = (\psi^*, h), (\varphi\psi)\xi = \big((\varphi\psi)^*, f\big)$. Тогда

$$(u(\varphi\psi)^*, y_u f_u) = (u, y_u)(\varphi\psi) = \big((u, y_u)\varphi\big)\psi = (u\varphi^*, y_u g_u)\psi =$$

$$= \big((u\varphi^*)\psi^*, (y_u g_u)h_{u\varphi^*}\big) = \big(u(\varphi^*\psi^*), y_u(g_u h_{u\varphi^*})\big).$$

Следовательно,

$$u(\varphi\psi)^* = u(\varphi^*\psi^*),\ y_u f_u = y_u(g_u h_{u\varphi^*}).$$

Итак,

$$(\varphi\psi)\xi = \big((\varphi\psi)^*, f\big) = (\varphi^*\psi^*, gh_{\varphi^*}) = (\varphi^*, g)(\psi^*, h) = (\varphi\xi)(\psi\xi),$$

т. е. ξ — гомоморфизм.

Пусть $\varphi, \psi \in \operatorname{SEnd} G$ такие, что $\varphi \neq \psi$. Тогда $(u, y_u)\varphi \neq (u, y_u)\psi$ для некоторого $(u, y_u) \in V(G)$. Следовательно, либо $u\varphi^* \neq u\psi^*$, либо $u\varphi^* = u\psi^*$ и $y_u g_u \neq y_u h_u$, т. е. $\varphi\xi \neq \psi\xi$ в обоих случаях.

Далее, возьмем произвольный элемент $(\gamma, q) \in \operatorname{SMon} U \operatorname{wr} \mathcal{K}_G$. Отсюда $\gamma \in \operatorname{SMon} U$, $q_u \in \operatorname{Map}(Y_u, Y_{u\gamma})$. Рассмотрим преобразование μ графа G такое, что $(u, y_u)\mu = (u\gamma, y_u q_u)$ для всех $(u, y_u) \in V(G)$. Так как для любого $(v, y_v) \in V(G)$

$$v\mu^* = ((v, y_v)\mu)_\nu = ((v\gamma, y_v q_v))_\nu = v\gamma,$$

то $\mu^* \in \operatorname{SMon} U$, откуда по лемме 2.1.1 имеем $\mu \in \operatorname{SEnd} G$. При этом ясно, что $\mu\xi = (\gamma, q)$. $\square$

Заметим, что все конечные графы также удовлетворяют условию (2.1). В самом деле, пусть G — конечный граф и γ — его сильный эндоморфизм. Также как в доказательстве леммы 2.1.1 можно показать, что γ отображает элементы различных классов эквивалентности ν в элементы разных классов. Следовательно, в силу конечности G, в образе всякого сильного эндоморфизма этого графа всегда будет хотя бы один представитель каждого класса эквивалентности ν. Предположим, что элементы x, y из G ν-эквивалентны, при этом $(x\gamma, y\gamma) \notin \nu$. Тогда для некоторого $z' \in V(G)$ имеем $\{x\gamma, z'\} \in E(G)$ и $\{y\gamma, z'\} \notin E(G)$. Если $z \in z'_\nu\gamma^{-1}$, то получаем $\{x, z\} \in E(G)$ и $\{y, z\} \notin E(G)$, что противоречит условию $x\nu y$.

Таким образом, теорема 2.1.1 справедлива для любых графов, удовлетворяющих условию (2.1). В частности, если граф G конечен, то в качестве следствия получаем следующий результат:

Теорема 2.1.2. *[41] Пусть $G = U[(Y_u)_{u\in U}]$ — конечный неориентированный граф без кратных рёбер. Тогда*

$$\operatorname{SEnd} G \cong \operatorname{Aut} U \operatorname{wr} \mathcal{K}_G.$$

2.1.3. Случай произвольных бесконечных графов. В этом пункте граф G обозначает произвольный бесконечный граф. Пусть $\mathrm{SEnd}_\nu G$ — множество всех сильных эндоморфизмов графа G, *сохраняющих отношение* ν:

$$\varphi \in \mathrm{SEnd}_\nu G \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{SEnd}\, G \wedge \forall_{x,y\in V(G)}(x_\nu = y_\nu \Rightarrow (x\varphi)\ \nu\ (y\varphi)). \tag{2.2}$$

Другими, словами $\mathrm{SEnd}_\nu G$ состоит из сильных эндоморфизмов $\varphi \in \mathrm{SEnd}\, G$, для которых преобразование

$$\varphi^* : V(U) \to V(U) : x_\nu \mapsto (x\varphi)_\nu \tag{2.3}$$

инъективно. Заметим, что в силу леммы 2.1.1 графы класса $\mathfrak{G}$ (см. пункт 2.1.2) представляют собой такие графы, у которых $\mathrm{SEnd}\, G = \mathrm{SEnd}_\nu G$.

Лемма 2.1.2. *Множество* $\mathrm{SEnd}_\nu G$ *является подмоноидом в* $\mathrm{SEnd}\, G$ *относительно композиции преобразований.*

Доказательство. Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{SEnd}_\nu G$. Понятно, что $\varphi\psi \in \mathrm{SEnd}\, G$. Согласно (2.2) для любых $x, y \in V(G)$ условие $x_\nu = y_\nu$ влечёт $(x\varphi)_\nu = (y\varphi)_\nu$, $(x\psi)_\nu = (y\psi)_\nu$. Пусть φ^*, ψ^* определены по правилу (2.3). Тогда

$$(x\varphi\psi)_\nu = ((x\varphi)\psi)_\nu = (x\varphi)_\nu\psi^* = (y\varphi)_\nu\psi^* = (y\varphi\psi)_\nu,$$

следовательно, $\varphi\psi \in \mathrm{SEnd}_\nu G$. □

Утверждение 2.1.2. *Пусть* $\mathrm{SEnd}^* U = \{\varphi^* \mid \varphi \in \mathrm{SEnd}_\nu G\}$. *Для любого графа* G *справедливо*

$$\mathrm{SEnd}^* G/\nu = \mathrm{SMon}\, G/\nu.$$

Доказательство. Пусть $\pi^* \in \mathrm{SEnd}^* U$. По определению π^* инъективно. Кроме того, для любых $x, y \in V(G)$

$$\{x_\nu, y_\nu\} \in E(U) \Leftrightarrow \{x, y\} \in E(G) \Leftrightarrow \{x\pi, y\pi\} \in E(G) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \{(x\pi)_\nu, (y\pi)_\nu\} = \{x_\nu, y_\nu\}\pi^* \in E(U).$$

Таким образом, $\pi^* \in \mathrm{SMon}\, U$ — сильный мономорфизм графа G/ν.

Пусть $f \in \mathrm{SMon}\, U$, $g = \hat{f}$ (см. доказательство утверждения 2.1.1). Как мы уже знаем из доказательства утверждения 2.1.1, $g \in \mathrm{SEnd}\, G$ и $g^* = f$. Следовательно, $f \in \mathrm{SEnd}^* U$, что и требовалось доказать. □

Теорема 2.1.3. *Пусть* $G = U[(Y_u)_{u\in U}]$ *— произвольный бесконечный граф,* $\mathcal{K}_G$ *— малая категория, определенная ранее (см. пункт 2.1.2). Тогда*

$$\mathrm{SEnd}_\nu\, G \cong \mathrm{SMon}\, U \ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_G.$$

Доказательство. Пусть G — произвольный граф, $\zeta \in \mathrm{SEnd}_\nu\, G$. Поскольку $\zeta^* \in \mathrm{SMon}\, U$, можем определить отображение

$$p : \mathrm{Ob}\, \mathcal{K}_G \to \mathrm{Mor}\, \mathcal{K}_G : Y_u \mapsto p_u,$$

где для каждого $u \in U$ имеем

$$p_u : Y_u \to Y_{u\zeta^*} : y_u \mapsto y_v, \quad \text{если } (u, y_u)\zeta = (v, y_v).$$

Таким образом, $(u, y_u)\zeta = (u\zeta^*, y_u p_u)$, и корректно задано отображение

$$\xi : \mathrm{SEnd}_\nu\, G \to \mathrm{SEnd}^*\, U \ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_G : \zeta \mapsto (\zeta^*, p).$$

Аналогично доказательству теоремы 2.1.1 можно показать, что для любых $\varphi, \psi \in \mathrm{SEnd}_\nu\, G$ отображение ξ — изомоморфизм. $\square$

Теорема 2.1.3 обобщает теорему 2.1.1 и, таким образом, в частности, если граф G конечен, то получаем упомянутую выше теорему 2.1.2 [41].

2.2. Моноиды сильных эндоморфизмов n-однородных гиперграфов

В этом пункте описываются два точных представления моноида сильных эндоморфизмов произвольного конечного n-однородного гиперграфа: в терминах сплетения группы с малой категорией и в терминах глобальной надполугруппы.

2.2.1. Некоторые свойства n-однородных гиперграфов. Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n. Напомним, что под окрестностью $\mathcal{N}(x)$ вершины x гиперграфа $H \in C_n$, $n \geqslant 2$, будем понимать семейство таких подмножеств $A \subseteq V$, что

$$|A| = n - 1 \ \&\ A \cup \{x\} \in \mathcal{E}.$$

Ключевую роль при описании сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов играет следующая

Лемма 2.2.1. *Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n и $x, y \in H$. Сильный эндоморфизм f гиперграфа H, такой что $xf = yf$, существует в том и только в том случае, если выполняется одно из условий:*

(i) $n = 0$;

(ii) $n = 1$ *и* $\rho(x) = \rho(y)$;

(iii) $n \geqslant 2$ *и* $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$.

Доказательство. Пусть $f \in \operatorname{SEnd} H$ такой, что $xf = yf$. Понятно, что n может быть равно 0. Если $n = 1$, то

$$x \in \mathcal{E} \Leftrightarrow xf = yf \in \mathcal{E} \Leftrightarrow y \in \mathcal{E},$$

откуда $\rho(x) = \rho(y)$.

Пусть $n \geqslant 2$ и $A \in \mathcal{N}(x)$ — произвольный элемент. В этом случае

$$A \cup \{x\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow Af \cup \{xf\} = Af \cup \{yf\} \in \mathcal{E} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (A \cup \{y\})f \in \mathcal{E} \Leftrightarrow A \cup \{y\} \in \mathcal{E}.$$

Следовательно, $A \in \mathcal{N}(y)$ и, таким образом, $\mathcal{N}(x) \subseteq \mathcal{N}(y)$. Аналогично доказывается, что $\mathcal{N}(y) \subseteq \mathcal{N}(x)$.

Определим следующее преобразование гиперграфа H:

$$zf = \begin{cases} x, & \text{если } z = y, \\ z, & \text{в остальных случаях} \end{cases}$$

для всех $z \in V$. Если $n = 0$, то, очевидно, $f \in \operatorname{SEnd} H$.

Пусть выполняется условие (ii) и $a \in V$. Равносильность $a \in \mathcal{E} \Leftrightarrow af \in \mathcal{E}$ справедлива для $a = y$, поскольку $\rho(x) = \rho(y)$, и для $a \neq y$, так как в этом случае $af = a$. Следовательно, $f \in \operatorname{SEnd} H$.

Пусть теперь имеет место (iii) и $e \subseteq V$ — произвольное n-элементное подмножество. Понятно, что если $y \notin e$, то из $e \in \mathcal{E}$ следует $ef = e \in \mathcal{E}$.

Если же $y \in e$, то $e = A \cup \{y\}$ и из условия $e \in \mathcal{E}$ получаем

$$ef = (A \cup \{y\})f = Af \cup \{yf\} = A \cup \{x\} \in \mathcal{E},$$

так как $A \in \mathcal{N}(y) = \mathcal{N}(x)$. Таким образом, f — эндоморфизм.

Пусть $ef \in \mathcal{E}$. Предположим, что $x \notin ef$, тогда для любого $a \in ef$ справедливо $af^{-1} = a$, следовательно, $e = ef \in \mathcal{E}$. Если $x \in ef$, то $ef = M \cup \{x\}$, где $M \in \mathcal{N}(x)$, и возможны такие случаи:

1. $e = M \cup \{x\} = ef \in \mathcal{E}$;
2. $e = M \cup \{y\} \in \mathcal{E}$, поскольку $\mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y)$;
3. $e = M \cup \{x, y\}$, что противоречит тому факту, что $H \in C_n$.

Следовательно, $f \in \operatorname{SEnd} H$. □

Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n. Определим на H бинарное отношение δ, которое естественно возникает из леммы 2.2.1, по правилу:

$$\begin{gathered} x\,\delta\,y \Leftrightarrow \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y), \quad \text{если} \quad n \geqslant 2 \quad \text{и} \\ x\,\delta\,y \Leftrightarrow \rho(x) = \rho(y) \quad \text{в случае, если } n \in \{0, 1\}. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Ясно, что δ есть отношение эквивалентности. Через x_δ обозначается класс эквивалентности δ, содержащий элемент x. Если $A \subseteq V$, то положим $A_\delta = \{a_\delta \mid a \in A\}$.

Через H/δ будем обозначать гиперграф, вершины которого состоят из классов эквивалентности x_δ, $x \in V$, а множество ребер $\mathcal{E}(H/\delta)$ содержит A_δ, $A \subseteq V$, тогда и только тогда, когда некоторая трансверсаль семейства A_δ является ребром гиперграфа H. Полученный гиперграф назовем *каноническим сильным фактор-гиперграфом гиперграфа* H. Понятно, что если $A_\delta \in \mathcal{E}(H/\delta)$, то любая трансверсаль семейства A_δ является ребром гиперграфа H.

Пусть f – биективный эндоморфизм гиперграфа H. Если f^{-1} тоже эндоморфизм, то f называется автоморфизмом гиперграфа H. Группа всех автоморфизмов гиперграфа H обозначается $\operatorname{Aut} H$. Гиперграф H назовем S-неразложимым, если $\operatorname{SEnd} H = \operatorname{Aut} H$.

Предложение 2.2.1. *Для каждого конечного гиперграфа H класса C_n канонический сильный фактор-гиперграф H/δ является S-неразложимым.*

Доказательство. Канонический сильный фактор-гиперграф 0-однородного гиперграфа является одноэлементным 0-однородным гиперграфом, а потому S-неразложимым. Пусть теперь $H \in C_n$, $n \geqslant 1$.

Понятно, что каждый автоморфизм гиперграфа H/δ является сильным эндоморфизмом из $\mathrm{SEnd}\, H/\delta$. Докажем обратное включение.

Пусть $\pi \in \mathrm{SEnd}\, H/\delta$ и

$$F_\pi = \{f : V(H) \to V(H) \mid f|_{x_\delta} \in \mathrm{Map}\,(x_\delta, x_\delta\pi) \text{ для всех } x \in V(H)\}.$$

Зафиксируем некоторое $f \in F_\pi$ и возьмем $e = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq V$. Следует отметить, что если $e \in \mathcal{E}$ и $n \geqslant 2$, то все $x_1, \ldots, x_n$ принадлежат разным классам эквивалентности. Итак, для любого $n \geqslant 1$ имеем

$$\begin{aligned} e \in \mathcal{E} \Leftrightarrow \{(x_1)_\delta, \ldots, (x_n)_\delta\} \in \mathcal{E}(H/\delta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{(x_1)_\delta\pi, \ldots, (x_n)_\delta\pi\} \in \mathcal{E}(H/\delta) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{x_1 f|_{(x_1)_\delta}, \ldots,\ x_n f|_{(x_n)_\delta}\} = ef \in \mathcal{E}. \end{aligned}$$

Таким образом, $F_\pi \subseteq \mathrm{SEnd}\, H$.

Предположим теперь, что для некоторых различных $x_\delta, y_\delta \in H/\delta$ выполняется $x_\delta\pi = y_\delta\pi = z_\delta$. Согласно определению множества F_π найдется такой сильный эндоморфизм $f \in F_\pi$, для которого

$$\mathrm{im}\,(f|_{x_\delta}) = \mathrm{im}\,(f|_{y_\delta}) = \{z'\},\ z' \in z_\delta.$$

Тогда $f \in \mathrm{SEnd}\, H$ и $xf = yf$, откуда по лемме 2.2.1 (о свойстве сильных эндоморфизмов n-однородных гиперграфов) имеем $x\ \delta\ y$, что противоречит предположению $x_\delta \neq y_\delta$. Следовательно, π инъективно. $\square$

Определение 2.2.1. *Обобщенным лексикографическим произведением* $\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ *гиперграфа* $\mathcal{U}$ *и гиперграфов* $(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}$ назовем такой гиперграф, у которого

$$V(\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]) = \{(u, y_u) \mid u \in \mathcal{U}, y_u \in Y_u\},$$

а подмножество $A \subseteq V(\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}])$ будет ребром тогда и только тогда, когда выполняется одно из условий:

(i) $\mathrm{dom}\,(A) \in \mathcal{E}(\mathcal{U})$;

(ii) $\mathrm{dom}\,(A) = \{a\} \notin \mathcal{E}(\mathcal{U}) \ \wedge \ \mathrm{im}\,(A) \in \mathcal{E}(Y_a)$.

Предложение 2.2.2. *Пусть H — произвольный гиперграф класса C_n, $\mathcal{U} = H/\delta$ — его канонический сильный фактор-гиперграф и $Y_u, u \in \mathcal{U}$, — такие 0-однородные гиперграфы, что $|Y_u| = |u|$ для всех $u \in \mathcal{U}$. Тогда*

$$H \cong \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}].$$

Доказательство. Для каждого $u \in \mathcal{U}$ пусть τ_u — произвольная биекция из класса эквивалентности u на множество Y_u. Положим

$$\psi : H \to \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}] : x \mapsto (x_\delta, x\tau_{x_\delta}).$$

Пусть x, y — произвольные различные вершины из H. Если $(x, y) \notin \delta$, то $x_\delta \neq y_\delta$ и, следовательно, $x\psi \neq y\psi$. Если $(x, y) \in \delta$, то $x\tau_{x_\delta} \neq y\tau_{x_\delta}$ в силу биективности $\tau_u, u \in \mathcal{U}$, и тогда $x\psi \neq y\psi$. Так как τ_u сюръективно, то для всякой пары $(u, y_u) \in \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ существует $t \in u$ такой, что $t\tau_u = y_u$, т. е. $t\psi = (u, y_u)$.

Поскольку $Y_u, u \in \mathcal{U}$ — 0-однородные гиперграфы, в лексикографическом произведении $\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ все рёбра определяются только условием (i) определения 2.2.1. Тогда для всех $A \subseteq V$

$$A \in \mathcal{E} \Leftrightarrow A_\delta \in \mathcal{E}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \{(x_\delta, x\tau_{x_\delta}) \mid x \in A\} = A\psi \in \mathcal{E}\left(\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]\right).$$

□

Далее будем отождествлять элементы гиперграфа H и соответствующие им пары из обобщенного лексикографического произведения $\mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$.

2.2.2. Точные представления моноидов сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов.

2.2.2.1. 1-е представление. Рассмотрим как устроены сильные эндоморфизмы конечных n-однородных гиперграфов.

Лемма 2.2.2. *Пусть* $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ *— произвольный конечный гиперграф класса* C_n. *Преобразование* φ *гиперграфа* H *будет его сильным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда*

$$\varphi^* : \mathcal{U} \to \mathcal{U} : x_\delta \mapsto (x\varphi)_\delta$$

является автоморфизмом гиперграфа $\mathcal{U}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \mathrm{SEnd}\, H$. Лемма, очевидно, справедлива при $n = 0$. Для $n \geqslant 1$ возьмем такие $x, y \in H$, что $x_\delta \neq y_\delta$. Если $n = 1$, то $\rho(x\varphi) = \rho(x) \neq \rho(y) = \rho(y\varphi)$, следовательно, $(x\varphi)_\delta \neq (y\varphi)_\delta$. Если $n > 1$, то семейства $\mathcal{N}(x)$ и $\mathcal{N}(y)$ различны. Следовательно, не теряя общности, мы можем считать, что в $\mathcal{N}(x)$ найдется такой элемент A, которого нет в $\mathcal{N}(y)$. Тогда

$$(\{x\} \cup A)\varphi = \{x\varphi\} \cup A\varphi \in \mathcal{E},$$

$$(\{y\} \cup A)\varphi = \{y\varphi\} \cup A\varphi \notin \mathcal{E},$$

следовательно, $(x\varphi)_\delta \neq (y\varphi)_\delta$. Таким образом, φ при любом $n \geqslant 1$ отображает элементы из разных классов эквивалентности в элементы разных классов. Отсюда, в силу конечности гиперграфа H, для любого класса $x_\delta \in \mathcal{U}$ существует такой класс $y_\delta \in \mathcal{U}$, что $x_\delta\varphi \subseteq y_\delta$. Следовательно, преобразование φ^* является корректно определенным и задает биекцию.

Пусть $A \subseteq H$. Справедливы такие равносильности:

$$A_\delta \in \mathcal{E}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow A \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow A\varphi \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow (A\varphi)_\delta = A_\delta\varphi^* \in \mathcal{E}(\mathcal{U}).$$

Таким образом, φ^* — автоморфизм гиперграфа $\mathcal{U}$.

Пусть теперь преобразование φ гиперграфа H есть такое, что $\varphi^* \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$. Тогда для любого $A \subseteq H$

$$A \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow A_\delta \in \mathcal{E}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow (A_\delta)\varphi^* = (A\varphi)_\delta \in \mathcal{E}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow A\varphi \in \mathcal{E}(H).$$

□

Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный конечный гиперграф класса C_n. Определим малую категорию $\mathcal{K}_H$, полагая $\mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_H = \{Y_u \mid u \in \mathcal{U}\}$, и принимая для любых двух объектов $Y_u, Y_v \in \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_H$ в качестве морфизмов $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}_H}(Y_u, Y_v)$ множество всех отображений из Y_u в Y_v. Группа $\mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$ действует справа на множестве объектов этой категории по правилу: $Y_u\alpha = Y_{u\alpha}$.

Таким образом, получаем следующее сплетение:

$$\begin{aligned}\mathrm{Aut}\,\mathcal{U} \ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_H = \{(\alpha, f) \mid \alpha \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U},& \\ f \in \mathrm{Map}\,(\mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_H, \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}_H),\ & Y_u f \in \mathrm{Map}\,(Y_u, Y_{u\alpha})\}\,.\end{aligned}$$

Через f_u будем обозначать $Y_u f$, где $y_u f_u \in Y_{u\alpha}$ для всех $y_u \in Y_u$.

Одно из представлений моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов описывает

Теорема 2.2.1. *Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный конечный гиперграф класса C_n, $\mathcal{K}_H$ — малая категория, определенная выше. Тогда*

$$\mathrm{SEnd}\,H \cong \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}\ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_H. \tag{2.5}$$

Доказательство. В силу лемм 2.2.1, 2.2.2 и предложения 2.2.1, можем определить отображение ξ из моноида $\mathrm{SEnd}\,H$ в сплетение $\mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$ wr $\mathcal{K}_H$ по следующему правилу:

$$\xi : \varphi \mapsto (\varphi^*, f),$$

где $f : \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_H \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}_H : Y_u \mapsto f_u = \varphi|_{Y_u}\ \ (u \in \mathcal{U})$.

Покажем, что ξ — изоморфизм.

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{SEnd}\,G$ и $\varphi\xi = (\varphi^*, g), \psi\xi = (\psi^*, h), (\varphi\psi)\xi = \big((\varphi\psi)^*, f\big)$, (u, y_u), $u \in \mathcal{U}$, — произвольная вершина гиперграфа H. Заметим, что

$$\begin{aligned}(u, y_u)(\varphi\psi)\xi = (u, y_u)\big((\varphi\psi)^*, f\big) = (u(\varphi\psi)^*, y_u f_u) = &\\ (u, y_u)(\varphi\psi) = \big((u, y_u)\varphi\big)\psi = (u\varphi^*, y_u g_u)\psi = &\\ \big((u\varphi^*)\psi^*, (y_u g_u)h_{u\varphi^*}\big) = \big(u(\varphi^*\psi^*), y_u(g_u h_{u\varphi^*})\big)&.\end{aligned}$$

Следовательно,

$$u(\varphi\psi)^* = u(\varphi^*\psi^*),\ \ y_u f_u = y_u(g_u h_{u\varphi^*}).$$

Итак,

$$(\varphi\psi)\xi = \big((\varphi\psi)^*, f\big) = (\varphi^*\psi^*, gh_{\varphi^*}) = (\varphi^*, g)(\psi^*, h) = (\varphi\xi)(\psi\xi),$$

т. е. ξ — гомоморфизм.

Пусть $\varphi, \psi \in \mathrm{SEnd}\, H$ такие, что $\varphi \neq \psi$. Тогда $(u, y_u)\varphi \neq (u, y_u)\psi$ для некоторого $(u, y_u) \in V(H)$. Следовательно, либо $u\varphi^* \neq u\psi^*$, либо $u\varphi^* = u\psi^*$ и $y_u g_u \neq y_u h_u$, т. е. $\varphi\xi \neq \psi\xi$ в обоих случаях.

Далее, возьмем произвольный элемент $(\gamma, q) \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U} \,\mathrm{wr}\, \mathcal{K}_H$, т.е. $\gamma \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$, $q_u \in \mathrm{Map}(Y_u, Y_{u\gamma})$. Рассмотрим преобразование μ графа G такое, что $(u, y_u)\mu = (u\gamma, y_u q_u)$ для всех $(u, y_u) \in V(H)$. Так как для любого $(v, y_v) \in V(H)$

$$v\mu^* = ((v, y_v)\mu)_\nu = ((v\gamma, y_v q_v))_\nu = v\gamma,$$

то $\mu^* \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$, откуда по лемме 2.2.2 имеем $\mu \in \mathrm{SEnd}\, H$. При этом ясно, что $\mu\xi = (\gamma, q)$.

□

Заметим, что для бесконечных гиперграфов лемма 2.2.2, на которой базируется теорема 2.2.1, неверна.

Пример 2.2.1. Рассмотрим, например, бесконечный 3-однородный гиперграф, изображенный на рис. 2.3.

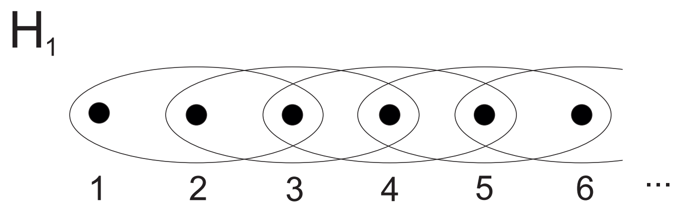


Рис. 2.3. Гиперграф H_1

Пусть N — множество всех натуральных чисел. Для любого фиксированного $k \in N$ преобразование

$$\alpha_k : N \to N : n \mapsto n + k$$

является сильным эндоморфизмом гиперграфа H_1. При этом канонический сильный фактор-гиперграф H_1/δ изоморфен исходному гиперграфу H_1. Однако $\alpha_k^* \notin \mathrm{Aut}\, H_1/\delta$, так как $\{1, 2, \ldots, k\} \cap \mathrm{im}\,(\alpha_k) = \varnothing$.

Пример 2.2.2. Рассмотрим другой бесконечный 3-однородный гиперграф H_2 (рис. 2.4).

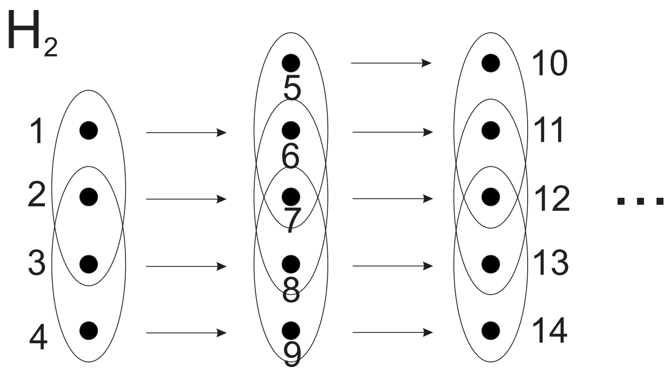


Рис. 2.4. Гиперграф H_2

Преобразование, действующее как показано на рис. 2.4 (обозначим его φ), является сильным эндоморфизмом гиперграфа H_2. Вершины 1 и 4 имеют одинаковые окрестности, следовательно, $1_\delta = 4_\delta$. Но тогда одной и той же вершине $\{1, 4\} \in V(H_2/\delta)$ соответствуют две различные вершины $\{6\}$ и $\{9\}$, а значит φ^* даже не является преобразованием гиперграфа H_2/δ.

2.2.2.2. 2-е представление. Далее рассмотрим другую конструкцию для описания точного представления моноида $\mathrm{SEnd}\, H$.

Пусть $H = (V, \mathcal{E})$ — конечный гиперграф класса C_n, $\mathcal{U} = H/\delta$ и $\mathcal{K}_H$ — малая категория, определенная выше. Положим $\mathrm{Mor}^0\, \mathcal{K}_H = \mathrm{Mor}\, \mathcal{K}_H \bigcup \{0\}$, где $0 \notin \mathrm{Mor}\, \mathcal{K}_H$, и определим на этом множестве такую операцию:

$$\varphi\psi = \begin{cases} \varphi\psi, & \text{если } \varphi \neq 0 \neq \psi \text{ и композиция } \varphi\psi \text{ определена,} \\ 0 & \text{— в остальных случаях,} \end{cases}$$

где $\varphi\psi$ — обычная композиция морфизмов.

Понятно, что множество $\mathrm{Mor}^0\, \mathcal{K}_H$ является полугруппой относительно только что определенной операции, при этом с точностью до изоморфизма она содержится в полугруппе всех бинарных отношений на множестве V.

Пусть T – произвольная полугруппа, $\mathrm{Gl}\,(T)$ – множество всех ее подмножеств. Полагая $XY = \{xy \mid x \in X, y \in Y\}$ для всех $X, Y \subseteq T$, получаем полугруппу на множестве $\mathrm{Gl}\,(T)$, которая называется глобальной надполугруппой полугруппы T.

Возьмем $A \in \mathcal{U},\ \ \xi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$ и положим

$$M^{\xi} = \bigcup_{A \in \mathcal{U}} \mathrm{Map}\,(A, A\xi), \ \ M = \bigcup_{\xi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}} M^{\xi}, \ \ M^0 = M \cup \{0\}.$$

Понятно, что M^0 – подполугруппа полугруппы $\mathrm{Mor}^0\,\mathcal{K}_H$. Для разбиения

$$\{\mathrm{Map}\,(A, A\xi) \mid A \in H/\delta\} \cup \{\{0\}\}$$

множества $M^{\xi} \cup \{0\}$ обозначим через $T(M^{\xi})$ множество всех его трансверсалей, а через $T(M^0)$ – объединение всех множеств $T(M^{\xi})$, $\xi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$.

Лемма 2.2.3. *Множество $T(M^0)$ является подполугруппой глобальной надполугруппы $\mathrm{Gl}\,(M^0)$ полугруппы M^0.*

Доказательство. Пусть $A, B \in T(M^0)$. Поскольку

$$\{\mathrm{dom}\,(\eta) \mid \eta \in B, \eta \neq 0\} = H/\delta,$$

то для любого $\varphi \in A, \varphi \neq 0$ найдется единственный элемент $\psi \in B$, $\psi \neq 0$, для которого $\mathrm{im}\,(\varphi) \subseteq \mathrm{dom}\,(\psi)$. Отсюда, $\varphi\psi \neq 0$. При этом в тех случаях, когда φ то же самое, а $f \in B$ — такое, что $f \neq \psi$, будем иметь $\varphi f = 0$.

Таким образом, учитывая, что $0 \in AB$ и

$$\{\mathrm{dom}\,(\eta) \mid \eta \in A, \eta \neq 0\} = H/\delta,$$

$$\mathrm{dom}\,(\varphi) = \mathrm{dom}\,(\varphi\psi), \text{когда } \ \varphi\psi \neq 0,$$

получаем $AB \in T(M^0)$. Следовательно, $T(M^0)$ — подполугруппа $\mathrm{Gl}\,(M^0)$. □

Представление моноида $\mathrm{SEnd}\,H$ унарными отношениями дает

Теорема 2.2.2. *Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u \in \mathcal{U}}]$ — произвольный конечный гиперграф класса C_n. Имеет место изоморфизм*

$$\mathrm{SEnd}\,H \cong T(M^0).$$

Доказательство. Согласно лемме 2.2.2 всякий сильный эндоморфизм φ принадлежит множеству

$$F_{\varphi^*} = \{f : H \to H \mid f|_{x_\delta} \in \mathrm{Map}\,(x_\delta, x_\delta\varphi^*) \text{ для всех } x \in H\}.$$

С другой стороны, для любого $\pi \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$ имеем $F_\pi \subseteq \mathrm{SEnd}\,H$ (см. предложение 2.2.1). Таким образом, $\mathrm{SEnd}\,H = \cup_{\varphi^* \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}} F_{\varphi^*}$. Теперь можно установить изоморфное отображение ξ между полугруппами $\mathrm{SEnd}\,H$ и $T(M^0)$ по правилу:

$$f\xi = \{f|_{x_\delta} \mid x \in H\} \cup \{0\}$$

для всех $f \in \mathrm{SEnd}\,H$. □

2.3. Сильные эндоморфизмы бесконечных n-однородных гиперграфов

В этом пункте получено представление моноидов сильных эндоморфизмов бесконечных n-однородных гиперграфов, удовлетворяющих условию, аналогичному (2.1), в виде сплетения моноида группы и малой категории. Далее, подобно пункту 2.1 показано, что этот результат справедлив для некоторого подмоноида моноида сильных эндоморфизмов произвольного бесконечного n-однородного гиперграфа.

2.3.1. Точное представление моноидов сильных эндоморфизмов гиперграфов из одного класса. Заметим, что все определения и результаты пункта 2.2.1, кроме предложения 2.2.1, верны для произвольного (в том числе бесконечного n-однородного гиперграфа). Таким образом, для бесконечного n-однородного гиперграфа H определены отношение δ на $V(H)$, канонический сильный фактор-гиперграф $\mathcal{U}$, обобщенное лексикографическое произведение гиперграфов, справедлива лемма 2.2.1 и предложение 2.2.2.

Пусть $\mathfrak{C}_n$ — класс всех бесконечных n-однородных гиперграфов H, для которых при любом $\varphi \in \mathrm{SEnd}\,H$ выполняется условие:

$$\forall\, x_\delta \in \mathcal{U} \;\; \exists\, y_\delta \in \mathcal{U} : x_\delta\varphi \subseteq y_\delta. \tag{2.6}$$

Ясно, что класс $\mathfrak{C}_0$ ($\mathfrak{C}_1$) совпадает с классом всех бесконечных 0-однородных (1-однородных) гиперграфов. В случае, когда $n \geqslant 2$ — натуральное, $\mathfrak{C}_n$ является непустым собственным подклассом класса всех бесконечных n-однородных гиперграфов. Докажем для сильных эндоморфизмов бесконечных следующую лемму, которая является аналогом леммы 2.1.1 для графов.

Лемма 2.3.1. *Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный гиперграф класса $\mathfrak{C}_n$. Преобразование φ гиперграфа H будет его сильным эндоморфизмом тогда и только тогда, когда преобразование*

$$\varphi^* : \mathcal{U} \to \mathcal{U} : x_\delta \mapsto (x\varphi)_\delta$$

является сильным инъективным эндоморфизмом гиперграфа $\mathcal{U}$.

Доказательство. Пусть $\varphi \in \operatorname{SEnd} H$, $x, y \in V(H)$ такие, что $x_\delta \neq y_\delta$. Если $n = 0$, то $|\mathcal{U}| = 1$ и мы немедленно получаем утверждение леммы. При $n = 1$ $|\mathcal{U}| = 2$. По определению сильного эндоморфизма для любого $x \in V(H)$ если $x\varphi \in E(H)$, то $x \in E(H)$. Следовательно, $\rho(x\varphi) = 1 \Leftrightarrow \rho(x) = 1$, и таким образом, φ^* всегда равен $\mathrm{id}_{\mathcal{U}}$.

Пусть $n \geqslant 2$. Поскольку $x_\delta \neq y_\delta$, то без ограничения общности можем считать, что существует подмножество $A \subset V(H)$, такое, что $A \in \mathcal{N}(x)$ и $A \notin \mathcal{N}(y)$. Тогда $(\{x\} \cup A)\varphi = \{x\varphi\} \cup A\varphi \in \mathcal{E}(H)$, и $(\{x\} \cup A\varphi = \{x\varphi\} \cup A\varphi \notin \mathcal{E}(H)$, следовательно, $(x\varphi)_\delta \neq (y\varphi)_\delta$. Таким образом, φ^* инъективно.

Пусть $x_1, \ldots, x_n \in V(H)$. Тогда

$$\begin{aligned}\{(x_1)_\delta, \ldots, (x_n)_\delta\} \in \mathcal{E}(H/\delta) \Leftrightarrow \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow \\ \{x_1\varphi, \ldots, x_n\varphi\} \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow \{(x_1\varphi)_\delta, \ldots, (x_n\varphi)_\delta\} = \\ \{(x_1)_\delta, \ldots, (x_n)_\delta\}\varphi^* \in \mathcal{E}(H/\delta).\end{aligned}$$

Таким образом, φ^* — сильный мономорфизм гиперграфа H/δ.

Если же для преобразования φ гиперграфа H выполняется $\varphi^* \in \operatorname{SMon} H/\delta$, то для любых $x_1, \ldots, x_n \in V(H)$

$$\{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow \{(x_1)_\delta, \ldots, (x_n)_\delta\} \in \mathcal{E}(H/\delta) \Leftrightarrow$$

$$\{(x_1)_\delta, \ldots, (x_n)_\delta\}\varphi^* = \{(x_1\varphi)_\delta, \ldots, (x_n\varphi)_\delta\} \in \mathcal{E}(H/\delta) \Leftrightarrow \\ \{x_1\varphi, \ldots, x_n\varphi\} \in \mathcal{E}(H).$$

□

Множество всех сильных инъективных эндоморфизмов гиперграфа H образует относительно композиции преобразований полугрупппу, которую обозначим через $\mathrm{SMon}\, H$. Элементы из $\mathrm{SMon}\, H$ будем называть сильными мономорфизмами.

Утверждение 2.3.1. *Для каждого гиперграфа H класса $\mathfrak{C}_n$ справедливо равенство*

$$\mathrm{SEnd}\, \mathcal{U} = \mathrm{SMon}\, \mathcal{U}.$$

Доказательство. Пусть $H \in \mathfrak{C}_n$. Канонический сильный фактор-гиперграф 0-однородного гиперграфа является одноэлементным 0-однородным гиперграфом, следовательно, при $n = 0$ имеем $\mathrm{SEnd}\, \mathcal{U} = \mathrm{SMon}\, \mathcal{U}$. Для случая $n \geqslant 1$ доказательство аналогично доказательству утверждения 2.1.1. □

Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный гиперграф класса $\mathfrak{C}_n$, $\mathcal{K}_H$ — малая категория, определенная в пункте 2.2.2.1. Напомним, что $\mathrm{Ob}\, \mathcal{K}_H = \{Y_u \mid u \in \mathcal{U}\}$, $\mathrm{Mor}\, \mathcal{K}_H = \bigcup_{u,v\in\mathcal{U}} \mathrm{Mor}_{\mathcal{K}_H}(Y_u, Y_v)$, где $\mathrm{Mor}_{\mathcal{K}_H}(Y_u, Y_v)$ — множество отображений из Y_u в Y_v.

Моноид $\mathrm{SMon}\, \mathcal{U}$ естественно действует справа на множестве объектов этой категории. Таким образом, получаем следующее сплетение:

$$\mathrm{SMon}\, \mathcal{U} \mathbin{\mathrm{wr}} \mathcal{K}_H = \{(\alpha, f) \mid \alpha \in \mathrm{SMon}\, \mathcal{U}, \\ f \in \mathrm{Map}\,(\mathrm{Ob}\, \mathcal{K}_H, \mathrm{Mor}\, \mathcal{K}_H),\ Y_u f \in \mathrm{Map}\,(Y_u, Y_{u\alpha})\}\,.$$

Через f_u будем обозначать $Y_u f$, где $y_u f_u \in Y_{u\alpha}$ для всех $y_u \in Y_u$.

Теорема 2.3.1. *Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — произвольный гиперграф класса $\mathfrak{C}_n$, $\mathcal{K}_H$ — малая категория, определенная ранее. Тогда*

$$\mathrm{SEnd}\, H \cong \mathrm{SMon}\, \mathcal{U} \mathbin{\mathrm{wr}} \mathcal{K}_H.$$

Доказательство. Пусть φ — произвольный сильный эндоморфизм гиперграфа $H \in \mathfrak{C}_n$. По Лемме 2.3.1 $\varphi^* \in \mathrm{SMon}\,\mathcal{U}$. Для каждого $u \in \mathcal{U}$ определим отображение f_u множества Y_u в $Y_{u\varphi^*}$, полагая $y_u f_u = y_v$, если $(u, y_u)\varphi = (v, y_v)$. Тогда корректно определенным будет отображение

$$f : \mathrm{Ob}\,\mathcal{K}_H \to \mathrm{Mor}\,\mathcal{K}_H : Y_u \mapsto f_u.$$

Далее аналогично доказательству теоремы 2.1.1 можно показать, что отображение

$$\xi : \mathrm{SEnd}\,H \to \mathrm{SMon}\,\mathcal{U} \mathrm{\ wr\ } \mathcal{K}_H : \varphi \mapsto (\varphi^*, f),$$

является изоморфизмом. □

Заметим, что как и в случае конечных графов (см. пункт 2.1.2) аналогичным образом можно показать, что конечные n-однородные гиперграфы удовлетворяют условию (2.6). Следовательно, теорема 2.3.1 выполняется для любых n-однородных гиперграфов, удовлетворяющих условию (2.6).

2.3.2. Случай произвольных n-однородных гиперграфов. Далее, пусть H — произвольный n-однородный гиперграф. Пусть $\mathrm{SEnd}_\delta\,H$ — множество всех сильных эндоморфизмов графа H, сохраняющих отношение δ:

$$\varphi \in \mathrm{SEnd}_\delta\,H \Leftrightarrow \varphi \in \mathrm{SEnd}\,H \wedge \forall_{x,y \in V(H)} (x\;\delta\;y \Rightarrow (x\varphi)\;\delta\;(y\varphi). \qquad (2.7)$$

Другими, словами $\mathrm{SEnd}_\delta\,H$ состоит из сильных эндоморфизмов $\varphi \in \mathrm{SEnd}\,H$, для которых преобразование

$$\varphi^* : V(\mathcal{U}) \to V(\mathcal{U}) : x_\delta \mapsto (x\varphi)_\delta \qquad (2.8)$$

инъективно. Заметим, что в силу леммы 2.3.1 гиперграфы класса $\mathfrak{C}_n$ представляют собой такие гиперграфы, у которых $\mathrm{SEnd}\,H = \mathrm{SEnd}_\delta\,H$. Далее, точно также как лемма 2.1.2 доказывается

Лемма 2.3.2. *Множество* $\mathrm{SEnd}_\delta\,H$ *является подмоноидом в* $\mathrm{SEnd}\,H$ *относительно композиции преобразований.*

Утверждение 2.3.2. *Пусть* $\mathrm{SEnd}^*\mathcal{U} = \{\varphi^* \mid \varphi \in \mathrm{SEnd}_\delta H\}$. *Для любого гиперграфа* $H \in C_n$ *справедливо*

$$\mathrm{SEnd}^*\mathcal{U} = \mathrm{SMon}\,\mathcal{U}.$$

Доказательство. Пусть $\pi^* \in \mathrm{SEnd}^*\mathcal{U}$. По определению π^* инъективно. Кроме того, для $n \geqslant 1$ и любых $x_1, \ldots, x_n \in V(H)$

$$\{(x_1)_\delta, \ldots, (x_n)_\delta\} \in \mathcal{E}(\mathcal{U}) \Leftrightarrow \{x_1, \ldots, x_n\} \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \{x_1\pi, \ldots, x_n\pi\} \in \mathcal{E}(H) \Leftrightarrow \{(x_1\pi)_\delta, \ldots, (x_n\pi)_\delta\} = \\ \{(x_1)_\delta, \ldots, (x_n)_\delta\}\pi^* \in \mathcal{E}(\mathcal{U}).$$

Таким образом, $\pi^* \in \mathrm{SMon}\,\mathcal{U}$ — сильный мономорфизм графа $\mathcal{U}$.

Пусть $f \in \mathrm{SMon}\,\mathcal{U}$, $g = \hat{f}$ (см. доказательство утверждения 2.1.1). Точно также как в утверждении 2.1.1, получим $g \in \mathrm{SEnd}\,H$ и $g^* = f$. Следовательно, $g \in \mathrm{SEnd}_\nu H$ и, таким образом, $f \in \mathrm{SEnd}^*\mathcal{U}$, что и требовалось доказать. $\square$

Таким образом, получим следующую теорему.

Теорема 2.3.2. *Пусть* $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ — *произвольный* n-*однородный гиперграф,* $\mathcal{K}_H$ — *малая категория, определенная ранее (пункт 2.2.2.1). Тогда*

$$\mathrm{SEnd}_\delta H \cong \mathrm{SMon}\,\mathcal{U} \ \mathrm{wr}\ \mathcal{K}_H.$$

Теорема 2.3.2 обобщает теорему 2.3.1 и, в частности, если гиперграф H конечен, то получим теорему 2.2.1.

2.4. Регулярность моноидов сильных эндоморфизмов n-однородных гиперграфов

Условия регулярности моноида сильных эндоморфизмов для конечных неориентированных графов изучались в [41] и [56]. В [35] было доказано, что полугруппа сильных эндоморфизмов произвольного графа регулярна тогда и только тогда, когда канонический сильный факторграф U является S-неразложимым. В этом пункте мы, используя представления моноидов $\mathrm{SEnd}\,H$ из предыдущих пунктов, исследуем регулярность $\mathrm{SEnd}\,H$ для конечных n-однородных гиперграфов и для бесконечных гиперграфов класса $\mathfrak{C}_n$.

2.4.1. Конечный случай. Пусть H — произвольный конечный n-однородный гиперграф. Установим регулярность моноида $\mathrm{SEnd}\,H$, используя представление этого моноида в терминах глобальной надполугруппы (теорема 2.2.2).

Теорема 2.4.1. *Для любого конечного гиперграфа* $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u\in\mathcal{U}}]$ *класса* C_n *моноид* $\mathrm{SEnd}\,H$ *является регулярным.*

Доказательство. Согласно теореме 2.2.2 имеет место изоморфизм $\mathrm{SEnd}\,H \cong T(M^0)$. Покажем, что полугруппа $T(M^0)$ регулярна. Если $A \in T(M^0)$ — произвольный элемент, то $A \in T(M^\alpha)$ для некоторого $\alpha \in \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$. Понятно, что $T(M^{\alpha^{-1}}) \subseteq T(M^0)$. Пусть $B \in T(M^{\alpha^{-1}})$ состоит из всех таких отображений $\mu : K \to K\alpha^{-1}$, $K \in \mathcal{U}$, что

$$x\mu \in \begin{cases} x\eta^{-1}, \text{ если } x \in \mathrm{im}\,(\eta) \;\text{ для некоторого } \eta \in A, \\ K\alpha^{-1} \text{ в остальных случаях.} \end{cases}$$

Нетрудно убедиться, что $ABA = A$. □

Приведенные в примерах 2.2.1, 2.2.2 бесконечные гиперграфы H_1 и H_2 класса C_3 имеют нерегулярные моноиды сильных эндоморфизмов.

Действительно, рассмотрим, например, гиперграф H_1 из этого пункта. Предположим, что для сильного эндоморфизма

$$\alpha_k = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & \dots \\ 1+k & 2+k & 3+k & 4+k & \dots \end{pmatrix}$$

гиперграфа H_1 найдется $f \in \mathrm{SEnd}\,H_1$, такой что $\alpha_k = \alpha_k f \alpha_k$. Тогда $n\alpha_k = n\alpha_k f\alpha_k$ для любого $n \in N$, следовательно, $n + k = (n + k)f + k$, откуда $n = (n + k)f$.

Далее, для ребра $\{k, k+1, k+2\} \in \mathcal{E}(H_1)$, с одной стороны, поскольку f — эндоморфизм, выполняется условие

$$\{k, k+1, k+2\}f = \{kf, 1, 2\} \in \mathcal{E}(H_1),$$

откуда $kf = 3$. С другой стороны, так как f — сильный и $\{k, k+4, k+5\}f = \{3, 4, 5\} \in \mathcal{E}(H_1)$, то имеем также и $\{k, k+4, k+5\} \in \mathcal{E}(H_1)$, что невозможно для любого натурального k.

2.4.2. Бесконечный случай.

Теорема 2.4.2. *Пусть $H = \mathcal{U}[(Y_u)_{u \in \mathcal{U}}]$ — произвольный гиперграф класса $\mathfrak{C}_n$. Моноид* $\mathrm{SEnd}\, H$ *регулярен тогда и только тогда, когда гиперграф $\mathcal{U}$ не содержит собственных подгиперграфов, изоморфных $\mathcal{U}$.*

Доказательство. Пусть моноид $\mathrm{SEnd}\, H$ регулярен и $\varphi, \psi \in \mathrm{SEnd}\, H$ такие, что $\varphi = \varphi\psi\varphi$. Согласно теореме 2.3.1 $\varphi = (\varphi^*, f)$, $\psi = (\psi^*, g)$. Тогда, так как $\varphi^* = \varphi^*\psi^*\varphi^*$, имеем

$$a\psi^* = a\varphi^{*-1} \;\text{ для всех }\; a \in \mathrm{im}(\varphi^*),$$

и, следовательно, $(\mathrm{im}(\varphi^*))\psi^* = \mathcal{U}$. Таким образом, если $v \in \mathcal{U} \setminus \mathrm{im}(\varphi^*) \neq \varnothing$, то каким бы ни был образ $v\psi^*$ найдется $m \in \mathrm{im}(\varphi^*)$, $m \neq v$ такой, что $m\psi^* = v\psi^*$, что противоречит инъективности ψ^*. Следовательно, $\mathrm{im}(\varphi^*) = \mathcal{U}$. Таким образом, $\mathrm{SMon}\,\mathcal{U} = \mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$, и значит гиперграф $\mathcal{U}$ не содержит собственных подгиперграфов, изоморфных $\mathcal{U}$.

Наоборот, если $\mathcal{U}$ не содержит собственных подгиперграфов изоморфных $\mathcal{U}$, то все элементы из $\mathrm{SMon}\,\mathcal{U}$ сюрьективны и тогда полугруппа $\mathrm{SMon}\,\mathcal{U}$ совпадает с $\mathrm{Aut}\,\mathcal{U}$. Следовательно, для всякого φ можно построить $\psi = (\varphi^{*-1}, g)$, где

$$g_v \in \mathrm{Map}(Y_v, Y_{v\varphi^{*-1}}), \quad y_v g_v \in \begin{cases} y_v(f_{v\varphi^{*-1}})^{-1}, & \text{если } y_v \in \mathrm{im}\,(f_{v\varphi^{*-1}}), \\ Y_{v\varphi^{*-1}}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2.9}$$

Для любой пары $(u, y_u) \in \mathcal{U}[(Y_u)_{u \in \mathcal{U}}]$ имеем

$$(u, y_u)\varphi\psi\varphi = (u\varphi^*\varphi^{*-1}\varphi^*, y_u f_u g_{u\varphi^*} f_{u\varphi^*\varphi^{*-1}}) = (u\varphi^*, y_u f_u g_{u\varphi^*} f_u).$$

Положим $y_u f_u = y_{u'} \in Y_{u\varphi^* = u'}$, т. е. $y_{u'} \in \mathrm{im}(f_{u'\varphi^{*-1}})$. Тогда согласно (2.9)

$$y_{u'} g_{u'} \in y_{u'}(f_{u'\varphi^{*-1}})^{-1} = y_{u'}(f_u)^{-1}.$$

Кроме того, для любого $b \in \operatorname{im}(f_u) \subseteq Y_{u'}$ и такого $a \in Y_u$, что $b = af_u$

$$bf_u^{-1} f_u = af_u = b, \text{поэтому}$$

$$y_{u'} g_{u'} f_u \in y_{u'} f_u^{-1} f_u = \{y_{u'}\} = \{y_u f_u\},$$

$$y_u f_u g_{u\varphi^*} f_u = y_{u'} g_{u'} f_u = y_u f_u.$$

Таким образом, $(u, y_u)\varphi\psi\varphi = (u\varphi^*, y_u f_u g_{u\varphi^*} f_u) = (u\varphi^*, y_u f_u) = (u, y_u)\varphi$ и, следовательно, $\operatorname{SEnd} H$ — регулярный моноид. □

2.5. Об определяемости гиперграфов сильными эндоморфизмами.

Будем говорить, что гиперграфы определяются своими сильными эндоморфизмами в классе Θ, если для любых $H_1, H_2 \in \Theta$ из условия $\operatorname{SEnd} H_1 \cong \operatorname{SEnd} H_2$ следует, что $H_1 \cong H_2$.

Напомним, что $\mathscr{S}(X)$ обозначает симметрическую группу на множестве X.

Теорема 2.5.1. *Пусть n — целое неотрицательное число. Гиперграфы класса C_n определяются сильными эндоморфизмами тогда и только тогда, когда $n = 0$.*

Доказательство. Если $n = 0$, то для произвольного 0-однородного гиперграфа H имеем $\operatorname{SEnd} H = \mathscr{S}(H)$, откуда немедленно получим, что гиперграфы класса C_0 определяются своим моноидом сильных эндоморфизмов.

Гиперграфы класса C_1 в общем случае не определяются своими сильными эндоморфизмами в смысле определения сильных эндоморфизмов n-однородных гиперграфов. Действительно, пусть $H_1 = (V, \mathcal{E}_1)$, $H_2 = (V, \mathcal{E}_2)$ с множеством вершин $V = \{a, b, c, d, e\}$, и множествами ребер соответственно $\mathcal{E}_1 = \{\{a\}, \{b\}, \{c\}\}$ и $\mathcal{E}_2 = \{\{a\}, \{b\}\}$. Тогда

$$\operatorname{SEnd} H_1 = \mathscr{T}_3 \times \mathscr{T}_2 \cong \mathscr{T}_2 \times \mathscr{T}_3 = \operatorname{SEnd} H_2.$$

Пусть $n \geqslant 2$ и $\mathcal{P}_n$ — класс таких n-однородных гиперграфов $(V, \mathcal{E})$, что

$$V = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}, \quad \mathcal{E} = \{\{x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}\} | 1 \leqslant i \leqslant k - n + 1\}, k \geqslant n + 2.$$

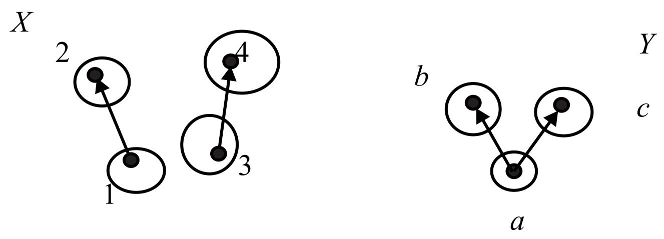
Понятно, что любые два гиперграфа класса $\mathcal{P}_n$ неизоморфны. Возьмем $H \in \mathcal{P}_n$ и предположим, что существуют такие $x_i, x_j \in H$, где $i < j$, и $(n-1)$-элементное подмножество $A \subseteq H$, что $\{x_i\} \cup A, A \cup \{x_j\} \in \mathcal{E}$. В этом случае A имеет вид $\{x_{i+1}, \ldots, x_{j-1}\}$, $j = i + n$. Поскольку $k \geqslant 2$ и $|\{x_i, x_j\} \cup A\}| = n+1$, то в H существует по крайней мере еще один элемент: x_{i-1} или x_{j+1}. В первом случае имеем $B = \{x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-2}\} \in N(x_i)$, но $B \notin N(x_j)$, а во втором — $B = \{x_{i+2}, x_{i+3} \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n+1}\} \in N(x_j)$, но $B \notin N(x_i)$. Таким образом, все классы в каноническом сильном фактор-гиперграфе H/δ одноэлементны и $H \cong H/\delta$. По предложению 2.2.1 гиперграф H является S-неразложимым и, кроме того, имеет в точности два автоморфизма: $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k \end{smallmatrix}\right)$, $\left(\begin{smallmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_k \\ x_k & x_{k-1} & \ldots & x_1 \end{smallmatrix}\right)$. Итак, любые два гиперграфа класса $\mathcal{P}_n$ обладают изоморфными моноидами сильных эндоморфизмов и, как следствие, гиперграфы класса C_n не определяются сильными эндоморфизмами. □

Вот еще несколько примеров, касающихся определяемости графов своей полугруппой сильных эндоморфизмов в классе всех простых циклов и квазипорядков.

Пример 2.5.1. Пусть C — класс всех простых циклов. Любой простой цикл определяется своей полугруппой сильных эндоморфизмов в классе C.

Доказательство. Пусть A_n, $n \geqslant 3$, — произвольный простой цикл с n вершинами. Для цикла A_3 имеем $\operatorname{SEnd} A_3 = \mathscr{S}(A_3)$. Полугруппа $\operatorname{SEnd} A_n$, $n > 4$, изоморфна циклической подгруппе группы $\mathscr{S}(A_n)$, порожденной подстановкой $\left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ n & 1 & \ldots & n-1 \end{smallmatrix}\right)$. При $n = 4$ получаем единственный граф из C, сильный фактор-граф которого содержит неодноэлементные классы эквивалентности. В этом случае граф A_4 не является S-неразложимым. Полугруппа сильных эндоморфизмов такого графа не будет циклической и не равна $\mathscr{S}(A_3)$. Таким образом, из условия $\operatorname{SEnd} A_n \cong \operatorname{SEnd} A_m$ следует $n = m$. □

Пример 2.5.2. Заметим, что для ориентированных графов сильные эндоморфизмы определяются аналогичным образом. Известно [5], что графы отношений квазипорядка определяются своими полугруппами эндоморфизмов. Естественно возникает вопрос: будут ли определяться графы квазипорядков своими полугруппами сильных эндоморфизмов? Как показывает следующий пример, не только графы квазипорядков, но даже графы порядков не определяются своей полугруппой сильных эндоморфизмов.



Нетрудно заметить, что имеет место изоморфизм

$$\mathrm{SEnd}\,X = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \right\} \cong$$

$$\cong \mathrm{SEnd}\,Y = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & b & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & b & c \\ a & c & b \end{pmatrix} \right\},$$

в то время как сами графы X и Y неизоморфны.

РАЗДЕЛ 3
ОПИСАНИЕ $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- И $\mathscr{H}$-СЕЧЕНИЙ МОНОИДОВ СИЛЬНЫХ ЭНДОМОРФИЗМОВ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Данный раздел состоит из двух параграфов. В § 3.1 описаны $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечения моноидов сильных эндоморфизмов конечных графов. Используя точное представление моноида сильных эндоморфизмов конечных графов [41], будет показано, что описание перечисленных полугрупп сводится к описанию соответствующих сечений на симметрических полугруппах.

Материал § 3.1 естественно дополняет § 3.2, в котором содержится описание $\mathscr{L}$-сечений конечной симметрической полугруппы. Также приведена формула для подсчета $\mathscr{L}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$ и классификация таких сечений с точностью до изоморфизма.

Результаты § 3.1 опубликованы в [59, 66], § 3.2 — в [64, 67, 69].

3.1. $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечения моноидов сильных эндоморфизмов конечных графов

Пусть G — конечный граф. В этом параграфе доказано, что всякое $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечение моноида $\operatorname{SEnd} G$ является прямым произведением соответствующих сечений на симметрических полугруппах. Мы покажем, что $\operatorname{SEnd} G$ имеет единственное с точностью до изоморфизма $\mathscr{R}$-сечение. Найдем необходимые и достаточные условия существования $\mathscr{H}$-сечений и построим примеры $\mathscr{L}$-сечений.

3.1.1. Предварительные сведения. Для произвольного преобразования f графа G через S_f обозначается правильный подграф из G, такой, что $V(S_f) = V(G)f$. Напомним, что «правильный» означает, что S_f содержит все возможные ребра из G: для любых $x, y \in V(S_f)$ если $\{x, y\} \in E(G)$, то

$\{x,y\} \in E(S_f)$.

Отношения Грина на $\mathrm{SEnd}\, G$ описывает следующая теорема:

Теорема 3.1.1. [43] *Пусть G — произвольный конечный граф без петель, $f, g \in \mathrm{SEnd}\, G$. Тогда*

(i) $(f,g) \in \mathscr{R}$ *тогда и только тогда, когда* $\ker f = \ker g$*;*

(ii) $(f,g) \in \mathscr{L}$ *тогда и только тогда, когда* $S_f = S_g$*;*

(iii) $(f,g) \in \mathscr{H}$ *тогда и только тогда, когда* $\ker f = \ker g$ *и* $S_f = S_g$*;*

(iv) $(f,g) \in \mathscr{D}$ *тогда и только тогда, когда* $S_f \cong S_g$*.*

Для конечных графов с петлями описание отношений Грина на $\mathrm{SEnd}\, G$ идентично.

Как уже было сказано (теорема 2.1.2 [41]), полугруппу сильных эндоморфизмов конечного графа можно представить в виде сплетения $\mathrm{Aut}\, U \,\mathrm{wr}\, \mathcal{K}_G$, где U — канонический сильный фактор-граф графа G. Будем считать везде дальше, что $|U| = m$.

Пусть $S(G) = \{(\alpha, g) \in \mathrm{SEnd}\, G \mid \alpha = \mathrm{id}_U\}$, где id_U — тождественный автоморфизм U, и для любого класса $A \in U$ имеем $Ag = g_A \in \mathscr{T}(A)$. Очевидно, $S(G)$ образует подполугруппу полугруппы $\mathrm{SEnd}\, G$. Докажем следующую важную лемму.

Лемма 3.1.1. *Пусть $\mathscr{K}$ — одно из отношений Грина $\mathscr{L}$, $\mathscr{R}$ или $\mathscr{H}$ на $S(G)$. Любое $\mathscr{K}$-сечение K полугруппы $S(G)$ изоморфно прямому произведению некоторых $\mathscr{K}$-сечений $K_1, K_2, \ldots, K_m$ симметрических полугрупп $\mathscr{T}(A_1)$, $\mathscr{T}(A_2)$, $\ldots$, $\mathscr{T}(A_m)$, $A_i \in U$.*

Доказательство. Из разложения моноида $\mathrm{SEnd}\, G$ видно, что для $\varphi = (\alpha, q) \in \mathrm{SEnd}\, G$ отношение $\ker(\varphi)$ и образ $\mathrm{im}(\varphi)$ зависят на самом деле соответственно от $\ker(q_{A_i})$ и $\mathrm{im}(q_{A_i})$ отображений $q_{A_i} \in \mathrm{Map}(A_i, A_i\alpha)$, $A_i \in U$. У элементов $(\alpha, q) \in S(G)$ отображения q_{A_i} представляют собой преобразования из $\mathscr{T}(A_i)$. Пусть K — произвольное $\mathscr{K}$-сечение полугруппы $S(G)$ и $(\mathrm{id}_U, f), (\mathrm{id}_U, g) \in K$ — два произвольных элемента. Для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ обозначим через K_i множество таких преобразований $h_{A_i} \in \mathscr{T}(A_i)$, что $(\mathrm{id}_U, h) \in K$. Заметим, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$

$$\Big((\mathrm{id}_U, f)(\mathrm{id}_U, g)\Big)\Big|_{A_i} = (\mathrm{id}_U, fg)|_{A_i} = f_{A_i} g_{A_i} \in \mathscr{T}(A_i),$$

откуда $f_{A_i} g_{A_i} \in K_i$. Таким образом, K_i — подполугруппа $\mathscr{T}(A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Понятно, что K_i, $1 \leqslant i \leqslant m$ должна содержать хотя бы по одному представителю из каждого класса эквивалентности $\mathscr{K}$ на $\mathscr{T}(A_i)$. Зафиксируем произвольное i и предположим, что K_i содержит два $\mathscr{K}$-эквивалентных на $\mathscr{T}(A_i)$ преобразования p_{A_i} и q_{A_i}.

Заметим, что сечение K всегда будет содержать идемпотент (id_U, h), определенный по правилу: h_{A_j} — некоторое константное преобразование в случае если $j \neq i$, $1 \leqslant j \leqslant m$, а $h_{A_i} = i_{A_i}$. Понятно, что произведения $(\mathrm{id}_U, p)(\mathrm{id}_U, h)$, $(\mathrm{id}_U, q)(\mathrm{id}_U, h) \in K$. Обозначим $\alpha = (\mathrm{id}_U, ph)$, $\beta = (\mathrm{id}_U, qh)$. Для всех $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ имеем тогда

$$A_j(ph) = p_{A_j} h_{A_j} = \begin{cases} h_{A_j}, & \text{если } j \neq i, \\ p_{A_i}, & \text{в противном случае;} \end{cases}$$

$$A_j(qh) = q_{A_j} h_{A_j} = \begin{cases} h_{A_j}, & \text{если } j \neq i, \\ q_{A_i}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Учитывая, что $p_{A_i} \mathscr{K} q_{A_i}$ получим $\alpha \mathscr{K} \beta$, следовательно, $\alpha = \beta$, откуда $p_{A_i} = q_{A_i}$. Таким образом, K_i является $\mathscr{K}$-сечением на $\mathscr{T}(A_i)$.

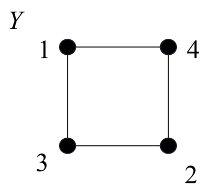


Рис. 3.1. Граф Y

Пусть K_i — $\mathscr{K}$-сечение на $\mathscr{T}(A_i)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, K — множество всех элементов $(\mathrm{id}_U, f) \in S(G)$, для которых $f_{A_i} \in K_i$ для всех i, $1 \leqslant i \leqslant m$. Поскольку умножение элементов из $S(G)$ сводится к умножению преобразований на классах, то, очевидно, K образует подполугруппу в $S(G)$, изоморфную $K_1 \times K_2 \times \ldots \times K_m$. При этом в K содержатся представители каждого из классов эквивалентности $\mathscr{K}$ на $S(G)$: любой элемент $(\mathrm{id}_U, h) \in S(G)$ будет $\mathscr{K}$-эквивалентен $(\mathrm{id}_U, h') \in K$ такому, что $h'_{A_i} \mathscr{K} h_{A_i}$, $h'_{A_i} \in K_i$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Если же $(\mathrm{id}_U, f), (\mathrm{id}_U, g) \in K$ — два произвольных элемента и $(\mathrm{id}_U, f) \mathscr{K} (\mathrm{id}_U, g)$, то $f_{A_i} \mathscr{K} g_{A_i}$ $(1 \leqslant i \leqslant m)$, откуда $f_{A_i} = g_{A_i}$.

Из доказанного выше следует, что K есть $\mathscr{K}$-сечение полугруппы $S(G)$ такое, что $K \cong \prod_{i=1}^{m} K_i$. $\square$

Заметим, что если $\mathscr{K} = \mathscr{D} = \mathscr{J}$, в общем случае K изоморфно вкладывается в $\prod_{i=1}^{m} K_i$. Рассмотрим, например, граф Y (рис.3.1.1).

Имеем $A_1 = \{1,2\}$, $A_2 = \{3,4\}$. Без ограничения общности можем считать, что $K_1 = \{\left(\begin{smallmatrix}12\\12\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}12\\11\end{smallmatrix}\right)\}$, $K_2 = \{\left(\begin{smallmatrix}34\\34\end{smallmatrix}\right), \left(\begin{smallmatrix}34\\33\end{smallmatrix}\right)\}$. Прямое произведение $K_1 \times K_2$ содержит с точностью до изоморфизма сильные эндоморфизмы $\varphi = \left(\begin{smallmatrix}1234\\1233\end{smallmatrix}\right)$, $\psi = \left(\begin{smallmatrix}1234\\1134\end{smallmatrix}\right)$, причем нетрудо видеть, что $S_\varphi \cong S_\psi$. Таким образом, $K_1 \times K_2$ не может служить $\mathscr{D}$-сечением для $S(G)$.

3.1.2. $\mathscr{R}$- и $\mathscr{L}$- сечений моноида сильных эндоморфизмов графа. Установим связь между $\mathscr{R}$-сечениями $\operatorname{SEnd} G$ и $\mathscr{R}$-сечениями полугруппы $S(G)$.

Лемма 3.1.2. *Пусть $R \subseteq \operatorname{SEnd} G$. Множество R есть $\mathscr{R}$-сечение полугруппы $S(G)$ тогда и только тогда, когда R является $\mathscr{R}$-сечением полугруппы* $\operatorname{SEnd} G$.

Доказательство. Покажем, что всякое $\mathscr{R}$-сечение R на $S(G)$ является $\mathscr{R}$-сечением и для $\operatorname{SEnd} G$. Действительно, пусть (β, f) — произвольный элемент из $\operatorname{SEnd} G$. Понятно, что для всякого $f_{A_i} \in \operatorname{Map}(A_i, A_i\beta)$, $A_i \in U$ можно найти такие преобразования $h_{A_i} \in \mathscr{T}(A_i)$, что $\ker(h_{A_i}) = \ker(f_{A_i})$. Пусть $(\mathrm{id}_U, h) \in S(G)$ такое, что $\ker h_{A_i}$ обладает указанным свойством для всех $A_i \in U$. Тогда $(\beta, f)\mathscr{R}(\mathrm{id}_U, h)$.

Пусть теперь R — $\mathscr{R}$-сечение полугруппы $\operatorname{SEnd} G$. Покажем, что $R \subseteq S(G)$.

Предположим, что некоторый сильный эндоморфизм $\varphi = (\beta, f) \notin S(G)$ принадлежит R. Тогда, во-первых, $\varphi^2 \neq \varphi$, и во-вторых, $\beta^l = \mathrm{id}_U$ для некоторого натурального $l \geqslant 3$. Рассмотрим преобразования $\varphi_1 = \varphi^l$, $\varphi_2 = (\varphi_1)^2 = \varphi^{2l}$, $\varphi_2 = (\varphi_1)^3 = \varphi^{3l}, \ldots$ и т. д. пока для некоторого r не получим $\varphi_r = \varphi^{rl}$ — идемпотент. Это означает, что преобразование φ_r из $R \cap S(G)$. Сравним теперь преобразования φ_r и $\varphi\varphi_r$ из R: с одной стороны $\varphi\varphi_r \neq \varphi_r$, поскольку им соответствуют разные автоморфизмы β и id_U, а с другой стороны — $\ker(\varphi\varphi_r) = \ker(\varphi_r)$, поскольку $\ker(\varphi) \subseteq \ker(\varphi_r)$. Из полученного противоречия следует, что $R \subseteq S(G)$. Таким образом, R является $\mathscr{R}$-сечением полугруппы $S(G)$. $\square$

Теперь, используя лемму 3.1.1 , можем описать $\mathscr{R}$-сечения моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа без кратных ребер.

Теорема 3.1.2. *Полугруппа* $\mathrm{SEnd}\, G$ *имеет единственное с точностью до изоморфизма* $\mathscr{R}$*-сечение* $R \cong R_1 \times R_2 \times \ldots \times R_m$*, где* R_i *—* $\mathscr{R}$*-сечение симметрической полугруппы* $\mathscr{T}(A_i)$*,* $A_i \in U$*.*

Доказательство. Следует из лемм 3.1.1 и 3.1.2, а также того, что для каждого класса $A_i \in U$ можно построить единственное с точностью до изоморфизма $\mathscr{R}$-сечение полугруппы $\mathscr{T}(A_i)$ [52]. $\square$

Учитывая, что число всех $\mathscr{R}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$ равно $n!$ [52], получаем

Следствие 3.1.1. *Пусть* k_i *— мощность класса* $A_i \in U$*,* $1 \leqslant i \leqslant m$*. Число всех различных* $\mathscr{R}$*-сечений полугруппы* $\mathrm{SEnd}\, G$ *равно* $\prod\limits_{i=1}^{m} k_i!$.

Аналогичная связь существует и между $\mathscr{L}$-сечениями $S(G)$ и $\mathrm{SEnd}\, G$.

Лемма 3.1.3. *Пусть* $L \subseteq \mathrm{SEnd}\, G$*. Множество* L *есть* $\mathscr{L}$*-сечение полугруппы* $S(G)$ *тогда и только тогда, когда* L *—* $\mathscr{L}$*-сечение полугруппы* $\mathrm{SEnd}\, G$*.*

Доказательство. Пусть L — $\mathscr{L}$-сечение полугруппы $S(G)$, $(\beta, f) \in \mathrm{SEnd}\, G$ — произвольный элемент. Положим $A_i' = A_i \cap \mathrm{im}\,(\beta, f)$ для всех $A_i \in U$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Тогда $(\beta, f)\mathscr{L}(\mathrm{id}_U, g)$, где $\mathrm{im}\,(g_{A_i}) = A_i'$ для всех $A_i \in U$. Таким образом, любой сильный эндоморфизм $\mathscr{L}$-эквивалентен некоторому из $S(G)$. Поэтому $\mathscr{L}$-сечение L полугруппы $S(G)$ является $\mathscr{L}$-сечением и для $\mathrm{SEnd}\, G$.

Пусть теперь L — $\mathscr{L}$-сечение $\mathrm{SEnd}\, G$. Покажем, что L содержится в $S(G)$. Предположим, что некоторый сильный эндоморфизм $\varphi = (\beta, f) \notin S(G)$ принадлежит L. Следовательно, $\beta^l = \mathrm{id}_U$ для некоторого натурального $l \geqslant 3$. Пусть $k \geqslant l$ — такое натуральное число, что преобразование $\varphi_k = \varphi^{kl}$ — идемпотент. Таким образом, преобразование φ_k из $L \cap S(G)$. Так как $\mathrm{im}\,(f_{A_i}) \supseteq \mathrm{im}\,(f_{A_i}^{kl})$ и $f_{A_i}^{kl}$ — идемпотент, то $\mathrm{im}\,(f_{A_i})$ содержит по крайней мере по одному представителю каждого из классов эквивалентности $\ker f_{A_i}^{kl}$, для всех $A_i \in U$. Поэтому $\mathrm{im}\,(\varphi\varphi_k) = \mathrm{im}\,(\varphi_k)$. Так как $\varphi_k, \varphi\varphi_k \in L$, то должно выполняться равенство

$\varphi_k = \varphi\varphi_k$. Но указанные преобразования неравны в силу того, что им соответствуют разные автоморфизмы: $\varphi_k = (\mathrm{id}_U, f^{kl})$, а $\varphi\varphi_k = (\beta, f)(\mathrm{id}_U, f^{kl}) = (\beta, f^{kl+1})$. Полученное противоречие доказывает $L \subseteq S(G)$. $\square$

Из лемм 3.1.1 и 3.1.3 получаем

Теорема 3.1.3. *Любое $\mathscr{L}$-сечение L полугруппы* $\mathrm{SEnd}\, G$ *изоморфно прямому произведению некоторых $\mathscr{L}$-сечений $L_1, L_2, \ldots, L_m$ симметрических полугрупп $\mathscr{T}(A_1), \mathscr{T}(A_2), \ldots, \mathscr{T}(A_m)$, $A_i \in U$.*

Напомним, что $\mathscr{L}$-сечением для $\mathscr{T}_n$ может служить следующая конструкция [42].

Пусть на множестве $N = \{1, 2, \ldots, n\}$ задан некоторый линейный порядок $\prec$. Обозначим через $M \subseteq N$ такое непустое подмножество, что

$$M = \{i_1 \prec i_2 \prec \ldots \prec i_k\}.$$

Положим

$$\tau_M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & k-1 & k & k+1 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_{k-1} & i_k & i_k & \ldots & i_k \end{pmatrix}.$$

Тогда $L = \{\tau_M \mid M \subseteq N, M \neq \varnothing\}$ — $\mathscr{L}$-сечение для $\mathscr{T}_n$.

Пример 3.1.1. Рассмотрим граф, изображенный на рис.3.1.1.

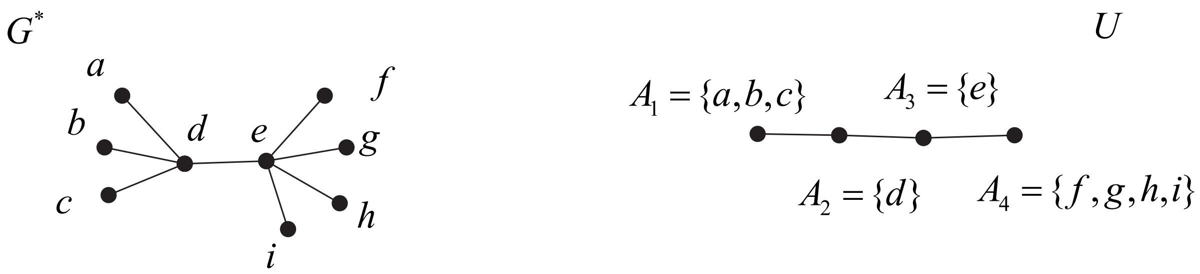


Рис. 3.2. Граф G^* и его канонический фактор-граф U.

Как видно по каноническому фактор-графу U, описание $\mathscr{L}$-сечений моноида $\mathrm{SEnd}\, G^*$ сводится к описанию $\mathscr{L}$-сечений симметрических полугрупп на трех-, одно-, и четырехэлементном множествах.

Очевидно, что $\mathscr{T}_1$ имеет единственное $\mathscr{L}$-сечение, равное $\mathscr{T}_1$. Обозначим его L_1.

Положим $a \prec b \prec \ldots \prec i$. Тогда согласно приведенной выше конструкции $\mathscr{L}$-сечениями для $\mathscr{T}_3$ и $\mathscr{T}_4$ будут соответственно полугруппы

$$L_3 = \left\{ \begin{pmatrix} abc \\ aaa \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bbb \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ ccc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ abb \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ acc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ bcc \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} abc \\ abc \end{pmatrix} \right\},$$

$$L_4 = \left\{ \begin{pmatrix} fghi \\ ffff \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ gggg \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ hhhh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ iiii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fggg \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} fghi \\ fhhh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fiii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ghhh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ giii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ hiii \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix} fghi \\ fghh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fgii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fhii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ghii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fghi \end{pmatrix} \right\}.$$

Для $\mathscr{T}_4$ можно построить другой пример $\mathscr{L}$-сечения (см. [42]):

$$L_4' = \left\{ \begin{pmatrix} fghi \\ ffff \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ gggg \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ hhhh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ iiii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ffhh \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} fghi \\ ffii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ gghh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ggii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ffgg \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ hhii \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix} fghi \\ fghh \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fgii \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ ffhi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ gghi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} fghi \\ fghi \end{pmatrix} \right\}.$$

Таким образом, примерами $\mathscr{L}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов графа G^* являются следующие полугруппы:

$$L_3 \times L_1 \times L_1 \times L_4 \cong L_3 \times L_4,$$

$$L_3 \times L_1 \times L_1 \times L_4' \cong L_3 \times L_4'.$$

3.1.3. $\mathscr{H}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов графа. Для описания $\mathscr{H}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов нам понадобятся следующие вспомогательные леммы.

Лемма 3.1.4. *Если U содержит хотя бы один класс мощности > 2, то полугруппа* $\mathrm{SEnd}\, G$ *не имеет $\mathscr{H}$-сечений.*

Доказательство. Не нарушая общности рассуждений предположим, что $|A_1| > 2$, где $A_1 \in U$, $|U| = m$. Определим три следующих $\mathscr{H}$-класса H_1, H_2, H_3. Пусть H_1 содержит элементы $\varphi = (\alpha, g) \in \mathrm{SEnd}\, G$, у которых $G/\ker(\varphi) = \{\{a_{11}\}, \{a_{12}, \ldots, a_{1|A_1|}\}, A_2, \ldots, A_m\}$, и образ равен $\{a_{11}, a_{13}, a_2, \ldots, a_m\}$, где $A_1 = \{a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1|A_1|}\}$, $a_i \in A_i$, $2 \leqslant i \leqslant m$ — произвольные фиксированные элементы. Из представления $\mathrm{SEnd}\, G$ видно, что для любого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ найдется такое $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$, что $A_i\alpha = A_j$. Причем, очевидно, $A_1\alpha = A_1$, поскольку остальные A_i, $2 \leqslant i \leqslant m$ принадлежат разбиению целиком. Таким образом, имеем $A_1 g_{A_1} = \{a_{11}, a_{13}\}$ и $A_i g_{A_i} = \{a_j\}$, где $i, j \in \{2, 3 \ldots, m\}$ и $A_i\alpha = A_j$.

Подобным образом определим H_2: пусть всем элементам из класса H_2 соответствуют разбиение $\{\{a_{11}, a_{12}\}, \{a_{13}, \ldots, a_{1|A_1|}\}, A_2, \ldots, A_m\}$ и образ $\{a_{12}, a_{13}, a_2, \ldots, a_m\}$. Тогда если $(\beta, f) \in H_2$ и $A_i\beta = A_j$ для некоторых i, j, то по аналогии с предыдущими рассуждениями $A_1\beta = A_1$ и, следовательно, $A_1 f_{A_1} = \{a_{12}, a_{13}\}$, $A_i f_{A_i} = \{a_j\}$, где $i, j \in \{2, 3 \ldots, m\}$.

Наконец, пусть всем элементам из H_3 соответствуют разбиение $\{\{a_{11}, a_{13}\}, \{a_{12}, \ldots, a_{1|A_1|}\}, A_2, \ldots, A_m\}$ и образ $\{a_{11}, a_{12}, a_2, \ldots, a_m\}$. Если $(\gamma, h) \in H_3$ и для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, m\}$ индекс $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$ такой, что $A_i\gamma = A_j$, то имеем $A_1 h_{A_1} = \{a_{11}, a_{12}\}$, если $i = j = 1$, и $A_i h_{A_i} = \{a_j\}$ в остальных случаях.

Поскольку квадрат любого элемента каждого из классов H_1, H_2 и H_3 сохраняют и разбиение, и образ, то представители $\mathscr{H}$-сечения полугруппы $\mathrm{SEnd}\, G$ будут идемпотентами. Таким образом,

$$\varphi_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1|A_1|} & A_2 & \ldots & A_m \\ a_{11} & a_{13} & a_{13} & \ldots & a_{13} & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix} \in H_1,$$

$$\varphi_2 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1|A_1|} & A_2 & \ldots & A_m \\ a_{12} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{13} & a_2 & \ldots & a_m \end{pmatrix} \in H_2,$$

$$\varphi_3 = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} & \dots & a_{1|A_1|} & A_2 & \dots & A_m \\ a_{11} & a_{12} & a_{11} & a_{12} & a_{12} & \dots & a_{12} & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \in H_3.$$

Следовательно, $\mathscr{H}$-сечение содержит $\psi = \varphi_1\varphi_2\varphi_3 = (\mu, q)$ и $\psi^2 = (\mu^2, p)$. Однако

$$A_1 q_{A_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1|A_1|} \\ a_{12} & a_{11} & a_{11} & \dots & a_{11} \end{pmatrix}, A_1 p_{A_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1|A_1|} \\ a_{11} & a_{12} & a_{12} & \dots & a_{12} \end{pmatrix},$$

т.е. ψ, ψ^2 неравны и принадлежат одному и тому же $\mathscr{H}$-классу. Следовательно, в условиях предложения невозможно построить $\mathscr{H}$-сечение полугруппы $\mathrm{SEnd}\, G$. □

Имеет место следующая лемма о существовании $\mathscr{H}$-сечений в $\mathrm{SEnd}\, G$.

Лемма 3.1.5. *Полугруппа* $\mathrm{SEnd}\, G$ *имеет* $\mathscr{H}$*-сечение тогда и только тогда, когда все классы из* U *мощности* $\leqslant 2$ *и для любого* $(\beta, f) \in \mathrm{SEnd}\, G$ *и всех двухэлементных классов* $A \in U$ *выполняется* $A\beta = A$ *или* $|A\beta| = 1$.

Доказательство. Предположим, что H — некоторое $\mathscr{H}$-сечение полугруппы $\mathrm{SEnd}\, G$. По лемме 3.1.4 для любого $A \in U$ выполняется $|A| \leqslant 2$. Пусть $C = \{\varphi \in \mathrm{SEnd}\, G \mid G/\ker(\varphi) = U\}$. Очевидно, что для любого $\gamma \in C$ имеем γ^2 также из C, и $\mathrm{im}\,(\gamma) = \mathrm{im}\,(\gamma^2)$. Поэтому в пересечении $H \cap C$ будут находиться все идемпотенты из C и только они.

Предположим теперь, что для некоторого $(\beta, f) \in \mathrm{SEnd}\, G$ существует такой класс $A \in U$, что $|A| = 2 = |A\beta|$ и $A\beta \neq A$. Не нарушая общности рассуждений, можем считать, что $|A_1| = |A_2| = 2$ и $A_1\beta = A_2$. Пусть $A_1 = \{a_{11}, a_{12}\}$, a_i — произвольные фиксированные представители классов A_i, $i \in \{2, 3, \dots, m\}$, тогда

$$(\mathrm{id}_U, g) = \begin{pmatrix} a_{11}a_{12} & A_2 & \dots & A_m \\ a_{11}a_{12} & a_2 & \dots & a_m \end{pmatrix} \in \mathrm{SEnd}\, G.$$

Рассмотрим произведение $(\mathrm{id}_U, g)(\beta, f) = (\beta, h)$, где $A_1 h_{A_1} = \{a_{21}, a_{22}\}$ и $A_i h_{A_i} = a_i f_{A_i} \in A_i\beta$ для всех $i \in \{2, 3, \dots, m\}$. Таким образом, в $\mathrm{SEnd}\, G$ существует $\mathscr{H}$-класс, элементам которого соответствуют разбиение $\{\{a_{11}\}, \{a_{12}\}, A_2, \dots, A_m\}$ и образ $\{a_{21},\ a_{22}, a_2 f_{A_2},\ a_3 f_{A_3}, \dots, a_m f_{A_m}\}$. Пусть (β, h') элемент указанного класса, принадлежащий H. Тогда произведение

$$(\beta, h')(\mathrm{id}_U, g) = \begin{pmatrix} A_1 & A_2 & \dots & A_m \\ a_2 & a_2 f_{A_2} & \dots & a_m f_{A_m} \end{pmatrix} \in C,$$

но не является идемпотентом, т. е. не принадлежит H. А это противоречит начальному предположению. Отметим здесь также, что из доказанного следует $\gamma \mathscr{H} \gamma^2$ для любого $\gamma \in \mathrm{SEnd}\, G$. Таким образом, все элементы из H идемпотентны, откуда $H \subseteq S(G)$. Следовательно, H — $\mathscr{H}$-сечение для $S(G)$.

Наоборот, пусть все классы из U мощности $\leqslant 2$, и для любого $(\beta, f) \in \mathrm{SEnd}\, G$ и всех двухэлементных классов $A \in U$ выполняется $A\beta = A$ или $|A\beta| = 1$. Согласно [52] на $\mathscr{T}(A_i)$, $A_i \in U$ существуют и определены единственным образом $\mathscr{H}$-сечения H_i, $1 \leqslant i \leqslant m$. По лемме 3.1.1 прямое произведение $H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$ изоморфно некоторому $\mathscr{H}$-сечению H полугруппы $S(G)$.

Покажем, что для любого $(\beta, f) \in \mathrm{SEnd}\, G$ найдется $\mathscr{H}$-эквивалентный элемент из $S(G)$. Для каждого $f_A \in \mathrm{Map}(A, A\beta)$, $A \in U$ определим сюръективное преобразование $p_{A\beta} : A\beta \to \mathrm{im}\,(f_A)$. Рассмотрим теперь сильный эндоморфизм $(\mathrm{id}_U, p) \in S(G)$. Нетрудно видеть, что $\mathrm{im}\,(\mathrm{id}_U, p) = \mathrm{im}\,(\beta, f)$. Для любого $A \in U$, если $A \neq A\beta$, то $|A\beta| = 1$ и $|A \cap \mathrm{im}\,(\beta, f)| = 1$, откуда $A, A\beta \in \ker\,(\beta, f) \cap \ker\,(\mathrm{id}_U, p)$. Если же $A = A\beta$, то $p_{A\beta} = p_A = f_A$ и, очевидно, $\ker\,(f_A) = \ker\,(p_A)$. Таким образом, $\ker\,(\beta, f) = \ker\,(\mathrm{id}_U, p)$. Следовательно, $(\beta, f)\mathscr{H}(\mathrm{id}_U, p)$ и H является $\mathscr{H}$-сечением для $\mathrm{SEnd}\, G$. $\square$

Из лемм 3.1.1 и 3.1.5 следует описание $\mathscr{H}$-сечений моноида $\mathrm{SEnd}\, G$.

Теорема 3.1.4. *Если полугруппа* $\mathrm{SEnd}\, G$ *имеет* $\mathscr{H}$*-сечение* H*, то оно единственно, причем* $H \cong H_1 \times H_2 \times \ldots \times H_m$*, где* H_i *—* $\mathscr{H}$*-сечение* $\mathscr{T}(A_i)$*,* $A_i \in U$*.*

3.2. $\mathscr{L}$-сечения конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$

Как было отмечено выше, для более полного представления об $\mathscr{L}$-сечениях моноида $\mathrm{SEnd}\, G$, необходимо ясное представление о строении $\mathscr{L}$-сечений симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$.

Отметим, что в доказательствах мы будем постоянно использовать тот факт, что произвольное $\mathscr{L}$-сечение $\mathscr{T}_n$ содержит в точности одно преобразование с образом M для *каждого* непустого подмножества $M \subseteq X$.

3.2.1. Определения L-семейства. Понятие L-семейства играет первостепенную роль в описании $\mathscr{L}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$, так как фактически с помощью L-семейства по образу определяется ядро преобразования, входящего в $\mathscr{L}$-сечение.

3.2.1.1. Основное определение L-семейства. Напомним, что строгий порядок — это асимметричное и транзитивное бинарное отношение. Пусть X — непустое конечное множество и $<$ — строгий порядок на X. Определим строгий порядок $\prec$ на семействе непустых подмножеств множества X следующим образом: $A \prec B$ если для всех $a \in A$ и всех $b \in B$, $a < b$.

Пусть $\{1,2\}^+$ обозначает свободную полугруппу слов над алфавитом $\{1,2\}$, через $\{1,2\}^*$ обозначим свободный моноид над $\{1,2\}$, а 0 — пустое слово.

Определение 3.2.1. Пусть X конечное множество (возможно пустое) и пусть $<$ — строгий порядок на X. Индексированное семейство подмножеств $\{A_a\}_{a\in\{1,2\}^*}$ множества X назовем Γ-**семейством** над $(X,<)$ если для любого $a \in \{1,2\}^*$:

(a) $A_0 = X$;

(b) если $|A_a| \leqslant 1$, то $A_{a1} = A_{a2} = \varnothing$;

(c) если $|A_a| > 1$, то A_{a1} и A_{a2} непусты и $A_{a1} \prec A_{a2}$, $A_a = A_{a1} \cup A_{a2}$.

Будем говорить, что $\{A_a\}_{a\in\{1,2\}^*}$ — Γ-семейство над X, если $\{A_a\}_{a\in\{1,2\}^*}$ является Γ-семейством над $(X,<)$ для некоторого произвольного фиксированного строгого линейного порядка $<$ на X. Для простоты будем писать просто $\Gamma = \{A_a\}$ вместо $\Gamma = \{A_a\}_{a\in\{1,2\}^*}$.

Напомним, что дерево — это связный граф, не содержащий циклов. Полное бинарное дерево — это дерево, в котором выделена в точности одна вершина (узел) степени 2, а все остальные вершины имеют степень 3 или 1. Вершины, степень которых равна 1, называются листьями. Каждая вершина кроме корня дерева имеет единственного родителя. Потомок вершины v — это вершина, родителем которой является узел v. Таким образом, в полном бинарном дереве каждая вершина v является либо листом, либо имеет в точности двух потомков (левого и правого).

Нетрудно видеть, что произвольное Г-семейство $\Gamma = \{A_a\}$ над непустым множеством может быть представлено в виде полного бинарного дерева $T(\Gamma)$, вершинами которого служат множества $\{A_a\}$, а пара $\{A_a, A_b\}$, $a, b \in \{1,2\}^*$ является ребром тогда и только тогда, когда $a = bi$ или $b = ai$, где $i = 1, 2$ (см. рис. 3.3). Полное бинарное дерево, представляющее Г-семейство, для удобства мы будем обозначать также просто Γ вместо $T(\Gamma)$.

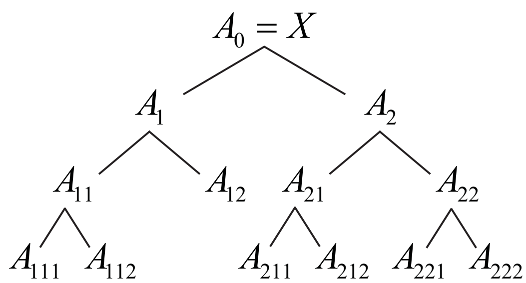


Рис. 3.3. Г-дерево

Определение 3.2.2. Назовем Г-семейство $\Gamma = \{A_a\}$ над $(X, <)$ L- **семейством** над $(X, <)$, если для любых $a, b \in \{1,2\}^*$ и любых $i, j \in \{1,2\}$ таких, что $i \neq j$,

$$|A_{aijb}| \leqslant |A_{ajb}|. \tag{3.1}$$

Будем говорить, что $\{A_a\}_{a\in\{1,2\}^*}$ — L-*семейство* над X, если $\{A_a\}_{a\in\{1,2\}^*}$ является L-семейством над $(X, <)$ для некоторого линейного строгого порядка $<$ на X.

Пример 3.2.1. Пусть множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ естественно упорядочено. Рассмотрим следующее Г-семейство $\{A_a\}$:

Это Г-семейство удовлетворяет условию (3.1) для всех $a, b \in \{1,2\}^*$ и всех $i, j \in \{1,2\}$, $i \neq j$, и таким образом, $\{A_a\}$ является L-семейством по определению.

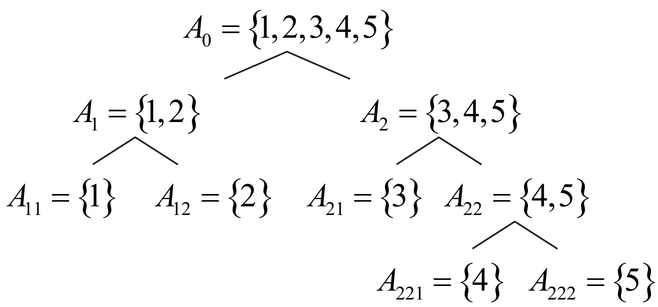


Рис. 3.4. Г-семейство $\{A_a\}$

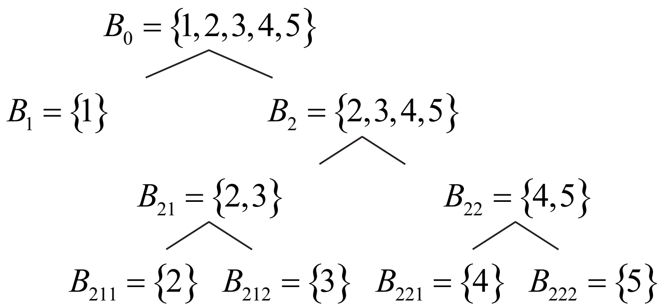


Рис. 3.5. Г-семейство $\{B_a\}$

На рис. 3.5 представлено полное бинарное дерево, изображающее Г-семейство $\{B_a\}$, которое не удовлетворяет условию (3.1), так как $|B_{21}| \geqslant |B_1|$.

Пример 3.2.2. Пусть $X = \{1,2,3,4\}$ естественно упорядочено. В таком случае можем выбрать три различных L-семейства на X:

$$\Gamma_1 = \{A_0 = \{1,2,3,4\}, A_1 = \{1\}, A_2 = \{2,3,4\}, A_{21} = \{2\},$$

$$A_{22} = \{3,4\}, A_{221} = \{3\}, A_{222} = \{4\}\},$$

$$\Gamma_2 = \{A_0 = \{1,2,3,4\}, A_1 = \{1,2\}, A_2 = \{3,4\}, A_{11} = \{1\}, A_{12} = \{2\},$$

$$A_{21} = \{3\}, A_{22} = \{4\}\}.$$

$$\Gamma_3 = \{A_0 = \{1,2,3,4\}, A_1 = \{1,2,3\}, A_2 = \{4\}, A_{11} = \{1,2\},$$

$$A_{12} = \{3\}, A_{111} = \{1\}, A_{112} = \{2\}\},$$

3.2.1.2. Альтернативные определения L-семейств. В этом пункте мы сформулируем два эквивалентных альтернативных определения L-семейств, которые, на наш взгляд, сделают это понятие более наглядным. Одно из определений основано на связи L-семейств с бинарными деревьями, другое — на связи мощностей элементов из L-семейства с индексами элементов L-семейства. Введем необходимые определения.

Определение 3.2.3. Пусть Γ_1, Γ_2 — полные бинарные деревья, представляющие Γ-семейства $\{A_a\}$ над X_1 и $\{B_a\}$ над X_2 соответственно. Будем говорить, что Γ_1 *меньше или равно* Γ_2 (и записывать $\Gamma_1 \leqslant \Gamma_2$), если $|A_a| \leqslant |B_a|$ для всех $a \in \{1,2\}^*$.

Пусть $\Gamma = \{A_a\}_{a\in\{1,2\}^*}$ — Γ-семейство над X. Для любого $a \in \{1,2\}^*$, обозначим через $\Gamma(a)$ семейство $\{B_b\}_{b\in\{1,2\}^*}$ подмножеств A_a таких, что $B_b = A_{ab}$ для всех $b \in \{1,2\}^*$. Понятно, что $\Gamma(a)$ — Γ-семейство над множеством A_a и что, если $A_a \neq \varnothing$, то $\Gamma(a)$ представляет собой поддерево $\Gamma(a)$ с корнем A_a исходного Γ-дерева.

Определение 3.2.4. Пусть Γ — Γ-дерево. Для любого $a \in \{1,2\}^*$ и $i \in \{1,2\}$, будем называть дерево $\Gamma(a)$ *родительским деревом* для поддерева $\Gamma(ai)$. Назовем Γ *монотонным* если для всех $a \in \{1,2\}^*$ и $i \in \{1,2\}$, $\Gamma(ai) \leqslant \Gamma(a)$.

Напомним также, что *подпоследовательностью* слова w называется слово, состоящее из символов слова w, порядок следования которых совпадает с их порядком следования в исходном слове w.

Утверждение 3.2.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Γ-*семейство* $\Gamma = \{A_a\}$ *над* X *является* L-*семейством над* X.

(ii) *Полное бинарное дерево, представляющее семейство* Γ, *является монотонным.*

(iii) *Для любого слова* $b \in \{1,2\}^*$ *узлу дерева* Γ, *ассоциированному с* b, *всегда соответствует множество не большей мощности, чем узлу, ассоциированному с любой подпоследовательностью* b.

Доказательство. (i)$\Rightarrow$(ii) Пусть Γ — полное бинарное дерево с корнем X, ассоциированное с L-семейством над множеством X, а $\Gamma(a1)$, $a1 \in \{1,2\}^*$ — поддерево дерева Γ. Если $|A_{a1}| = 1$, то, очевидно, $\Gamma(a1) \leqslant \Gamma(a)$. Пусть $|A_{a1}| > 1$. Для доказательства неравенства $\Gamma(a1) \leqslant \Gamma(a)$, покажем выполнение неравенств $\Gamma(a12) \leqslant \Gamma(a2)$ и $\Gamma(a11) \leqslant \Gamma(a1)$.

Обозначим через $\{B_b\}$ и $\{C_b\}$ соответственно L-семейства, ассоциированные с поддеревьями $\Gamma(a12)$ и $\Gamma(a2)$. Тогда для всякого $b \in \{1,2\}^*$,

$$|B_b| = |A_{a12b}| \leqslant |A_{a2b}| = |C_b|,$$

где $\leqslant$ следует из (3.1). Таким образом, $\Gamma(a12) \leqslant \Gamma(a2)$.

Покажем $\Gamma(a11) \leqslant \Gamma(a1)$, пусть теперь $\{B_b\}$ и $\{C_b\}$ обозначают L-семейства, ассоциированные с поддеревьями $\Gamma(a11)$ и $\Gamma(a1)$ соответственно. Обозначим через $\tilde{k}$, $k \geqslant 0$, пустое слово 0, если $k = 0$; и слово $\underbrace{11\ldots1}_{k} \in \{1,2\}^*$, если $k \geqslant 1$. Тогда для любого $b \in \{1,2\}^*$, если $b = \underbrace{11\ldots1}_{k}$, то

$$|B_b| = |A_{a11\tilde{k}}| \leqslant |A_{a1\tilde{k}}| = |C_b|,$$

так как $A_{a11\tilde{k}} \subset A_{a1\tilde{k}}$; а если $b = \tilde{k}2c$ $(k \geqslant 0,\ c \in \{1,2\}^*)$, то

$$|B_b| = |A_{11\tilde{k}2c}| \leqslant |A_{a1\tilde{k}2c}| = |C_b|,$$

где $\leqslant$ следует из (3.1).

Теперь, поскольку $|A_{a1}| < |A_a|$, $\Gamma(a11) \leqslant \Gamma(a1)$ и $\Gamma(a12) \leqslant \Gamma(a2)$, получим $\Gamma(a1) \leqslant \Gamma(a)$. Двойственным образом можно показать, что $\Gamma(a2) \leqslant \Gamma(a)$. Таким образом, любое поддерево дерева Γ меньше своего родительского дерева, следовательно, дерево Γ монотонно.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) Пусть $A_a, A_b \in \Gamma$ и $a \subseteq b$. Покажем, что если Γ монотонно, то $|A_b| \leqslant |A_a|$.

Если $|a| = 0$, то $|A_b| \leqslant |A_a|$ для всех $b \in \{1,2\}^*$ по определению Γ-семейства (см. определение 3.2.1). Пусть $a = a_1 \ldots a_t$, $b = b_1 \ldots b_s$, для некоторых символов $a_1, \ldots, a_t$, $b_1, \ldots, b_s \in \{1,2\}$ и натуральных s, t таких, что $t < s$. Пусть $a_1 = \ldots = a_t = b_1 = \ldots = b_s$. В силу предположения

$$\Gamma(b) = \Gamma(b_1 \ldots b_s) \leqslant \Gamma(b_1 \ldots b_{s-1}) \leqslant \ldots \leqslant \Gamma(b_1 \ldots b_t) = \Gamma(a).$$

Предположим $k_1, k_2, \ldots, k_t$ — наибольшие натуральные числа такие, что $k_1 < k_2 < \ldots < k_t \leqslant s$ и $a_1 = b_{k_1}, \ldots, a_t = b_{k_t}$. Так как Γ монотонно, то

$$\Gamma(b) \leqslant \Gamma(b_1 \ldots b_{s-1}) \leqslant \ldots \leqslant \Gamma(b_1 \ldots b_{k_t}).$$

Таким образом,

$$|A_b| \leqslant |A_{b_1 \dots b_{k_t}}|. \tag{3.2}$$

Если $|a| = 1$, то учитывая $\Gamma(b_1 \dots b_{k_t - 1}) \leqslant \Gamma(b_1 \dots b_{k_t - 2}) \leqslant \dots \leqslant \Gamma(0)$, получим, что $|A_{b_1 \dots b_{k_t - 1} b_{k_t}}| \leqslant |A_{b_{k_t}}|$. Последнее неравенство вместе с (3.2) дает $|A_b| \leqslant |A_a|$. Кроме того, для любого r, такого что $1 < r \leqslant s$,

$$\Gamma(b_1 \dots b_{k_r - 1}) \leqslant \Gamma(b_1 \dots b_{k_r - 2}) \leqslant \dots \leqslant \Gamma(b_1 \dots b_{k_{(r-1)}}),$$

имеем $|A_{b_1 \dots b_{k_r - 1} b_{k_r}}| \leqslant \dots \leqslant |A_{1 \dots b_{k_{(r-1)}} b_{k_r}}|$. Следовательно,

$$|A_b| \leqslant |A_{b_1 \dots b_{k_t - 1} b_{k_t}}| \leqslant |A_{b_1 \dots b_{k_{t-1} - 1} b_{k_{t-1}} b_{k_t}}| \leqslant \dots |A_{b_1 \dots b_{k_1 - 1} b_{k_1} b_{k_2} \dots b_{k_t}}|.$$

Наконец, поскольку $\Gamma(b_1 \dots b_{k_1 - 1}) \leqslant \Gamma(b_1 \dots b_{k_1 - 2}) \leqslant \dots \leqslant \Gamma(0)$, получим $|A_{b_1 \dots b_{k_1 - 1} b_{k_1} b_{k_t}}| \leqslant |A_{b_{k_1} \dots b_{k_t}}| = |A_a|$.

(iii) $\Rightarrow$ (i) Немедленно следует из того, что A_{aijb} — подпоследовательность A_{aib} для любых $a, b \in \{1, 2\}^*$ и любых $i, j \in \{1, 2\}$. $\square$

Лемма 3.2.1. *Пусть на множестве X определено L-семейство Γ, V — произвольное подмножество множества X, $|V| > 1$. Всегда существует единственная пара $A_{a1}, A_{a2} \in \Gamma$, $a \in \{1, 2\}^*$ таких, что V является объединением двух непустых подмножеств из A_{a1} и A_{a2} соответственно.*

Доказательство. Понятно, что V содержится в некотором множестве из Γ. Предположим, что $A_a \in \Gamma$ — пересечение всех множеств из Γ, содержащих V. Поскольку $A_a = A_{a1} \dot\cup A_{a2}$ и A_a — наименьшее множество из Γ, содержащее V то, очевидно, $V \cap A_{a1} \neq \varnothing$, $V \cap A_{a2} \neq \varnothing$ и $V = (V \cap A_{a1}) \cup (V \cap A_{a2})$. Таким образом, V представляет собой объединением двух непустых подмножеств из A_{a1} и A_{a2} соответственно. Теперь покажем, что такая пара единственна.

Пусть $A_b \in \Gamma$, $b \in \{1, 2\}^*$, $b \neq a$ и $V \subseteq A_b$. Понятно, что $A_a \subset A_b$. По определению семейства Γ тогда либо $A_a \subseteq A_{b1}$, либо $A_a \subseteq A_{b2}$. Следовательно, V нельзя представить как объединение непустых подмножеств из A_{b1} и A_{b2} соответственно. $\square$

3.2.2. Описание $\mathscr{L}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$.

3.2.2.1. Полугруппа L_X^Γ. На данном этапе нам необходимо научится для каждого непустого $M \subseteq X$ строить «правильное» преобразование множества X с образом M.

Пусть f и g — функции, области определения которых не пересекаются. Обозначим через $f \cup g$ объединение f и g (рассматриваемых как множество пар). Другими словами, если $h = f \cup g$, тогда $\operatorname{dom}(h) = \operatorname{dom}(f) \cup \operatorname{dom}(g)$ и для всех $x \in \operatorname{dom}(h)$ $xh = xf$, если $x \in \operatorname{dom}(f)$, и $xh = xg$, если $x \in \operatorname{dom}(g)$.

Определение 3.2.5. Пусть $\Gamma = \{A_a\}$ — произвольное L-семейство над X, $M \subseteq X$ и $M \neq \varnothing$. Для данного L-семейства и непустого подмножества M множества X обозначим через $\langle M \rangle$ пересечение всех $A_c \in \Gamma$ таких, что $M \subseteq A_c$. Заметим, что поскольку $\langle M \rangle$ является элементом L-семейства, $\langle M \rangle$ имеет вид A_b для некоторого $b \in \{1,2\}^*$. Для любых $a \in \{1,2\}^*$, определим *отображение* $\alpha_M^{A_a}$ индуктивно следующим образом:

(a) если $A_a = \varnothing$, то $\alpha_M^{A_a} = \varnothing$ (пустое отображение);

(b) если $M = \{m\}$ и $A_a \neq \varnothing$, то $\operatorname{dom}(x\alpha_M^{A_a}) = A_a$ и $x\alpha_M^{A_a} = m$ для всех $x \in A_a$;

(c) если $|M| > 1$ и $A_a \neq \varnothing$, то $\alpha_M^{A_a} = \alpha_{M\cap A_{b1}}^{A_{a1}} \cup \alpha_{M\cap A_{b2}}^{A_{a2}}$.

Лемма 3.2.2. *Пусть $\Gamma = \{A_a\}$ — произвольное L-семейство над X. Если $M \subseteq A_a$, или $A_a \neq \varnothing$ и $M \cap A_a = \varnothing$, тогда* $\operatorname{dom}(x\alpha_M^{A_a}) = A_a$ *и* $\operatorname{im}(x\alpha_M^{A_a}) = M$.

Доказательство. Проведем доказательство индукцией по $|M|$. Если $M = \{m\}$, то согласно (b) определения 3.2.5 утверждение выполняется. Пусть $|M| > 1$, предположим, что утверждение верно для любого M' такого, что $1 \leqslant |M'| < |M|$. Пусть $M \subseteq A_a$ или $A_a \neq \varnothing$ и $M \cap A_a = \varnothing$. Тогда согласно пункту (c) определения 3.2.5, $\alpha_M^{A_a} = \alpha_{M\cap A_{b1}}^{A_{a1}} \cup \alpha_{M\cap A_{b2}}^{A_{a2}}$. Рассмотрим возможные случаи.

Случай 1. $M \subseteq A_a$. Пусть $A_b \subseteq A_a$ — это пересечение всех A_c, для которых

$M \subseteq A_c$. Если $A_b = A_a$ тогда

$$M \cap A_{b1} = M \cap A_{a1} \subseteq A_{a1},$$
$$M \cap A_{b2} = M \cap A_{a2} \subseteq A_{a2},$$

при этом $|M \cap A_{b1}|$, $|M \cap A_{b2}| < |M|$ (поскольку $\langle M \rangle = A_b$). Таким образом, по индуктивному предположению утверждение справедливо для $\alpha^{A_{a1}}_{M \cap A_{b1}}$ и для $\alpha^{A_{a2}}_{M \cap A_{b2}}$, а значит и для $\alpha^{A_a}_M$.

Если $A_b \neq A_a$ тогда, поскольку $A_a = A_{a1} \cup A_{a2}$ и $A_{a1} \cap A_{a2} = \varnothing$, получим либо $A_b \subseteq A_{a1}$, либо $A_b \subseteq A_{a2}$. Можем считать, что $A_b \subseteq A_{a1}$. Тогда

$$M \cap A_{b1} \subseteq A_{a1},$$
$$(M \cap A_{b2}) \cap A_{a2} = \varnothing.$$

При этом $A_{a2} \neq \varnothing$ (поскольку $M \subseteq A_a$ и $|M| > 1$) and $|M \cap A_{b1}|$, $|M \cap A_{b2}| < |M|$ (поскольку $\langle M \rangle = A_b$). Поскольку $\alpha^{A_a}_M = \alpha^{A_{a1}}_{M \cap A_{b1}} \cup \alpha^{A_{a2}}_{M \cap A_{b2}}$, то по индуктивному предположению снова получим, что утверждение верно для $\alpha^{A_a}_M$.

Случай 2. $A_a \neq \varnothing$ и $M \cap A_a = \varnothing$.

Тогда $(M \cap A_{b1}) \cap A_{a1} = \varnothing$ и $(M \cap A_{b2}) \cap A_{a2} = \varnothing$. Как и выше по индуктивному предположению и условию $\alpha^{A_a}_M = \alpha^{A_{a1}}_{M \cap A_{b1}} \cup \alpha^{A_{a2}}_{M \cap A_{b2}}$, получим требуемое утверждение. □

Обозначим через L^Γ_X множество всех преобразований вида α^X_M, где $M \subseteq X$, $M \neq \varnothing$. Будем обозначать преобразования α^X_M также через α_M.

Пример 3.2.3. Пусть множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ естественно упорядочено, и на нем задано L-семейство $\Gamma = \{A_a\}$ из примера 3.2.1. Построим множество L^Γ_X. Итак,

$$\Gamma = \{A_0 = \{1, 2, 3, 4, 5\}, A_1 = \{1, 2\}, A_2 = \{3, 4, 5\}, A_{11} = \{1\},$$

$$A_{12} = \{2\}, A_{21} = \{3\}, A_{22} = \{4, 5\}, A_{221} = \{4\}, A_{222} = \{5\}\}.$$

Построим преобразование $\alpha = \alpha_M$ для множества $M = \{1, 2, 4, 5\}$. Понятно, что $\langle M \rangle = A_0$, следовательно по определению α_M

$$\alpha = \alpha^{A_0}_M = \alpha^{A_1}_{M \cap A_1} \cup \alpha^{A_2}_{M \cap A_2} = \alpha^{A_1}_{\{1,2\}} \cup \alpha^{A_2}_{\{4,5\}}.$$

Поскольку $\langle\{1,2\}\rangle = A_1$, $\langle\{4,5\}\rangle = A_{22}$, получим

$$\alpha^{A_1}_{\{1,2\}} = \alpha^{A_{11}}_{\{1,2\}\cap A_{11}} \cup \alpha^{A_{12}}_{\{1,2\}\cap A_{12}} = \alpha^{A_{11}}_{\{1\}} \cup \alpha^{A_{12}}_{\{2\}},$$

$$\alpha^{A_2}_{\{4,5\}} = \alpha^{A_{21}}_{\{4,5\}\cap A_{221}} \cup \alpha^{A_{22}}_{\{4,5\}\cap A_{222}} = \alpha^{A_{21}}_{\{4\}} \cup \alpha^{A_{22}}_{\{5\}}.$$

Учитывая $A_{11} = \{1\}$, $A_{12} = \{2\}$, $A_{21} = \{3\}$, и $A_{22} = \{4,5\}$, получим

$$\alpha = \alpha^{A_{11}}_{\{1\}} \cup \alpha^{A_{12}}_{\{2\}} \cup \alpha^{A_{21}}_{\{4\}} \cup \alpha^{A_{22}}_{\{5\}} = \begin{pmatrix} 12345 \\ 12455 \end{pmatrix}.$$

Аналогично строятся остальные преобразования α для которых $\langle \mathrm{im}\,(\alpha)\rangle = A_0$:

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 12345 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12344 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12355 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 11345 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 22345 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 11355 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 11344 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 11455 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 22355 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 22344 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 22455 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12333 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12444 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 12555 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 11333 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 11444 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 11555 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 22333 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 22444 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 22555 \end{pmatrix}.$$

Построим теперь преобразование α с образом $A_2 = \{3,4,5\}$, т. е. $\alpha = \alpha_{\{3,4,5\}}$. Понятно, что в этом случае $A_2 = \langle \mathrm{im}\,(\alpha)\rangle$. Таким образом, далее получим

$$\alpha_{\{3,4,5\}} = \alpha^{A_1}_{\{3,4,5\}\cap A_{21}} \cap \alpha^{A_2}_{\{3,4,5\}\cap A_{22}} = \alpha^{A_1}_{\{3\}} \cup \alpha^{A_2}_{\{4,5\}}.$$

Так как $\langle\{4,5\}\rangle = A_{22}$, $\alpha^{A_2}_{\{4,5\}} = \alpha^{A_{21}}_{\{4,5\}\cup A_{221}} \cup \alpha^{A_{21}}_{\{4,5\}\cap A_{222}}$. Поскольку $A_{221} = \{4\}$, $A_{222} = \{5\}$, то

$$\alpha_{\{3,4,5\}} = \alpha^{A_1}_{\{3\}} \cup \alpha^{A_{21}}_{\{4\}} \cup \alpha^{A_{22}}_{\{5\}}.$$

Следовательно, $\alpha = \begin{pmatrix} 12345 \\ 33455 \end{pmatrix}$. Точно также получим еще два преобразования с образами в A_2:

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 33555 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 33444 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\operatorname{im}(\alpha)$ совпадает A_1 (A_{22}). Тогда $\alpha_{A_1} = \alpha^{A_1}_{A_1 \cap A_{11}} \cup \alpha^{A_2}_{A_1 \cap A_{12}} = \alpha^{A_1}_{\{1\}} \cup \alpha^{A_2}_{\{2\}}$ ($\alpha_{A_{22}} = \alpha^{A_1}_{A_{22} \cap A_{221}} \cup \alpha^{A_2}_{A_{22} \cap A_{222}} = \alpha^{A_1}_{\{4\}} \cup \alpha^{A_2}_{\{5\}}$) и мы получим

$$\begin{pmatrix} 12345 \\ 11222 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 12345 \\ 44555 \end{pmatrix}.$$

Если $\operatorname{im}(\alpha)$ совпадает с одним из пяти оставшихся классов, получим константные преобразования c_1, c_2, c_3, c_4, c_5.

$\mathscr{L}$-сечения конечной симметрической полугруппы описывает следующая теорема:

Теорема 3.2.1. *Для любого L-семейства Γ на множестве X, множество L^{Γ}_X является $\mathscr{L}$-сечением симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$. Обратно, всякое $\mathscr{L}$-сечение симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ можно представить в виде L^{Γ}_X для подходящего L-семейства Γ на множестве X.*

3.2.2.2. Доказательство Теоремы 3.2.1. Пусть далее везде L обозначает произвольное $\mathscr{L}$-сечение полугруппы $\mathscr{T}_n$. Отметим вначале два следующих тривиальных случая:

(i) $L = \{c_1\}$, если $n = 1$;

(ii) $L = \{\mathrm{id}_X, c_1, c_2\}$, если $n = 2$.

Будем считать далее, что $n \geqslant 3$.

Убедимся, что L^{Γ}_X действительно является $\mathscr{L}$-сечением симметрической полугруппы.

Лемма 3.2.3. *Множество L^{Γ}_X образует полугруппу относительно композиции преобразований.*

Доказательство. Пусть Γ — произвольное L-семейство на X. Рассмотрим композицию $\varphi\psi$ произвольных элементов $\varphi, \psi \in L^{\Gamma}_X$. Пусть $A_a = \langle \operatorname{im}(\varphi) \rangle$, $A_b = \langle \operatorname{im}(\psi|_{A_a}) \rangle$ для некоторых $A_a, A_b \in \Gamma$. Понятно, что $\varphi\psi = \varphi\psi|_{A_a}$.

Равенство $|A_a| = 1$ влечет $|A_b| = 1$. В этом случае, если $|A_a| \neq 1$, $|A_b| = 1$, очевидно, что $\varphi\psi$ — константное отображение из A_0 в A_b и, следовательно, $\varphi\psi \in L^{\Gamma}_X$.

Предположим, что $|A_a| \neq 1$,$|A_b| \neq 1$. Поскольку $\varphi = \alpha^{A_0}_{\mathrm{im}\,(\varphi)}$, $\psi|_{A_a} = \alpha^{A_a}_{\mathrm{im}\,(\psi|_{A_a})}$, имеем $\varphi\psi|_{A_a} = \alpha^{A_0}_{\mathrm{im}\,(\varphi)\psi|_{A_a}}$. Таким образом, $\varphi\psi \in L^{\Gamma}_X$.

$\square$

Согласно лемме 3.2.1 и определению элементов из L^{Γ}_X для каждого $M \subseteq X$, $M \neq \varnothing$ можно построить (и при том единственным образом) преобразование α^X_M. Таким образом, L^{Γ}_X является $\mathscr{L}$-сечением $\mathscr{T}_n$. Теперь нам остается доказать вторую часть теоремы 3.2.1. Для этого выясним некоторые свойства произвольного $\mathscr{L}$-сечения L полугруппы $\mathscr{T}_n$.

Обозначим через X_L объединение всех классов эквивалентности $X/\ker(\alpha)$ по всем $\alpha \in L$:

$$X_L = \bigcup_{\alpha \in L} X/\ker(\alpha).$$

Множество всех трансверсалей множества $X/\ker(\alpha)$ произвольного преобразования $\alpha \in \mathscr{T}_n$ обозначим через T_α.

Пример 3.2.4. Возьмем для примера $\mathscr{L}$-сечение $\mathscr{T}_4$, построенное в [42]:

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} 1234 \\ 1111 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2222 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 3333 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 4444 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1133 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1144 \end{pmatrix}, \right.$$

$$\begin{pmatrix} 1234 \\ 2233 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2244 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1122 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 3344 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1233 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1244 \end{pmatrix},$$

$$\left. \begin{pmatrix} 1234 \\ 1134 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 2234 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1234 \\ 1234 \end{pmatrix} \right\}.$$

Тогда, например, для преобразования $\alpha = \left(\begin{smallmatrix} 1234 \\ 2234 \end{smallmatrix}\right)$ получим

$$X/\ker(\alpha) = \{\{1,2\},\{3\},\{4\}\},$$

$$T_\alpha = \{\{1,3,4\},\{2,3,4\}\},$$

а множество X_L для данного сечения имеет вид:

$$X_L = \{\{1,2,3,4\},\{1,2\},\{3,4\},\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}\}.$$

Лемма 3.2.4. *Пусть* $\alpha, \beta \in \mathscr{D}_k \cap L$. *Если* $\mathrm{im}\,(\alpha) \in T_\beta$ *(*$\mathrm{im}\,(\beta) \in T_\alpha$*), то* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

Доказательство. В самом деле, пусть $\mathrm{im}\,(\alpha) \in T_\beta$, тогда $\ker(\alpha\beta) = \ker(\alpha)$ для преобразования $\alpha\beta$. С другой стороны, поскольку $\alpha\beta \in \mathscr{D}_k \cap L$ и $\mathrm{im}\,(\alpha\beta) = \mathrm{im}\,(\beta)$, получим $\alpha\beta = \beta$, следовательно, $\ker(\alpha\beta) = \ker(\beta)$. Таким образом, $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$. □

Следствие 3.2.1. *Для всех* α, $\beta \in \mathscr{D}_2 \cap L$ *выполняется равенство* $\ker(\alpha) = \ker(\beta)$.

Доказательство. Очевидно, $T_\beta \cap T_\alpha \neq \varnothing$ для всех $\alpha, \beta \in \mathscr{D}_2 \cap L$. Следовательно, существует $\gamma \in L$ такое, что $\mathrm{im}\,(\gamma) \in T_\alpha \cap T_\beta$. Тогда согласно предыдущей лемме $\ker(\alpha) = \ker(\gamma) = \ker(\beta)$. □

Лемма 3.2.5. *Пусть* L *— произвольное* $\mathscr{L}$*-сечение в* $\mathscr{T}_n$, $n > 2$.

(i) *Если* $A, B \in X_L$ *— произвольные различные классы, тогда либо* $A \cap B = \varnothing$, *либо одно из множеств содержит другое.*

(ii) *Любые* $A \in X_L$, $|A| > 1$, *единственным образом можно представить в виде дизъюнктного объединения двух множеств из (отличных от* A *и* $\varnothing$*) в* X_L.

(iii) *Если* $A \in X_L$ *и* $A = A_1 \cup A_2$ *для некоторых* $A_1, A_2 \in X_L$ *тогда существует отображение* $\beta \in L$ *такое, что* $A_1, A_2 \in X/\ker(\beta)$.

(iv) *Пусть* $A \in X_L$, $|A| > 2$ *и* $A = A_1 \cup A_2$ *для некоторых* $A_1, A_2 \in X_L$. *Если* $|A_2| > 1$, $A_2 = A_{21} \cup A_{22}$ *для некоторых* $A_{21}, A_{22} \in X_L$, *тогда по меньшей мере одна из мощностей* $|A_{21}|, |A_{22}|$ *не больше чем* $|A_1|$.

Доказательство. (i) Предположим, что существуют $A, B \in X_L$ такие, что $A \cap B = C \notin \{A, B\}$, $C \neq \varnothing$. Пусть $\alpha, \beta \in L$ — такие преобразования, что $A \in X/\ker(\alpha)$, $B \in X/\ker(\beta)$. Возьмем $a \in A \setminus C$, $b \in B \setminus C$, $c \in C$, тогда

$$a_{\ker(\alpha)} = c_{\ker(\alpha)} \neq b_{\ker(\alpha)}, \quad a_{\ker(\beta)} \neq b_{\ker(\beta)} = c_{\ker(\beta)}.$$

Пусть $\gamma \in L$ — такое преобразование, что $\mathrm{im}\,(\gamma) = \{a, b, c\}$. Рассмотрим преобразования $\gamma_1 = \gamma\alpha$, $\gamma_2 = \gamma\beta$. Имеем $\gamma_1, \gamma_2 \in \mathscr{D}_2 \cap L$ и

$$X/\ker(\gamma_1) = \{\{a, c\}\gamma^{-1}, \{b\}\gamma^{-1}\},$$

$$X/\ker(\gamma_2) = \{\{b, c\}\gamma^{-1}, \{a\}\gamma^{-1}\}.$$

Условие $X/\ker(\gamma_1) \neq X/\ker(\gamma_2)$ противоречит следствию 3.2.1.

(ii) Проведем доказательство индукцией по числу множеств в X_L, содержащих A. Если $A = X$, $|X| > 1$, доказательство следует немедленно из следствия 3.2.1: предположим, что для произвольного преобразования $\varphi \in L$ ранга 2 выполняется $X/\ker(\varphi) = \{X_1, X_1'\}$. Тогда $X = X_1 \cup X_1'$. Такое разложение дизъюнктно.

Предположим, что $A \neq X$ и (ii) справедливо для p множеств, содержащих A, $p \in \mathbb{N}$. Без ограничения общности, можем считать, что

$$A \subset X_1',\ X_1' = X_2 \cup X_2',$$

$$A \subset X_2',\ X_2' = X_3 \cup X_3',$$

$$A \subset X_3',\ X_3' = X_4 \cup X_4',\ \ldots,$$

$$A \subset X_{p-1}',\ X_{p-1}' = X_p \cup X_p',$$

$$A = X_p'.$$

Для того, чтобы показать $A = A_1 \cup A_2$, $A_1, A_2 \in X_L$, покажем вначале, что для любого $k \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant k \leqslant p$

$$\sigma_{k+1} = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_{k+1} & X_{k+1}' \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_{k+1} & x_{k+1}' \end{pmatrix} \in L,$$

где $x_{k+1}' \in X_{k+1}'$, $x_j \in X_j$, $1 \leqslant j \leqslant k+1$.

Действительно, для произвольных фиксированных $x_1 \in X_1$, $x_1' \in X_1'$ обозначим преобразование из L с образом $\{x_1, x_1'\}$ через σ_1. Нетрудно видеть, что $x\sigma_1 = x_1$, $x \in X_1$, $x\sigma_1 = x_1'$, $x \in X_1'$ поскольку $\sigma_1^2 \in L$.

Предположим, что

$$\sigma_k = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \ldots & X_k & X_k' \\ x_1 & x_2 & \ldots & x_k & x_k' \end{pmatrix} \in L,$$

где $x_k' \in X_k'$, $x_j \in X_j$, $1 \leqslant j \leqslant k$.

Пусть $y_k' \in X_k'$, $y_k' \neq x_k'$ — произвольные фиксированные элементы, $\mu_k \in L$ — преобразования такие, что $\operatorname{im}(\mu_k) = \{x_1, x_2, \ldots,\ x_k, x_k', y_k'\}$. Поскольку

$\mu_k\sigma_k, \sigma_k \in L$ и $\mathrm{im}\,(\mu_k\sigma_k) = \mathrm{im}\,(\sigma_k)$, получим $\mu_k\sigma_k = \sigma_k$. Последнее равенство возможно только в случае, если

$$\mathrm{im}\,(\mu_k|_{X_1}) = \{x_1\}, \quad \mathrm{im}\,(\mu_k|_{X_2}) = \{x_2\}, \ \ldots,$$

$$\mathrm{im}\,(\mu_k|_{X_k}) = \{x_k\}, \quad \mathrm{im}\,(\mu_k|_{X'_k}) = \{x'_k, y'_k\}.$$

Поскольку $x'_k\mu_k^{-1}, y'_k\mu_k^{-1} \in X_L$ и выполняется утверждение (i), получим $\{x'_k\mu_k^{-1}, y'_k\mu_k^{-1}\} = \{X_{k+1}, X'_{k+1}\}$. Пусть $x_{k+1} \in X_{k+1}$, $x'_{k+1} \in X'_{k+1}$ — произвольные элементы, $\varepsilon \in L$ — преобразование, у которого $\mathrm{im}\,(\varepsilon) = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, x_{k+1}, x'_{k+1}\}$. Поскольку $\mathrm{im}\,(\varepsilon) \in T_{\mu_k}$, то $\ker\,(\varepsilon) = \ker\,(\mu_k)$ (согласно лемме 3.2.4). Условия $\varepsilon^2 \in L$, $\mathrm{im}\,(\varepsilon^2) = \mathrm{im}\,(\varepsilon)$ влекут $\varepsilon = \sigma_{k+1}$.

Пусть теперь $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ и $\sigma_p \in L$. Если

$$\mu_p \in L \ \text{ такое, что } \ \mathrm{im}\,(\mu_p) = \{x_1, x_2, \ldots, x_p, a_1, a_2\}\,,$$

тогда, как было показано выше, $\mathrm{im}\,(\mu_p|_A) = \{a_1, a_2\}$. Положим $A_1 = a_1\mu_p^{-1}$, $A_2 = a_2\mu_p^{-1}$. Понятно, что $A = A_1 \cup A_2$, где $A_1, A_2 \in X_L$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$.

Предположим, что равенство $A = B_1 \cup B_2$ выполняется для других $B_1, B_2 \in X_L$, $B_1, B_2 \subset A$. Условие $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$ противоречит утверждению (i) этой леммы. Если $A_1 \subset B_1$, тогда $B_2 \cap A_1 \neq \varnothing$. Аналогичные рассуждения справедливы и в оставшихся случаях.Таким образом, одновременное существование различных пар A_i и B_j, $i, j \in \{1, 2\}$ противоречит пункту (i) этой леммы.

(iii) Поскольку $A_1 \in X_L$, существует преобразование $\beta_1 \in L$ такое что $A_1 \in X/\ker\,(\beta_1)$. Если $A_2 \in X/\ker\,(\beta_1)$, то доказывать нечего. Пусть $A_2 \notin X/\ker\,(\beta_1)$. В этом случае для любого класса $B \in X/\ker\,(\beta_1)$ условия $B \cap A_2 \neq \varnothing$, $B \cap A_2 \notin \{B, A_2\}$ противоречат утверждению (i) этой леммы. Следовательно, для всех $B \in X/\ker\,(\beta_1)$, $B \cap A_2 \neq \varnothing$ справедливо включение $B \subset A_2$. Через $\beta' \in L$ обозначим преобразование множества X такое, что $\mathrm{im}\,(\beta') \in T_{\beta_1}$. Тогда для β' выполняются следующие два факта. Во-первых, $\ker\,(\beta_1) = \ker\,(\beta')$ (см. лемму 3.2.4). Во-вторых, β' — идемпотент, поскольку $\beta'^2 \in L$ и $\mathrm{im}\,(\beta'^2) = \mathrm{im}\,(\beta')$, следовательно, $a_2\beta' \in A_2$ для любых $a_2 \in A_2$.

Предположим теперь $\beta_2 \in L$ такое преобразование, что $A_2 \in X/\ker(\beta_2)$. Если $A_1 \in X/\ker(\beta_2)$, то доказывать нечего. Пусть $A_1 \notin X/\ker(\beta_2)$. Точно также как в предыдущем случае условие $C \in X/\ker(\beta_2)$, $C \cap A_1 \neq \varnothing$ возможно только если $C \subset A_1$. Аналогично, пусть $\beta'' \in L$ — идемпотентное преобразование такое, что $\mathrm{im}(\beta'') \in T_{\beta_2}$.

Рассмотрим теперь преобразование$\beta = \beta'\beta'' \in L$. С одной стороны, $A_1 \in X/\ker(\beta')$, откуда $A_1 \in X/\ker(\beta)$. С другой стороны, условия $a_2\beta' \in A_2$ для всех $a_2 \in A_2$ и $A_2 \in X/\ker(\beta'')$ влекут $A_2 \in X/\ker(\beta)$.

(iv) Пусть выполняется условие пункта (iv). Если $|A_1| > |A_2|$, то доказывать нечего. Предположим, что $|A_1| \leqslant |A_2|$. Для определенности предположим, что $|A_{21}| \leqslant |A_{22}|$. Докажем $|A_1| \geqslant |A_{21}|$.

Предположим противное. Тогда $|A_1| < |A_{21}| \leqslant |A_{22}| < |A_2|$.

Если $A = X$, то возьмем $\alpha, \beta \in L$ такие, что $\mathrm{im}(\alpha) = A_{21} \cup A_{22}$ и $A_{21}, A_{22} \in X/\ker(\beta)$ (см. предыдущий пункт). Положим $A'_i = A_{21}\alpha^{-1} \cap A_i$ и $A''_i = A_{22}\alpha^{-1} \cap A_i$, $i \in \{1,2\}$. Учитывая $|A_{2i}\alpha^{-1}| > |A_1|$, хотя бы в одной паре A'_1, A'_2 или A''_1, A''_2 оба множества одновременно непусты. Рассмотрим произведение $\alpha\beta \in L$. Имеем $X/\ker(\alpha\beta) = \{A'_1 \cup A'_2, A''_1 \cup A''_2\}$, что невозможно, поскольку тогда по крайней мере один класс будет иметь непустое пересечение и с A_1, и с $A_2 \in X_L$ одновременно. Таким образом, $|A_1| \geqslant |A_{21}|$.

Пусть $A \neq X$, обозначим класс из X_L, не содержащий A, через S_1, а содержащий — через S'_1, т. е. $A \subseteq S'_1$. Если $A \subset S'_1$ то через S_2, S'_2 обозначим классы из X_L для которых $S'_1 = S_2 \cup S'_2$ и $A \subseteq S'_2$. Будем переобозначать таким образом все элементы из X_L до тех пор, пока не получим $A = S'_t$ для некоторого натурального t. Рассмотрим систему подмножеств $\{S_1, S_2, \ldots, S_t\}$. Заметим, что $S_i \cap S_j = \varnothing = S_i \cap A$, $S_j \cup S_i \notin X_L$ для любых $1 \leqslant i \neq j \leqslant t$.

Как и для случая $A = X$ построим преобразование $\gamma \in L$ такое, что $\mathrm{im}(\gamma|_A) = \{A_{21}, A_{22}\}$.

Пусть $s_1, s_2, \ldots, s'_t$ — произвольные фиксированные элементы из S_1, $S_2, \ldots$, S'_t соответственно. Аналогично доказательству пункта (ii) индукцией можно показать, что $\sigma_t = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_t & S'_t \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_t & s'_t \end{pmatrix} \in L$. Положим $\gamma \in L$, $\mathrm{im}(\gamma) = \{s_1, s_2,$

$\ldots, s_t\} \cup A_{21} \cup A_{22}$. Напомним, что $A_{21} \cup A_{22} \subset S'_t = A$. Понятно, что $\gamma\sigma_t = \sigma_t$, откуда $\gamma = \begin{pmatrix} S_1 & S_2 & S_3 & \ldots & S_t & S'_t \\ s_1 & s_2 & s_3 & \ldots & s_t & A_{21} \cup A_{22} \end{pmatrix}$. Таким образом, $\mathrm{im}\,(\gamma|_A) = \{A_{21}, A_{22}\}$. Положим $A'_i = A_{21}\alpha^{-1} \cap A_i$ и $A''_i = A_{22}\alpha^{-1} \cap A_i$, $i \in \{1, 2\}$. Учитывая $|A_{2i}\gamma^{-1}| > |A_1|$, по крайней мере в одной паре A'_1, A'_2 или A''_1, A''_2 оба подмножества непусты. Рассмотрим произведение $\alpha\beta \in L$. Как было показано выше, условие $\gamma\beta \in L$ противоречит пункту (i) этой леммы, поскольку $X/\ker(\gamma\beta) = \{A'_1 \cup A'_2, A''_1 \cup A''_2\}$. Таким образом, получим $|A_1| \geqslant |A_{21}|$.

Двойственным образом можно показать, что $|A_1| > 1$, $A_1 = A_{11} \cup A_{12}$ для некоторых $A_{11}, A_{12} \in X_L$, тогда по крайней мере одна из мощностей $|A_{11}|, |A_{12}|$ не более чем $|A_2|$.

□

Следствие 3.2.2. *Для любого $\mathscr{L}$-сечения L полугруппы $\mathscr{T}_n$, $n > 2$ семейство подмножеств X_L представимо полным бинарным деревом.*

Доказательство. Согласно лемме 3.2.5, пункт (ii), X единственным образом можно представить в виде дизъюнктного объединения двух классов из X_L. Положим $B_0 = X$ и обозначим классы из разложения B_0 через B_1 и B_2. Каждый из полученных неодноэлементных классов в свою очередь также представляется в виде объединения двух других классов из X_L. Без ограничения общности можем считать, что $|B_1| > 1$, $B_1 = B_{11} \cup B_{12}$, $B_{11}, B_{12} \in X_L$. Пусть $\alpha, \beta \in L$ — преобразование такое, что $\mathrm{im}\,(\alpha) = B_{11} \cup B_{12}$, $B_{11}, B_{12} \in X/\ker(\beta)$. Поскольку $\mathrm{rk}\,(\alpha\beta) = 2$, то по следствию 3.2.1 получим $X/\ker(\alpha\beta) = \{B_1, B_2\}$, откуда $\{B_{11}\alpha^{-1}, B_{12}\alpha^{-1}\} = \{B_1, B_2\}$. Переобозначим множества B_{11}, B_{12} так, чтобы выполнялись равенства $B_1\alpha = B_{11}$, $B_2\alpha = B_{12}$. То же самое проделаем с каждым неодноэлементным классом. Понятно, что мы получим полное бинарное дерево. □

Полученные классы будем обозначать через B_{aj}, где $j \in \{1, 2\}$, a — индекс исходного множества ($B_a = B_{a1} \cup B_{a2}$) и если $\alpha' \in L$ — преобразование у которого $\mathrm{im}\,(\alpha') = B_{a1} \cup B_{a2}$, то $B_1\alpha' = B_{a1}$, $B_2\alpha' = B_{a2}$.

Везде далее под семейством X_L будем понимать семейство подмножеств, построенное в предыдущей лемме.

Пусть $\alpha \in L$, $B_a \in X_L$, $a \in \{1,2\}^*$. Понятно, что $B_a\alpha$ содержится в некотором классе из X_L. Возникает вопрос: существует ли класс $B_c \in X_L$, $c \in \{1,2\}^*$, $B_c \neq B_a$ такой, что $\langle B_a\alpha\rangle \cap B_c\alpha \neq \varnothing$? Следующая лемма дает негативный ответ на этот вопрос.

Лемма 3.2.6. *Пусть $\alpha \in L$ и $B_a, B_c \in X_L$ — произвольные классы. Если $|\langle B_a\alpha\rangle| > 1$ и $B_a \cap B_c = \varnothing$, то $\langle B_a\alpha\rangle \cap B_c\alpha = \varnothing$.*

Доказательство. Пусть $B_a \cap B_c = \varnothing$. Обозначим класс из X_L, равный $\langle B_a\alpha\rangle$ через B_b, $b \in \{1,2\}^*$.

Предположим, что $B_a\alpha \cap B_c\alpha \subseteq B_b$. В этом случае для любого $x \in B_a\alpha \cap B_c\alpha$ получим $x\alpha^{-1} \in X/\ker(\alpha)$ и $x\alpha^{-1} \cap B_a \neq \varnothing \neq x\alpha^{-1} \cap B_c$. По лемме 3.2.5, (i) имеем $B_a \cap B_c \neq \varnothing$. Следовательно, $B_a\alpha \cap B_c\alpha = \varnothing$.

Предположим теперь, что $B_a\alpha \cap B_c\alpha = \varnothing$ и $B_a\alpha \cup B_c\alpha \subseteq B_b$. Поскольку $B_b = \langle B_a\alpha\rangle$, то $B_a\alpha$ имеет непустое пересечение с B_{b1} и B_{b2} одновременно. Поэтому не теряя общности рассуждений, можем предположить, что $B_c\alpha \cap B_{b1} \neq \varnothing$. Пусть $B'_a \subset B_a, B'_c \subseteq B_c$ — максимальные подмножества такие, что $B'_a\alpha \subset B_{b1}$, $B'_c\alpha \subseteq B_{b1}$. Через β обозначим преобразование из L такое, что $B_{b1} \in X/\ker(\beta)$. Нетрудно видеть, что $B'_a \cup B'_c \in X/\ker(\alpha\beta)$, так как $\alpha\beta \in L$, то $B'_a \cup B'_c \in X_L$. Таким образом, класс $B'_a \cup B'_c$ имеет непустое пересечение с B_a. Это противоречит лемме 3.2.5, (i).

Таким образом, $\langle B_a\alpha\rangle \cap B_c\alpha = \varnothing$. □

Лемма 3.2.7. *Пусть $\mu \in L$ — произвольное преобразование, $B_s \in X_L$ — произвольный элемент, $s \in \{1,2\}^*$ и $|B_s| > 1$. Пусть $B_p = \langle B_s\mu\rangle \in X_L$, $p \in \{1,2\}^*$. Если $|B_p| > 1$, то $B_{si}\mu \subseteq B_{pi}$, $i \in \{1,2\}$.*

Доказательство. Пусть выполняется условие леммы. Поскольку $|B_p| > 1$, получим $B_{pi} \cap \mathrm{im}(\mu) \neq \varnothing$, $i \in \{1,2\}$. Согласно лемме 3.2.6 для всех $B_a \in X_L$ таких, что $B_a \cap B_s = \varnothing$ имеет место условие $B_p \cap B_a\mu = \varnothing$. Следовательно, $(\mathrm{im}(\mu) \cap B_{pi})\mu^{-1} \subset B_s$, $i \in \{1,2\}$. Поскольку в L существует преобразование β, у которого $B_{p1}, B_{p2} \in X/\ker(\beta)$ (лемма 3.2.5, (iii)), то $(\mathrm{im}(\mu) \cap B_{pi})\mu^{-1} \in$

$X/\ker(\mu\beta)$, $i \in \{1,2\}$. Учитывая

$$(\mathrm{im}\,(\mu) \cap B_{p1})\mu^{-1} \cup (\mathrm{im}\,(\mu) \cap B_{p2})\mu^{-1} = B_s, \text{ получим}$$

$$\{(\mathrm{im}\,(\mu) \cap B_{p1})\mu^{-1}, (\mathrm{im}\,(\mu) \cap B_{p2})\mu^{-1}\} = \{B_{s1}, B_{s2}\}.$$

Следовательно, для фиксированного $i \in \{1,2\}$ существует $k_i \in \{1,2\}$ такое, что $B_{si}\mu \subseteq B_{pk_i}$.

Если $B_p = B_0$, то $B_s = B_0$. Пусть $b_1 \in B_1$, $b_2 \in B_2$ — произвольные фиксированные элементы, $\sigma = \left(\begin{smallmatrix} B_1 & B_2 \\ b_1 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$. В доказательстве леммы 3.2.5, (ii) было показано, что $\sigma \in L$. Так как $\mathrm{im}\,(\sigma) = \mathrm{im}\,(\mu\sigma)$, имеем $\sigma = \mu\sigma$, откуда немедленно получаем $B_{si}\mu \subseteq B_{pi}$, $i \in \{1,2\}$.

Предположим $B_p \neq B_0$. Докажем сначала, что для любого $\eta \in L$ если $B_p = \langle B_s\eta \rangle$, то $B_{si}\eta$, $B_{si}\mu \subseteq B_{pk_i}$, $i \in \{1,2\}$.

Пусть $B_0 = B_1 \cup B_2$, тогда обозначим через K_1 множество, которое не содержит B_p, и через K_1' — множество, которое содержит B_p. Если $K_1' \neq B_p$, то аналогичным образом в разложении K_1' обозначим ту компоненту, которая не содержит B_p через K_2, а компоненту, которая содержит B_p — через K_2'. Таким образом, мы получим систему попарно непересекающихся множеств $K_1, K_2, \ldots, K_m \in X_L$, $m \in \mathbb{N}$ таких, что $K_i \cap B_p = \varnothing$, $1 \leqslant i \leqslant m$, и $K_m' = B_p$. Пусть $\{k_1, k_2, \ldots, k_m, k_m'\}$ — произвольная трансверсаль семейства $\{K_1, K_2, \ldots, K_m, K_m'\}$. Как было показано в доказательстве леммы 3.2.5, (ii), индукцией можно доказать, что $\delta_m = \left(\begin{smallmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \ldots & K_m & K_m' \\ k_1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_m & k_m' \end{smallmatrix}\right) \in L$.

Пусть $b_1 \in B_{p1}$, $b_2 \in B_{p2}$ — произвольные фиксированные элементы, $\gamma \in L$ — такое преобразование, что $\mathrm{im}\,(\gamma) = \{k_1, k_2, \ldots, k_m, b_1, b_2\}$. Поскольку $\gamma\delta_m \in L$ и $\mathrm{im}\,(\gamma\delta_m) = \mathrm{im}\,(\delta_m)$, получим $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \ldots & K_m & B_p \\ k_1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_m & \{b_{p1}, b_{p2}\} \end{smallmatrix}\right)$. Откуда, согласно лемме 3.2.5, (i) получим, что $B_{p1}, B_{p2} \in X/\ker(\gamma)$. Учитывая $\gamma^2 = \gamma \in L$, имеем $\gamma = \left(\begin{smallmatrix} K_1 & K_2 & K_3 & \ldots & K_m & B_{p1} & B_{p2} \\ k_1 & k_2 & k_3 & \ldots & k_m & b_1 & b_2 \end{smallmatrix}\right)$.

Условие $B_s\eta$, $B_s\mu \subseteq B_p$ означает, что $\mathrm{im}\,(\eta)$ и $\mathrm{im}\,(\mu)$ содержат представителей одних и тех же классов из $K_1, K_2, \ldots, K_m$. Следовательно, $\mathrm{im}\,(\eta\gamma) = \mathrm{im}\,(\mu\gamma)$, откуда $\eta\gamma = \mu\gamma$. Последнее влечет, в частности, $B_{si}\eta$, $B_{si}\mu \subseteq B_{pk_i}$, $i \in \{1,2\}$.

Докажем теперь, что $B_{si}\mu \subseteq B_{pi}$, $i \in \{1,2\}$. Предположим обратное: $B_{si}\mu \subseteq B_{pj}$, $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$. Пусть $\psi, \psi' \in L$, $\operatorname{im}(\psi) = B_s$, $\operatorname{im}(\psi') = B_p$. По построению семейства X_L (см. следствие 3.2.2) $B_i\psi = B_{si}$, $B_i\psi' = B_{pi}$, $i \in \{1,2\}$. С другой стороны, $\psi\mu \in L$ и $B_i(\psi\mu) = B_{si}\mu \subseteq B_{pj}$. Противоречие $B_i\psi' \subseteq B_{pi}$, $B_i(\psi\mu) \subseteq B_{pj}$, $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$ доказывает лемму.

□

Следствие 3.2.3. *Для любого $\mathscr{L}$-сечения L полугруппы $\mathscr{T}_n$, $n > 2$, семейство подмножеств X_L является L-семейством.*

Доказательство. Учитывая следствие 3.2.2, семейство подмножеств X_L представляет собой полное бинарное дерево. Пусть B_a — произвольный элемент из X_L. На самом деле, в доказательстве леммы 3.2.5, (iv) было показано, что неравенство $|B_{aijb}| \leqslant |B_{ajb}|$, $i,j \in \{1,2\}$, $i \neq j$ выполняется для пустого b. Без ограничения общности будем считать, что $i = 2$, $j = 1$ и рассмотрим неравенство $|B_{a21}| \leqslant |B_{a1}|$. Пусть $\gamma \in L$ — такое преобразование, что $\operatorname{im}(\gamma|_{B_a}) = B_{a2}$. По предыдущей лемме $\operatorname{im}(\gamma|_{B_{a1b}}) = B_{a21b}$ для всех $b \in \{1,2\}^*$ таких, что $B_{a1b}, B_{a21b} \in X_L$. Следовательно, $|B_{a21b}| \leqslant |B_{a1b}|$ для всех $b \in \{1,2\}^*$ таких, что B_{a21b}, $B_{a1b} \in X_L$. Двойственным образом можно показать, что $|B_{a12b}| \leqslant |B_{a2b}|$ для всех $b \in \{1,2\}^*$ таких, что $B_{a2b}, B_{a^*b} \in X_L$.

Теперь осталось только определить строгий линейный порядок на множестве X. Для любых $x, y \in X$ будем считать, что x меньше чем y, если $x \in B_{b1}$, $y \in B_{b2}$ для некоторых $B_{b1}, B_{b2} \in X_L$. Такое определение порядка корректно, поскольку, во-первых, B_{b1}, B_{b2} не пересекаются, а во-вторых, X_L содержит все одноэлементные подмножества X.

Таким образом, семейство подмножеств X_L удовлетворяет определению L-семейства. □

Следствие 3.2.4. *Всякое $\mathscr{L}$-семейство $\mathscr{T}_n$ имеет вид L_X^Γ для подходящего L-семейства Γ на множестве X.*

Доказательство. Если $|X| = 1$, то $X_L = \{B_0\}$, и $\beta \in L$ имеет вид α_X. Пусть далее $|X| > 1$. Предположим, что $\operatorname{im}(\beta) = \{m\}$, $m \in X$. Тогда существует класс $B_w \in X_L$, $w \in \{1,2\}^*$ такой, что $B_w = \{m\}$, а значит $\beta = \alpha_{\{m\}} \in L_X^{X_L}$.

Пусть $B_a = \langle \mathrm{im}\,(\beta) \rangle$, $B_a \in X_L$, $|\,\mathrm{im}\,(\beta)| > 1$. По лемме 3.2.7 получим $B_i\beta \subseteq B_{ai}$, следовательно, $\mathrm{im}\,(\beta|_{B_i}) = B'_{ai} \cap \mathrm{im}\,(\beta)$, $i \in \{1, 2\}$. Аналогичные рассуждения справедливы для каждого преобразования $\beta|_{B_i}$, $i \in \{1, 2\}$, и т.д., пока не получим $|B_{at} \cap \mathrm{im}\,(\beta)| = 1$ для некоторого $B_{at} \in X_L$, $t \in \{1, 2\}^*$. Следовательно, $\beta = \alpha_{\mathrm{im}\,(\beta)} \in L_X^{X_L}$. Поскольку $\mathrm{im}\,(\beta)$, $\beta \in L$ пробегает все возможные подмножества X, имеем $L = L_X^{X_L}$. $\square$

Следствие 3.2.4 завершает доказательство теоремы 3.2.1.

3.2.3. Число $\mathscr{L}$-сечений полугруппы $\mathscr{T}_n$. Выясним сначала, как подсчитать все возможные L-семейства над данным множеством X.

Определение 3.2.6. Произвольное L-семейство над n-элементным множеством будем обозначать через Γ^n. Пусть $n \geqslant 2$, $\Gamma^n = \{A_a\}$ — некоторое L-семейство, и $s, t \in \{1, 2, \ldots, n\}$ такие, что $s + t \leqslant n$. Обозначим через $Q_{s,t}$ множество всех пар (Γ^s, Γ^t) L-семейств Γ^s и Γ^t таких, что:

(a) $\Gamma^s = \Gamma^n(a)$ и $\Gamma^t = \Gamma^n(b)$ для $a, b \in \{1, 2\}^*$ таких что $A_a \cap A_b = \varnothing$;

(b) если $s > 1$, то $\Gamma^s(2) \leqslant \Gamma^t$, и если $t > 1$, то $\Gamma^t(1) \leqslant \Gamma^s$.

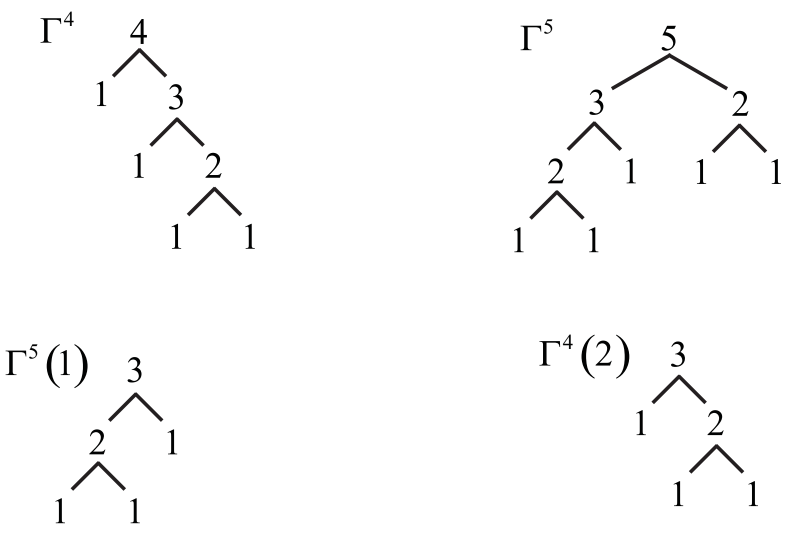


Рис. 3.6. Γ^4 и Γ^5 такие, что $(\Gamma^4,\, \Gamma^5) \notin Q_{4,5}$

Пример 3.2.5. Рис.3.6 демонстрирует пары L-семейств $(\Gamma^4,\, \Gamma^5)$, которые не принадлежат множеству $Q_{4,5}$. Для простоты мы обозначили узлы деревьев мощностями соответствующих им множеств.

Как видно по рисунку, Γ^4 и $\Gamma^5(1)$ не удовлетворяют условию $\Gamma^5(1) \leqslant \Gamma^4$ ($2 > 1$ на первой правой позиции). Тем не менее, Γ^5 и $\Gamma^4(2)$ удовлетворяют условию $\Gamma^4(2) \leqslant \Gamma^5$.

Зафиксируем линейный порядок $<$ на n-элементном множестве X и обозначим через Q_n число L-семейств над X.

Утверждение 3.2.2. *Число Q_n всех возможных L-семейств Γ на линейно упорядоченном множестве $(X, <)$, $|X| = n$, задается формулой:*

$$Q_1 = 1, \quad Q_n = \sum_{\substack{s,t \\ s+t=n}} |Q_{s,t}| \quad \textit{если} \quad n \geqslant 2.$$

Доказательство. Очевидно, $Q_1 = 1$. Пусть $n \geqslant 2$ и Γ^n — произвольное L-семейство над $(X, <)$ и пусть $\Gamma^s = \Gamma^n(1)$ и $\Gamma^t = \Gamma^n(2)$. Понятно, что $s + t = n$. Согласно пункту (ii) утверждения 3.2.1, получим $\Gamma^s \leqslant \Gamma^n$, $\Gamma^t \leqslant \Gamma^n$, откуда $\Gamma^s(2) \leqslant \Gamma^t$, $\Gamma^t(1) \leqslant \Gamma^s$ и таким образом $(\Gamma^s, \Gamma^t) \in Q_{s,t}$. Понятно тогда, что отображение $\Gamma^n \to (\Gamma^{n(1)}, \Gamma^{n(2)})$ — биекция из множества L-семейств над $(X, <)$ в объединение множеств $Q_{s,t}$, $s + t = n$.

Можно также доказать это утверждение, используя, например, первое определение L-семейства (условие (3.1)): поскольку Γ^n — L-семейство, если $|A_1| > 1$ то $|A_{12b}| \leqslant |A_{2b}|$ для всех $b \in \{1, 2\}^*$, следовательно, $\Gamma^s(2) \leqslant \Gamma^t$. Аналогично получим $\Gamma^t(1) \leqslant \Gamma^s$.

Таким образом, $\Gamma^s, \Gamma^t \in Q_{s,t}$ и $Q_n = \sum_{s+t=n} |Q_{s,t}|$, при $n \geqslant 2$.

□

Ниже приведены начальные значения Q_n, $n \in \mathbb{N}$, рассчитанные с помощью компьютерно программы.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Q_n	1	1	2	3	6	10	18	32	58	101	184	326	580	1024

n	15	16	17	18	19	20	21	22	23
Q_n	1812	3197	5650	9951	17562	30969	54652	96361	169754

n	24	25	26	27	28	29	30
Q_n	298528	524224	918751	1607386	2806996	4893730	8517945

Возникает вопрос: всегда ли различным L-семействам соответствуют $\mathscr{L}$-сечения $\mathscr{T}_n$. Чтобы ответить на этот вопрос введем понятие *подобных* L-семейств.

Предположим $a \in \{1,2\}^*$ — произвольное слово. Слово a, полученное заменой 1 на 2 и 2 на 1, обозначается $\bar{a}$.

Определение 3.2.7. Пусть $\Gamma_1 = \{A_a\}$, $\Gamma_2 = \{B_a\}$ — произвольные L-семейства над X_1 и X_2, соответственно. Будем говорить, что Γ_1 и Γ_2 *подобны*, если

$$\forall a \in \{1,2\}^* \ |A_a| = |B_a| \ \text{ или } \ |A_a| = |B_{\bar{a}}|.$$

Подобные L-семейства Γ_1 и Γ_2 будем обозначать $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Отношение подобия, очевидно, является отношением эквивалентности, которое и разбивает множество всех L-семейств над n-элементным множеством на непересекающиеся классы.

Следующая лемма показывает, когда различным L-семействам соответствуют *равные* $\mathscr{L}$-сечения.

Лемма 3.2.8. *Пусть $<_1$, $<_2$ — строгие линейные порядки на X, $\Gamma_1 = \{A_a\}$, $\Gamma_2 = \{B_a\}$ — произвольные L-семейства над $(X, <_1)$ и $(X, <_2)$, соответственно. Если $L_1 = L^{\Gamma_1}_{<_1}$, $L_2 = L^{\Gamma_2}_{<_2}$ — соответствующие $\mathscr{L}$-сечения $\mathscr{T}_n$, тогда $L_1 = L_2$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

(i) $\Gamma_1 = \Gamma_2$ *(т. е. $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ и $<_1 = <_2$);*

(ii) $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$ *и* $<_2 = <_1^{-1}$.

Доказательство. Достаточность. Очевидно, (i) влечет $L_1 = L_2$. Предположим, имеет место (ii). Тогда $A_a = B_{\overline{a}}$ для всех $a \in \{1,2\}^*$. Для доказательства $L_1 = L_2$, достаточно показать, что $\alpha_M^{A_a} = \alpha_M^{B_{\overline{a}}}$ для всех $a \in \{1,2\}^*$ и непустого $M \subseteq X$. Проведем доказательство индукцией по $|M|$. Пусть $M = \{m\}$. Если $A_a = \varnothing$, то $B_{\overline{a}} = A_a = \varnothing$, и so $\alpha_M^{A_a} = \varnothing = \alpha_M^{B_{\overline{a}}}$. Если $A_a \neq \varnothing$ то

$\operatorname{dom}(\alpha_M^{A_a}) = A_a = B_{\overline{a}} = \operatorname{dom}(\alpha_M^{B_{\overline{a}}})$ и для всех x из области определения, $x\alpha_M^{A_a} = m = x\alpha_M^{B_{\overline{a}}}$, что означает $\alpha_M^{A_a} = \alpha_M^{B_{\overline{a}}}$.

Пусть $|M| > 1$ и предположим, что $\alpha_M^{A_a} = \alpha_M^{B_{\overline{a}}}$ для всех $a \in \{1,2\}^*$ при $M_1 \subseteq X$, $|M_1| < M$. Снова, если $A_a = \varnothing$, то $B_{\overline{a}} = A_a = \varnothing$, и следовательно, $\alpha_M^{A_a} = \varnothing = \alpha_M^{B_{\overline{a}}}$. Предположим, что $A_a \neq \varnothing$ и пусть $\langle M \rangle = A_b$, $b \in \{1,2\}^*$. Тогда $B_{\overline{b}} = A_b = \langle M \rangle$, и таким образом,

$$\alpha_M^{A_a} = \alpha_{M\cap A_{b1}}^{A_{a1}} \cup \alpha_{M\cap A_{b2}}^{A_{a2}},$$

$$\alpha_M^{B_{\bar{a}}} = \alpha_{M\cap A_{\bar{b}1}}^{B_{\bar{a}1}} \cup \alpha_{M\cap A_{\bar{b}2}}^{B_{\bar{a}2}} = \alpha_{M\cap A_{\overline{b2}}}^{B_{\overline{a2}}} \cup \alpha_{M\cap A_{\overline{b1}}}^{B_{\overline{a1}}}.$$

По предположению индукции, $\alpha_{M\cap A_{b1}}^{A_{a1}} = \alpha_{M\cap A_{\overline{b1}}}^{B_{\overline{a1}}}$ и $\alpha_{M\cap A_{b2}}^{A_{a2}} = \alpha_{M\cap A_{\overline{b2}}}^{B_{\overline{a2}}}$. Таким образом, $\alpha_M^{A_a} = \alpha_M^{B_{\bar{a}}}$.

Необходимость. Пусть $L_1 = L_2$. Как следует из доказательства следствия 3.2.4, Γ_1 и $\bigcup_{\alpha\in L_1} X/\ker\alpha$ совпадают как наборы множеств. То же самое можно сказать про Γ_2 и L_2. Поскольку $L_1 = L_2$, получаем, что Γ_1 и Γ_2 совпадают как наборы множеств.

Если $<_1 = <_2$, то Γ_1 и Γ_2 совпадают как L-семейства, следовательно, получаем (i). Предположим $<_2 = <_1^{-1}$. Тогда $A_a = B_{\overline{a}}$ для всех $a \in \{1,2\}^*$, откуда $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, и тогда получим (ii).

Для завершения доказательства остается показать, что во всех остальных случаях мы получим противоречия. Пусть $<_1 \neq <_2 \neq {<_1}^{-1}$. Поскольку Γ_1 и Γ_2 совпадают как наборы множеств, то либо $A_1 = B_1$ и $A_2 = B_2$, либо $A_1 = B_2$ и $A_2 = B_1$. Предположим $A_i = B_i$, $i \in \{1,2\}$. Пусть $x, y \in X$ такие, что $x <_1 y$, $y <_2 x$. Тогда $\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ x & y \end{smallmatrix}\right) \in L_1$, $\left(\begin{smallmatrix} B_1 & B_2 \\ y & x \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ y & x \end{smallmatrix}\right) \in L_2$, что противоречит $L_1 = L_2$.

Пусть теперь $A_1 = B_2$, $A_2 = B_1$. Пусть $x, y \in X$ такие, что $x <_1 y$ и $x <_2 y$. В этом случае получим $\left(\begin{smallmatrix} A_1 & A_2 \\ x & y \end{smallmatrix}\right) \in L_1$, $\left(\begin{smallmatrix} B_1 & B_2 \\ x & y \end{smallmatrix}\right) = \left(\begin{smallmatrix} A_2 & A_1 \\ x & y \end{smallmatrix}\right) \in L_2$, что невозможно в силу $L_1 = L_2$. □

Теорема 3.2.2. *Число различных $\mathscr{L}$-сечений конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$, $n \geqslant 2$, равно $Q_n \cdot \frac{n!}{2}$.*

Доказательство. Пусть A_Γ и A_L — множество всех L-семейств над X и $\mathscr{L}$-сечений $\mathscr{T}_n$, соответственно. Поскольку существует $n!$ строгих порядков на

X и Q_n L-семейств для каждого строгого порядка $<$, получим $|A_\Gamma| = Q_n \Delta n!$. Пусть отображение $\omega : A_\Gamma \to A_L$, такое, что $\Gamma\omega = L^\Gamma$. По теореме 3.2.1, ω сюръективно. Предположим, что $\Gamma_1\omega = \Gamma_2\omega$ и $\Gamma_1 \neq \Gamma_2$. Пусть $\Gamma_1 = \{A_a\}$ и $\Gamma_2 = \{B_a\}$. По лемме 3.2.8, получим $B_a = A_{\bar{a}}$ для всех $a \in \{1, 2\}$. Таким образом, ω биективно, и таким образом, $|A_L| = \frac{|A_\Gamma|}{2} = Q_n \cdot \frac{n!}{2}$. $\square$

3.2.4. Классификация $\mathscr{L}$-сечений $\mathscr{T}_n$ до изоморфизма. Известно, что не все $\mathscr{L}$-сечения полугруппы $\mathscr{T}(X)$ изоморфны между собой (см. [42]). В этом пункте мы выясним когда два различных L-семейства соответствуют *изоморфным* $\mathscr{L}$-сечениям. Пусть везде далее L_1 и L_2 обозначают два различных $\mathscr{L}$-сечения полугруппы $\mathscr{T}(X_n)$; $\Gamma_1 = \{A_a\}$, $\Gamma_2 = \{B_a\}$ — L-семейства соответствующие L_1 и L_2, т. е. $L_1 = L_X^{\Gamma_1}$ и $L_2 = L_X^{\Gamma_2}$.

Заметим, что при $|X| \leqslant 3$ все возможные $\mathscr{L}$-сечения изоморфны, а все возможные L-семейства подобны. Для произвольного конечного множества X справедлива следующая лемма.

Лемма 3.2.9. *Если* $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$, *то* $L_1 \cong L_2$.

Доказательство. Если $|A_a| = |B_a|$, то для всех $a \in \{1, 2\}^*$, будем считать

$$\theta : \Gamma_1 \to \Gamma_2 : A_a \mapsto B_a,$$

и если $|A_a| = |B_{\bar{a}}|$, то для всех $a \in \{1, 2\}^*$ обозначим

$$\theta : \Gamma_1 \to \Gamma_2 : A_a \mapsto B_{\bar{a}}.$$

Без ограничения общности можем считать, что $|A_a| = |B_a|$, для всех $a \in \{1, 2\}^*$. Пусть $x, y \in X$ — произвольные элементы и $A_a = \{x\}$, $A_a \in \Gamma_1$, $a \in \{1, 2\}^*$. Определим преобразование ψ множества X следующим образом:

$$\psi : X \to X : x \mapsto y \Leftrightarrow A_a\theta = \{y\}.$$

Понятно, что ψ биективно, и для всех $a \in \{1, 2\}^*$, справедливо $A_a\psi = A_a\theta$, где $A_a\psi = \{x\psi \mid x \in A_a\}$. Let

$$\tau : L_1 \to L_2 : \varphi \mapsto \varphi' = \psi^{-1}\varphi\psi.$$

Убедимся, что $\varphi' \in L_X^{\Gamma_2}$. Точнее, покажем, что $\varphi' = \alpha_{(\mathrm{im}\,\varphi)\psi}$ для $\varphi \in L_1$ и $\varphi\tau = \varphi'$. Пусть $a \in \{1,2\}^*$ — произвольное слово такое, что $A_a \neq \varnothing$. Рассмотрим образ B_a отображения φ'. Поскольку ψ — биективно, получим

$$\langle B_a\varphi'\rangle = \langle (A_a\psi)(\psi^{-1}\varphi\psi)\rangle = \langle A_a(\varphi\psi)\rangle = \langle (A_a\varphi)\psi\rangle. \tag{3.3}$$

Обозначим через M образ φ, т. е. $\varphi = \alpha_M$. Пусть $M = \{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ для $m_1, m_2, \ldots, m_k \in X$. По определению α_M получим

$$\alpha_M = \alpha_{\{m_1\}}^{A_{b_1}} \cup \alpha_{\{m_2\}}^{A_{b_2}} \cup \ldots \cup \alpha_{\{m_k\}}^{A_{b_k}}$$

для подходящих $b_1, b_2, \ldots, b_k \in \{1,2\}^*$. В силу произвольности $a \in \{1,2\}^*$ в (3.3) получим, что $\langle B_{b_i}\varphi'\rangle = \langle (A_{b_i}\varphi)\psi\rangle = \langle \{m_i\psi\}\rangle$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Поскольку B_{bi}, $1 \leqslant i \leqslant k$, попарно непересекающиеся, и $|B_{b_1} \cup B_{b_2} \cup \ldots B_{b_k}| = |A_{b_1} \cup A_{b_2} \cup \ldots A_{b_k}| = |X|$, получим $B_{b_1} \cup B_{b_2} \cup \ldots B_{b_k} = X$, следовательно, $\mathrm{im}\,(\varphi') = (\mathrm{im}\,\varphi)\psi$.

Для доказательства $\varphi' = \alpha_{(\mathrm{im}\,\varphi)\psi}$ теперь достаточно показать, что $\varphi'|_{B_a} = \alpha_{(A_a\varphi)\psi}^{B_a}$ для всех $a \in \{1,2\}^*$. Проведем доказательство индукцией по $|(A_a\varphi)\psi|$. Если $B_a = \varnothing$, то $\varphi'|_{B_a} = \varnothing = \alpha_{(A_a\varphi)\psi}^{B_a}$. Если $|B_a| = |A_a| \neq 0$ и $(A_a\varphi)\psi = \{m\}$, то $\mathrm{dom}\,(\alpha_{(A_a\varphi)\psi}^{B_a}) = B_a = \mathrm{dom}\,(\varphi'|_{B_a})$, и по (3.3)

$$\langle \mathrm{im}\,(\varphi'|_{B_a})\rangle = \langle (A_a\varphi)\psi\rangle = \langle \{m\}\rangle,$$

таким образом, для всех x из данной области определения, $x\varphi'|_{B_a} = m = x\alpha_{(A_a\varphi)\psi}^{B_a}$, откуда $\varphi'|_{B_a} = \alpha_{(A_a\varphi)\psi}^{B_a}$.

Пусть $|(A_a\varphi)\psi| > 1$ и предположим, что утверждение выполняется для всех непустых $M_1 \subseteq X$ таких, что $|M_1| < |(A_a\varphi)\psi|$. Снова, если $B_a = \varnothing$, то $\varphi'|_{B_a} = \varnothing = \alpha_{(A_a\varphi)\psi}^{B_a}$. Предположим $B_a \neq \varnothing$, тогда, очевидно, $\varphi'|_{B_a} = \varphi'|_{B_{a1}} \cup \varphi'|_{B_{a2}}$. По индуктивному предположению $\varphi'|_{B_{a1}} = \alpha_{(A_{a1}\varphi)\psi}^{B_{a1}}$ и $\varphi'|_{B_{a2}} = \alpha_{(A_{a2}\varphi)\psi}^{B_{a2}}$. Таким образом

$$\varphi'|_{B_a} = \alpha_{(A_{a1}\varphi)\psi}^{B_{a1}} \cup \alpha_{(A_{a2}\varphi)\psi}^{B_{a2}} = \alpha_{(A_a\varphi)\psi}^{B_a} \quad \text{для всех } a \in \{1,2\}^*.$$

Следовательно,

$$\varphi' = \alpha_{(A_1\varphi)\psi}^{B_1} \cup \alpha_{(A_2\varphi)\psi}^{B_2} = \alpha_{(A_1\varphi\cup A_2\varphi)\psi}^{B_1\cup B_2} = \alpha_{(\mathrm{im}\,\varphi)\psi} \in L_X^{\Gamma_2}.$$

Поскольку $\alpha_M\tau = \alpha_{M\psi}$, $M \subseteq X$, и ψ биективно, получим, что τ также биективно.

Наконец, для всех $\beta, \gamma \in L_1$, получим

$$(\beta)\tau(\gamma)\tau = \psi^{-1}(\beta\gamma)\psi = (\beta\gamma)\tau.$$

□

Для доказательства обратного утверждения нам понадобится ряд вспомогательных утверждений.

Пусть $\tau : L_1 \to L_2$ — изоморфизм. И в L_1, и в L_2, множества $\{c_x \mid x \in X\}$ константных отображений образовуют минимальный идеал. Таким образом, τ отображает $\{c_x \mid x \in X\}$ на $\{c_x \mid x \in X\}$. Для $x \in X$, обозначим через x' элемент X такой, что $c_x\tau = c_{x'}$.

Для произвольных фиксированных $A_a \in \Gamma_1$ и $x \in A_a$ обозначим через $\varphi(A_a, x)$ преобразование L_1 с образом $(X \setminus A_a) \cup \{x\}$. Кроме того, если $L_1 \cong L_2$, везде далее через τ будем обозначать изоморфизм из L_1 в L_2.

Лемма 3.2.10. *Пусть $L_1 \cong L_2$. Для всех $A_a \in \Gamma_1$, $x \in A_a$, выполняются следующие утвреждения:*

(i) $\varphi(A_a, x)|_{X\setminus A_a} = \mathrm{id}_{X\setminus A_a}$, $\varphi(A_a, x)|_{A_a} = c_x$.

(ii) *найдется $B_{a'} \in \Gamma_2$ такое, что $|A_a| = |B_{a'}|$ и $\varphi(A_a, x)\tau = \varphi(B_{a'}, x')$, где $c_x\tau = c_{x'}$.*

Доказательство. (i) Для всякого $A_a \in \Gamma_1$, $x \in A_a$, рассмотрим преобразование $\varphi(A_a, x) \in L_1$ у которого

$$\mathrm{im}\,(\varphi(A_a, x)) = (X \setminus A_a) \cup \{x\}.$$

Отметим, что $\varphi(A_a, x) = c_x$ при $A_a = X$, и $\varphi(A_a, x) = \mathrm{id}_X$ при $|A_a| = 1$.

Предположим, что $A_a \neq X$, $|A_a| > 1$. Переобозначим элементы Γ_1 следующим образом: пусть $X = X_1 \uplus X_1'$, если $A_a \subseteq X_1'$; $X_1' = X_2 \uplus X_2'$, если $A_a \subseteq X_2'$; …, и т.д. до тех пор, пока для некоторого натурального p не получим $X_{p-1}' = X_p \uplus X_p'$ и $A_a = X_p'$, где $C = D \uplus E$ означает $C = D \cup E$ и $D \cap E = \varnothing$.

Как было показано в 3.2.5, (ii)

$$\sigma_p = \begin{pmatrix} X_1 & X_2 & \dots & X_p & X'_p \\ x_1 & x_2 & \dots & x_p & x'_p \end{pmatrix} \in L_1, \tag{3.4}$$

где $x'_p \in X'_p$, $x_j \in X_j$, $1 \leqslant j \leqslant p$. Поскольку $X \setminus A_a = X_1 \cup X_2 \cup \ldots \cup X_p$, и $x \in A_a = X'_p$ при $X'_p \cap X_i = \varnothing$ для всех $1 \leqslant i \leqslant p$, то

$$\mathrm{im}\,(\varphi(A_a, x)\sigma_p) = \mathrm{im}\,(\sigma_p).$$

Так как $\varphi(A_a, x)\sigma_p$, $\sigma_p \in L_1$, то $\varphi(A_a, x)\sigma_p = \sigma_p$. Последнее возможно для любых σ_p как (3.4), только если $\varphi(A_a, x)|_{X \setminus A_a} = \mathrm{id}_{X \setminus A_a}$, $\varphi(A_a, x)|_{A_a} = c_x$.

(ii) Пусть $x, t \in A_a$, $z \in X \setminus A_a$. С одной стороны,

$$(c_z\varphi(A_a, x))\tau = c_z\tau = c_{z'} \;\text{ и }\; (c_z\tau)(\varphi(A_a, x)\tau) = c_{z'}(\varphi(A_a, x)\tau), \tag{3.5}$$

следовательно, $c_{z'}(\varphi(A_a, x)\tau) = c_{z'}$. С другой стороны,

$$(c_t\varphi(A_a, x))\tau = c_x\tau = c_{x'} \;\text{ и }\; (c_t\tau)(\varphi(A_a, x)\tau) = c_{t'}(\varphi(A_a, x)\tau), \tag{3.6}$$

следовательно, $c_{t'}(\varphi(A_a, x)\tau) = c_{x'}$. Рассмотрим $x'(\varphi(A_a, x)\tau)^{-1} \in \ker\varphi(A_a, x)\tau$. Для всех $t \in A_a$, $z \in X \setminus A_a$ получим $c_{z'} \neq c_{x'}$ (так как $x \neq z$), $c_{z'}(\varphi(A_a, x)\tau) = c_{z'}$, $c_{t'}(\varphi(A_a, x)\tau) = c_{x'}$. Таким образом,

$$x'(\varphi(A_a, x)\tau)^{-1} = \{t' \mid t \in A_a\},$$

и значит $\{t' \mid t \in A_a\} \in X/\ker\varphi(A_a, x)\tau$. Как видно из доказательства следствия 3.2.4, Γ_2 и $\cup_{\alpha \in L_2} X/\ker\alpha$ совпадают как семейства подмножеств множества X, таким образом найдется такое $B_{a'} \in \Gamma_2$, при некотором $a' \in \{1, 2\}^*$, что $B_{a'} = \{t' \mid t \in A_a\}$. В силу биективности τ, получим $|A_a| = |B_{a'}|$. Более того, согласно (3.5) и (3.6), $(\varphi(A_a, x)\tau)|_{X \setminus B_{a'}} = \mathrm{id}_{X \setminus B_{a'}}$ и $(\varphi(A_a, x)\tau)|_{B_{a'}} = c_{x'}$, $x' \in B_{a'}$. Следовательно, $\varphi(A_a, x)\tau = \varphi(B_{a'}, x')$ и $c_{x'} = c_x\tau$. □

Обозначим множество всех подмножеств множества X через $U(X)$.

Лемма 3.2.11. *Пусть $L_1 \cong L_2$, $\psi : U(X) \to U(X) : M \mapsto M' \Leftrightarrow \alpha_M\tau = \alpha_{M'}$. Имеют место следующие утверждения:*

(i) *$A_a\psi \in \Gamma_2$ для любых $A_a \in \Gamma_1$;*

(ii) $(A_a\beta)\psi = A_a\psi(\beta\tau)$ *для любых* $A_a \in \Gamma_1$ *и* $\beta \in L_1$.

Доказательство. (i) Понятно, что если $|A_a| = 1$, то $A_a\psi \in \Gamma_2$. Пусть $|A_a| > 1$ и $\alpha = \alpha_{A_a} \in L_1$. Пусть для произвольного фиксированного элемента $x \in A_a$

$$\varphi(A_a, x)\tau = \varphi(B_{a'}, x'),$$

где $B_{a'} \in \Gamma_2$, $x' \in B_{a'}$ и $|A_a| = |B_{a'}|$. Поскольку $\alpha\varphi(A_a, x) = c_x$, получим $(\alpha\tau)\varphi(B_{a'}, x') = c_{x'}$, следовательно, $\operatorname{im}(\alpha\tau) \subseteq B_{a'}$. Предположим, что $\operatorname{rk}(\alpha) > \operatorname{rk}(\alpha\tau)$ и обозначим через β' преобразование из L_2 такое, что $\operatorname{im}(\beta') = B_{a'}$.

Пусть $\delta \in L_1$ преобразование, с образом $\operatorname{im}(\delta) \subseteq A_a$. Точно также как в лемме 3.2.5, (iv) можно показать, что существует $\gamma \in L_1$, у которого $\operatorname{im}(\gamma|_{A_a}) = \operatorname{im}(\delta)$. Обозначим это преобразование γ^δ. Таким образом, для всех $\delta \in L_1$ у которых $\operatorname{im}(\delta) \subseteq A_a$, найдется $\gamma^\delta \in L_1$ такое, что $\delta = \alpha\gamma^\delta$.

Пусть $\beta = \beta'\tau^{-1}$. Поскольку $\beta'\varphi(B_{a'}, x') = c'_x$, получим $(\beta'\varphi(B_{a'}, x'))\tau^{-1} = \beta\varphi(A_a, x) = c_x$, следовательно $\operatorname{im}(\beta) \subseteq A_a$. Таким образом, $\beta = \alpha\delta^\beta$, откуда $\beta' = (\alpha\tau)(\delta^\beta\tau)$. Но

$$\operatorname{rk}(\beta') = \operatorname{rk}((\alpha\tau)(\delta^\beta\tau)) \leqslant \operatorname{rk}(\alpha\tau) < \operatorname{rk}(\alpha).$$

Полученное противоречие доказывает, что $\operatorname{rk}(\alpha) = \operatorname{rk}(\alpha\tau)$. Следовательно, $|\operatorname{im}(\alpha\tau)| = |A_a| = |B_{a'}|$ и $\operatorname{im}(\alpha\tau) \subseteq B_{a'}$, откуда $\operatorname{im}(\alpha\tau) = B_{a'}$. Таким образом, $\alpha_{A_a}\tau = \alpha_{B_{a'}}$, следовательно, $A_a\psi = B_{a'} \in \Gamma_2$.

(ii) Предположим, что $A_a \in \Gamma_1$ и $\beta \in L_1$. Пусть $\alpha_{A_a}\tau = \alpha_{B_{a'}}$, $B_{a'} \in \Gamma_2$. Обозначим $\beta\tau$ через β'. Тогда

$$(\alpha_{A_a\beta})\tau = (\alpha_{A_a}\beta)\tau = (\alpha_{B_{a'}})\beta' = \alpha_{A_a\psi}\beta' = \alpha_{(A_a\psi)\beta'},$$

что, по определению ψ, означает $(A_a\beta)\psi = A_a\psi(\beta\tau)$. □

Следствие 3.2.5. *Пусть* $L_1 \cong L_2$, ψ *— функция из* леммы 3.2.11. *Тогда для всех* $A_a, A_b \in \Gamma_1$*:*

(i) $|A_a| = |A_a\psi|$;

(ii) *если* $A_a \subseteq A_b$, *то* $A_a\psi \subseteq A_b\psi$;

(iii) *если* $A_a \cap A_b = \varnothing$, *то* $A_a\psi \cap A_b\psi = \varnothing$.

Доказательство. (i) Пусть $A_a \in \Gamma_1$, $x \in A_a$, и $(\varphi(A_a, x))\tau = \varphi(B_{a'}, x')$ для некоторых $B_{a'} \in \Gamma_2$, $x' \in B_{a'}$, при этом $|A_a| = |B_{a'}|$ (см. лемму 3.2.10, (ii)). Из доказательства леммы 3.2.11, (i) следует, что $A_a\psi = B_{a'}$. Таким образом, $|A_a| = |A_a\psi|$.

(ii) Пусть $A_a \subseteq A_b$ и $z \in A_b$ — произвольный фиксированный элемент. Предположим, что $(\varphi(A_b, z))\tau = \varphi(B_{b'}, z')$ для некоторых $B_{b'} \in \Gamma_2$, $z' \in B_{b'}$. По лемме 3.2.10, (ii), $c_z\tau = c_{z'}$, следовательно, $\{z\}\psi = \{z'\}$. С одной стороны,

$$(A_a\varphi(A_b, z))\psi = \{z\}\psi = \{z'\}.$$

С другой стороны, по лемме 3.2.11, (ii),

$$(A_a\varphi(A_b, z))\psi = (A_a\psi)(\varphi(A_b, z)\tau) = (A_a\psi)\varphi(B_{b'}, z').$$

Следовательно, $(A_a\psi)\varphi(B_{b'}, z') = \{z'\}$, откуда $A_a\psi \subseteq B_{b'} = A_b\psi$.

(iii) Пусть $A_a \cap A_b = \varnothing$. Зафиксируем $z \in A_b$ и пусть $(\varphi(A_b, z))\tau = \varphi(B_{b'}, z')$ для подходящих $B_{b'} \in \Gamma_2$, $z' \in B_{b'}$. Предположим $y \in A_a$ — произвольный элемент, и $c_y\tau = c_{y'}$. По определению ψ тогда получим $\{y\}\psi = \{y'\}$. С одной стороны,

$$(y\varphi(A_b, z))\psi = \{y\}\psi = \{y'\}, \text{ где } y' \neq z'.$$

С другой стороны, по лемме 3.2.11, (ii),

$$(\{y\}\varphi(A_b, z))\psi = (\{y\}\psi)(\varphi(A_b, z)\tau) = \{y'\}\varphi(B_{b'}, z').$$

Таким образом, $y'\varphi(B_{b'}, z') = y'$, $y' \neq z'$ для всех $y \in A_a$. Следовательно,

$$\{y' \mid c_{y'} = c_y\tau,\ y \in A_a\} \cap A_b\psi = \{y' \mid c_{y'} = c_y\tau,\ y \in A_a\} \cap B_{b'} = \varnothing.$$

Согласно пункту (ii) этого следствия $\{y'\} = \{y\}\psi \subseteq A_a\psi$. Поскольку τ биективно, получим

$$|A_a| = |\{y' \mid c_{y'} = c_y\tau,\ y \in A_a\}|.$$

Согласно (i) имеет место $|A_a| = |A_a\psi|$, следовательно, $A_a\psi = \{y' \mid c_{y'} = c_y\tau,\ y \in A_a\}$. Таким образом, $A_a\psi \cap A_b\psi = \varnothing$. $\square$

Теперь мы можем доказать следующую лемму.

Лемма 3.2.12. *Если* $L_1 \cong L_2$, *то* $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

Доказательство. Понятно, что лемма справедлива при $|X| = 1$. Предположим, что $|X| \geqslant 2$. Рассмотрим ограничение функции ψ из леммы 3.2.11 на Γ_1 (которое мы также будем обозначать через ψ). Согласно (i) леммы 3.2.11, $\psi : \Gamma_1 \to \Gamma_2$. Нетрудно видеть из следствия 3.2.5, что либо $A_1\psi = B_1$ и $A_2\psi = B_2$, либо $A_1\psi = B_2$ и $A_2\psi = B_1$. Предположим, что $A_1\psi = B_1$ и $A_2\psi = B_2$. Докажем индукцией по $|a|$, что для всех $a \in \{1,2\}^*$, $A_a\psi = B_a$. Мы уже знаем, что это так для $|a| = 1$. Пусть $k \geqslant 1$ и предположим, что $A_a\psi = B_a$ для всех $a \in \{1,2\}^*$ при $|a| \leqslant k$.

Пусть $bi \in \{1,2\}^*$, $|bi| = k$ и $A_{bi} \in \Gamma_1$. Как было показано в лемме 3.2.5, существует преобразование $\gamma \in L_1$ такое, что $A_b\gamma = A_{bi}$, т.е., $\gamma|_{A_b} = \alpha^{A_b}_{A_{bi}}$. По определению 3.2.5,

$$\alpha^{A_b}_{A_{bi}} = \alpha^{A_{b1}}_{A_{bi}\cap A_{bi1}} \cup \alpha^{A_{b2}}_{A_{bi}\cap A_{bi2}} = \alpha^{A_{b1}}_{A_{bi1}} \cup \alpha^{A_{b2}}_{A_{bi2}},$$

следовательно, $A_{bj}\gamma = A_{bij}$, $j \in \{1,2\}$. Более того, по индуктивному предположению, имеют место следующие условия:

$$(\alpha_{A_b}\gamma)\tau = (\alpha_{A_{bi}})\tau = \alpha_{A_{bi}\psi} = \alpha_{B_{bi}},$$

$$(\alpha_{A_b}\gamma)\tau = (\alpha_{A_b}\tau)(\gamma\tau) = (\alpha_{A_b\psi})(\gamma\tau) = \alpha_{B_b}(\gamma\tau).$$

Следовательно, $\alpha_{B_b}(\gamma\tau) = \alpha_{B_{bi}}$, и значит $B_b(\gamma\tau) = B_{bi}$. Так как $\gamma\tau \in L_2$, получим $(\gamma\tau)|_{B_b} = \alpha^{B_b}_{B_{bi}}$. По определению 3.2.5,

$$\alpha^{B_b}_{B_{bi}} = \alpha^{B_{b1}}_{B_{bi}\cap B_{bi1}} \cup \alpha^{B_{b2}}_{B_{bi}\cap B_{bi2}} = \alpha^{B_{b1}}_{B_{bi1}} \cup \alpha^{B_{b2}}_{B_{bi2}},$$

so $B_{bj}(\gamma\tau) = B_{bij}$, $j \in \{1,2\}$.

Теперь с одной стороны, согласно (ii) леммы 3.2.11, выполняется $A_{bj}\psi(\gamma\tau) = (A_{bj}\gamma)\psi = A_{bij}\psi$, $j \in \{1,2\}$. С другой стороны, по предположению индукции, получим $A_{bj}\psi(\gamma\tau) = B_{bj}(\gamma\tau) = B_{bij}$, $j \in \{1,2\}$. Таким образом, $A_{bij}\psi = B_{bij}$, $j \in \{1,2\}$. Поскольку A_{bj} — произвольный элемент со свойством $|bj| = k$, то

$A_c\psi = B_c$ для всех $c \in \{1,2\}^*$, $|c| = k+1$, $A_c \in \Gamma_1$. Таким образом, для всех $a \in \{1,2\}^*$ $A_a\psi = B_a$.

Двойственным образом, можно показать, что если $A_1\psi = B_2$ и $A_2\psi = B_1$, то $A_a\psi = B_{\bar{a}}$ для всех $a \in \{1,2\}^*$. Поскольку $|A_a| = |A_a\psi|$ для всех $a \in \{1,2\}^*$ (по следствию 3.2.5), получим $\Gamma_1 \sim \Gamma_2$.

$\square$

Теперь из лемм 3.2.9 и 3.2.12 получим

Теорема 3.2.3. *Два $\mathscr{L}$-сечения полугруппы $\mathscr{T}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда соответствующие им L-семейства подобны.*

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Диссертация посвящена изучению моноидов сильных эндоморфизмов гиперграфов. В ходе исследования получены следующие результаты:

1) Установлено, что все сильные эндоморфизмы произвольного бесконечного графа (n-однородного гиперграфа), сохраняющие некоторое отношение эквивалентности на множестве вершин этого гиперграфа, образуют подмоноид моноида сильных эндоморфизмов этого графа (гиперграфа), изоморфный сплетению полугруппы с некоторой малой категорией (теоремы 2.3.2). Это утверждение справедливо и в конечном случае, поскольку все сильные эндоморфизмы конечного графа (конечного n-однородного гиперграфа) сохраняют соответствующее отношение эквивалентности. Кроме того, существует класс бесконечных графов (n-однородных гиперграфов), у которых все сильные эндоморфизмы сохраняют соответствующие отношение эквивалентности на множестве вершин этого графа (гиперграфа).

2) Найден критерий регулярности моноида сильных эндоморфизмов произвольного n-однородного гиперграфа.

3) Показано, что графы (и ориентированные, и неориентированные) в общем случае не определяются своими моноидами сильных эндоморфизмов. Доказано, что n-однородные гиперграфы определяются своим моноидом сильных эндоморфизмов только и только если $n = 0$ (теорема 2.5.1).

4) Найдено описание $\mathscr{R}$-, $\mathscr{L}$- и $\mathscr{H}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов конечного графа. А именно, показано, что $\mathscr{R}$-, $\mathscr{L}$- и $\mathscr{H}$-сечения рассматриваемого моноида представляют собой прямое произведение, соответственно, $\mathscr{R}$-, $\mathscr{L}$- и $\mathscr{H}$-сечений подходящих симметрических полугрупп (теоремы 3.1.2–3.1.4). $\mathscr{R}$-сечение указанного моноида можно построить всегда, и оно единственно с точностью до изоморфизма. Описание $\mathscr{L}$-сечений моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа сводится к вопросу об

описании $\mathscr{L}$-сечений симметрической полугруппы. $\mathscr{H}$-сечение моноида сильных эндоморфизмов конечного неориентированного графа существует тогда и только тогда, когда все классы из канонического сильного фактор-графа одно- или двухэлементны, а сам моноид удовлетворяет некоторому дополнительному ограничению. В таком случае полученное $\mathscr{H}$-сечение рассматриваемого моноида будет единственным.

5) Для всякого L-семейства Γ множества X множество L_X^Γ представляет собой $\mathscr{L}$-сечение конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$, и наоборот, каждое $\mathscr{L}$-сечение конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ имеет вид L_X^Γ для подходящего L-семейства Γ на X (теорема 3.2.1). Число различных $\mathscr{L}$-сечений конечной симметрической полугруппы $\mathscr{T}_n$ дает (теорема 3.2.2). Два $\mathscr{L}$-сечения $\mathscr{T}_n$ изоморфны тогда и только тогда, когда подобны соответствующие им L-семейства (теорема 3.2.3). В работе предложен способ подсчета различных L-семейств и $\mathscr{L}$-сечений. Автору не удалось пока пересчитать подобные L-семейства и соответственно, изоморфные $\mathscr{L}$-сечения полугруппы $\mathscr{T}_n$.

Тем самым решены задачи 1)-6), поставленные во Введении.

ЛИТЕРАТУРА

1. Айзенштат А. Я. Определяющие соотношения полугруппы эндоморфизмов конечного линейного упорядоченного множества / А. Я. Айзенштат // Сиб. мат. журн. — 1962. — Т. 3. № 2. — С. 161–169.
2. Айзенштат А. Я. Регулярные полугруппы эндоморфизмов упорядоченных множеств / А. Я. Айзенштат // Учёные записки Ленинградского гос. пед. ин-та им. А. И. Герцена. — 1968. — Т. 387. — С. 3–11.
3. Баранский В. А. Независимость производных структур в классах алгебраических систем [дис. на соиск. степ. д. ф.-м. н.]. — Свердловск, 1986.
4. Артамонов В. А. Общая алгебра: справочная математическая библиотека в 2-х томах / В. А., Артамонов, В. Н. Салий, Л. А. Скорняков, Л. И. Шеврин, Е. Г. Шульгейфер; под общ.ред. Л. А. Скорнякова. Т. 2. — М.: Наука, 1991. — 480 с.
5. Глускин Л. М. Полугруппы изотонных преобразований / Л. М. Глускин // Успехи математических наук. — 1961. — Т. 16. № 5(101). — С. 157–162.
6. Емеличев В. А. Лекции по теории графов / В. А.Емеличев, О. И. Мельников, В. И. Сарванов, Р. И. Тышкевич. — М.: Наука, 1990. — 384 с.
7. Жучок Ю. В. Сечения отношений Грина на симметрической инверсной 0-категории / Ю. В. Жучок // Алгебра и логика. – 2012. — Т. 51. № 4. – С. 458–475.
8. Зыков А. А. Гиперграфы / А. А. Зыков // Успехи математических наук. — 1974. — Т. 29. № 6(180). — С. 89–153.
9. Ким В. И. Условия регулярности полугрупп изотонных преобразований счетных цепей / В. И. Ким, И. Б. Кожухов // Фундаментальная и прикладная математика. — 2006. — Т. 12. № 8. — С. 97—104.
10. Клиффорд А. Алгебраическая теория полугрупп: в 2-х томах. / А. Клиффорд, Г. Престон. — М.: Мир, 1972. — Т. 1. — 278 с.

11. Кожухов И. Б. Полугруппы отображений, сохраняющих бинарное отношение / И. Б. Кожухов, В. А. Ярошевич // Фундаментальная и прикладная математика. — 2008. — Т. 14. № 7. — С. 129–135.
12. Новиков Ф. А. Дискретная математика / Ф. А. Новиков. — 2-е изд. Стандарт третьего поколения. — СПб: Питер, 2013. — 432 с.
13. Нуммерт У. А. О моноиде строгих эндоморфизмов сплетения графов / У. А. Нуммерт // Матем. заметки. — 1987. — Т. 41. № 6. — С. 844–853.
14. Нуммерт У. А. Моноид строгих эндоморфизмов обобщенного лексикографического произведения графов / У. А. Нуммерт // Уч. записки Тартуского университета. Моноиды, кольца и алгебры (Труды по математике и механике). — 1990. — № 878. — С. 91–102.
15. Решетников А. В. Об определениях гомоморфизма гиперграфов / А. В. Решетников // Мат-лы X межд. сем. "Дискретная математика и ее приложения". — 2010. — С. 325–328.
16. Усенко В.М. Эндоморфизмы вполне 0-простых полугрупп / В.М. Усенко // Вопросы алгебры. — 1998. — Т. 13. — С. 93–120.
17. Флейшер В. О сплетении моноидов с категориями / В. Флейшер // Труды Акад. Наук Эстонской ССР. — 1986. — Т. 35. — С. 237–243.
18. Харари Ф. Теория графов / Ф. Харари — М.: Мир, 1973. — 300 с.
19. Шайн Б. М. Представление упорядоченных полугрупп / Б. М. Шайн // Матем. сб. — 1964. — Т. 65. № 107(2). — С. 188–197.
20. Шеврин Л. Н. Полугруппы и их подполугрупповые решетки: в 2-х частях. / Л. Н. Шеврин, А. Я. Овсянников. — Свердловск: Изд-во Урал.ун-та. — 1990. — Ч.1 : Полугруппы с некоторыми типами решеток подполугрупп и решеточные характеризации классов полугрупп. — 238 с.
21. Шнеперман Л. Б. Полугруппы эндоморфизмов квазиупорядоченных множеств / Л. Б. Шнеперман // Учёные записки ЛГПУ им. А. И. Герцена. — 1962. — Т. 238. — С. 21–37.
22. Жучок Ю. В. Ендоморфізми відношень еквівалентності / Ю. В. Жучок // Вісн. Київ. унів. Сер. Фіз.-мат. науки. — 2007. — Вип. 3. — С. 22–26.

23. Adams M. E. Posets whose monoids of order-preserving maps are regular / M. E. Adams, M. Gould // Mathematics and Statistics. — 1989. — Vol. 6. № 2. — P. 195–201.
24. Arworn Sr. Locally strong endomorphisms of paths / Sr. Arworn, U. Knauer, S. Leeratanavalee // Discrete Mathematics. — 2008. — Vol. 308. — P. 2525–2532.
25. Blyth T. S. Inverse Transversals–A Guided Tour: Proceedings of an International Conference on Semigroups / T. S. Blyth. — Braga: World Scientific, 1999. — P. 26–43.
26. Čulík K. Zur Theorie der Graphen / K. Čulík // Časopis Pěst. Mat. — 1958. — 83. — P. 133–155.
27. Ganyushkin O. Classical Finite Transformation Semigroups: An Introduction. / O. Ganyushkin, V. Mazorchuk. — Springer-Verlag, 2009. — Algebra and Applications, vol. 9. — 317 p.
28. Ganyushkin O. $\mathscr{L}$- and $\mathscr{R}$- Cross-Sections in $\mathscr{I}\mathscr{S}_n$ / O. Ganyushkin, V. Mazorchuk // Communications in Algebra. — 2003. — Vol. 31. № 9. — P. 4507–5423.
29. Böttcher M. Endomorphism spectra of graphs / M. Böttcher, U. Knauer // Discrete Mathematics. — 1992. — Vol. 109. — P. 45–57.
30. Deng L.-Z. Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve reverse direction equivalence / L.-Z. Deng, J.-W. Zeng, T.-J. You // Semigroup Forum. — 2011. — Vol. 83. № 3. — P. 489–498.
31. Deng L.-Z. Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve order and a double direction equivalence / L.-Z. Deng, J.-W. Zeng, T.-J. You // Semigroup Forum. — 2012. — Vol. 84. № 1. — P. 59–68.
32. Deng L.-Z. Green's relations and regularity for semigroups of transformations that preserve double direction equivalence / L.-Z. Deng, J.-W. Zeng, B. Xu // Semigroup Forum. — 2010. — Vol. 80. — P. 416–425.
33. Fan S. On End-regular birpartite graphs / S. Fan // In Proc. Spring School and Int. Conf. on Comb. and Graphs. Singapore: World Scientific, 1993. — P. 117–130.

34. Fan S. On End-regular graphs / S. Fan // Discrete Mathematics. — 1996. — Vol. 159. — P. 95–102.
35. Fan S. Graphs whose strong endomorphism monoids are regular / S. Fan // Arch. Math. — 1999. — Vol. 73. — P. 419–421.
36. Fleischer V. Endomorphism monoids of acts are wreath products of monoids with small categories / V. Fleischer, U. Knauer. // Semigroups Theory and Applications: Lecture Notes in Mathematics. — 1988. — Vol. 1320. — P. 84–96.
37. Hou H. Graphs whose endomorphism monoids are regular / H. Hou, Ya. Luo // Discrete Mathematics. — 2008. — Vol. 308. — P. 3888–3896.
38. Hedrlin Z. How comprehensive is the category of semigroups? / Z. Hedrlin, J. Lambek // J. Algebra. — 1969. — Vol. 11. — P. 195–212.
39. Kilp M. Monoids, acts and categories. / M. Kilp, U. Knauer, A. V. Mikhalev. — Berlin, New York: de Gruyter, 2000. — De Gruyter expositions in mathematics, vol. 29. — 533 p.
40. Knauer U. Algebraic Graph Theory: Morphisms, Monoids and Matrices / U. Knauer // Berlin, Boston: De Grauter, 2011. — De Gruyter studies in mathematics, vol. 41. — 308 p.
41. Knauer U. Endomorphisms of graphs I. The monoid of strong endomorphisms / U. Knauer, M. Nieporte // Arch. Math. — 1989. — Vol. 52. — P. 607–614.
42. Kozhuhov I. B. On transversals of the semigroup T_n for the relation $\mathscr{L}$ / I. B. Kozhuhov // Kamyanets-Podolsky, July, 1–7, 2007. — P. 110.
43. Li W. Green's relations on the strong endomorphism monoid of a graph / W. Li // Semigroup Forum. — 1993. — Vol. 47. — P. 209–214.
44. Li W. The monoid of strong endomorphisms of a graph / W. Li // Semigroup Forum. — 1994. — Vol. 49. — P. 143–149.
45. Li W. Graphs with regular monoids / W. Li // Discrete Mathematics. — 2003. — Vol. 265. — P. 105–118.
46. Ma M. Regularity and Green's relations for finite E-order-preserving transformations semigroups / M. Ma, T. You, S. Luo, Y. Yang, L. Wang // Semigroup Forum. — 2010. — Vol. 80. № 1. — P. 164–173.

47. Mashevitzky G. Automorphisms of the endomorphism semigroup of a free monoid or a free semigroup / G. Mashevitzky, B. M. Schein // Proceedings Of The American Mathematical Society. — 2003. — Vol. 131. № 6. — P. 1655–1660.
48. Molchanov V. A. Semigroups of mappings on graphs / V. A. Molchanov // Semigroup Forum. — 1983. — Vol. 27. — P. 155–199.
49. Pei H. S. Green's equivalences on semigroups of transformations preserving order and an equivalence relation / H. S. Pei, Z. Dingyu // Semigroup Forum. — 2005. — Vol. 71. — P. 241–251.
50. Pastijn F. Free split bands / F. Pastijn, J. Albert // Semigroup Forum, Online ISSN 1432-2137, Published online: 22 July 2014.
51. Pekhterev V. Idempotent $\mathscr{D}$-cross-sections of the finite inverse symmetric semigroup IS_n / V. Pekhterev // Algebra and Discrete Mathematics. — 2008. — Vol. 3. — P. 84–87.
52. Pekhterev V. $\mathscr{H}$- and $\mathscr{R}$-cross-sections of the full finite semigroup $\mathscr{T}_n$ / V. Pekhterev // Alg. Discrete Math. — 2003. — Vol. 2. № 3. — P. 82–88.
53. Pultr A. Combinatorial, Algebraic and Topological Representations of Groups, Semigroups and Categories: North-Holland Mathematical Library, 22 / A. Pultr, V. Trnkova. — Prague: Academia, 1980. — 372 p.
54. Renner L. Analogue of the Bruhat decomposition for algebraic monoids II / L. Renner // Journal of Algebra — 1986. — Vol. 101. № 2. — P. 303–338.
55. Schein B. M. Ordered sets, semilattices, distributive lattices and Boolean algebras with homomorphic endomorphism semigroups / B. M. Schein // Fund. Math. — 1970. — Vol. 68. — P. 31–50.
56. Wilkeit E. Graphs whith regular endomorphism monoid / E. Wilkeit // Arch. Math. — 1996. — Vol. 66. — P. 344–352.

Публикации автора

57. Бондарь Е. А. Представления моноида сильных эндоморфизмов конечных n-однородных гиперграфов / Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок // Фундаментальная и прикладная математика. — Т. 18. № 1. — 2013. — С. 21–34.

58. Бондарь Е. А. Полугруппы сильных эндоморфизмов бесконечных графов и гиперграфов / Е. А. Бондарь, Ю. В. Жучок // Укр. мат. журн. — 2013. — Т. 65. № 6. — С. 743–754.

59. Бондарь Е. А. $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- и $\mathscr{H}$-сечения полугруппы сильных эндоморфизмов неориентированных графов // Труды ИПММ НАН Украины. — 2013. — Т. 27.— С. 41–50.

60. Bondar E. A. Representations of the strong endomorphism monoid of finite n-uniform hypergraphs / E. A. Bondar, Yu. V. Zhuchok // Journal of Mathematical Sciences (US). — 2014. — Vol. 201. № 4. — P. 421–430.

61. Бондарь Е. А. О регулярности некоторых подполугрупп моноида эндоморфизмов отношения эквивалентности / Е. А. Бондарь // ПДМ. — 2014. — №3. Вып. 25. — С. 5–11.

62. Bondar E. $\mathscr{L}$-cross-sections of the finite symmetric semigroup / E. Bondar // Algebra and Discrete Mathematics. — 2014. — Vol. 18. № 1. — P. 27–41.

63. Bondar E. Classification of $\mathscr{L}$-cross-sections of the finite symmetric semigroup / E. Bondar // Algebra and Discrete Mathematics. — 2016. — Vol. 21. № 1. — P. 1–17.

64. Bondar E. Classification of $\mathscr{L}$-cross-sections of $\mathscr{T}_n$ / E. Bondar // Book of abstracts of the International Algebraic Conference dedicated to 100th anniversary of L. A. Kaluzhnin. — Kyiv, 2014. — P. 95.

65. Bondar E. Faithful representations of the strong endomorphism monoid of graphs and n-uniform hypergraphs / E. Bondar // Groups and Graphs, Algorithms and Automata: Abstracts of the International Conference and PhD Summer School in honor of the 80th Birthday of Professor Vyacheslav A. Belonogov and the 70th Birthday of Professor Vitaly A. Baransky. — Ekaterinburg. — 2015. — P. 38.

66. Bondar E. $\mathscr{L}$-, $\mathscr{R}$- and $\mathscr{H}$-cross-sections in strong endomorphism semigroup of graphs / E. Bondar // International Mathematical conference: abstracts of talks. — Mykolayiv, 2012. — P. 155.

67. Bondar E. $\mathscr{L}$-cross-sections of the finite symmetric semigroup / E. Bondar //

The 9-th International Algebraic Conference in Ukraine: abstracts of reports. — L'viv, 2013. — P. 32.

68. Bondar E. On some subsemigroups of the endomorphism monoid of equivalence graphs / E. Bondar // XV International Scientific Kravchuck Conference. — Kyiv, 2014. — Vol. 2. — P. 11.
69. Bondar E. On L-families / E. Bondar // X International Algebraic Conference in Ukraine dedicated to the 70th anniversary of Yu. A. Drozd. Abstracts. — Odessa, 2015. — P. 21.
70. Bondar E. Strong endomorphisms of infinite graphs and hypergraphs / E. Bondar // XIV International Scientific Kravchuck Conference. — Kyiv, 2012. — Vol. 2. — P. 10.
71. Bondar E. The monoid of strong endomorphisms of hypergraphs / E. Bondar // 8-ма Міжнародна алгебраїчна конференція в Україні: збірник тез (англійською мовою). — Луганськ, 2011. — С. 248–250.