На правах рукописи

Попович Александр Леонидович

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РЕШЕТОК РЕШЕТКАМИ КОНГРУЭНЦИЙ ПОЛУГРУПП

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2018

Работа выполнена на кафедре алгебры и фундаментальной информатики Института естественных наук и математики ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», г. Екатеринбург.

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, Репницкий Владимир Брониславович, профессор кафедры алгебры и фундаментальной информатики ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б. Н. Ельцина», г. Екатеринбург
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, Бредихин Дмитрий Александрович, профессор кафедры компьютерной алгебры и теории чисел ФГБОУ ВО «Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского», г. Саратов
	доктор физико-математических наук, Швидевски Марина Владимировна, ведущий научный сотрудник лаборатории алгебраических систем ФГБУН «Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН», г. Новосибирск.
Ведущая организация:	ФГБОУ ВО «Новосибирский государственный технический университет», г. Новосибирск

Защита диссертации состоится 1 июня 2018 г. в 14.00 на заседании диссертационного совета Д 003.015.02 на базе ФГБУН «Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН» по адресу: 630090 Новосибирск, пр. Академика Коптюга, 4.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте Института математики им. С.Л. Соболева СО РАН, http://math.nsc.ru/

Автореферат разослан «____» ______ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
кандидат физ.-мат. наук А. И. Стукачев

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Одной из центральных задач современной общей алгебры является изучение производных объектов универсальных алгебр. Наиболее известными конструкциями такого рода являются решетки подалгебр, решетки конгруэнций, группы автоморфизмов и решетки подмногообразий. Изучение производных объектов дает возможность вводить общие характеристики для алгебр разных типов, что может привести к общим теориям или к классификациям, охватывающим разные типы алгебр.

Диссертация посвящена изучению решеток конгруэнций полугрупп. Предметом изучения являются представления абстрактных решеток решетками конгруэнций подходящих полугрупп из заданного класса. Под представлением понимается обычный решеточный изоморфизм.

Ряд известных результатов накладывает ограничения на класс решеток, имеющих такие представления. Г. Биркгоф и О. Фринк в работе [4] показали, что решетка конгруэнций любой универсальной алгебры является алгебраической. С другой стороны, известная теорема Г. Гретцера и Е. Шмидта [9] утверждает, что всякая алгебраическая решетка представима решеткой конгруэнций некоторой универсальной алгебры. Однако в доказательстве данной теоремы алгебра получается всегда бесконечной и с бесконечным числом операций. Вопрос о представлении конечной решетки решеткой конгруэнций конечной универсальной алгебры на сегодняшний день является одной из самых известных проблем в универсальной алгебре.

Если рассматривать алгебры с конечной сигнатурой, но неограниченной мощности, то результаты в лучшем случае частичные. Отметим, что У. Лэмпом в [15] было показано, что всякая алгебраическая решетка, в которой единица является компактным элементом, изоморфна решетке конгруэнций подходящего группоида. Также Е. Шмидтом в [26] было установлено, что если компактные элементы алгебраической решетки образуют подрешетку, то такая решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой решетки с нулем, откуда также можно вывести (что было отмечено в работе [16]) представимость ее решеткой конгруэнций некоторого группоида.

В работе [6] Р. Фриз, У. Лэмп и У. Тейлор показали, что для всякого кардинального числа $\Lambda \geqslant \aleph_1$ существует модулярная алгебраическая решетка, которая не может быть представлена решеткой конгруэнций никакой алгебры, с числом операций меньшим, чем Λ. Очевидно, что эта теорема распространяется и на случай полугрупп. Кроме этого, У. Тейлор в работе [28] показал существование счетной алгебраической (немодулярной) решетки, которая не изоморфна решетке конгруэнций никакой полугруппы. Эти ограничения сделали наиболее естественным вопрос о представимости дистрибутивных алгебраических решеток решетками конгруэнций алгебр с конечным числом операций, в частности, группоидов и полугрупп. Этот вопрос отмечался У. Лэмпом в обзорах [16], [17].

Первым из двух направлений исследований в диссертации является исследование классов дистрибутивных решеток, представимых решетками конгруэнций полугрупп.

Большое внимание в литературе уделяется полугруппам, решетки конгруэнций которых удовлетворяют заданным ограничениям. Отметим обзоры Х. Митча [19] и [20]. Хорошо известен результат О. Оре [21], описывающий абелевы группы с дистрибутивными решетками конгруэнций. Позднее, в работах Г. Паздерски [22] и М. Мая [18] были охарактеризованы неабелевы группы с дистрибутивными решетками конгруэнций. Также были описаны строго инверсные полугруппы с дистрибутивными и модулярными решетками конгруэнций (К. Ауингер, [3]), клиффордовы полугруппы, у которых все конгруэнции рисовские, и значит образуют дистрибутивную решетку конгруэнций (П. Жу, [30]), регулярные полугруппы, обладающие дистрибутивной или модулярной решеткой конгруэнций (П. Джонс [12]), полурешетки с дистрибутивной или модулярной решеткой конгруэнций (Р. Дэн и Р. Омк, [5]; Г. Гамильтон, [10]). Конструирование представлений абстрактных решеток решетками конгруэнций полугрупп из заданного класса, равно как и поиск свойств решеток конгруэнций, обычно опираются на свойства полугрупп из этого класса. Поэтому структурные исследования полугрупп с дистрибутивными или модулярными решетками конгруэнций также сопутствуют первоначальной задаче.

Вторым направлением исследований в диссертации является изучение полугрупп, решетка конгруэнций которых дистрибутивна или модулярна.

Целью работы является исследование представлений решеток решетками конгруэнций полугрупп.

Методы исследования. В работе применяются методы теории полугрупп, универсальной алгебры и теории решеток.

Научная новизна. Все результаты диссертации являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность. Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы в теории полугрупп и теории решеток.

Основные результаты диссертации. В диссертации основными считаются следующие результаты:

1. Найдены два достаточно широких подкласса дистрибутивных алгебраических решеток (в частности, содержащие все конечные дистрибутивные решетки), в которых всякая решетка представима решеткой конгруэнций подходящей полугруппы без идемпотентов.

2. Доказано, что всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы, в которой все конгруэнции рисовские.

3. Доказано, что если решетка конгруэнций произвольной нильполугруппы дистрибутивна, то она является цепью.

4. Получено структурное описание конечных нильполугрупп с модулярной решеткой конгруэнций.

Апробация результатов работы. Результаты диссертации были представлены на 3-й международной конференции Novi Sad Algebraic Conference (Нови Сад, Сербия, 2009), на международной конференции «Мальцевские чтения» (Новосибирск, 2009), на всероссийской молодежной школе-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2011), на международной конференции «Universal Algebra and Lattice Theory» (Сегед, Венгрия, 2012), на международной конференции «Алгебра и математическая логика: теория и приложения» (Казань, 2014), а также на международной конференции «Математика в современном мире», посвященной 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева (Новосибирск, 2017). Также был сделан ряд докладов на екатеринбургском семинаре «Алгебраические системы».

Публикации. По теме диссертации опубликовано 5 статей [31]– [35], из них 4 из списка ВАК. Работы [31] и [34] написаны в соавторстве. В работе [31] соавтору В.Б. Репницкому принадлежит постановка задачи и идея использования функции расстояния, диссертант выполнил все технические построения и расчеты. В работе [34] диссертанту принадлежит постановка задачи и ее первоначальное решение, соавтор П. Джонс существенно упростил и обобщил доказательство. При этом были сокращены важные вспомогательные конструкции, имеющие самостоятельное значение для диссертации, поэтому в диссертации приводится первоначальное доказательство.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из Введения, трех глав, Заключения и списка литературы. Объем диссертации составляет 101 страницу. Библиографический список содержит 65 наименований.

Краткое содержание работы

Во Введении приводится обзор исследований по проблематике, которой посвящена диссертация, и формулируются ее основные проблемы и результаты.

Для формулировки основных результатов нам необходимо ввести ряд определений. Через $\operatorname{Con} S$ мы обозначаем решетку конгруэнций полугруппы S. Напомним, что элемент c полной решетки L называется *компактным*, если из того, что $c \leqslant \bigvee X$ для $X \subseteq L$ следует, что $c \leqslant \bigvee X'$ для некоторого конечного $X' \subseteq X$. Множество компактных элементов решетки L мы будем обозначать через $\operatorname{Comp} L$. Полная решетка называется *алгебраической*, если всякий ее элемент является объединением компактных элементов.

В первой главе рассматриваются представления решеток решетками конгруэнций полугрупп без идемпотентов. Этот класс полугрупп хорошо известен в литературе, однако исследований решеток конгруэнций этого класса полугрупп ранее не проводилось. Основные результаты сформулированы в следующих теоремах.

Теорема 1. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой компактные элементы образуют подрешетку с единицей, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

Теорема 2. *Всякая дистрибутивная алгебраическая решетка, в которой мощность множества компактных элементов не более чем счетна, изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы без идемпотентов.*

Пусть $\mathcal{P}$ – $(\vee, 0)$-полурешетка. Напомним, что *идеалом* в $\mathcal{P}$ называется непустое подмножество I со свойствами:

1) если $x, y \in \mathcal{P}$, $x \in I$ и $y \leqslant x$, то $y \in I$;

2) если $x, y \in I$, то $x \vee y \in I$.

Множество всех идеалов $(\vee, 0)$-полурешетки $\mathcal{P}$ образует алгебраическую решетку, которую мы будем обозначать $\mathrm{J}(\mathcal{P})$. Хорошо известна следующая теорема (см., например, [7]): *полная решетка L является алгебраической тогда и только тогда, когда она изоморфна решетке идеалов некоторой* $(\vee, 0)$*-полурешетки, более того, в качестве этой* $(\vee, 0)$*-полурешетки можно взять* $(\vee, 0)$*-полурешетку ее компактных элементов* $\operatorname{Comp} L$.

Это служит отправной точкой для введения понятия функции расстояния – специального отображения, которое каждой паре элементов полугруппы S ставит в соответствие элемент верхней полурешетки с нулем. Эта конструкция последовательно развивалась в работах Б. Йонссона [14], В.Б. Репницкого [1], П. Пудлака [23], В.Б. Репницкого и И. Тумы [24]. Отметим также обзор И. Тумы [29].

Пусть S – полугруппа. Функцию $\delta : S \times S \to \mathrm{Comp}L$ будем называть *функцией расстояния*, если выполнены следующие аксиомы:

1) $\delta(x, x) = 0$ для всех $x \in S$;
2) $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ для всех $x, y \in S$;
3) $\delta(x, y) \leqslant \delta(x, z) \vee \delta(z, y)$ для всех $x, y, z \in S$;
4) $\delta(xs, yt) \leqslant \delta(x, y) \vee \delta(s, t)$ для любых $x, y, s, t \in S$.

Определим отображение $\delta^* : \mathrm{J}(\mathrm{Comp}\, L) \to \mathrm{Con}\, S$, положив

$$\delta^*(I) = \{(x, y) \in S^2 \mid \delta(x, y) \in I\} \text{ для каждого } I \in \mathrm{J}(\mathrm{Comp}\, L).$$

В диссертации сформулированы условия, при которых данное отображение является изоморфизмом. Затем с помощью бесконечной серии расширений строится полугруппа S' и требуемая функция расстояния, для которой $\mathrm{J}(\mathrm{Comp}\, L)$, а значит и заданная решетка L, изоморфна $\mathrm{Con}\, S$.

Во второй главе рассматриваются полугруппы, все конгруэнции которых являются рисовскими. Напомним, что если I – полугрупповой идеал в полугруппе S, то *рисовской конгруэнцией, соответствующей идеалу* I, называется конгруэнция $\Delta \cup (I \times I)$. Множество всех рисовских конгруэнций образует полную подрешетку в решетке всех конгруэнций полугруппы.

Напомним, что ненулевой элемент a решетки L называется *вполне неразложимым*, если для любого $X \subseteq L$ равенство $a = \bigvee X$ влечет $a \in X$. Полная решетка L называется *пространственной* (*spatial*), если всякий ее элемент является объединением вполне неразложимых элементов.

Если в полугруппе все конгруэнции являются рисовскими, то решетка конгруэнций этой полугруппы оказывается изоморфной ее решетке идеалов. Класс решеток идеалов полугрупп, как известно (см. [2]), совпадает с классом дистрибутивных, алгебраических и пространственных решеток.

Основным результатом второй главы является следующая теорема.

Теорема 3. *Всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторой полугруппы, в которой все конгруэнции рисовские.*

В доказательстве этой теоремы полугруппа строится в результате бесконечной серии особых расширений. Получаемая полугруппа всегда некоммутативна. Отметим в связи с этим, что теорема Тамуры-Нордала [27] утверждает, что если решетка конгруэнций коммутативной полугруппы конечна, то и сама полугруппа конечна. Поэтому на основе любой техники, использующей построение бесконечной серии расширений, невозможно даже для конечных дистрибутивных решеток построить их представление решетками конгруэнций коммутативных полугрупп.

Класс дистрибутивных решеток, представимых решетками конгруэнций нильполугрупп, весьма узок (что показано в третьей главе диссертации). Однако если рассматривать представления решеток решетками конгруэнций не полугрупп, а произвольных группоидов, то требования их коммутативности или «нилевости» никакого влияния не оказывают, что вытекает из следующего результата.

Напомним, что *2-нильгруппоидом* называется группоид с нулем, в котором выполнено тождество $x^2 = 0$.

Теорема 4. *Всякая дистрибутивная алгебраическая пространственная решетка изоморфна решетке конгруэнций некоторого коммутативного 2-нильгруппоида, в котором все конгруэнции рисовские.*

В основе обоих доказательств лежит понятие идеальной функции – специального отображения от одного аргумента полугруппы (группоида) в частично упорядоченное множество. Идея рассматривать такие функции происходит от наблюдения, что если в полугруппе (группоиде) S с нулем все конгруэнции рисовские, то в нем выполняется свойство $\Theta(x, y) = \Theta(x, 0) \vee \Theta(y, 0)$ для любых $x, y \in S$. Таким образом, отображение $\Theta : S^2 \to \operatorname{Con} S$ полностью определяется своими значениями на парах вида $(x, 0)$, где $x \in S$, и может быть описано отображением от одного аргумента. Далее в диссертации строится полугруппа (группоид) S и специальное отображение

$\rho : S \to \operatorname{Con} S$, удовлетворяющее свойству $\rho(x) \vee \rho(y) = \Theta(x, y)$ для всех $x, y \in S$.

Третья глава посвящена случаю нильполугрупп. Этот класс полугрупп хорошо известен в литературе, однако исследований по решеткам конгруэнций в данном классе полугрупп не проводилось. Отметим в связи с этим лишь результат П. Джонса [13], из которого вытекает, что решетки конгруэнций нильполугрупп являются полумодулярными.

Определим *отношение делимости* $\leqslant$ в полугруппе S следующим образом: для любых $x, y \in S$ положим $x \leqslant y$ если существуют $s, t \in S^1$ такие, что $x = syt$. Хорошо известно, что относительно данного порядка всякая нильполугруппа является частично упорядоченным множеством. Напомним, что шириной частично упорядоченного множества P называется максимальный размер антицепи в P. Первый результат этой главы накладывает достаточно сильное необходимое условие на дистрибутивную решетку, для того, чтобы она была представима решеткой конгруэнций нильполугруппы.

Теорема 5. *Если решетка* $\operatorname{Con} S$ *нильполугруппы* S *дистрибутивна, то* $\operatorname{Con} S$ *является цепью и* $(S, \leqslant)$ *является цепью.*

Отметим, что для частично упорядоченного множества условие быть цепью эквивалентно условию иметь ширину 1. Конечная нильполугруппа ширины 1, как хорошо известно, является циклической. Второй результат главы обобщает эти результаты на случай модулярности решетки конгруэнций конечной нильполугруппы.

Теорема 6. *Пусть* S *– конечная нильполугруппа. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\operatorname{Con} S$ *модулярна, но не дистрибутивна;*

2) $(S, \leqslant)$ *имеет ширину 2;*

3) $(S, \leqslant)$ *порождается двумя элементами* $a, b \in S$ *и ч.у.м.* $\{a^2, ab, ba, b^2\}$ *имеет ширину 2.*

Отметим, что условие 3) теоремы дает эффективный алгоритм проверки модулярности решетки конгруэнций конечной нильполугруппы.

В работе [35] диссертантом получен полный список всех конечных нильполугрупп с модулярными решетками конгруэнций. Он распадается на 91 серию, каждая серия параметризуется числом параметров от нуля до четырех. Каждая полугруппа в списке задана своим копредставлением и описывается с точностью до изоморфизма или антиизоморфизма.

В совместной работе диссертанта с П. Джонсом [34] также показано, что условия 1) и 2) Теоремы 6 эквивалентны для нильполугрупп любой мощности. Отсюда вытекает важное следствие для класса нильпотентных полугрупп. Напомним, что полугруппа с нулем S называется *нильпотентной*, если существует такое натуральное n, что произведение любых n элементов в S равно нулю. Хорошо известно, что всякая конечно порожденная нильпотентная полугруппа конечна. Поэтому мы получаем следующее утверждение.

Предложение 1. *Всякая нильпотентная полугруппа с модулярной решеткой конгруэнций конечна.*

Также была получена следующая теорема, которая обозначает некоторые ограничения на решетки конгруэнций нильполугрупп в общем случае. В частности, она показывает, что не все цепи представимы решетками конгруэнций нильполугрупп.

Теорема 7. *Пусть S – нильполугруппа.*

1) $\operatorname{Con} S$ *не может иметь ширину 2.*

2) $\operatorname{Con} S$ *не может содержать в качестве фильтра цепи, двойственной цепи натуральных чисел.*

В Заключении сформулированы основные результаты работы.

Автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю профессору В.Б. Репницкому за постановки задач и руководство при подготовке статей к публикации и написании диссертации, а также Л.Н. Шеврину и кафедре алгебры и фундаментальной информатики УрФУ за теплую и дружескую атмосферу.

Список литературы

[1] Репницкий, В.Б. Решеточная универсальность свободных бернсайдовых групп / В.Б. Репницкий. – Алгебра и логика. – 1996. – N5 – C. 587-611.

[2] Ash, C.J. The lattice of ideals of a semigroup / C.J. Ash // Algebra Universalis. – 1980. – N10. – C. 395-398.

[3] Auinger, K. The congruence lattice of a strict regular semigroup / K. Auinger. // J. Pure Appl. Algebra. – 1992. – N81. C. 219–245.

[4] Birkhoff, G. Representations of lattices by sets / G. Birkhoff, O. Frink // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – N64 – C. 229–316.

[5] Dean, R.A. Idempotent semigroup with distributive right congruence lattices / R.A. Dean, R.H. Oehmke. // Pacific J. Math. – 1964. – N4 – C. 1187-1209.

[6] Freese, R. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type. I / R. Freese, W. A. Lampe and W. Taylor. // Pacific J. Math. – 1979. – N82. – C. 59–68.

[7] Gratzer, G. Lattice Theory: Foundation / G. Grätzer. – Birkhäuser Verlag, Basel. – 2011. – 644c.

[8] Gratzer, G. On the Congruence Lattice of a Lattice / G. Grätzer.// The Dilworth theorems : selected papers of Robert P. Dilworth edited by K.P. Bogart, R. Freese, J.P.S. Kung, Springer Science+Business Media New York – 1990. – 465c.

[9] Gratzer, G. Characterizations of congruence lattices of abstract algebras / G. Grätzer and E. T. Schmidt. // Acta Sci. Math. (Szeged) – 1963. – N24. – C. 34–59.

[10] Hamilton, H.B. Semilattices whose structure lattice is distributive / H.B. Hamilton. // Semigroup Forum – 1974 – N8 – C.245–253.

[11] Hamilton, H.B. Modularity and distributivity of the congruence lattice of a commutative separative semigroup / H.B. Hamilton. // Math. Japan. – 1982. – N27. – C.581–589.

[12] Jones, P. On the congruence lattices of regular semigroups / P. Jones. // J. Algebra – 1983. – N82. – C. 18–39.

[13] Jones, P. Congruence seimodular varieties of semigroups / P. Jones. // Lecture Notes Math., Proceedings Oberwolfach – 1988. – N1320.

[14] Jonsson, B. On the representation of lattices / B. Jónsson // Math. Scand. – 1953. – N1. – C. 193–206.

[15] Lampe, W.A. Congruence lattices of algebras of fixed similarity type, II / W. A. Lampe. // Pacific J. Math. – 1982. – N103. – C. 475–508.

[16] Lampe, W.A. Results and problems on congruence lattice representations / W. A. Lampe. // Algebra univers. – 2006. – N55. – C. 127–135.

[17] Lampe, W.A. A perspective on algebraic representations of lattices / W.A. Lampe.// Algebra univers. – 1994. – N31. – C. 337–364.

[18] Maj, M. Gruppi infiniti supersolubili con il reticulo dei sottogrouppi normali distributive / M. Maj. // Rend. Accad. Sci. Fis. Math. Napoli – 1984. – N51 – C. 15–20.

[19] Mitsch, H. Semigroups and their lattice of congruences / H. Mitsch. // Semigroup Forum – 1983. – N26. – C. 1–63.

[20] Mitsch, H. Semigroups and Their Lattice of Congruences / H. Mitsch.// Semigroup Forum – 1997. – N54. – C. 1–42.

[21] Ore, O. Structures and group theory / O. Ore. // Duke Math. J. – 1938. – N21. – C. 247–269.

[22] Pazderski, G. On groups for which the lattice of normal subgroups is distributive / G. Pazderski. // Beiträge Algebra Geom. – 1987. – N24. – C. 185–200.

[23] Pudlak, P. A new proof of the congruence lattice representation theorem / P. Pudlak. // Algebra Univers. – 1976. – N6. – C. 269-275.

[24] Repnirskiĭ, V. Intervals in subgroup lattices of countable locally

finite groups / V. Repnitskiĭ and J. Tůma. // Algebra univers. – 2008. – N59. – C. 49–71.

[25] Ružička, P. Distributive congruence lattices of congruence-permutable algebras / P. Ružička, J. Tůma and F. Wehrung. // Journal of Algebra – 2007. – N311. – C. 96–116.

[26] Schmidt, E.T. The ideal lattice of a distributive lattice with 0 is the congruence lattice of a lattice / E. T. Schmidt. // Acta Sci. Math. (Szeged) – 1981. – N43. – C. 153–168.

[27] Tamura, T. Finitness of congruence lattices of commutative semigroups / T. Tamura, T. Nordahl.// Semigroup Forum – 1972. – N4. – C. 73–77.

[28] Taylor, W. Some applications of the term condition / W. Taylor.// Algebra univers. – 1982. – N14. – C. 11–24.

[29] Tůma, J. Semilattice-valued measures / J. Tůma.// Contr.Gen.Alg. – 2007. – N18.

[30] Zhu, P. On Rees congruence semigroups / P. Zhu. // Northeast. Math. J. – 1992. – N8. – C. 185-191.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в журналах из списка ВАК

[31] Попович, А.Л. О представлении решеток решетками конгруэнций полугрупп / А. Л. Попович, В. Б. Репницкий. // Тр. ИММ УрО РАН – 2010. – N16. – No. 2. – С. 199–208.

[32] Попович, А.Л. Представление решеток решетками конгруэнций полугрупп без идемпотентов / А. Л. Попович. // Тр. ИММ УрО РАН. – 2012. – N18. – No. 3. – С. 208–217.

[33] Попович, А.Л. Представление дистрибутивных алгебраических пространственных решеток решетками конгруэнций полугрупп и группоидов / А.Л. Попович. // Сиб. электр. мат. изв. – 2015. – N12. – С. 144-157.

[34] Popovich, A.L. On the congruence lattices of nilsemigroups / A.L. Popovich, P.R. Jones. // Semigroup Forum. – 2017. – N95. – Issue 2. – C. 314-320.

Другие публикации

[35] Popovich, A.L. Finite nilsemigroups with modular congruence lattices / A.L. Popovich. // Ural Mathematical Journal – 2017. – Vol. 3. – No. 1. – C. 52-67.

Тезисы конференций

[36] Popovich, A.L. On the representation of lattices by congruence lattices of semigroups / A.L. Popovich // The 3rd Novi Sad Algebraic Conference: тезисы международной конференции, Нови Сад, Сербия, 17-21 августа, 2009. Futura, Petrovaradin.– 2009. – C. 65.

[37] Popovich, A.L. On the representation of lattices by congruence lattices of semigroups / A.L. Popovich // Мальцевские чтения: тезисы международной конференции, Новосибирск, 24-28 августа, 2009. Издательство НГУ. – 2009. – С. 180.

[38] Попович, А.Л. О представлении решеток решетками конгруэнций комбинаторных полугрупп / А.Л. Попович // Тезисы 42-й Всероссийской молодежной школы-конференции 30 января-6 февраля 2011 г. Екатеринбург, ИММ УрО РАН. – 2011. – С. 238

[39] Popovich, A.L. Representation of distributive spatial lattices by congruence lattices of groupoids / A.L. Popovich // Universal Algebra and Lattice Theory: тезисы международной конференции, 21-25 июня 2012, Сегед, Венгрия. Bolyai Institute, University of Szeged. – 2012. – C. 17.

[40] Popovich, A.L. On congruence lattice of nilsemigroups / A.L. Popovich // Алгебра и математическая логика: теория и при-

ложения: тезисы международной конференции, 2-6 июня 2014, Казань. – 2014. – С. 119.

[41] Попович, А.Л. Конечные полугруппы с модулярными решетками конгруэнций / А.Л. Попович. // Математика в современном мире : тезисы докладов международной конференции, посвященной 60-летию Института математики им. С.Л. Соболева, 14-19 августа, Новосибирск. – 2017. – С. 93.