

На правах рукописи

ПЛАКСИН Антон Романович

**АППРОКСИМАЦИЯ КОНФЛИКТНО-УПРАВЛЯЕМЫХ  
ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ**

01.01.02 — дифференциальные уравнения, динамические системы  
и оптимальное управление

А в т о р е ф е р а т

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2017

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и компьютерных наук Института естественных наук и математики Федерального государственного автономного образовательного учреждения высшего образования «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

Научный руководитель: Лукоянов Николай Юрьевич, доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН.

Официальные оппоненты: Зайцев Василий Александрович, доктор физико-математических наук, доцент, заместитель директора по научной работе в Институте математики, информационных технологий и физики Удмуртского государственного университета.

Максимов Владимир Петрович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры информационных систем и математических методов в экономике экономического факультета Пермского государственного национального исследовательского университета.

Ведущая организация: Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Математический институт им. В.А. Стеклова Российской академии наук

Защита состоится 21 марта 2018 г. в 15 часа на заседании диссертационного совета Д 004.006.01 на базе Федерального государственного бюджетного учреждения науки Института математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН: [http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation\\_councils/D\\_004.006.01/](http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.01/).

Автореферат разослан “\_\_\_\_\_” \_\_\_\_\_ 2018 г.

Ученый секретарь

диссертационного совета,

доктор физико-математических наук



Костоусова Елена Кирилловна

## ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Диссертация посвящена разработке и обоснованию аппроксимаций функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего и нейтрального типов системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Развивается подход, основанный на использовании таких аппроксимаций для решения задач конфликтного и гарантирующего управления в динамических системах, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями.

**Актуальность темы исследования и степень ее разработанности.** Возникновение задач конфликтного управления обусловлено исследованиями реальных процессов, в которых управление динамической системой происходит в условиях неконтролируемых помех со стороны окружающей среды или сознательного противодействия некоторого лица (противника). При этом, целью управления зачастую является достижение некоторого качества процесса, которое во многих случаях описывается подходящим показателем. Возникает задача о нахождении управления, которое обеспечивает показателю качества оптимальный гарантированный результат. Такие задачи формализуются в рамках теории дифференциальных игр, становление и развитие которой относится ко второй половине XX века и связано с именами Н.Н.Красовского, Л.С.Понтрягина, Б.Н.Пшеничного, R.Isaacs, W.H.Fleming, A.Friedman, и многих других ученых. В результате этих исследований была достаточно полно сформирована теория дифференциальных игр<sup>1,2,3</sup> для обыкновенных дифференциальных уравнений, а также, была инициирована, активно развивающаяся и по сей день, теория дифференциальных игр для динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями. Представленная диссертация направлена на дальнейшее развитие этого направления и касается динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего и нейтрального типов.

Исследования функционально-дифференциальных уравнений начались в 1950-х годах и были связаны с процессами в природе, для полного описания которых не хватало теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Так, например, часто встречаются процессы, в которых эволюция зависит не только от состояния в текущий момент времени, но и от прошлых состояний (истории). Такие процессы могут быть хорошо описаны при помощи систем функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа или, в другой терминологии, наследственными системами или системами с последействием. Если к тому же имеется дифференциальная зависимость эволюции от динамики процесса в прошлом, то такие процессы описываются при помощи функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа.

Изучению различных систем функционально-дифференциальных уравнений

---

<sup>1</sup>Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры*. М.: Наука, 1974.

<sup>2</sup>Красовский Н.Н. *Управление динамической системой*. М.: Наука, 1985.

<sup>3</sup>Krasovskii A.N., Krasovskii N.N. *Control under Lack of Information*. Berlin etc.: Birkhäuser, 1995.

были посвящены работы многих авторов, в частности, Н.Н.Красовского, А.Д.Мышкиса, R.Bellman, K.L.Cook, J.K.Hale. Эти исследования показали, что динамические системы, описываемые функционально-дифференциальными уравнениями обладают существенными особенностями и к ним неприменимы прямую результаты, полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений. С другой стороны, было показано, что при должном осмыслении поведение таких систем можно характеризовать на основе методов и конструкций, во многом аналогичных наработанным в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. В результате, для динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего и нейтрального типов были изучены задачи о стабилизации, управляемости и наблюдаемости таких систем, задачи оптимального управления и синтеза с выходом к соответствующим уравнениям Гамильтона-Якоби-Беллмана. Для функционально-дифференциальных систем запаздывающего типа были достаточно полно исследованы задачи конфликтного управления и теория дифференциальных игр. Заметим, однако, что теория дифференциальных игр для систем нейтрального типа на данный момент представляется еще не сформировавшейся и достаточно малоизученной областью математики. Таким образом, рассматриваемые в диссертации вопросы связанные с задачами конфликтного управления и теорией дифференциальных игр для динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа, в настоящий момент, являются открытыми и актуальными.

**Методология и методы исследования.** В основе полученных в диссертации результатов лежат аппроксимации функционально-дифференциальных уравнений системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Такие аппроксимации восходят к работам Н.Н. Красовского<sup>4</sup>, Ю.М.Репина<sup>5</sup>, А.Б. Куржанского<sup>6</sup>, где с их помощью были даны решения задач об устойчивости и об управлении в системах с запаздыванием. Позднее подобные аппроксимации, их обобщения и приложения к различным задачам развивались в работах многих авторов. В частности, в работах А.В. Кряжмского и В.И. Максимова<sup>7</sup> такие аппроксимации рассматривались в связи с задачами теории дифференциальных игр.

В диссертации развивается подход, инициированный работой Н.Н. Красовского и А.Н. Котельниковой<sup>8</sup>, где было предложено использовать аппроксимирующие системы обыкновенных дифференциальных уравнений в качестве моделирующих

---

<sup>4</sup>Красовский Н.Н. Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // *Прикл. математика и механика*, 1964. Т. 28, № 4. С. 716–724.

<sup>5</sup>Репин Ю.М. О приближенной замене систем с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // *Прикл. математика и механика*, 1965. Т. 29, № 2. С. 226–235.

<sup>6</sup>Куржанский А.Б. К аппроксимации линейных дифференциальных уравнений с запаздыванием // *Дифференц. уравнения*, 1967. Т. 3. С. 2094–2107.

<sup>7</sup>Кряжмский А.В., Максимов В.И. Аппроксимация линейных дифференциально-разностных игр // *Прикл. математика и механика*, 1978. Т. 42, № 2. С. 202–209.

<sup>8</sup>Красовский Н.Н., Котельникова А.Н. Стохастический поводыр для объекта с последствием в позиционной дифференциальной игре // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2011. Т. 17, № 2. С. 97–104.

систем-поводырей для решения задач конфликтного управления динамическими системами, описываемыми функционально-дифференциальными уравнениями с запаздыванием. В основе такого подхода лежит процедура взаимного отслеживания между движением исходной конфликтно-управляемой системы и движением моделирующей системы. Идейно процедура взаимного отслеживания осуществляется так, что нужная близость движений гарантируется при помощи полезного управления в исходной системе и определенной части управляющих воздействий моделирующей системы. Оставшаяся часть управляющих воздействий моделирующей системы может быть при этом использована для компенсации неконтролируемых помех и обеспечения требуемого качества всего процесса. Таким образом, процедура взаимного отслеживания позволяет опосредованно, через моделирующую систему-поводырь, применить результаты, полученные для обыкновенных дифференциальных уравнений, к решению задач конфликтного управления движением более сложных функционально-дифференциальных систем.

**Цели и задачи.** Диссертация направлена на развитие и обоснование вышеуказанного подхода для конфликтно-управляемых динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего и нейтрального типов, а также, на применение такого подхода для решения дифференциальных игр в системах нейтрального типа.

**Положения, выносимые на защиту.** Основные результаты диссертационной работы состоят в следующем:

1. Рассмотрена конфликтно-управляемая динамическая система, описываемая функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа. На основе этой системы, используя конечномерную аппроксимацию элемента запаздывания, построена моделирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений. Дано обоснование устойчивой к возмущениям процедуры взаимного отслеживания по принципу обратной связи между движением исходной конфликтно-управляемой системы и движением моделирующей системы.

2. Рассмотрены два класса конфликтно-управляемых динамических систем, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа. Первый класс описывается нелинейными функционально-дифференциальными уравнениями нейтрального типа в форме Дж. Хейла, а второй — линейными функционально-дифференциальными уравнениями при достаточно общих предположениях. Для каждого из рассматриваемых классов построена моделирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений, а также приведена и обоснована процедура взаимного отслеживания между движениями исходной конфликтно-управляемой системы и моделирующей системы.

3. Для конфликтно-управляемой динамической системы, движение которой описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла, и показателя качества, который оценивает историю движения, реализовавшуюся к терминальному моменту времени, рассмотре-

на дифференциальная игра в классе стратегий с поводырем. Построена аппроксимационная дифференциальная игра в классе чистых позиционных стратегий, в которой движение описывается соответствующей моделирующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а показатель качества является терминальным. Используя процедуру взаимного отслеживания между движениями исходной конфликтно-управляемой и моделирующей системами, доказано, что цена аппроксимирующей игры в пределе дает цену исходной игры, при этом оптимальные стратегии игроков в исходной игре могут быть построены на основе использования в качестве поводырей оптимальных движений аппроксимационной игры.

**Научная новизна.** Все полученные в работе результаты являются новыми.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Диссертация носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы при дальнейшем исследовании задач конфликтного управления и дифференциальных игр в динамических системах, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями запаздывающего и нейтрального типов, а также при разработке численных методов их решений.

**Степень достоверности и апробация результатов.** Степень достоверности результатов проведенных исследований подтверждена строгостью математических доказательств, приведенных с использованием методов теорий дифференциальных игр и оптимального управления, а также математического и функционального анализа. Результаты диссертации обсуждались на семинарах кафедры вычислительно математики и компьютерных наук Института естественных наук и математики Уральского федерального университета имени первого Президента России Б.Н. Ельцина и семинарах отдела динамических систем Института математики и механики имени Н.Н. Красовского УрО РАН, а также представлялись на научной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление» (Москва, 2012), на 43-ой и 44-ой Всероссийских школах-конференциях «Современные проблемы математики» (Екатеринбург, 2012 и 2013), на 6-ой Международной конференции «Колмогоровские чтения. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2013), на международной конференции «Динамика систем и процессы управления», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского (Екатеринбург, 2014), на «The 16-th IFAC Workshop on Control Applications of Optimization (CAO'2015)» (Germany, Garmisch-Partenkirchen, 2015), на XII Всероссийском совещании по проблемам управления (Москва, 2014), на втором международном семинаре «Теория управления и теория обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби», посвященному 70-летию академика А.И. Субботина (Екатеринбург, 2015) и на «The 20-th World Congress of the International Federation of Automatic Control» (France, Toulouse, 2017).

**Публикации.** Основной материал диссертации опубликован в 14 научных работах [1–14]. Из них 5 работ ([1–5]) опубликованы в изданиях, входящих в перечень ВАК, и 3 работы ([6–8]) — в изданиях, приравненных к изданиям из перечня ВАК.

При этом работы [3–5] проиндексированы в международной реферативной базе данных Web of Science, а работы [3–8] — в базе данных Scopus.

**Личный вклад автора.** В работах [1–3, 5, 7, 9, 13, 14] научному руководителю Н.Ю. Лукоянову принадлежат постановки задач и общие схемы их исследований, а соискателю А.Р. Плаксину точные формулировки и доказательства результатов. В работе [6] М.И. Гомоюнову принадлежат результаты всех разделов кроме раздела 5, а А.Р. Плаксину принадлежат результаты раздела 5. В работе [8] А.Р. Плаксину принадлежат результаты всех разделов кроме разделов 6 и 7, а М.И. Гомоюнову принадлежат результаты разделов 6 и 7. Все основные результаты диссертации получены автором самостоятельно. Из опубликованных в соавторстве работ в диссертацию включены только результаты автора.

**Структура и объем диссертации.** Диссертация состоит из введения, четырех глав, объединяющих 21 раздел, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 93 страницы, библиографический список включает 134 наименований, иллюстративный материал насчитывает 9 рисунков.

## СОДЕРЖАНИЕ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ РАБОТЫ

В **главе I** рассматривается конфликтно-управляемая динамическая система, которая описывается следующим функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа:

$$\dot{x}[t] = f(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V}, \quad (1)$$

с начальным условием

$$x_{t_0}[\cdot] = x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0. \quad (2)$$

Здесь  $t$  — переменная времени;  $t_0$  и  $\vartheta$  — начальный и терминальный моменты времени соответственно;  $x[t]$  — вектор состояния в момент времени  $t$ ;  $h > 0$  — константа запаздывания;  $x_t[\cdot]$  — история движения (элемент запаздывания) на отрезке времени  $[t-h, t]$ , причем  $x_t[\xi] = x[t+\xi]$ ,  $\xi \in [-h, 0]$ ;  $u[t]$  — текущее управляющее воздействие;  $v[t]$  — неконтролируемое воздействие помехи или противодействие;  $\mathbb{U}$  и  $\mathbb{V}$  — компакты в конечномерных пространствах;  $\mathbb{X}^0$  — компакт в пространстве  $C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ . Для краткости примем обозначение  $C = C([-h, 0], \mathbb{R}^n)$ . Равномерную норму пространства  $C$  обозначим через  $\|\cdot\|_C$ .

Полагаем, что для отображения  $f: [t_0, \vartheta] \times C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$  выполнены условия

(f.1) При всех  $t \in [t_0, \vartheta]$  отображение  $C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \ni (w[\cdot], u, v) \mapsto f = f(t, w[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n$  непрерывно. Для любых  $(w[\cdot], u, v) \in C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V}$  отображение  $[t_0, \vartheta] \ni t \mapsto f = f(t, w[\cdot], u, v) \in \mathbb{R}^n$  измеримо.

(f.2) Существует такая константа  $\alpha_f > 0$ , что для любых  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $w[\cdot] \in C$ ,  $u \in \mathbb{U}$  и  $v \in \mathbb{V}$  имеет место оценка

$$\|f(t, w[\cdot], u, v)\| \leq \alpha_f(1 + \|w[\cdot]\|_C).$$

(f.3) Для любого компакта  $D \subset C$  существует такое  $\lambda_f = \lambda_f(D) > 0$ , что для любых  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $u \in \mathbb{U}$ ,  $v \in \mathbb{V}$  и  $w'[\cdot], w''[\cdot] \in D$  справедливо неравенство

$$\|f(t, w'[\cdot], u, v) - f(t, w''[\cdot], u, v)\| \leq \lambda_f \|w'[\cdot] - w''[\cdot]\|_C.$$

Допустимыми реализациями воздействий управления  $u[t]$  и помехи  $v[t]$  на промежутке  $[t_0, \vartheta]$  считаем измеримые функции  $u[\cdot]: [t_0, \vartheta] \mapsto \mathbb{U}$  и  $v[\cdot]: [t_0, \vartheta] \mapsto \mathbb{V}$ .

При указанных предположениях для любых допустимых реализаций управления  $u[\cdot]$  и помехи  $v[\cdot]$ , и любой начальной функции  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$  существует единственное решение  $x[\cdot]$  задачи (1), (2) — непрерывная функция  $x[\cdot]: [t_0 - h, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , которая удовлетворяет условию (2), является абсолютно непрерывной на  $[t_0, \vartheta]$  и, вместе с  $u[t]$  и  $v[t]$ , почти всюду удовлетворяет уравнению (1).

Пусть  $m \in \mathbb{N}$ . На основе исходной конфликтно-управляемой системы (1), (2) строится моделирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}^{[0]}[t] = f(t, S(Y[t])[\cdot], p[t], q[t]) \\ \dot{y}^{[i]}[t] = (y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t])/\Delta h, \quad i = \overline{1, m}, \end{cases} \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (3)$$

$$y^{[i]}[t] \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0, m}, \quad p[t] \in \mathbb{U}, \quad q[t] \in \mathbb{V},$$

с начальным условием

$$y^{[i]}[t_0] = x^0[-i\Delta h], \quad i = \overline{0, m}, \quad x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0. \quad (4)$$

Здесь  $Y = (y^{[0]} = (y_1^{[0]}, \dots, y_n^{[0]}), y^{[1]} = (y_1^{[1]}, \dots, y_n^{[1]}), \dots, y^{[m]} = (y_1^{[m]}, \dots, y_n^{[m]}))$  — фазовый вектор системы (3) из пространства  $\mathbb{R}^{(m+1)n}$ ;  $S: \mathbb{R}^{(m+1)n} \mapsto C$  — оператор, действующий по правилу

$$S(Y)[\xi] = (y^{[i]} - y^{[i+1]})(\xi/\Delta h + i) + y^{[i]}, \quad \xi \in [-(i+1)\Delta h, -i\Delta h], \quad i = \overline{0, m-1}. \quad (5)$$

Фактически оператор  $S$  вектору  $Y$  ставит в соответствие линейный сплайн с равноотстоящими узлами  $-i\Delta h$  и значениями в узлах равными  $y^{[i]}$ .

Положим  $y^{[0]}[t] = x^0[t - t_0]$ , при  $t \in [t_0 - h, t_0]$ . Для моделирующей системы (3), (4) доказываем существование такого компакта  $E_y \subset C([t_0 - h, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ , что при любых  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$  и допустимых реализациях  $p[\cdot]$  и  $q[\cdot]$  справедливо включение  $y^{[0]}[\cdot] \in E_y$ . Используя этот факт доказываются следующие теоремы:

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия (f.1)–(f.3). Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $M = M(\varepsilon) > 0$ , что для всех натуральных  $m \geq M$  и функций  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$ , при любых допустимых реализациях  $p[\cdot]$  и  $q[\cdot]$  для решения  $Y[\cdot]$  задачи (3), (4) имеет место оценка

$$\|y_t^{[0]}[\cdot] - S(Y[t])[\cdot]\|_C \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

**Теорема 4.1.** Пусть выполнены условия (f.1)–(f.3). Для любого  $\varepsilon > 0$  найдется такое  $M = M(\varepsilon) > 0$ , что для всех  $m \geq M$  и  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$  при условии  $p[\cdot] = u[\cdot]$ ,  $q[\cdot] = v[\cdot]$ , для решений  $x[\cdot]$  задачи (1), (2) и  $Y[\cdot]$  задачи (3), (4) справедлива оценка

$$\|x[t] - y^{[0]}[t]\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$



Отметим, что теорема 4.1 может быть использована для сведения задач конфликтного управления системами функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа вида (1), (2) к задачам конфликтного управления системами обыкновенных дифференциальных уравнений вида (3), (4), но только в случае, если воздействия помехи  $v[t]$  известны управляющему лицу, распоряжающемуся воздействиями  $u[t]$ ,  $p[t]$  и  $q[t]$ . Кроме того, используя эту теорему можно осуществлять аналогичное сведение различных задач, в постановке которых система (1) не зависит от воздействий помехи  $v[t]$ . К такого рода задачам относятся, например, задачи оптимального управления, управляемости и устойчивости. Если же рассматривать задачу конфликтного управления в общем случае (т.е. когда воздействия помехи  $v[t]$  неизвестны управляющему лицу), то для ее сведения к задаче конфликтного управления системой обыкновенных дифференциальных уравнений требуется использовать процедуру взаимного отслеживания.

Далее вместо условия (f.1) потребуем выполнения условия

(f.4) Отображение  $f$  непрерывно.

Кроме того, считаем, что для отображения  $f$  выполняется условия седловой точки в маленькой игре<sup>2</sup> или, в другой терминологии, условия Айзекса:

(f.5) Для любых  $t \in [t_0, \vartheta]$ ,  $w[\cdot] \in C$  и  $s \in \mathbb{R}^n$

$$\min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t, w[\cdot], u, v), s \rangle = \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t, w[\cdot], u, v), s \rangle.$$

Опишем процедуру взаимного отслеживания между движениями исходной конфликтно-управляемой системы (1), (2) и моделирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений (3), (4). Будем предполагать, что вместо точных значений  $x[t]$  и  $Y[t] = (y^{[0]}[t], y^{[1]}[t], \dots, y^{[m]}[t])$  известны лишь их приближенные значения  $x_*[t]$  и  $Y_*[t] = (y_*^{[0]}[t], y_*^{[1]}[t], \dots, y_*^{[m]}[t])$  такие, что

$$\|x[t] - x_*[t]\| \leq \eta, \quad \|y^{[i]}[t] - y_*^{[i]}[t]\| \leq \eta, \quad i = \overline{0, m}, \quad t \in [t_0, \vartheta],$$

где  $\eta > 0$  — заданная погрешность. Обозначим

$$s_*[t] = x_*[t] - y_*^{[0]}[t], \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

Реализации  $u[\cdot]$  и  $q[\cdot]$  будем формировать по принципу обратной связи как кусочно-постоянные функции по шагам разбиения

$$\Delta_\delta = \{t_j : 0 < t_{j+1} - t_j < \delta, j = \overline{0, J-1}, t_J = \vartheta\}, \quad (6)$$

полагая

$$\begin{aligned} u[t] &= u_j \in \arg \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, x_{*t_j}[\cdot], u, v), s_*[t_j] \rangle, \\ q[t] &= q_j \in \arg \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t_j, S(Y_*[t_j])[\cdot], u, v), s_*[t_j] \rangle, \quad t \in [t_{j-1}, t_j), \quad j = \overline{1, J}. \end{aligned} \quad (7)$$

**Теорема 5.1.** Пусть выполнены условия (f.2)–(f.5). Для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $M = M(\varepsilon) > 0$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  и  $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ , что для всех натуральных  $t \geq M$  и функций  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$  при любых допустимых реализациях  $p[\cdot]$ ,  $v[\cdot]$  и реализациях  $u[\cdot]$ ,  $q[\cdot]$ , формируемых по шагам разбиения (6) согласно правилу (7), для соответствующих решения  $x[\cdot]$  задачи (1), (2) и решения  $Y[\cdot]$  задачи (3), (4) будет справедлива оценка

$$\|x[t] - y^{[0]}[t]\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

**Замечание 5.1.** В случае невыполнения условия (f.5), теорему 5.1 можно доказать если в процедуре отслеживания (7) реализацию  $q[\cdot]$  формировать согласно следующему правилу:

$$q[t] \in \arg \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, S(Y_*(t_j))[\cdot], p[t], v), s_*(t_j) \rangle, \quad t \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = \overline{0, J-1}.$$

**Глава II** идейно следуют той же схеме изложения, что и глава I. В ней рассматривается конфликтно-управляемая динамическая система, описываемая функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла

$$\frac{d}{dt} \left( x[t] - g(t, x_t[\cdot]) \right) = f(t, x_t[\cdot], u[t], v[t]), \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (8)$$

$$x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V},$$

с начальным условием

$$x_{t_0}[\cdot] = x^0[\cdot] \in \widehat{\mathbb{X}}^0. \quad (9)$$

Здесь  $\widehat{\mathbb{X}}^0$  — множество функций  $x^0[\cdot] \in C$ , для которых справедливо

$$\|x^0[\cdot]\|_C \leq \widehat{R}_0, \quad \|x^0[\xi'] - x^0[\xi'']\| \leq \widehat{R}_0 |\xi' - \xi''|, \quad \xi', \xi'' \in [-h, 0],$$

где  $\widehat{R}_0 > 0$  — зафиксированная константа.

Полагаем, что отображение  $f: [t_0, \vartheta] \times C \times \mathbb{U} \times \mathbb{V} \mapsto \mathbb{R}^n$  удовлетворяет условиям (f.1)–(f.3), а отображение  $g: [t_0, \vartheta] \times C \mapsto \mathbb{R}^n$  — следующим условиям:

(g.1) Существуют такие числа  $\lambda_g > 0$  и  $0 < h_1 < h_2 < \dots < h_k = h$ , что при всех  $t \in [t_0, \vartheta]$  и  $w'[\cdot], w''[\cdot] \in C$  имеет место оценка

$$\|g(t, w'[\cdot]) - g(t, w''[\cdot])\| \leq \lambda_g \left( \int_{-h}^0 \|w'[\xi] - w''[\xi]\| d\xi + \sum_{i=1}^k \|w'[-h_i] - w''[-h_i]\| \right).$$

(g.2) Найдется такое число  $\alpha_g > 0$ , что для любых  $t', t'' \in [t_0, \vartheta]$  и  $w[\cdot] \in C$  справедливо неравенство

$$\|g(t', w[\cdot]) - g(t'', w[\cdot])\| \leq \alpha_g (1 + \|w[\cdot]\|_C) |t' - t''|.$$

Тогда для любых допустимых реализаций  $u[\cdot]$  и  $v[\cdot]$ , и любой функции  $x^0[\cdot] \in \widehat{\mathbb{X}}^0$ , существует единственное решение  $x[\cdot]$  задачи (8), (9) — абсолютно непрерывная на  $[t_0 - h, \vartheta]$  функция, которая удовлетворяет начальному условию (9) и, вместе с  $u[t]$  и  $v[t]$ , почти всюду удовлетворяет уравнению (8).

Пусть  $m \in \mathbb{N}$  и  $\Delta h = h/m$ . На основе конфликтно-управляемой системы (8) строится моделирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{y}^{[0]}[t] = f(t, S_*(Y[t])[\cdot], p[t], q[t]), \\ \dot{y}^{[1]}[t] = (y^{[0]}[t] + g(t, S_*(Y[t])[\cdot]) - y^{[1]}[t])/\Delta h, & t \in [t_0, \vartheta], \\ \dot{y}^{[i]}[t] = (y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t])/\Delta h, & i = \overline{2, m}, \end{cases} \quad (10)$$

$$y^{[i]}[t] \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0, m}, \quad p[t] \in \mathbb{U}, \quad q[t] \in \mathbb{V},$$

с начальным условием

$$y^{[i]}[t_0] = y_0^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0, m}, \quad Y^0 = (y_0^{[0]}, y_0^{[1]}, \dots, y_0^{[m]}) \in \mathbb{R}^{(m+1)n}. \quad (11)$$

Здесь  $S_*: \mathbb{R}^{(m+1)n} \mapsto C$  — оператор сплайна, определяемый по оператору  $S$  из (5) согласно правилу

$$S_*(Y)[\xi] = S(Y)[\xi], \quad \xi \in [-h, \Delta h], \quad S_*(Y)[\xi] = y^{[1]}, \quad \xi \in [-\Delta h, 0]. \quad (12)$$

Пусть  $\widehat{R}_* > 0$ . Полагаем, что начальная функция  $x^0[\cdot]$  из (9) и начальный вектор  $Y^0$  из (11) связаны неравенствами

$$\|y_0^{[0]} - x^0[0] + g(t_0, x^0[\cdot])\| \leq \widehat{R}_* \Delta h, \quad \|y_0^{[i]} - x^0[-i\Delta h]\| \leq \widehat{R}_* \Delta h, \quad i = \overline{1, m}. \quad (13)$$

По решению  $Y[\cdot]$  определим функцию  $y[\cdot] \in C[t_0 - h, \vartheta]$  по правилу

$$y[t] = \begin{cases} y^{[0]}[t] + g(t, S_*(Y[t])[\cdot]), & \text{при } t \in [t_0, \vartheta], \\ (y[t_0] - y_0^{[1]})(t - t_0)/\Delta h + y[t_0], & \text{при } t \in [t_0 - \Delta h, t_0), \\ S_*(Y^0)[t - t_0], & \text{при } t \in [t_0 - h, t_0 - \Delta h). \end{cases} \quad (14)$$

Для моделирующей системы (10), (11) доказывается существование такого компакта  $\widehat{E}_y \subset C([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ , что для любых  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$  и  $Y^0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ , удовлетворяющих (13), при любых допустимых реализациях  $p[\cdot]$  и  $q[\cdot]$  для решения  $Y[\cdot]$  задачи (10), (11) будут справедливы включения

$$y[\cdot] \in \widehat{E}_y \quad y^{[i]}[\cdot] \in \widehat{E}_y, \quad i = \overline{0, m},$$

а также доказываются следующие две теоремы:

**Теорема 8.1.** Пусть выполнены условия (f.1)–(f.3), (g.1), (g.2). Существует такое  $K_1 > 0$ , что, каковы бы ни были  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$  и  $Y^0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ , удовлетворяющие (13), при любых допустимых реализациях  $p[\cdot]$  и  $q[\cdot]$ , для решения  $Y[\cdot]$  задачи (10), (11) и соответствующей ему функции  $y[\cdot]$ , определенной в (14), справедливо неравенство

$$\|y_t[\cdot] - S_*(Y[t])[\cdot]\|_C \leq K_1 m^{-1/2}, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

**Теорема 9.1.** Пусть выполнены условия (f.1)–(f.3), (g.1), (g.2). Тогда найдется такое  $K > 0$ , что каковы бы ни были  $m \in \mathbb{N}$ ,  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$  и  $Y^0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ , удовлетворяющие (13), при условии  $p[\cdot] = u[\cdot]$ ,  $q[\cdot] = v[\cdot]$ , для решения  $x[\cdot]$  задачи (8), (9) и функции  $y[\cdot]$ , построенной по решению  $Y[\cdot]$  задачи (10), (11) согласно (14), будет справедлива оценка

$$\|x[t] - y[t]\| \leq Km^{-1/4}, \quad t \in [t_0 - h, \vartheta].$$

Предлагается следующая процедура взаимного отслеживания между конфликтно-управляемой системой (8), (9) и моделирующей системой (10), (11). Реализации  $u[\cdot]$  и  $q[\cdot]$  будем формировать по принципу обратной связи как кусочно-постоянные функции по шагам разбиения  $\Delta_\delta$  (6) полагая

$$\begin{aligned} u[t] &= \hat{u}_j \in \arg \min_{u \in \mathbb{U}} \max_{v \in \mathbb{V}} \langle f(t_j, x_{t_j}[\cdot], u, v), \hat{r}[t_j] \rangle, \\ q[t] &= \hat{q}_j \in \arg \max_{v \in \mathbb{V}} \min_{u \in \mathbb{U}} \langle f(t_j, S_*(Y[t_j])[\cdot], u, v), \hat{r}[t_j] \rangle, \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = \overline{1, J}, \end{aligned} \quad (15)$$

где

$$\hat{r}[t] = \left( x[t] - g(t, x_t[\cdot]) \right) - \left( y[t] - g(t, S_*(Y[t])[\cdot]) \right), \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

**Теорема 10.1.** Пусть выполнены условия (f.2)–(f.5), (g.1), (g.2). Для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $M = M(\varepsilon) \geq M_0$  и  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ , что каковы бы ни были натуральное  $m \geq M$ , функция  $x^0[\cdot] \in \mathbb{X}^0$  и вектор  $Y^0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$ , удовлетворяющие (13), при любых допустимых реализациях  $p[\cdot]$ ,  $v[\cdot]$  и реализациях  $u[\cdot]$ ,  $q[\cdot]$ , формируемых по шагам разбиения (6) по правилу (15), для решения  $x[\cdot]$  задачи (8), (9) и функции  $y[\cdot]$ , построенной по решению  $Y[\cdot]$  задачи (10), (11) согласно (14), справедлива оценка

$$\|x[t] - y[t]\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

В главе III рассматривается конфликтно-управляемая динамическая система, которая описываемая следующим линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа:

$$\dot{x}[t] - \mathbf{L}_1(t, \dot{x}_t[\cdot]) = \mathbf{L}_2(t, x_t[\cdot]) + P[t]u[t] + Q[t]v[t] + l[t], \quad t \in [t_0, \vartheta], \quad (16)$$

$$x[t] \in \mathbb{R}^n, \quad u[t] \in \mathbb{U}, \quad v[t] \in \mathbb{V},$$

с начальным условием

$$x[t_0] = \theta \in \mathbb{R}^n, \quad x[t_0 + \xi] = \phi[\xi], \quad \dot{x}[t_0 + \xi] = \psi[\xi], \quad \xi \in [-h, 0), \quad (17)$$

$$(\theta, \phi[\cdot], \psi[\cdot]) \in \Theta.$$

Здесь  $\mathbf{L}_j: [t_0, \vartheta] \times C \mapsto \mathbb{R}^n$  — линейные операторы вида

$$\mathbf{L}_j(t, w[\cdot]) = \sum_{i=0}^k A_j^{(i)}[t]w[-h_i] + \int_{-h}^0 B_j[t, \xi]w[\xi] d\xi, \quad j = 1, 2,$$

где  $0 = h_0 < h_1 < \dots < h_k = h$ ; для каждого  $j = 1, 2$  и  $i = \overline{0, k}$  матрицы-функции  $A_j^{(i)}[\cdot]: [t_0, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  — измеримы, а  $B_j[\cdot, \cdot]: [t_0, \vartheta] \times [-h, 0] \mapsto \mathbb{R}^{n \times n}$  — непрерывны по первому аргументу и измеримы по второму, причем при некотором  $h_* \in (0, h_1)$  справедливы равенства

$$A_1^{(0)}[t] = 0, \quad B_1[t, \xi] = 0, \quad \xi \in [-h_*, 0], \quad t \in [t_0, \vartheta];$$

матрицы-функции  $P[\cdot]: [t_0, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^{n \times n_1}$  и  $Q[\cdot]: [t_0, \vartheta] \mapsto \mathbb{R}^{n \times n_2}$  — непрерывны; функция  $l[\cdot] \in L([t_0, \vartheta], \mathbb{R}^n)$ ; множество  $\Theta$  состоит из троек  $(\theta, \phi[\cdot], \psi[\cdot]) \in \mathbb{R}^n \times L([-h, 0], \mathbb{R}^n) \times L([-h, 0], \mathbb{R}^n)$  для которых справедливо

$$\|\theta\| \leq \tilde{R}_0, \quad \|\phi[\xi]\| \leq \tilde{R}_0, \quad \|\psi[\xi]\| \leq \tilde{R}_0 \quad \text{при п.в. } \xi \in [-h, 0),$$

где  $\tilde{R}_0 > 0$  — зафиксированная константа.

Предполагаем выполненными следующие условия:

(L.1) Найдется такое  $\lambda_L > 0$ , что для всех  $j = 1, 2$  и  $i = \overline{0, k}$  имеют место оценки

$$\|A_j^{(i)}[t]\| \leq \lambda_L \quad \|B_j[t, \xi]\| \leq \lambda_L \quad \text{при п.в. } \xi \in [-h, 0] \text{ и п.в. } t \in [t_0, \vartheta].$$

(L.2) Существует такое число  $\lambda_0 \in (0, 1)$ , что справедливо неравенство

$$\sum_{i=1}^k \|A_1^{(i)}[t]\| + h \operatorname{esssup}_{\xi \in [-h, -h_*]} \|B_1[t, \xi]\| \leq \lambda_0 \quad \text{при п.в. } t \in [t_0, \vartheta].$$

(l) Найдется такое  $\alpha_l > 0$ , что справедливо  $\|l[t]\| \leq \alpha_l$  при почти всех  $t \in [t_0, \vartheta]$ .

Тогда при любых допустимых реализациях  $u[\cdot]$  и  $v[\cdot]$ , для любых начальных данных  $(\theta, \phi[\cdot], \psi[\cdot]) \in \Theta$  существует единственное решение  $x[\cdot]$  задачи (16), (17) — липшицева функция  $x[\cdot]: [t_0, \vartheta] \rightarrow \mathbb{R}^n$ , удовлетворяющая равенству  $x[t_0] = \theta$  и почти всюду уравнению (16), в котором в согласии с (17) значения  $x_t[\xi]$  заменяется на  $\phi[\xi]$ , а значения  $\dot{x}_t[\xi]$  заменяются на  $\psi[\xi]$  при  $t + \xi < t_0$ .

Заметим, что задача (16), (17) обладает рядом особенностей. Первой особенностью является измеримость матриц-функций, стоящих перед запаздываниями производной решения. Из-за этого условия уравнение (16) может не содержаться в классе уравнений нейтрального типа в форме Дж. Хейла (8). Второй особенностью являются то, что начальные условия для решения системы и производной решения задаются двумя независимыми измеримыми функциями. Зачастую такая постановка называется краевой задачей для систем нейтрального типа<sup>9</sup>.

Пусть  $m \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta h = h/m$ . На основе конфликтно-управляемой системы (16) строится моделирующая система обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{y}^{[0]}[t] = \mathbf{L}_1(t, S_*(Z[t])(\cdot)) + \mathbf{L}_2(t, S_*(Y[t])(\cdot)) + P[t]p[t] + Q[t]q[t] + l[t], \\ \dot{y}^{[i]}[t] = (y^{[i-1]}[t] - y^{[i]}[t])/\Delta h, \quad i = \overline{1, m}, \\ \dot{z}^{[i]}[t] = (z^{[i-1]}[t] - z^{[i]}[t])/\Delta h, \quad i = \overline{1, m}. \end{cases}$$

<sup>9</sup> Азбелев Н.В., Рахматуллина Л.Ф. Функционально-дифференциальные уравнения // Дифференц. уравнения, 1978. Т. 14, № 5. С. 771–797.

$$t \in [t_0, \vartheta], \quad y^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0, m}, \quad z^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, m}, \quad p[t] \in \mathbb{U}, \quad q[t] \in \mathbb{V}. \quad (18)$$

Здесь для удобства используется обозначение

$$z^{[0]}[t] = \mathbf{L}_1(t, S_*(Z[t])(\cdot)) + \mathbf{L}_2(t, S_*(Y[t])(\cdot)) + P[t]p[t] + Q[t]q[t] + l[t];$$

$Z[t] = (z^{[0]}[t], z^{[1]}[t], \dots, z^{[m]}[t])$  — вектор из пространства  $\mathbb{R}^{(m+1)n}$ ;  $S_*: \mathbb{R}^{(m+1)n} \mapsto \mathbb{C}$  — оператор сплайна, определенный в (12).

Учитывая обозначение для  $z^{[0]}[t]$  и то, что значения сплайна  $S_*(Z[t])(\cdot)$  не зависят от значений  $z^{[0]}$ , на систему (18) можно смотреть как на систему обыкновенных дифференциальных уравнений с фазовым вектором

$$\tilde{Y}[t] = (y^{[0]}[t], y^{[1]}[t], \dots, y^{[m]}[t], z^{[1]}[t], z^{[2]}[t], \dots, z^{[m]}[t]) \in \mathbb{R}^{(2m+1)n}.$$

Начальное условие системы определяется следующим образом:

$$y^{[i]}[t_0] = y_0^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{0, m}, \quad z^{[i]}[t_0] = z_0^{[i]} \in \mathbb{R}^n, \quad i = \overline{1, m}, \quad (19)$$

$$\tilde{Y}^0 = (y_0^{[0]}, y_0^{[1]}, \dots, y_0^{[m]}, z_0^{[1]}, z_0^{[2]}, \dots, z_0^{[m]}) \in \mathbb{R}^{(2m+1)n}.$$

По тройке  $(\theta, \phi[\cdot], \psi[\cdot]) \in \Theta$  определим вектора

$$\phi_i = \frac{1}{\Delta h} \int_{-i\Delta h}^{-(i-1)\Delta h} \phi[\xi] d\xi, \quad \psi_i = \frac{1}{\Delta h} \int_{-i\Delta \tau}^{-(i-1)\Delta \tau} \psi[\xi] d\xi, \quad i = \overline{1, m}.$$

Доопределим функции  $y^{[0]}[\cdot]$  и  $z^{[0]}[\cdot]$  следующим образом:

$$y^{[0]}[t_0 + \xi] = \phi[\xi] + y_0^{[0]} - \phi_i, \quad z^{[0]}[t_0 + \xi] = \psi[\xi] + z_0^{[0]} - \psi_i,$$

$$\xi \in [-i\Delta h, -(i-1)\Delta h), \quad i = \overline{1, m}.$$

Зафиксируем число  $\tilde{\eta}^* > 0$ . Полагаем, что вектор  $\tilde{Y}^0 \in \mathbb{R}^{(2m+1)n}$  и начальные данные  $(\theta, \phi[\cdot], \psi[\cdot]) \in \Theta$  связаны неравенствами

$$\|y_0^{[0]} - \theta\| \leq \tilde{\eta}, \quad \|y_0^{[i]} - \phi_i\| \leq \tilde{\eta}, \quad \|z_0^{[i]} - \psi_i\| \leq \tilde{\eta}, \quad i = \overline{1, m}, \quad \tilde{\eta} \in (0, \tilde{\eta}^*]. \quad (20)$$

Далее доказывается существование такого  $\tilde{R}_y > 0$ , что каковы бы ни были начальные данные  $(\theta, \phi[\cdot], \psi[\cdot]) \in \Theta$ , числа  $m \in \mathbb{N}$  и  $\tilde{\eta} \in (0, \tilde{\eta}^*]$ , вектор  $\tilde{Y}^0 \in \mathbb{R}^{(2m+1)n}$ , удовлетворяющий условию (20), и допустимые реализации  $p[\cdot]$  и  $q[\cdot]$  для функций  $y^{[0]}[\cdot]$  и  $z^{[0]}[\cdot]$  справедливы оценки

$$\|y^{[0]}[t]\| \leq \tilde{R}_y, \quad \|z^{[0]}[t]\| \leq \tilde{R}_y, \quad t \in [t_0 - h, \vartheta].$$

После это доказывается

**Теорема 14.1.** Пусть выполнены условия (L.1), (L.2) и (l). Пусть  $\tilde{R}_b > 0$ . Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  существуют такое  $M = M(\varepsilon) > 0$ , что, каковы бы ни были начальные данные  $(\alpha, \phi[\cdot], \psi[\cdot]) \in \Theta$ , натуральное  $m \geq M$ , вектор  $\tilde{Y}^0 \in \mathbb{R}^{(2m+1)n}$ , удовлетворяющий условию (20), и допустимые реализации  $p[\cdot]$  и  $q[\cdot]$  для решения  $\tilde{Y}[\cdot]$  задачи (19), (18) и любой функции  $b[\cdot] \in C[t_0, \vartheta]$ , удовлетворяющей оценкам

$$\|b[t]\| \leq \tilde{R}_b, \quad \|b[t'] - b[t'']\| \leq \tilde{R}_b |t' - t''|, \quad t, t', t'' \in [t_0, \vartheta],$$

при всех  $t \in [t_0, \vartheta]$  будут справедливы оценки

$$\left| \int_{t_0}^t \langle \mathbf{L}_1(\tau, z_\tau^{[0]}[\cdot] - S_*(Z[\tau])[\cdot]), b[\tau] \rangle d\tau \right| \leq \varepsilon,$$

$$\left| \int_{t_0}^t \langle \mathbf{L}_2(\tau, y_\tau^{[0]}[\cdot] - S_*(Y[\tau])[\cdot]), b[\tau] \rangle d\tau \right| \leq \varepsilon.$$

Предлагается следующая процедура взаимного отслеживания между конфликтно-управляемой системой (16), (17) и моделирующей системой (18), (19). Реализации  $u[\cdot]$  и  $q[\cdot]$  будем формировать по принципу обратной связи как кусочно-постоянные функции по шагам разбиения  $\Delta_\delta$  (6) отрезка  $[t_0, \vartheta]$ , полагая

$$\begin{aligned} u[t] &= \tilde{u}_j \in \underset{u \in \mathbb{U}}{\operatorname{argmin}} \langle P[t_j]u, \tilde{r}[t_j] \rangle, \\ q[t] &= \tilde{q}_j \in \underset{v \in \mathbb{V}}{\operatorname{argmax}} \langle Q[t_j]v, \tilde{r}[t_j] \rangle, \end{aligned} \quad t \in [t_{j-1}, t_j], \quad j = \overline{1, J}, \quad (21)$$

где

$$\tilde{r}[t] = x[t] - y^{[0]}[t] - \int_{t_0}^t \mathbf{L}_1(\tau, \dot{x}_\tau[\cdot] - z_\tau^{[0]}[\cdot]) d\tau - \int_{t_0}^t \mathbf{L}_2(\tau, x_\tau[\cdot] - y_\tau^{[0]}[\cdot]) d\tau.$$

**Теорема 15.1.** Пусть выполнены условия (L.1), (L.2) и (l). Для любого  $\varepsilon > 0$  найдутся такие  $\tilde{\eta} = \tilde{\eta}(\varepsilon) > 0$ ,  $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$  и  $M = M(\varepsilon) > 0$ , что для любых начальных данных  $(\alpha, \varphi[\cdot], \psi[\cdot]) \in \Theta$ , вектора  $\tilde{Y}^0 \in \mathbb{R}^{(2m+1)n}$ , удовлетворяющего (20), и всех натуральных  $m \geq M$ , при любых допустимых реализациях  $p[\cdot]$ ,  $v[\cdot]$ , при реализациях  $u[\cdot]$ ,  $q[\cdot]$ , формируемых по шагам разбиения  $\Delta_\delta$  (6) согласно правилу (21) для решений  $x[\cdot]$  задачи (16), (17) и  $Y[\cdot]$  задачи (18), (19) имеет место оценка

$$\|x[t] - y^{[0]}[t]\| \leq \varepsilon, \quad t \in [t_0, \vartheta].$$

В главе IV рассматривается дифференциальная игра, в которой движение конфликтно-управляемой динамической системы описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла (8) с начальным условием (9), а показатель качества процесса управления имеет вид

$$\gamma = \sigma(x_\vartheta[\cdot]), \quad (22)$$

где  $\sigma: C \mapsto \mathbb{R}$  — непрерывное отображение.

В этой игре  $u[t]$  и  $v[t]$  — управляющие воздействия первого и, соответственно, второго игроков. Цель первого игрока — доставить показателю (22) как можно меньшее значение, а цель второго — противоположна.

Формализация этой игры проводится в классе стратегий с поводырем согласно позиционному подходу<sup>1,2</sup>. Даются определения оптимальных стратегий управления с поводырем  $U^\circ(\cdot)$ ,  $V^\circ(\cdot)$  и величин оптимального гарантированного результата  $\Gamma^{u^\circ}(x^0[\cdot])$ ,  $\Gamma^{v^\circ}(x^0[\cdot])$ ,  $x^0[\cdot] \in \widehat{\mathbb{X}}^0$ , для первого и, соответственно, второго игроков.

Для  $m \in \mathbb{N}$ ,  $m \geq 2$  рассматривается аппроксимационная дифференциальная игра, в которой конфликтно-управляемая динамическая система описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений (10) с начальным условием (11),  $p[t]$  и  $q[t]$  — управляющие воздействия первого и, соответственно, второго игроков, а показатель качества процесса управления является терминальным:

$$\gamma_m = \sigma(S_*(Y[\vartheta])(\cdot)). \quad (23)$$

Формализация этой аппроксимационной игры (10), (11), (23) проводится в классе чистых позиционных стратегий<sup>2</sup>. Известно, что эта дифференциальная игра имеет цену  $\Gamma_m^\circ(Y^0)$ ,  $Y^0 \in \mathbb{R}^{(m+1)n}$  и седловую точку из пары оптимальных стратегий  $\{p_m^\circ(\cdot), q_m^\circ(\cdot)\}$ . Определим величину

$$\widehat{\Gamma}_m(x^0[\cdot]) = \Gamma_m^\circ(Y^0), \quad x^0[\cdot] \in \widehat{\mathbb{X}}^0,$$

где

$$Y^0 = (x^0[0] + g(t_0, x^0[\cdot]), x^0[-\Delta h], x^0[-2\Delta h], x^0[-3\Delta h] \dots, x^0[-h]) \in \mathbb{R}^{(m+1)n}.$$

Далее, в диссертации предложена стратегия управления с поводырем для первого игрока, согласно которой, в качестве поводыря используется движение моделирующей системы (10), (11), управления  $u[t]$  в исходной системе и  $q[t]$  в моделирующей системе реализуются согласно процедуре взаимного отслеживания (15), а управление  $p[t]$  в моделирующей системе выбирается в согласии с оптимальной стратегией  $p_m^\circ(\cdot)$ . Также приведена симметричная стратегия управления с поводырем для второго игрока. Следующие две теоремы доказываются на основе одновременной реализации в исходной системе указанных стратегий.

**Теорема 19.1.** *Последовательность величин  $\widehat{\Gamma}_m(x^0[\cdot])$ ,  $m = 2, 3, \dots$ , имеет равномерный на  $\widehat{\mathbb{X}}^0$  предел  $\widehat{\Gamma}_*(x^0[\cdot])$ .*

**Теорема 20.1.** *Дифференциальная игра (8), (9), (22) имеет цену, совпадающую с величиной  $\widehat{\Gamma}_*(x^0[\cdot])$ :*

$$\Gamma^{v^\circ}(x^0[\cdot]) = \Gamma^{u^\circ}(x^0[\cdot]) = \widehat{\Gamma}_*(x^0[\cdot]), \quad x^0[\cdot] \in \widehat{\mathbb{X}}^0.$$

При этом, приведенные стратегии в определенном смысле являются оптимальными и составляют седловую точку рассматриваемой дифференциальной игры.



## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В диссертации получены следующие основные результаты:

1. Обоснована устойчивая к возмущениям процедура взаимного отслеживания по принципу обратной связи между движением исходной конфликтно-управляемой системой, описываемой функционально-дифференциальным уравнением запаздывающего типа, и движением моделирующей системой, описываемой обыкновенными дифференциальными уравнениями.

2. Приведена и обоснована процедура взаимного отслеживания между движениями исходной конфликтно-управляемой системы и моделирующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений в двух случаях: когда конфликтно-управляемая система описывается нелинейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла; когда конфликтно-управляемая система описывается линейным функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа при достаточно общих предположениях.

3. Рассмотрена дифференциальная игра в классах стратегий с поводырем, в которой движение конфликтно-управляемой динамической системы описывается функционально-дифференциальным уравнением нейтрального типа в форме Дж. Хейла, а показателя качества оценивает историю движения, реализовавшуюся к терминальному моменту времени. Построена аппроксимационная дифференциальная игра в классе чистых позиционных стратегий, в которой движение описывается соответствующей моделирующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений, а показатель качества терминальный. Показано, что цена аппроксимационной игры в пределе дает цену исходной игры, при этом оптимальные стратегии в исходной игре могут быть построены на основе использования в качестве поводырей оптимальных движений аппроксимационной игры.

Работоспособность каждой из предложенных процедур проиллюстрирована в численных экспериментах на модельных примерах.

Полученные результаты могут быть в дальнейшем использованы для решения задач конфликтного управления и развития теории дифференциальных игр в динамических системах, описываемых функционально-дифференциальными уравнениями. Кроме того, они могут составить основу для построения соответствующей теории функциональных уравнения Гамильтона-Якоби, в частности, для систем нейтрального типа.

Работа выполнена в рамках программы Президиума РАН «Динамические системы и теория управления», при финансовой поддержке УрО РАН (12-П-1-1002), программы АВЦП 1.994.2011 «Устойчивые вычислительные методы анализа динамики сложных систем», а также при поддержке РФФИ (12-01-31247 мол\_а, 14-01-31319 мол\_а).

## ПУБЛИКАЦИИ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

### Публикации в изданиях, рекомендованных ВАК:

1. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Конечномерные моделирующие поводеры в системах с запаздыванием // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2013. Т. 19, № 1. С. 182–195.
2. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Об аппроксимации конфликтно-управляемых функционально-дифференциальных систем // *Вестник Тамбовского университета. Сер.: Естественные и технические науки*, 2013. Т. 18, № 5(2). С. 2579–2582.
3. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Об аппроксимации нелинейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа // *Тр. ИММ УрО РАН*, 2014. Т. 20, № 4. С. 204–217.
4. Плаксин А.Р. Конечномерные поводеры в задачах управления линейными системами нейтрального типа // *Дифференц. уравнения*, 2015. Т. 51, № 3. С. 402–412.
5. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Дифференциальные игры для систем нейтрального типа: аппроксимирующая модель // *Труды Математического института им. В. А. Стеклова*, 2015, Т. 291, С. 202–214.
6. Gomoyunov M.I., Plaksin A.R. On a Problem of Guarantee Optimization in Time-Delay Systems // *IFAC PapersOnLine*, 2015. Vol. 48, № 25, P. 172–177.
7. Lukoyanov N.Yu., Plaksin A.R. On approximations of time-delay control systems // *IFAC PapersOnLine*, 2015. Vol. 48, № 25, P. 178–182.
8. Gomoyunov M.I., Plaksin A.R. Finite-dimensional approximations of neutral-type conflict-controlled systems // *IFAC PapersOnLine*, 2017. Vol. 50, № 1, P. 5109–5114.

### Другие публикации:

9. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Конечномерные поводеры функционально-дифференциальных систем // *Тезисы докладов научной конференции «Дифференциальные уравнения и оптимальное управление», посвященной 90-летию со дня рождения академика Е. Ф. Мищенко*. Москва, 2012. С. 90–92.
10. Плаксин А.Р. Конечномерные поводеры в задачах управления системами с запаздыванием // *Современные проблемы математики: Тезисы Международной (43 Всероссийской) молодежной школы-конференции*. Екатеринбург, 2012. С. 163–165.
11. Плаксин А.Р. Об аппроксимации линейных конфликтно-управляемых систем нейтрального типа // *Современные проблемы математики: Тезисы Международной (44 Всероссийской) молодежной школы-конференции*. Екатеринбург, 2013. С. 124–126.
12. Плаксин А.Р. Об аппроксимации конфликтно-управляемых систем нейтрального типа // *Тр. XII всероссийского совещания по проблемам управления*. Москва, 2014. С. 2078–2088.
13. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. Конечномерные моделирующие поводеры конфликтно-управляемых систем нейтрального типа // *Тезисы международной конференции «Динамика систем и процессы управления», посвященной 90-летию со дня рождения академика Н.Н. Красовского*. Екатеринбург, 2014. С. 131–132.
14. Лукоянов Н.Ю., Плаксин А.Р. О дифференциальных играх для систем нейтрального типа // *Тезисы докладов II Международного семинара, посвященного 70-летию со дня рождения академика А. И. Субботина*. Екатеринбург, 2015. С. 107–108.