

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ НАУКИ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ им. Н. Н. КРАСОВСКОГО
УРАЛЬСКОГО ОТДЕЛЕНИЯ РОССИЙСКОЙ АКАДЕМИИ НАУК

На правах рукописи

УДК 519.16

Незнахина Екатерина Дмитриевна

**Эффективные алгоритмы с гарантированными оценками
точности для некоторых обобщений задачи коммивояжера**

01.01.09 – дискретная математика и математическая кибернетика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:
д. ф.-м. н., профессор РАН
Хачай Михаил Юрьевич

Екатеринбург – 2017

Оглавление

Обозначения и сокращения	4
Введение	6
1 Постановки исследуемых задач	17
1.1 Задачи комбинаторной оптимизации	17
1.2 Предварительные сведения об исследовании задачи коммивояжера	19
1.3 Задача о цикловом покрытии графа фиксированного размера	25
1.4 Обобщенная задача коммивояжера	28
1.5 Пирамидальные маршруты	32
2 Задача о цикловом покрытии графа	35
2.1 Вычислительная сложность задачи $\text{Min-}k\text{-SCCP}$	35
2.2 Принадлежность задачи $\text{Metric Min-}k\text{-SCCP}$ классу APX	37
2.2.1 Алгоритм построения минимального остовного k -леса	37
2.2.2 2-приближенный алгоритм для задачи $\text{Metric Min-}k\text{-SCCP}$	39
2.3 Полиномиальная приближенная схема для задачи $\text{Euclidean Min-}k\text{-SCCP}$ в \mathbb{R}^d	42
2.3.1 Декомпозиция евклидовой задачи о цикловом покрытии графа	43
2.3.2 Округленная задача $\text{Euclidean Min-}k\text{-SCCP}$	48
2.3.3 Рекурсивное разбиение объемлющего гиперкуба \mathcal{S}	50
2.3.4 Теорема существования	53
2.3.5 Динамическое программирование	55
2.3.6 Дерандомизация	57
3 Обобщенная задача коммивояжера	59
3.1 Квази- и псевдопирамидальные маршруты	59
3.2 Полиномиально разрешимый подкласс	66
3.3 Приближенные схемы для случая медленно растущих значений параметра k	71

3.3.1	Применение метода динамического программирования при построении приближенной схемы	72
3.3.2	Обобщение схемы Ароры для задачи коммивояжера на плоскости на случай EGTSP- k -GC	74
3.4	Приближенная схема для случая быстро растущих значений параметра k . . .	80
	Заключение	82
	Публикации автора по теме диссертации	84
	Благодарности	88
	Литература	89

Обозначения и сокращения

APP (Approximate) — значение целевой функции, полученное с помощью приближенного алгоритма

АРХ — класс труднорешаемых задач, обладающих алгоритмами с гарантированными оценками точности

ССР (Cycle Cover Problem) — задача о цикловом покрытии графа

ЕРТАС (Efficient Polynomial-Time Approximation Scheme) — эффективная полиномиальная приближенная схема с трудоемкостью $O(f(\frac{1}{\epsilon}) \cdot poly(n))$, где f — произвольная вычислимая функция, $poly$ — некоторая полиномиальная функция

EGTSP- k -GC (Euclidean Generalized Traveling Salesman Problem in k Grid Clusters) — евклидова обобщенная задача коммивояжера на сетке

FPTAS (Fully Polynomial-Time Approximation Scheme) — вполне полиномиальная приближенная схема с трудоемкостью $O(poly(\frac{1}{\epsilon}, n))$, где $poly$ — некоторая полиномиальная функция

FPT (Fixed-Parameter Tractability) — класс труднорешаемых задач, разрешимых за время $O(f(k) \cdot poly(n))$, где f — произвольная вычислимая функция, $poly$ — некоторая полиномиальная функция

GTSP (Generalized Traveling Salesman Problem) — обобщенная задача коммивояжера

I (Instance) — постановка исследуемой задачи комбинаторной оптимизации

Min- k -SCCP (Minimum-weight k -Size Cycle Cover Problem) — задача о цикловом

покрытии графа фиксированного размера k

OPT (Optimal) — оптимальное значение целевой функции

$PTAS$ (Polynomial-Time Approximation Scheme) — полиномиальная приближенная схема — алгоритм или семейство алгоритмов, предоставляющее за полиномиальное время для каждой постановки конкретной задачи дискретной оптимизации на минимум и фиксированного значения параметра $\varepsilon > 0$ допустимое решение, вес которого не превосходит $(1 + \varepsilon)OPT$ (не меньше $(1 - \varepsilon)OPT$ в случае задачи на максимум).

TSP (Traveling Salesman Problem) — задача коммивояжера

VRP (Vehicle Routing Problem) — задача маршрутизации транспорта

Введение

Актуальность темы

Предмет исследования диссертационной работы¹ составляют труднорешаемые оптимизационные задачи, являющиеся обобщениями классической задачи коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) [83, 63]. В работе исследуются: задача о цикловом покрытии фиксированной мощности k минимального веса (Minimum-weight k -Size Cycle Cover Problem, Min- k -SCCP), обобщенная задача коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP) и её геометрическая постановка евклидова обобщенная задача коммивояжера на сетке (Euclidean Generalized Traveling Salesman Problem in k Grid Clusters, EGTSP- k -GC).

Задача о цикловом покрытии графа фиксированного размера k минимального веса — это задача комбинаторной оптимизации, заключающаяся в поиске оптимального покрытия полного взвешенного графа k вершинно-непересекающимися циклами. На содержательном уровне каждый цикл в покрытии может трактоваться как маршрут для некоторого транспортного средства, посещающего соответствующее множество клиентов. С этой точки зрения задача о цикловом покрытии близка к известной задаче маршрутизации транспорта (Vehicle Routing Problem, VRP) [113]. С другой стороны, при фиксированной единичной мощности циклового покрытия задача совпадает с классической задачей коммивояжера. Кроме того, задача о цикловом покрытии мощности k

¹Работа поддержана грантами РНФ 14-11-00109, РФФИ 13-07-00181, 16-07-00266, стипендией Президента Российской Федерации

занимает промежуточное положение в сложностной иерархии между эффективно разрешимой задачей о назначениях и труднорешаемой задачей коммивояжера, что индуцирует дополнительный теоретический интерес к исследованию сложности и аппроксимируемости Min- k -SCCP.

Цикловые покрытия играют важную роль при разработке приближенных алгоритмов для задачи коммивояжера [27, 26, 32, 34, 36], задачи о кратчайшей суперстроке [31, 111] и задачи маршрутизации транспорта [64]. В случае задачи коммивояжера при построении указанных алгоритмов в качестве начального приближения выступает цикловое покрытие, элементы которого соединяются в гамильтонов цикл с помощью той или иной техники объединения фрагментов маршрута.

Помимо выполнения вспомогательной роли при построении приближенных алгоритмов, поиск оптимальных цикловых покрытий является интересной независимой задачей. Паросочетания и факторизация графов — это важные разделы теории графов, наряду с этим поиск циклового покрытия эквивалентен стесненной дополнительной ограничением на количество компонент связности задаче построения 2-фактора, то есть остовного подграфа, каждая вершина которого инцидентна в точности двум ребрам.

Все перечисленные выше аргументы обуславливают актуальность алгоритмического анализа Min- k -SCCP и уточнения статуса вычислительной сложности данной задачи при $k > 1$, то есть в случае, когда Min- k -SCCP отлична от классической задачи коммивояжера.

Обобщенная задача коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP), известная в отечественной литературе под названием «задача обхода мегаполисов», задается полным взвешенным графом, множество вершин которого разбито на k непересекающихся кластеров, и заключается в поиске цикла минимального веса посещающего каждый кластер.

Что касается алгоритмов с гарантированными оценками точности, даже для метрической постановки GTSP известно не так много результатов. В [109] представлен $3\rho/2$ -приближенный алгоритм, где ρ — это число вершин в наибольшем по мощности кластере ($\rho = \max_{i=1,\dots,k}(|V_i|)$). К сожалению, в худшем случае данная оценка точности оказывается очень слабой, и алгоритм неприменим для практических целей. Н. Гарг и Дж. Коньевод построили рандомизированный приближенный алгоритм для обобщенной задачи о штейнеровском дереве, побочным результатом этой работы стал $O(\log^2(n) \log(\log(n)) \log k)$ -приближенный алгоритм для GTSP [58]. Таким образом, исследования в области сложности (в том числе параметрической) и аппроксимируемости задачи GTSP представляются актуальными.

Кроме того, представляется актуальной задача исследования вычислительной сложности и аппроксимируемости геометрических постановок GTSP. Данные постановки наряду с теоретическим вызывают и большой практический интерес, обладая рядом приложений, например, в задачах оптимальной доставки почтовых отправлений и задачах о демонтаже отработанных энергоблоков АЭС.

При фиксированном числе кластеров общая постановка GTSP обладает точным полиномиальным алгоритмом с трудоемкостью $O((k-1)!n^3)$. Задачи построения точного алгоритма меньшей трудоемкости либо обоснование подклассов, в которых GTSP разрешима за полиномиальное по n и k время, также представляются актуальными.

В EGTSP- k -GC вершины графа являются точками на евклидовой плоскости, разбиение на кластеры индуцируется клетками целочисленной решетки. Как и в общей постановке GTSP требуется построить цикл, обладающий минимальным весом и посещающий каждый кластер в точности один раз. Впервые задача EGTSP- k -GC была введена в работе [23], в которой для произвольного

$\varepsilon > 0$ для нее был построен $(1.5 + 8\sqrt{2} + \varepsilon)$ -приближенный полиномиальный алгоритм, обоснование которого опирается на аппроксимационные результаты, полученные авторами этой статьи для обобщенной задачи об основном дереве, в которой кластеры также индуцируются ячейками прямоугольной сетки (Generalized Minimum Spanning Tree Problem, GMSTP).

Заметим, что эффективные точные и приближенные алгоритмы разрабатывались для задачи GMSTP и ранее, каждый из них с помощью применения техники удвоения ребер порождает соответствующий приближенный алгоритм для задачи EGTSP- k -GC. В частности, в работе [53] разработана схема динамического программирования для частного случая задачи GMSTP, в котором объединение непустых ячеек, индуцирующих кластеры, является связным множеством. Показано, что предложенная схема обладает полиномиальной трудоемкостью при условии, что один из геометрических размеров сетки (ширина или высота) является фиксированным. Для случая, когда в дополнение к условию на связность заполненных ячеек число кластеров растет сверх-линейно по отношению к размерам сетки, в той же работе построена полиномиальная приближенная схема. В приложении к задаче EGTSP- k -GC данные результаты порождают 2 и $(2 + \varepsilon)$ -приближенные полиномиальные алгоритмы в соответствующих частных постановках.

Таким образом, для задачи EGTSP- k -GC было известно несколько приближенных алгоритмов с фиксированными оценками точности, кроме того, известен отрицательный результат о невозможности построения PTAS для евклидовой постановки GTSP [48]. Естественным образом возникает вопрос об уточнении сложностного статуса EGTSP- k -GC, в частности, о возможности построения полиномиальных приближенных схем для данной задачи.

Цель работы — построение эффективных алгоритмов с гарантированными оценками точности и обоснование полиномиально разрешимых подклассов

для задачи о цикловом покрытии фиксированного размера, обобщенной задачи коммивояжера и обобщенной задачи коммивояжера на сетке.

Основные результаты

1. Для задачи о цикловом покрытии фиксированного размера:
 - (а) обоснована NP-трудность в сильном смысле как в общем случае, так и в частных метрической и евклидовой постановках;
 - (б) для метрической постановки построен 2-приближенный алгоритм с асимптотически достижимой оценкой точности;
 - (в) для произвольной фиксированной размерности пространства d предложена эффективная полиномиальная аппроксимационная схема для евклидовой постановки задачи с трудоемкостью $O\left(n^{d+1}(k \log n)^{O\left(\frac{\sqrt{d}}{\varepsilon}\right)^{d-1}} 2^k\right)$, сохраняющая свойства PTAS при значении параметра $k = O(\log n)$.

2. Для обобщенной задачи коммивояжера:
 - (а) впервые введены понятия l -квазипирамидального и l -псевдопирамидального маршрутов для данной постановки задачи;
 - (б) обоснован FPT-алгоритм (относительно параметра l) поиска оптимального l -квазипирамидального маршрута с трудоемкостью $O(4^l n^3)$;
 - (в) построен FPT-алгоритм (относительно параметров k и l) поиска оптимального l -псевдопирамидального маршрута с трудоемкостью $O(2^l k^{l+4} n^3)$.

3. Для обобщенной задачи коммивояжера на сетке:
 - (а) показано, что при дополнительном ограничении на высоту сетки $H \leq 2$ задача разрешима за время $O(n^3)$;
 - (б) построены три аппроксимационные схемы для разных значений параметра k , первые две из которых находят $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение задачи за линейное от числа вершин n время $O(k^2(O(1/\varepsilon))^{2k}) + O(n)$ и $2^{O(k)} k^4 (\log k)^{O(1/\varepsilon)} + O(n)$ соответственно и сохраняют полиномиальность

при $k = O(\log n)$. При фиксированном значении параметра k третья схема является эффективной полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $n^k(\log k)^{O(1/\varepsilon)}$ и сохраняет полиномиальность при $k = n - O(\log n)$.

Научная новизна

Установлен сложностной статус задачи о цикловом покрытии, Min- k -SCCP NP-трудна в сильном смысле даже в частной евклидовой постановке. Для метрического случая задачи впервые разработан алгоритм с гарантированной асимптотически достижимой оценкой точности 2, опирающийся на известную идею дублирования ребер минимального остовного дерева, использованную при построении аналогичного алгоритма для классической задачи коммивояжера.

Для евклидовой постановки задачи о цикловом покрытии графа в пространстве произвольной фиксированной размерности впервые предложена эффективная полиномиальная приближенная схема (EPTAS). Заметим, что построение вполне полиномиальной приближенной схемы (FPTAS) для данной задачи невозможно, следовательно, результат о принадлежности Min- k -SCCP классу EPTAS является определяющим сложностной статус задачи.

Для обобщенной задачи коммивояжера в работе впервые введены понятия l -квазипирамидального и l -псевдопирамидального маршрутов, обобщающие фундаментальное понятие пирамидального маршрута, и построены FPT-алгоритмы поиска оптимального l -квазипирамидального и l -псевдопирамидального маршрутов за время $O(4^l n^3)$ и $O(2^l k^{l+4} n^3)$ соответственно. Кроме того, в работе описан полиномиально разрешимый подкласс задачи GTSP, для которого оптимум достигается на множестве l -квазипирамидальных маршрутов и может быть найден за $O(n^3)$. Указанный подкласс является геометрическим и соответствует обобщенной задаче коммивояжера на сетке при $H \leq 2$.

Для евклидовой обобщенной задачи коммивояжера на сетке построены три

приближенные схемы. Первая схема основана на поиске точного решения алгоритмом динамического программирования Хелда-Карпа вспомогательной задачи, полученной из исходной путем округления координат вершин. Схема находит $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение за время $O(k^2(\frac{1}{\varepsilon})^{2k}) + O(n)$. Вторая схема использует в качестве черного ящика PTAS Ароры для евклидовой задачи TSP на плоскости, трудоемкость схемы составляет $2^{O(k+(\frac{1}{\varepsilon})^2)}k^5 + O(n)$. При фиксированном числе кластеров оба алгоритма являются эффективными линейными приближенными схемами, сохраняющими полиномиальность при $k = O(\log n)$. Третья схема основана на прямом переборе вершин, представляющих кластеры, и последующем поиске точных решений для соответствующих постановок евклидовой задачи TSP с помощью PTAS Ароры. Трудоемкость схемы составляет $n^k(\log k)^{O(\frac{1}{\varepsilon})}$, схема сохраняет свои свойства при $k = n - O(\log n)$.

Таким образом, впервые для обобщенной задачи коммивояжера на сетке построены приближенные схемы как для быстро, так и для медленно растущих значений параметра $k = k(n)$. Первые две схемы представляют практический интерес, так как являются линейными приближенными схемами при фиксированном значении параметра k , несмотря на полиномиальную разрешимость задачи в этом случае, так как известный точный алгоритм имеет трудоемкость $O((k - 1)!n^3)$.

Методы исследований

В работе использовались методы дискретной оптимизации и исследования операций, методы комбинаторного и вероятностного анализа, а также динамическое программирование.

На защиту выносятся совокупность результатов, связанных с доказательством труднорешаемости, построением эффективных алгоритмов с гарантированными оценками точности и обоснованием полиномиально разрешимых подклассов для задач, являющихся обобщением классической задачи коммивояже-

ра, а именно для задачи о цикловом покрытии фиксированного размера, обобщенной задачи коммивояжера и обобщенной задачи коммивояжера на сетке.

Апробация работы

Основные результаты диссертации докладывались на следующих международных конференциях: Международной конференции по дискретной оптимизации и исследованию операций DOOR (Владивосток, 2016); V, VI, VII и VIII Международной конференции "Оптимизация и приложения"ОРТИМА (Черногория, Петровац, 2014, 2015, 2016, 2017); 28 Европейской конференции по комбинаторной оптимизации ЕССО (Италия, Катания, 2015); 8 Международной конференции по моделированию и теории управления МИМ (Франция, Труа, 2016); 2 Международной конференции по численным вычислениям NUMTA (Пиццо, Италия, 2016); XVI и XVII Байкальской международной школе-семинаре "Методы оптимизации и приложения"(Иркутск, 2014, 2017); XV Всероссийской конференции "Математическое программирование и приложения"(Екатеринбург, 2015); VI Международной конференции по анализу изображений, сетей и текстов AIST (Москва, 2017); 46, 47 и 48 Международной молодежной школе-конференции "Современные проблемы математики и её приложений"(Екатеринбург, 2015, 2016, 2017).

Публикации

По теме диссертации автором опубликована 21 работа, из них 8 статей в научных журналах из списка ВАК и 13 работ в трудах и тезисах конференций. Среди 8 указанных статей 6 — в изданиях, индексируемых системой цитирования Web of Science, 6 — Scopus, 5 — РИНЦ. Постановки задач предложены научным руководителем. Подходы к построению и анализу алгоритмов найдены совместно. Доказательства утверждений получены диссертантом лично. Конфликт интересов отсутствует.

Структура и объем работы

Диссертация изложена на 101 странице, содержит введение, три главы, заключение, список публикаций автора по теме диссертации, благодарности и список литературы. Список литературы содержит 116 источников.

Содержание работы

Во введении раскрыты актуальность и цель работы, обоснована её научная новизна, приведены основные результаты и указано краткое содержание работы.

В первой главе диссертации содержится обзор литературы и постановки исследуемых задач.

В разделе 1.1 приведены основные понятия теории комбинаторной оптимизации.

В разделе 1.2 кратко описана эволюция исследования задачи коммивояжера, начиная с 50-х годов прошлого века до наших дней; приведены постановки задачи маршрутизации транспорта (VRP), задачи m коммивояжеров (m -PCP) и обобщенной задачи коммивояжера (GTSP).

В начало раздела 1.3 вынесено обоснование актуальности исследования задач о цикловом покрытии графа, перечислены известные результаты для данных задач; в конце раздела приведена постановка задачи о цикловом покрытии фиксированного размера k (Min- k -SCCP) и отмечены основные результаты, связанные с Min- k -SCCP.

В разделе 1.4 содержится обсуждение подходов к решению обобщенной задачи коммивояжера (GTSP); перечислены результаты в области алгоритмов с гарантированными оценками точности для задачи коммивояжера с окрестностями; приведена постановка обобщенной задачи коммивояжера на сетке (EGTSP- k -GC) и отмечены результаты, связанные с EGTSP- k -GC.

В разделе 1.5 введены понятия пирамидального, l -квазипирамидального и l -псевдопирамидального маршрутов для классической задачи коммивояжера,

приведен алгоритм поиска оптимального пирамидального маршрута с трудоемкостью $O(n^2)$.

Во второй главе в разделе 2.1 показано, что задача о цикловом покрытии фиксированного размера k NP-трудна в сильном смысле. В доказательстве описано сведение задачи коммивояжера к Min- k -SCCP, основанное на идее клонирования постановок исходной задачи.

В разделе 2.2 приведен 2-приближенный алгоритм для метрической постановки задачи Min- k -SCCP, в которой значение параметра k является частью входа задачи. В основе алгоритма лежит известная идея дублирования ребер минимального остовного дерева, в данном случае минимального остовного k -леса. Показано, что найденная оценка точности 2 является асимптотически достижимой.

В разделе 2.3 для евклидовой постановки задачи построена эффективная аппроксимационная схема, обобщающая фундаментальный результат, полученный С. Аророй для задачи коммивояжера. В основе алгоритма лежит обоснование декомпозиции задачи на m ($m \leq k$) независимых подзадач о цикловом покрытии графа и адаптация подхода С. Ароры на случай k вершинно-непересекающихся циклов.

В третьей главе в разделе 3.1 введены понятия l -квазипирамидального и l -псевдопирамидального маршрутов для обобщенной задачи коммивояжера и обоснована разрешимость за $O(4^l n^3)$ и $O(2^l k^{l+4} n^3)$ задач поиска оптимальных решений в классах l -квазипирамидальных и l -псевдопирамидальных маршрутов соответственно. Таким образом, показано, что обобщенная задача коммивояжера с симметричной неотрицательной матрицей весов принадлежит классу FPT.

В разделе 3.2 доказана разрешимость задачи GTSP-GC, стесненной дополнительным ограничением на высоту сетки $H \leq 2$, за кубическое время.

В разделе 3.3 представлены две полиномиальные приближенные схемы для медленно растущих значений параметра $k = O(\log n)$. Первая схема основана на алгоритме динамического программирования, применимом для серии вспомогательных постановок геометрической задачи коммивояжера. Вторым алгоритмом обобщает результат С. Ароры на случай обобщенной задачи коммивояжера на сетке.

В разделе 3.4 для случая быстро растущих значений параметра $k = n - O(\log n)$ описан подход, основанный на непосредственном применении аппроксимационной схемы для евклидовой постановки задачи коммивояжера.

В заключении подводятся итоги диссертационной работы, перечисляются основные результаты и некоторые вопросы, оставшиеся открытыми.

Глава 1

Постановки исследуемых задач

1.1 Задачи комбинаторной оптимизации

Задачей комбинаторной оптимизации \mathcal{P} будем называть множество упорядоченных пар (постановок задачи) $I = (X_I, W_I)$, где X_I — допустимое множество, $W_I : X_I \rightarrow \mathbb{R}_+$ — весовая функция. В содержательных постановках значение $W_I(x)$ зачастую играет роль стоимости объекта x (длины маршрута, времени обслуживания и т.п.). В зависимости от оптимизационного критерия цель задачи состоит в нахождении минимального или максимального значения

$$OPT = \min(\max)\{W_I(x) : x \in X_I\}$$

и оптимального решения $x^* : W_I(x^*) = OPT$. Основная особенность рассматриваемых ниже задач комбинаторной оптимизации состоит в том, что множество X_I является конечным, а функция W_I — вычислимой. В силу данных свойств оптимальное значение задачи OPT может быть найдено за конечное время, в том числе с помощью полного перебора всех допустимых решений.

Алгоритмом называется вычислимая функция $\mathcal{A} : I \rightarrow \mathcal{A}(I) \in X_I$, сопоставляющая произвольной постановке задачи некоторое допустимое решение. Стоимость данного решения договоримся обозначать APP . Алгоритм, сопоставляющий произвольной постановке задачи её оптимальное решение, называется точным. Под r -приближенным алгоритмом для задачи комбинаторной опти-

мизации на минимум понимаем алгоритм, сопоставляющий постановке задачи решение стоимости APP , которая не более чем в r раз превышает оптимальное значение OPT . Параметр r называется гарантированной оценкой точности и удовлетворяет следующему неравенству

$$r \geq \sup_I \frac{APP(I)}{OPT(I)}.$$

Эффективными называются алгоритмы, трудоемкость которых оценивается сверху значением некоторой полиномиальной функции от длины записи условия задачи $Len(I)$. Принято считать, что алгоритм \mathcal{A} обладает трудоемкостью $C(n)$ на постановках длины n , если для произвольной постановки I значение $\mathcal{A}(I)$ может быть вычислено за не более, чем $C(n)$ элементарных операций. Алгоритм называется полиномиальным, если $C(n) = O(poly(n))$, где $poly$ — некоторая полиномиальная функция.

В некоторых случаях для NP -трудных задач удается построить приближенную схему. Как обычно, под полиномиальной приближенной схемой (PTAS) для задачи комбинаторной оптимизации \mathcal{P} понимаем семейство алгоритмов, содержащее для каждого фиксированного $\varepsilon > 0$ приближенный алгоритм, решающий данную задачу с гарантированной точностью $(1+\varepsilon)$ за время, ограниченное сверху некоторым полиномом $poly_\varepsilon(n)$ от длины записи ее исходных данных, при этом порядок и коэффициенты полинома могут зависеть от ε . В случае, если $poly_\varepsilon(n) = O(f(\varepsilon) \cdot n^c)$ для некоторой константы c и вычислимой функции f , то PTAS называется эффективной полиномиальной приближенной схемой (EPTAS). Более того, если $f(\varepsilon) = poly(\frac{1}{\varepsilon})$, то есть трудоемкость алгоритма оценивается полиномом от длины записи задачи комбинаторной оптимизации и $\frac{1}{\varepsilon}$, то схема называется вполне полиномиальной приближенной схемой (FPTAS).

1.2 Предварительные сведения об исследовании задачи коммивояжера

Задача коммивояжера (Traveling Salesman Problem, TSP) является одной из самых известных задач дискретной математики [83, 63]. Постановка задачи связана с поиском в полном взвешенном графе G гамильтонового цикла (маршрута коммивояжера) минимального веса. Задача коммивояжера занимает особое место в комбинаторной оптимизации и исследовании операций и принадлежит к числу типовых NP-трудных задач.

Введем несколько вспомогательных определений. Пусть в задаче коммивояжера требуется построить гамильтонов цикл на n городах, множество вершин $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Перестановка $\phi = (\phi(1), \phi(2), \dots, \phi(n))$ — это взаимнооднозначное отображение множества V на себя. Пусть i_1, i_2, \dots, i_r — различные элементы множества V , если $\phi(i_k) = i_{k+1}$ для $k = 1, 2, \dots, r-1$ и $\phi(i_r) = i_1$, тогда $\langle i_1, i_2, \dots, i_r \rangle$ называется циклом перестановки ϕ , циклы длины большей или равной двум нетривиальны. Приведем пример, перестановка $\phi = (3, 2, 5, 6, 1, 4) = \langle 1, 3, 5 \rangle \langle 2 \rangle \langle 4, 6 \rangle$ имеет два нетривиальных цикла. Линейная задача о назначениях сводится к минимизации функции суммы весов ребер $w(\phi) = \sum_{i=1}^n w(\{i, \phi(i)\})$ на множестве мощности $n!$ всевозможных перестановок. Оптимальное назначение как известно может быть найдено за полиномиальное время [83]. Отметим, что в случае, когда оптимальная для задачи о назначениях перестановка ϕ состоит из единственного цикла длины n , ϕ также является решением задачи коммивояжера для соответствующего взвешенного графа на n вершинах. Таким образом, задача коммивояжера является в некотором смысле усложнением задачи о назначениях, обладая дополнительным ограничением на структуру перестановки.

В 50-е и 60-е годы прошлого века задача коммивояжера привлекла внима-

ние ученых из исследовательского центра RAND Corporation. Дж. Данциг, Р. Фалкерсон и С. Джонсон впервые сформулировали задачу в виде задачи дискретной оптимизации на графах и применили для ее решения метод ветвей и границ [43]. Авторы построили маршрут коммивояжера для постановки задачи с 49 городами и обосновали его оптимальность, однако их результат носил частный характер. По существу, метод ветвей и границ является вариацией полного перебора с сокращением подмножеств допустимых решений, заведомо не содержащих оптимальных маршрутов. Подходы для поиска точных решений задач целочисленного линейного программирования были развиты во многих работах (см. напр., [62, 93, 103]), что сделало возможным построение оптимальных маршрутов для постановок большей размерности [13].

В начале 60-х годов М. Хелд и Р. Карп предложили точный алгоритм для общей постановки задачи коммивояжера [65], основанный на методе динамического программирования [20] с трудоемкостью $O(n^2 2^n)$. Значимость алгоритма Хелда-Карпа трудно переоценить, так как в течение практически пятидесяти лет он являлся наилучшим точным методом решения общей постановки задачи. Следующим шагом в этом направлении стала работа А. Бьоркклунда, вышедшая в 2010 году [24]. Автору удалось построить точный алгоритм для постановок задачи коммивояжера, заданных на графах с n вершинами и положительными весами ребер, обладающий трудоемкостью $O(1.657^n)$. Обзор точных алгоритмов для задачи коммивояжера и других труднорешаемых задач комбинаторной оптимизации, а также перечень открытых вопросов в этой области приведены в работах Г. Вёгингера [115, 116]. Несомненно, точные алгоритмы для TSP важны с теоретической точки зрения, однако экспоненциальное от числа вершин заданного графа время работы затрудняет в общем случае возможность их применения для практических целей.

В 70-е годы был получен ряд результатов, связанных с исследованием вычис-

лительной сложности задач комбинаторной оптимизации, возникающих в таких областях, как теория графов, математическое программирование, комбинаторная оптимизация, математическая логика и т. д. В фундаментальной работе С. Кука [39] 71-ого года впервые были введены классы P и NP и доказана NP -полнота задачи о выполнимости булевых форм. Спустя год Р. Карп обосновал NP -полноту для 21 задачи, в том числе задачи о гамильтоновом цикле, путем сведения к ним проблемы выполнимости булевых форм [75]. После выхода в свет этой работы количество известных NP -полных задач росло стремительно [57]. В 76-ом году С. Сани и Т. Гонзалез обосновали NP -трудность построения приближенного решения с точностью $O(2^n)$ для общей постановки TSP [106].

В связи с известным противостоянием между сложностью общей постановки задачи коммивояжера и практической важностью её решения отдельный интерес представляют два подкласса TSP: Metric TSP и Euclidean TSP. В первом случае постановка задачи коммивояжера определяется неориентированным графом, для весов ребер которого выполняется неравенство треугольника. Вторым подклассом соответствует случаю d -мерного евклидова пространства: вершины заданного графа G являются точками в данном пространстве, а веса ребер определяются попарными расстояниями между ними. В конце 70-х годов Х. Пападимитриу показал, что даже евклидова постановка задачи коммивояжера является NP -трудной [100]. Таким образом, в предположении $P \neq NP$ точное решение евклидовой постановки задачи и приближенное решение с гарантированной оценкой точности общей постановки задачи не могут быть найдены за полиномиальное время. Естественным образом встал вопрос о построении эффективных приближенных алгоритмов для подклассов TSP.

В случае евклидовой плоскости задача коммивояжера обладает важным геометрическим свойством, кратчайший маршрут не содержит самопересечений, что делает задачу проще с точки зрения существования полиномиально раз-

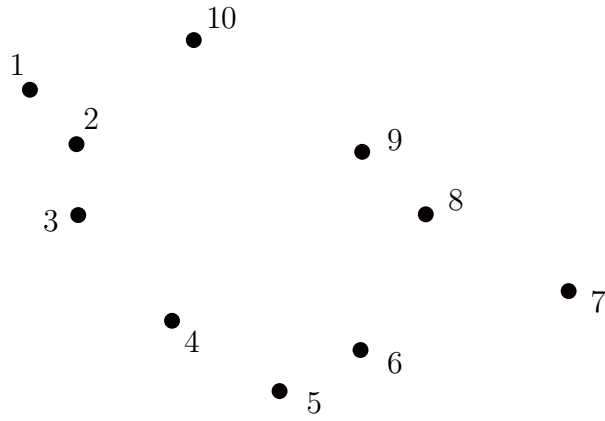


Рис. 1.1: Невыпуклое множество точек с матрицей весов Кальмансона

решимых подклассов. Из указанного свойства следует утверждение, если вершины заданного графа лежат на границе выпуклого многоугольника, то оптимальный маршрут проходит по границе многоугольника. В свою очередь цикл на n вершинах, располагающихся на границе выпуклого многоугольника, может быть определен по матрице расстояний за $O(n \log n)$. К. Кальмансон [72] обобщил концепцию выпуклости и предложил накладывать на матрицу весов заданного графа условия $c_{ij} + c_{kl} \leq c_{ik} + c_{jl}$ и $c_{il} + c_{jk} \leq c_{ik} + c_{jl}$ при $1 \leq i < j < k < l \leq n$ для определения полиномиально разрешимого подкласса. Если вершины выпуклого многоугольника пронумерованы вдоль границы, то матрица весов является матрицей Кальмансона, тем не менее существуют невыпуклые множества точек с матрицей расстояний, удовлетворяющей тем же свойствам (см. напр., рис. 1.2). В работе [72] показано, что в задаче коммивояжера с матрицей весов Кальмансона маршрут $\langle 1, 2, 3, \dots, n \rangle$ гарантировано является оптимальным.

Иной полиномиально разрешимый подкласс евклидовой постановки связан с задачей коммивояжера на k параллельных прямых (k -line TSP), в которой вершины заданного графа принадлежат k параллельным или почти параллельным прямым на плоскости. Такие постановки возникают, например, при производстве печатных плат, где с помощью лазера необходимо проделать в плате от-

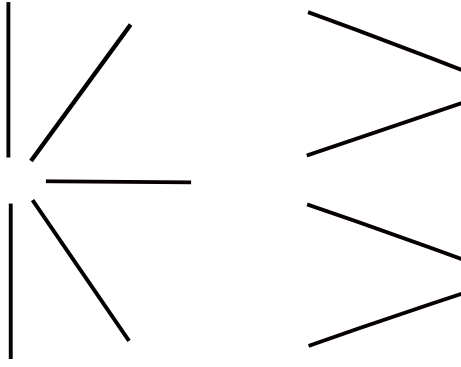


Рис. 1.2: Допустимые конфигурации

верстия, которые чаще всего лежат на параллельных прямых. Минимизация пройденного лазером расстояния эквивалентна решению задачи коммивояжера [85]. Для случая трех параллельных прямых М. Кутлер разработал алгоритм динамического программирования с кубической трудоемкостью [42]. Г. Роут [104] обобщил подход М. Кутлера и построил $O(n^k)$ алгоритм для произвольного фиксированного $k \geq 4$, обоснование которого также существенно опирается на утверждение об отсутствии самопересечений в оптимальном маршруте для евклидовой постановки задачи коммивояжера. Кроме того, Г. Роуту удалось показать, что алгоритм применим для более общего случая, когда линии не в точности параллельны, а допустимы приведенные на рис. 1.2 конфигурации. Описанные постановки евклидовой задачи коммивояжера очевидно не исчерпывают класс полиномиально разрешимых задач, обзор эффективно разрешимых подклассов классической задачи коммивояжера приведен в работе [33].

Для задачи Metric TSP известны 2-приближенный алгоритм [40] и $\frac{3}{2}$ -приближенный алгоритм Н. Кристофидеса [38]. Однако в предположении $P \neq NP$ Metric TSP не обладает полиномиальной аппроксимационной схемой (Polynomial-Time Approximation Scheme, PTAS) [16]. Данный результат опирается на теорию MAX-SNP-полноты [99], теорему о вероятностно проверяемых доказательствах (Probabilistically Checkable Proofs, PCP) [17, 52, 47] и связь между PCP-теоремой и сложностью аппроксимации задач комбинаторной оп-

тимизации [52].

Оценка порога эффективной аппроксимируемости метрической постановки остается одним из важных открытых вопросов в исследовании задачи коммивояжера. В то время как для евклидовой постановки TSP на плоскости и в евклидовом пространстве произвольной фиксированной размерности Ж. Митчелл [91] и С. Арора [15] практически одновременно и независимо разработали полиномиальные приближенные схемы. Кроме того, для задачи коммивояжера на случайных входных данных Э.Х. Гимади и В.А. Перепелица обосновали асимптотически точный алгоритм [3].

Известно множество обобщений задачи коммивояжера важных с точки зрения теории и практических приложений, ниже приведены лишь некоторые из них.

Содержательная постановка задачи маршрутизации транспорта (Vehicle Routing Problem, VRP) определяется координатами n потребителей и координатами склада O . Требуется построить набор маршрутов минимальной общей стоимости, начинающихся и заканчивающихся в выделенной вершине O и посещающих в совокупности всех потребителей. По-видимому, впервые задача была поставлена в исторической работе Дж. Данцига и Ж. Рамсера [44]. Обзор результатов в области точных и эффективных эвристических алгоритмов для различных модификаций этой задачи, связанных с наложением дополнительных обусловленных практическими целями ограничений, а также описание программных пакетов можно найти в монографиях [113, 61].

Задача m коммивояжеров (m -Peripatetic Salesman Problem, m -PSP) [77, 45, 1, 60, 5] связана с поиском нескольких реберно-непересекающихся гамильтоновых циклов, оптимизирующих суммарный вес, максимум весов или иной интегральный критерий. Как и классическая задача коммивояжера, m -PSP труднорешаема и неаппроксимируема в общем случае. Однако для частного случая

задачи, в котором веса ребер могут принимать значения 1 и 2, и требуется построить два реберно-непересекающихся цикла, были предложены алгоритмы с гарантированными оценками точности $5/4$ и $11/7$ [18]. Кроме того, в евклидовом пространстве конечной размерности задача поиска одного и двух реберно-непересекающихся циклов максимального веса допускает асимптотически точное решение с кубической трудоемкостью [59].

Условие обобщенной задачи коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP), известной в отечественной литературе под названием задача обхода мегаполисов, задается взвешенным графом G и разбиением множества его вершин на k дизъюнктивных кластеров. Требуется построить цикл минимального веса, посещающий каждый кластер. Монография [6] посвящена построению алгоритмов динамического программирования для задач обхода мегаполисов, отягощенных различными условиями предшествования. Обзор экспоненциальных точных и эффективных эвристических алгоритмов для GTSP представлен в работах [63, 70, 110, 74]. Обобщенная задача коммивояжера обладает полиномиально разрешимым подклассом. При произвольном фиксированном значении параметра k задача GTSP полиномиально разрешима за время $\Theta((k-1)!n^3)$ [55]. Таким образом, обобщенная задача коммивояжера с указанными ограничениями принадлежит классу FPT.

1.3 Задача о цикловом покрытии графа фиксированного размера

Задача о цикловом покрытии графа (Cycle Cover Problem, CCP) — это задача комбинаторной оптимизации, заключающаяся в поиске оптимального покрытия графа вершинно-непересекающимися циклами. По-видимому, впервые задача была сформулирована в известной статье С. Сани и Т. Гонзалеза [106], где в

качестве критерия оптимальности покрытия использовалось число образующих его циклов. Позднее исследованию ССР и различных модификаций этой задачи были посвящены многочисленные работы (см. напр., [112, 30, 28, 35, 88, 89]).

На содержательном уровне каждый цикл в покрытии может трактоваться как маршрут для некоторого транспортного средства, посещающего соответствующее множество клиентов. С этой точки зрения задача о цикловом покрытии близка к задаче маршрутизации транспорта. Более того, исследуемая задача является естественным обобщением классической задачи коммивояжера, при фиксированной единичной мощности циклового покрытия данные задачи эквивалентны.

Цикловые покрытия играют важную роль при разработке приближенных алгоритмов для задачи коммивояжера [25, 27, 26, 32, 34, 36, 37], задачи о кратчайшей суперстроке [31, 111] и задачи маршрутизации транспорта [64]. Задача коммивояжера на максимум в пространстве произвольной фиксированной размерности труднорешаема [4], однако для задачи построения циклового покрытия максимального веса существует эффективный алгоритм. На это свойство опирается построение эвристических алгоритмов, в которых элементы циклового покрытия соединяются в гамильтонов цикл с помощью техники объединения фрагментов маршрута [83].

Кроме того, поиск оптимальных цикловых покрытий является интересной независимой задачей. Цикловые покрытия известны также как 2-факторы, так как степень каждой вершины в них равна двум. Значительное количество исследовательских работ было посвящено структурным свойствам и анализу трудоемкости построения факторов графов [87, 108]. Наиболее изучены ограниченные 2-факторы и соответствующие им задачи об L -цикловых покрытиях [30, 28, 29, 34, 89, 11]. Для заданного $L \subseteq \mathbb{N}$ покрытие называется L -цикловым, если каждый элемент покрытия содержит число ребер, принадлежащее задан-

ному множеству L . В общем случае задача вычисления L -циклового покрытия минимального веса (Min- L -UCC) труднорешаема [88], однако известны приближенные результаты для различных частных постановок задачи. Например, задача Min- k -UCC(1,2), в которой $L = \{k, k + 1, \dots\}$ и веса ребер принимают значения 1 или 2, может быть решена приближенно с гарантированной оценкой точности $7/6$ для произвольных значений параметра k [30]. Позднее было показано, что метрическая постановка Min- L -UCC обладает приближенным алгоритмом с константной гарантированной оценкой точности для фиксированных допустимых множеств L .

Укажем постановку исследуемой задачи о цикловом покрытии фиксированного размера, для случая ориентированных графов аналогичная задача распознавания свойств была сформулирована в [112]. Воспользуемся стандартными обозначениями: \mathbb{R} — поле вещественных чисел, \mathbb{N} — множество натуральных чисел, \mathbb{N}_m — целочисленный интервал $\{1, \dots, m\}$, \mathbb{N}_m^0 — целочисленный интервал $\{0, \dots, m\}$.

Пусть C — произвольный простой цикл в графе G , через $V(C)$ и $E(C)$ обозначим подмножества составляющих его вершин и дуг.

На множестве ребер графа G задана весовая функция $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$, в силу конечности множества E однозначно определяемая матрицей $W = (w_{ij})$ ($1 \leq i, j \leq n$) так, что для произвольных i и j вес дуги $e = (i, j)$ задается соотношением $w(e) = w_{ij}$. Весом (стоимостью) цикла C назовем величину $W(C) = \sum_{e \in E(C)} w(e)$.

Цикловым покрытием размера k (k -Size Cycle Cover, k -SCC) графа G назовем произвольное семейство $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ его вершинно-непересекающихся простых циклов, удовлетворяющее условию $V(C_1) \cup \dots \cup V(C_k) = V$. Вес $\mathcal{W}(\mathcal{C})$ такого покрытия зададим равенством $\mathcal{W}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^k W(C_i)$.

В задаче Minimum-weight k -Size Cycle Cover Problem (Min- k -SCCP) задан

полный взвешенный граф $G = (V, E, w)$, требуется найти цикловое покрытие размера k минимального веса. Аналогично определяется Maximum-weight k -Size Cycle Cover Problem (Max- k -SCCP), в которой требуется построить покрытие размера k максимального веса.

Задача Min- k -SCCP может быть представлена в оптимизационной форме

$$\mathcal{W}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^k \sum_{e \in E(C_i)} w(e) \rightarrow \min_{\substack{\cup_{i \in \mathbb{N}_k} V(C_i) = V; \\ V(C_i) \cap V(C_j) = \emptyset \ (\{i, j\} \subset \mathbb{N}_k)}} .$$

Задачей Metric Min- k -SCCP договоримся называть задачу Min- k -SCCP, в которой каждой вершине графа G инцидентна петля нулевого веса, функция w симметрична, принимает неотрицательные значения и для любой тройки i, j, l справедливо неравенство треугольника $w_{ij} + w_{jl} \geq w_{il}$.

Задачей Euclidean Min- k -SCCP назовем подкласс задачи Metric Min- k -SCCP, в котором вершины G являются точками в d -мерном евклидовом пространстве, а матрица W порождена попарными расстояниями между ними.

Отметим результаты, связанные с Min- k -SCCP. Э.Х. Гимади и И.А. Рыков предложили асимптотически точные алгоритмы с кубической трудоемкостью для Euclidean Max- k -SCCP в пространстве произвольной фиксированной размерности и Min- k -SCCP на случайных входных данных при мощности цикловых покрытий $k = o(n)$ и $k \leq n^{1/3} / \ln n$ соответственно [60].

1.4 Обобщенная задача коммивояжера

Обобщенная задача коммивояжера (Generalized Traveling Salesman Problem, GTSP) задана реберно взвешенным графом $G = (V, E, w)$ и разбиением $V = V_1 \cup \dots \cup V_k$ на k попарно непересекающихся кластеров, требуется построить маршрут минимального веса, посещающий каждый кластер не менее одного раза. В отечественной литературе GTSP также известна под названием задача обхода мегаполисов, а в англоязычной как International TSP, set TSP, group TSP

и One-of-a-Set TSP. Постановка GTSP, в которой требуется построить маршрут, посещающий каждый кластер в точности в одной вершине именуется Equality-Generalized Traveling Salesman Problem или E-GTSP. В случае метрических пространств GTSP и E-GTSP совпадают.

Впервые задача GTSP была введена в конце 60-х годов в работах [69] и [107], в которых рассматривались модели передачи компьютерных файлов и распределения клиентов по агентствам социального обеспечения, а в качестве метода решения использовалось динамическое программирование. Иные практические приложения GTSP и E-GTSP подробно описаны в [96, 79, 7, 8, 9]. Ж. Лапорт и В. Ноберт [80, 82] сформулировали GTSP в качестве задачи целочисленного программирования, что позволило применить метод ветвей и границ при поиске точного решения. Позднее метод был усовершенствован и с его помощью получены точные решения для постановок GTSP большей размерности [55].

Одним из наиболее естественных кажется подход к решению GTSP, основанный на полиномиальной сводимости [84, 95, 46, 81, 21], сохраняющей стоимость исходной задачи, к подходящей постановке классической задачи коммивояжера. В некоторых случаях при применении этого подхода авторам удавалось сохранить размерность задачи, но, к сожалению, результирующие постановки TSP не наследуют полезные структурные свойства исходной задачи. Постановка TSP, соответствующая евклидовой GTSP, не обязательно является евклидовой и даже метрической, и для ее решения не удастся применить эффективные приближенные алгоритмы, такие как $3/2$ -приближенный алгоритм Н. Кристофидеса [38] или полиномиальная приближенная схема С. Ароры [15]. Кроме того, допустимое неоптимальное решение результирующей постановки TSP может оказаться недопустимым для исходной задачи, что также препятствует переносу разработанных для TSP приближенных алгоритмов [81, 73]. Однако вышеперечисленные трудности не повлияли на адаптацию К. Хельсгауном [66, 67, 68]

известного эвристического алгоритма С. Лина и Б. Кернигана [86] на случай GTSP, с помощью модифицированного алгоритма удалось найти точные решения всех постановок E-GTSP из библиотеки TSPLIB [102].

В области алгоритмов с оценками качества для метрической постановки GTSP известно не так много результатов. В [109] представлен $3\rho/2$ -приближенный алгоритм, где ρ — это мощность наибольшего из кластеров. Н. Гарг и Ж. Коньевод построили $O(\log^2(n) \log(\log(n)) \log k)$ -приближенный алгоритм для GTSP [58].

Наряду с GTSP большой интерес исследователей последние десятилетия был прикован к другому близкому обобщению задачи коммивояжера, в котором требуется найти замкнутый маршрут наименьшего веса, пересекающий заданные подмножества плоскости $N_1, \dots, N_k \subset \mathbb{R}^2$. Данные подмножества принято называть окрестностями, а саму задачу — задачей коммивояжера с окрестностями (Traveling Salesman Problem with Neighborhoods, TSPN). Несмотря на то, что задача GTSP может рассматриваться как частный дискретный случай TSPN, при котором $N_i = V_i$, большинство позитивных результатов в области аппроксимруемости получены при условии, что N_i являются телесными подмножествами плоскости (геометрическими фигурами). В работе [14] получены первые полиномиальные приближенные алгоритмы с фиксированными оценками точности для подклассов задачи TSPN, в которых окрестности являются непересекающимися единичными кругами и выпуклыми многоугольниками. Для общей постановки задачи в работе [90] предложен $O(\log k)$ -приближенный алгоритм. Кроме того, в известной работе А. Думитреску и Ж. Митчелла [49] построены первый $O(1)$ -приближенный алгоритм для случая произвольных связных окрестностей одинакового диаметра и полиномиальная приближенная схема для непересекающихся единичных кругов. Позднее Ж. Митчелл распространил этот результат на случай произвольных "тучных" (fat) окрестностей [92], а в работе [50] постро-

ено обобщение результатов [49] на случай произвольного d -мерного евклидового пространства. Что касается аппроксимируемости общей постановки TSPN, С. Сафра и О. Шварц [105] показали, что нельзя построить $(2 - \varepsilon)$ -приближенный алгоритм для TSPN, если $P \neq NP$. В связи с этим с точки зрения построения полиномиальных приближенных схем естественно отказаться от исследования TSPN и рассмотреть, например, обобщенную задачу коммивояжера, в которой кластеры индуцированы геометрическими объектами, клетками целочисленной решетки.

Рассмотрим евклидову постановку обобщенной задачи коммивояжера на сетке (Euclidean Generalized Traveling Salesman Problem in k Grid Clusters, EGTSP- k -GC). В этом частном случае GTSP задан реберно взвешенный граф $G = (V, E, w)$, в котором множество вершин V соответствует множеству точек на плоской целочисленной решетке. Каждая непустая 1×1 клетка порождает кластер. Вес ребра между двумя вершинами соответствует евклидову расстоянию между ними. На рис. 1.3 представлена постановка задачи EGTSP- k -GC для $k = 6$ и $n = 17$.

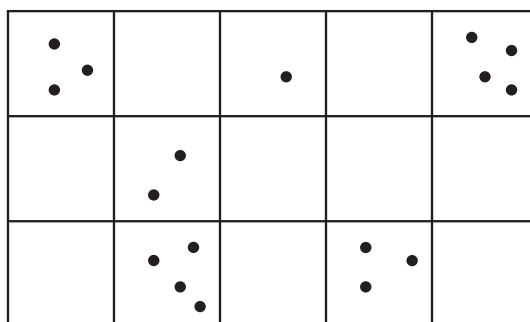


Рис. 1.3: Постановка задачи EGTSP- k -GC для $k = 6$

Впервые задача EGTSP- k -GC была введена в работе [23], для произвольного $\varepsilon > 0$ для нее был построен $(1.5 + 8\sqrt{2} + \varepsilon)$ -приближенный алгоритм как следствие аппроксимационных результатов, полученных авторами для обобщенной задачи об остовном дереве, в которой кластеры также индуцируются ячейками прямоугольной сетки (Generalized Minimum Spanning Tree Problem, GMSTP).

1.5 Пирамидальные маршруты

Рассмотрим классическую постановку задачи коммивояжера, заданную полным взвешенным графом. Для линейного порядка вершин графа $1, \dots, n$ пирамидальным называется маршрут вида $(1 = v_{i_1}, \dots, v_{i_r} = n, v_{i_{r+1}}, \dots, v_{i_n})$, где $v_{i_j} < v_{i_{j+1}}$ при $(1 \leq j \leq r - 1)$ и $v_{i_j} > v_{i_{j+1}}$ при $r + 1 \leq j \leq n - 1$. Битонические маршруты — это частный случай пирамидальных маршрутов для евклидовой постановки задачи коммивояжера на плоскости с линейным порядком, определенным осью координат. Для заданного графа имеется экспоненциальное число пирамидальных маршрутов, оптимальный среди которых может быть найден за полиномиальное время следующим алгоритмом.

Пусть P — упорядоченное множество из n точек на плоскости с различными x -координатами. С помощью алгоритма, опирающегося на метод динамического программирования, заполним матрицу $n \times n$ оптимальными весами фрагментов маршрутов. Определим $P_i := \{v_1, \dots, v_i\}$, фрагмент маршрута для P_i ($1 \leq i \leq n$) — это пара монотонных относительно заданного линейного порядка цепей P' и P'' , которые в совокупности посещают все точки из P_i и имеют единственную общую вершину v_1 . Назовем фрагмент маршрута для P_i (i, j) -фрагментом, если одна из цепей заканчивается в v_i , а другая в v_j .

Процедура заполнения таблицы динамического программирования $A[1..n, 1..n]$ организована следующим образом. Значение $A[i, j]$ для $1 \leq j < i \leq n$ определяется как минимальная длина (i, j) -фрагмента маршрута, для $i \leq j$ значения таблицы не определены. Строки таблицы заполняются последовательно по рекурсивной формуле

$$A[i + 1, j] = \begin{cases} A[i, j] + |v_i v_{i+1}| & 1 \leq j < i \\ \min_{1 \leq k < i} (A[i, k] + |v_k v_{i+1}|) & j = i \end{cases}$$

где $A[2, 1] = |v_1 v_2|$, а $|uv|$ обозначает длину отрезка $[u, v]$.

Для $(i + 1, j)$ -фрагментов с $j < i$ цепь P' , которая завершается в вершине v_{i+1} , гарантировано должна посетить v_i , так как последняя вершина второй цепи v_j и, учитывая свойство монотонности, P'' не может посетить v_i . Во втором случае при $j = i$ для $(i + 1, i)$ -фрагмента маршрута предшественником v_{i+1} очевидно не может быть v_i , отсюда данный фрагмент состоит из (i, k) -фрагмента для некоторого $1 \leq k < i$ и ребра $v_k v_{i+1}$. После заполнения таблицы длина кратчайшего пирамидального маршрута может быть вычислена как $\min_{1 \leq k < n} (A[n, k] + |v_k v_n|)$. Процедура является общеизвестной [76, 83, 41], и её сложность составляет $O(n^2)$. Однако в случае плоскости приведенный алгоритм не обладает наилучшим быстродействием, в 2016 году [22] с помощью аддитивной взвешенной диаграммы Вороного была построена процедура поиска кратчайшего пирамидального маршрута с трудоемкостью $O(n \log^2 n)$.

Ограниченная классом матриц расстояний \mathcal{M} задача коммивояжера называется пирамидально разрешимой, если для каждой постановки, соответствующей произвольной матрице весов из \mathcal{M} , существует оптимальный маршрут, обладающий свойством пирамидальности. В 70-е и 80-е годы было исследовано несколько пирамидально разрешимых подклассов TSP. По-видимому, впервые вопрос распознавания оптимального пирамидального маршрута по матрице расстояний был поставлен в работе В. Айзенштата и Д. Кравчука [12]. Авторы исследовали задачу коммивояжера на упорядоченных продуктивных матрицах $C = (c_{ij}) = (u_i \cdot v_j)$, где $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$ и $v_1 \geq v_2 \geq \dots \geq v_n \geq 0$. Упорядоченные продуктивные матрицы являются подклассом матриц Монге $n \times n$, отвечающих следующему семейству ограничений $c_{ij} + c_{rs} \leq c_{is} + c_{rj}$, при $1 \leq i < r \leq n$, $1 \leq j < s \leq n$. П. Гилмор, Е. Лаулер и Д. Шмойс показали, что если C — это матрица Монжа, то существует оптимальный маршрут, являющийся пирамидальным [83]. Более того, Ж. Парк обосновал [101], что задача коммивояжера, ограниченная классом матриц Монжа, разрешима за линейное

время.

Полный перечень классов матриц, для которых задача коммивояжера является пирамидально разрешимой, и обоснование соответствующих утверждений приведено в работах [114, 19, 33].

В конце 90-х годов Х. Еномото, Я. Ода и К. Ота описали [51, 97, 98] классы маршрутов, для которых задачи поиска оптимального гамильтонового цикла полиномиально разрешимы. Основная идея выделенных классов заключается в обобщении понятия пирамидального маршрута, например, следующим образом. Для линейного порядка вершин графа l -квазипирамидальным называется маршрут вида $\tau = (1 = v_{i_1}, \dots, v_{i_r} = n, v_{i_{r+1}}, \dots, v_{i_n})$, если неравенства $v_{i_p} - v_{i_q} \leq l$ и $v_{i_{q'}} - v_{i_{p'}} \leq l$ выполняются для произвольных $2 \leq p < q \leq r - 1$ и $r + 1 \leq p' < q' \leq n - 1$. Маршрут τ называется l -псевдопирамидальным, если неравенства $v_{i_p} - v_{i_{p+1}} \leq l$ и $v_{i_q} - v_{i_{q+1}} \leq l$ выполняются для произвольных $2 \leq p \leq r - 1$ и $r + 1 \leq q \leq n - 1$.

Задача коммивояжера на минимум в классе l -квазимипирамидальных и l -псевдопирамидальных маршрутов разрешима за $O(8^l n^2)$ и $O(2^l n^{l+3})$ соответственно [98]. В главе 3 предложено обобщение результата на случай GTSP и показано, что обобщенная задача коммивояжера с симметричной неотрицательной матрицей весов обладает $O(4^l n^3)$ -алгоритмом и, как следствие, принадлежит классу FPT. Данный результат сыграл ключевую роль в обосновании полиномиально разрешимого подкласса геометрической задачи коммивояжера на сетке, удалось показать, что задача EGTSP- k -GC, стесненная дополнительным ограничением на высоту сетки $H \leq 2$, разрешима за кубическое время.

Глава 2

Задача о цикловом покрытии графа

В главе обоснован статус вычислительной сложности задачи Min- k -SCCP. Для евклидовой постановки задачи с произвольным фиксированным значением параметра k приведена полиномиальная приближенная схема. Также построен 2-приближенный алгоритм с достижимой оценкой точности для метрической постановки Min- k -SCCP, тем самым обоснована принадлежность задачи классу APX.

2.1 Вычислительная сложность задачи Min- k -SCCP

Обоснуем труднорешаемость задачи Min- k -SCCP при произвольном $k \geq 1$. Рассуждения основаны на идее “клонирования” постановки сводимой задачи, использованной, например, в [2] при доказательстве труднорешаемости задачи поиска нескольких дизъюнктивных клик заданного порядка (m -Weighted Clique Problem, m -WCP).

Теорема 1. *Задача Min- k -SCCP NP-трудна в сильном смысле при произвольном фиксированном $k \geq 1$.*

Доказательство. При $k = 1$ теорема очевидно верна поскольку задача Min-1-SCCP совпадает с NP-трудной в сильном смысле задачей TSP.

Зафиксируем произвольное $k > 1$. Рассмотрим произвольную постановку задачи TSP, заданную полным взвешенным неориентированным графом $G = (V, E, w)$ на n вершинах. Без ограничения общности полагаем $V = \mathbb{N}_n$. Положим

$$p = \sum_{1 \leq i < j \leq n} w_{ij} + 1.$$

Доопределим функцию w равенствами $w_{ii} = 0$ и рассмотрим постановку задачи Min- k -SCCP, заданную полным взвешенным графом $G' = (V', E', w')$ с петлями при каждой вершине, в котором

$$V' = V_1 \cup \dots \cup V_k, \quad V_l = \{n(l-1) + 1, n(l-1) + 2, \dots, nl\} \quad (1 \leq l \leq k),$$

а вес $w'(e)$ дуги $e = (x, y)$ для произвольных $x \in V_{k_1}, y \in V_{k_2}$ таких, что $i \equiv x \pmod{n}, j \equiv y \pmod{n}$, определяется равенством

$$w'(e) = w_{ij} + p \operatorname{sign} |k_1 - k_2|.$$

По построению $w'(e) \geq w_{ij}$, причем равенство достигается исключительно при условии $k_1 = k_2$. Заметим, что проведенное построение может быть произведено за полиномиальное (от длины записи исходной постановки задачи TSP) время.

Пусть $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, \dots, C_k^*\}$ — оптимальное решение построенной постановки задачи Min- k -SCCP, цикловое покрытие размера k минимального веса графа G' . По выбору p каждому $l \in \mathbb{N}_k$ взаимно однозначно соответствует такой номер $k(l) \in \mathbb{N}_k$, что $V_{C_l^*} = V_{k(l)}$. Таким образом, простой цикл C_l^* является гамильтоновым циклом минимального веса подграфа $G'(V_{k(l)})$ в силу аддитивности оптимизационного критерия задачи. По построению графа G' подграф $G'(V_{k(l)})$ изоморфен графу G . Следовательно, произвольный простой цикл C_l^* однозначно порождает решение исходной задачи TSP.

□

Путем несложной модификации приведенного выше доказательства нетрудно обосновать полиномиальную сводимость задачи Metric TSP к задаче Metric

Min- k -SCCP и задачи Euclidean TSP (в пространстве произвольной фиксированной размерности $d > 1$) к задаче Euclidean Min- k -SCCP (в том же пространстве). Тем самым задача Min- k -SCCP сохраняет труднорешаемость и в этих частных случаях.

2.2 Принадлежность задачи Metric Min- k -SCCP классу APX

Ниже показано, что как и в случае задачи коммивояжера, задача Min- k -SCCP в метрической постановке принадлежит классу APX задач комбинаторной оптимизации, обладающих полиномиальными приближенными алгоритмами с фиксированной точностью, а именно обладает 2-приближенным алгоритмом.

2.2.1 Алгоритм построения минимального остовного k -леса

Определение 1. k -лесом называется ациклический подграф неориентированного графа G , состоящий из k компонент связности (среди которых возможны компоненты, состоящие из одной вершины). Весом (стоимостью) k -леса назовем суммарный вес всех входящих в него ребер.

Определение 2. Остовный подграф графа G , являющийся k -лесом, называется остовным k -лесом. Минимальным остовным k -лесом (k -Minimum Spanning Forest, k -MSF) называется остовный k -лес наименьшего веса.

Построим на вершинах исходного графа минимальный остовный k -лес, воспользовавшись простой модификацией алгоритма Борувки-Краскала [78, 94], и обоснуем корректность приведенного алгоритма.

А л г о р и т м 1

1. Начать с “пенькового” леса F_0 .

2. Для каждого $i \in \mathbb{N}_{n-k}$ добавить в строящийся лес F_{i-1} ребро

$$e_i = \arg \min\{w(e) : F_{i-1} \cup \{e\} \text{ — ациклический граф}\}.$$

3. Выдать построенный k -лес F^* .

Следующее утверждение обосновывает корректность работы алгоритма.

Утверждение 1. F^* есть k -MSF.

Доказательство. Очевидно F^* является k -лесом, это верно по построению. Необходимо показать, что вес $W(F^*)$ k -леса F^* принимает наименьшее возможное значение.

Предположим обратное, пусть (e_1, \dots, e_{n-k}) последовательность ребер F^* , упорядоченных в соответствии с их добавлением в строящийся лес Алгоритмом 1. Для произвольного k -MSF F обозначим через $h(F)$ наибольший индекс, такой что $e_1, \dots, e_h \in F$. По построению

$$w(e_{h+1}) \leq w(f) \quad (f \in F \setminus F^*). \quad (2.1)$$

Пусть

$$F' = \arg \max\{h(F) : F \text{ является } k\text{-MSF}\}. \quad (2.2)$$

Согласно нашему предположению $h(F') < n - k$. Рассмотрим граф $F' \cup \{e_{h+1}\}$. Имеется две альтернативы, граф $F' \cup \{e_{h+1}\}$ ациклический либо содержит один простой цикл. Мы обоснуем второй случай, первый может быть рассмотрен по аналогии.

Пусть C — простой цикл в графе $F' \cup \{e_{h+1}\}$. Поскольку F^* является лесом, в C содержится ребро $f \in F' \setminus F^*$. Рассмотрим граф $\tilde{F} = F' \cup \{e_{h+1}\} \setminus \{f\}$. По построению \tilde{F} — k -лес, и

$$W(\tilde{F}) = W(F') + w(e_{h+1}) - w(f) \leq W(F')$$

согласно неравенству (2.1). Отсюда \tilde{F} является k -MSF. Кроме того, $h(\tilde{F}) > h(F')$, что противоречит оптимальности F' в (2.2). Таким образом, наше предположение неверно, и F^* является k -лесом наименьшего веса.

□

2.2.2 2-приближенный алгоритм для задачи Metric Min- k -SCSP

В целом алгоритм повторяет схему известного 2-приближенного алгоритма для метрической задачи коммивояжера. Без ограничения общности полагаем $k < n$, так как при $k > n$ постановка задачи теряет смысл, а при $k = n$ элементарно находится оптимальное решение.

А л г о р и т м 2

1. Применяя Алгоритм 1, строим остовный k -лес минимального веса в графе G .

2. Удваиваем ребра в построенном лесу, преобразуя все его непустые деревья в эйлеровы подграфы.

3. В каждом построенном эйлеровом подграфе находим эйлеров маршрут, который стандартным образом, опираясь на неравенство треугольника, преобразовываем в гамильтонов цикл (для данной компоненты связности).

4. В качестве ответа выдаем построенную совокупность циклов, дополненную необходимым числом вырожденных одновершинных маршрутов.

Утверждение 2. Алгоритм 2 имеет трудоемкость $O(n^2 \log n)$ и гарантированную оценку точности r , удовлетворяющую следующему неравенству

$$2(1 - 2/n) \leq r \leq 2(1 - 1/n). \quad (2.3)$$

Доказательство. Оценка трудоемкости Алгоритма 1 ограничена сверху оценкой трудоемкости алгоритма Борувки-Краскала, то есть $O(|E| \log |E|)$ [40]. В то время как оценка трудоемкости шагов 2 и 3 Алгоритма 2 составляет $O(|E|)$.

Отсюда временная сложность Алгоритма 2 ограничена сверху $O(n^2 \log n)$ для заданного полного графа G .

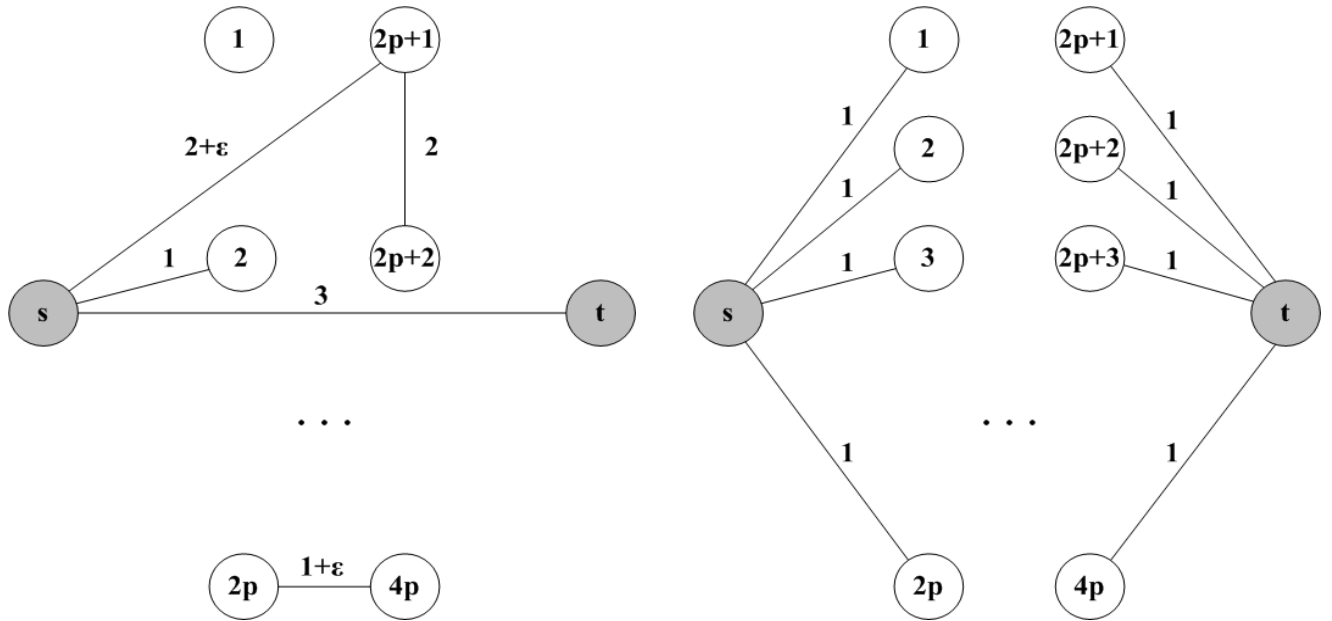


Рис. 2.1: Постановка задачи Min- k -SCCP и 2-MSF.

Для обоснования правой части неравенства (2.3) рассмотрим произвольное цикловое покрытие \mathcal{C} размера k минимального веса. Поскольку $k < n$, \mathcal{C} содержит хотя бы один непустой цикл, возможно на двух вершинах. Процедурой удаления по одному ребру из каждого цикла покрытия преобразуем \mathcal{C} в остовный лес, вес которого обозначим через SF (Spanning Forest, SF). Обозначив через MSF (Minimum Spanning Forest, MSF) вес минимального остовного леса из k деревьев и через APP (Approximation, APP) вес построенного с помощью Алгоритма 2 решения, получим

$$MSF \leq SF \leq OPT(1 - 1/n),$$

отсюда

$$APP \leq 2MSF \leq 2(1 - 1/n)OPT,$$

и

$$r \leq 2(1 - 1/n).$$

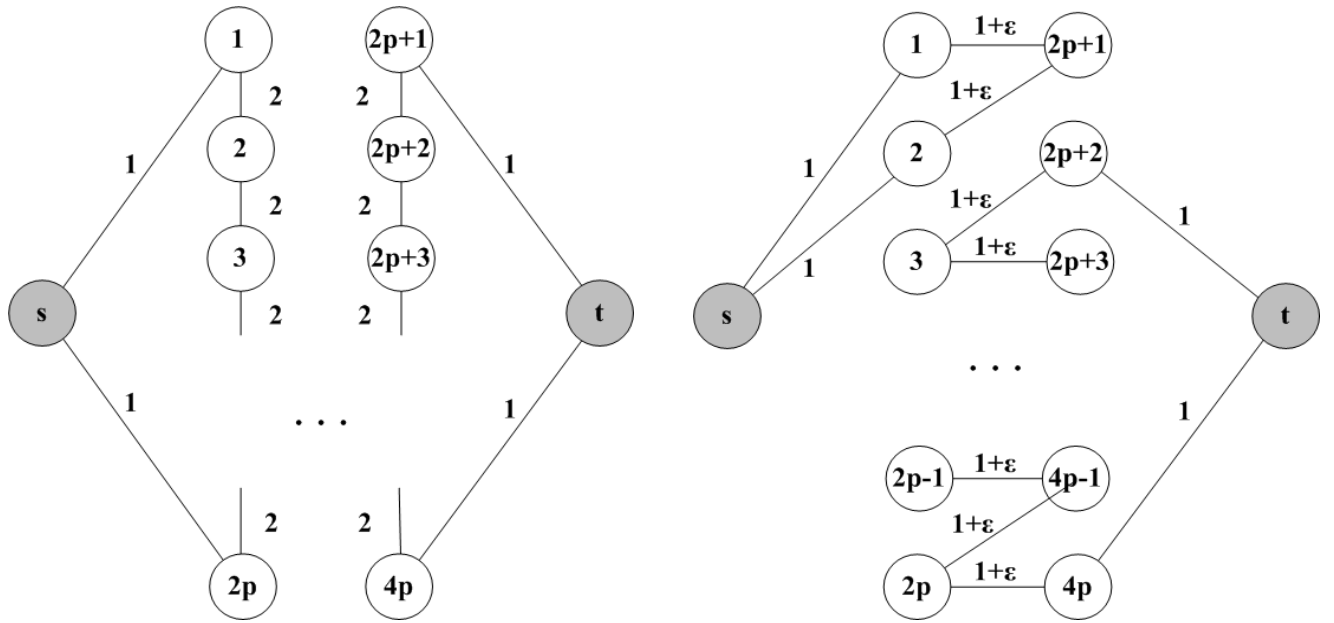


Рис. 2.2: Приближенное решение, построенное Алгоритмом 2, и приближение Min-2-SCCP меньшего веса.

Для доказательства левой части неравенства (2.3) рассмотрим следующую постановку Min-2-SCCP (Рис. 2.1). Пусть G — это полный взвешенный граф без петель и $n = 4p + 2$ для некоторого $p > 1$. Среди n вершин графа имеется две выделенные вершины s и t . Для произвольных $1 \leq i, l \leq 2p$ и $2p + 1 \leq j, m \leq 4p$, таких что $i \neq l$ и $j \neq m$, весовая функция определяется следующими равенствами:

- 1) $w_{si} = w_{tj} = 1$,
- 2) $w_{sj} = w_{ti} = 2 + \epsilon$,
- 3) $w_{ij} = 1 + \epsilon$,
- 4) $w_{il} = w_{jm} = 2$,
- 5) $w_{st} = 3$,

где $\epsilon \in (0, 1)$.

Для данной постановки задачи вес минимального остовного леса на двух деревьях F равен $4p$ (Рис. 2.1), отсюда $APP = 8p$ (Рис. 2.2). Нетрудно заметить,

что существуют решения меньшего веса, одно из них представлено на (Рис. 2.2). В этом случае вес аппроксимации равен $4 + 2(1 + \epsilon)(2p - 1)$. Следовательно

$$OPT \leq 2 + 4p + 2\epsilon(2p - 1).$$

Отсюда

$$r \geq \sup_{\epsilon \in (0,1)} \frac{8p}{2 + 4p + 2\epsilon(2p - 1)},$$

таким образом

$$r \geq \frac{4p}{1 + 2p},$$

и

$$r \geq 2(1 - 2/n).$$

□

Заметим, что оценки точности и трудоемкости предложенного алгоритма не зависят от k . Таким образом, алгоритм сохраняет свои аппроксимационные свойства, даже если параметр k является частью входа решаемой задачи.

2.3 Полиномиальная приближенная схема для задачи Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d

Общая схема алгоритма состоит из пяти основных частей.

1. Декомпозиция задачи на m ($m \leq k$) независимых подзадач о цикловом покрытии графа и получение оценки сверху для длин сторон гиперкубов, объемлющих вершины графов, определяющих данные подзадачи, с помощью функции, которая выражает линейную зависимость от веса OPT оптимального циклового покрытия размера k .

2. Доказательство утверждения о том, что произвольной постановке задачи Euclidean Min- k -SCCP и каждому значению параметра s за полиномиальное время может быть сопоставлена округленная постановка так, что произвольный

$(1 + 1/c)$ -приближенный алгоритм для округленной постановки задачи индуцирует $(1 + c_1/c)$ -приближенный алгоритм для исходной задачи (для некоторого независимого значения $c_1 > 1$).

3. Построение рекурсивного разбиения объемлющего гиперкуба, содержащего вершины графа, задающего округленную постановку задачи Euclidean Min- k -SCCP.

4. Доказательство теоремы, утверждающей, что с вероятностью, не меньшей $1/2$, в рамках выбранной вероятностной модели существует $(1 + 1/c)$ -оптимальный набор маршрутов специального вида, именуемый цикловым (m, r, k) -покрытием графа G . Понятие циклового (m, r, k) -покрытия графа введено в разделе 2.3.4.

5. Построение $(1 + 1/c)$ -оптимального циклового (m, r, k) -покрытия графа с помощью метода динамического программирования и стандартной схемы дерандомизации.

2.3.1 Декомпозиция евклидовой задачи о цикловом покрытии графа

Как известно, диаметр D множества и радиус R описанной вокруг него сферы в евклидовом пространстве размерности d связаны между собой неравенством Юнга [71]

$$\frac{1}{2}D \leq R \leq \left(\frac{d}{2d+2}\right)^{1/2} D. \quad (2.4)$$

Центр такой сферы называется чебышевским центром. Построим минимальный остовный лес из k деревьев (k -MSF) T_1, T_2, \dots, T_k , воспользовавшись Алгоритмом 1.

Введем ряд обозначений:

D_i — диаметр множества вершин, входящих в дерево T_i , $i \in \mathbb{N}_k = \{1, \dots, k\}$;

D — максимальное значение D_i ($i \in \mathbb{N}_k$);

R_i — радиус описанной вокруг T_i сферы;

R — максимальное значение R_i ($i \in \mathbb{N}_k$);

c_i — чебышевский центр, соответствующий дереву T_i .

Построим разбиение множества деревьев на $m \leq k$ кластеров методом ближайшего соседа [56]. Деревья T_i и T_j принадлежат одному кластеру только в том случае, если

$$\|c_i - c_j\|_2 \leq (2k + 1)R.$$

Для каждого построенного кластера объединим множества вершин всех деревьев, вошедших в данный кластер, и обозначим эти множества S_i ; таким образом получим кластеризацию S_1, S_2, \dots, S_m вершин исходного графа G . Под диаметром кластера будем понимать максимальное расстояние между входящими в него вершинами.

Утверждение 3. *Любой маршрут, входящий в оптимальное цикловое покрытие размера k для графа G , проходит через вершины, соответствующие только одному из кластеров S_1, S_2, \dots, S_m . Кроме того, диаметры кластеров ограничены сверху и выполняется неравенство*

$$\max_{i \in \mathbb{N}_m} D_{S_i} \leq \left(\frac{d}{2d + 2} \right)^{1/2} (2k^2 - k + 1)OPT. \quad (2.5)$$

Доказательство. Предположим от противного, что один из k маршрутов циклового покрытия наименьшего веса содержит вершины как из S_i , так и из S_j , где $\{i, j\} \subset \mathbb{N}_m$.

Обозначим этот маршрут через P . По предположению P содержит хотя бы два ребра, соединяющих вершины из разных кластеров, суммарная длина которых по условию больше $2(2k - 1)R$.

В маршруте P могут чередоваться вершины из разных сфер (Рис. 2.3). Пусть $\{u, v\}$ — произвольное ребро, входящее в P , такое, что $u \in S_i$, $v \in S_j$. Зафиксировав порядок обхода вершин маршрута $P: u \rightarrow u_{i_1} \rightarrow \dots \rightarrow v$, построим

разбиение P на фрагменты таким образом, чтобы каждой сфере соответствовал фрагмент P между первой и последней посещенными внутри данной сферы вершинами, и удалим ребра маршрута P , соединяющие вершины из различных фрагментов (Рис. 2.4).

Поставим в соответствие сфере, описанной вокруг дерева T_i , числа l_i ($0 \leq l_i \leq k - 1$) и p_i ($0 \leq p_i \leq 1$), равные числу циклов и количеству фрагментов маршрута P , отнесенных данной сфере (Рис. 2.4). Если цикл соединяет вершины из нескольких деревьев и пересекает соответствующие описанные сферы, то сопоставим его одной из этих сфер, выбранной произвольным образом. По построению верны следующие соотношения

$$\sum_{i=1}^k l_i = k - 1 \quad \text{и} \quad 2 \leq \sum_{i=1}^k p_i \leq k. \quad (2.6)$$

Пусть q — это количество сфер, для которых $l_i + p_i = 0$. Рассмотрим два случая: $q = 0$ и $q \geq 1$. В первом случае построим цикловое покрытие размера k следующим образом. Для i -й сферы объединим в один цикл l_i соответствующих замкнутых маршрутов и фрагмент P с помощью добавления не более, чем $(l_i + p_i)$ новых ребер внутри данной сферы, вес каждого из которых не превосходит $2R$ (Рис. 2.5). Выполним указанное преобразование для каждой из k сфер, при этом стоимость циклового покрытия увеличится не более, чем на

$$2R \sum_{i=1}^k (l_i + p_i) \leq 2(2k - 1)R$$

в силу соотношений (2.6), в то время как суммарный вес удаленных ребер превышает эту величину. Таким образом, в предположении $q = 0$ обосновано существование циклового покрытия размера k для графа G , вес которого строго меньше веса первоначального решения.

Во втором случае $q \geq 1$, и следовательно $(k - q)$ сферам, для каждой из которых $l_i + p_i > 0$, соответствует $(k - 1)$ цикл и не менее двух фрагментов P .

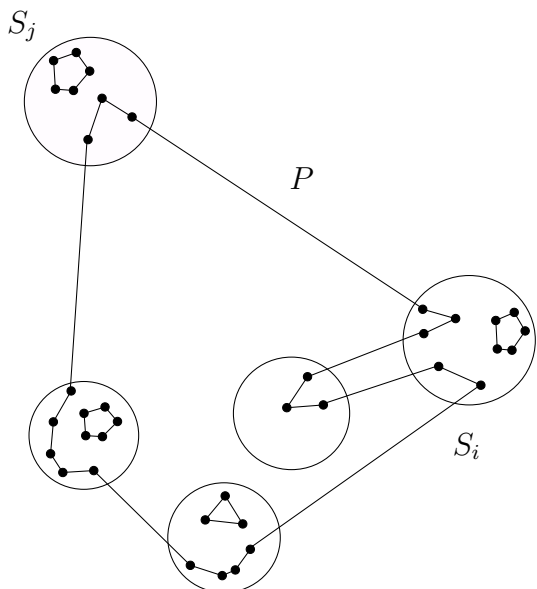


Рис. 2.3: В P чередуются вершины из разных сфер, $k = 5$.

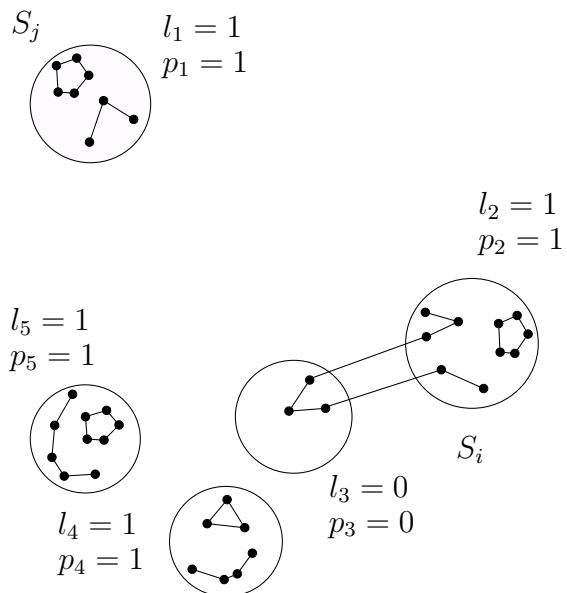


Рис. 2.4: Разбиение P на фрагменты.

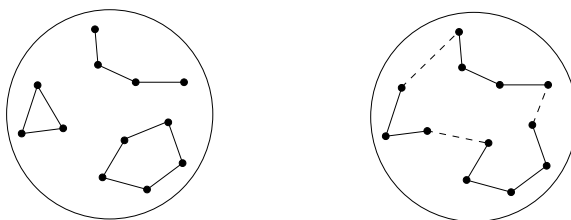


Рис. 2.5: Замыкание фрагмента P и 2-х циклов в один маршрут ($l_i = 2$, $p_i = 1$).

Заметим, что одной сфере не может быть отнесено более одного фрагмента P . Тогда не менее $(q+1)$ цикла распределено по сферам, в которых уже содержится цикл либо фрагмент P . Исключим q циклов из рассмотрения таким образом, чтобы количество сфер, для которых $l_i + p_i = 0$, не изменилось. Получим, что $(k - q)$ сферам приписаны $(k - q - 1)$ цикл и фрагменты P . Справедливы следующие соотношения:

$$l_i + p_i > 0, \quad i = 1, \dots, k - q,$$

$$\sum_{i=1}^{k-q} l_i = k - q - 1 \quad \text{и} \quad 2 \leq \sum_{i=1}^{k-q} p_i \leq k - q. \quad (2.7)$$

Для указанных $(k - q)$ сфер выполним преобразование, аналогичное проведенному в первом случае. Для каждой сферы объединим в один цикл сопоставлен-

ные ей замкнутые маршруты и фрагмент P с помощью добавления не более, чем $(l_i + p_i)$ новых ребер внутри данной сферы (Рис. 2.5). Таким образом, мы построим цикловое покрытие размера $(k - q)$ с помощью модификации, увеличивающей вес циклового покрытия не более, чем на

$$2R \sum_{i=1}^{k-q} (l_i + p_i) \leq 2(2k - 2q - 1)R,$$

в силу соотношений (2.7). Добавим к полученному цикловому покрытию q циклов, ранее исключенных из преобразования, и получим цикловое покрытие размера k , вес которого также строго меньше веса исходного покрытия.

Тем самым обосновано существование k -циклового покрытия, вес которого строго меньше веса исходного решения, что противоречит предположению об оптимальности последнего.

Оценим диаметр полученных кластеров. В пространстве \mathbb{R}^d диаметр кластера будет наибольшим, если центры сфер, описанных вокруг деревьев k -MSF и образующих данный кластер, лежат на одной прямой. Любой кластер из разбиения множества вершин V исходного графа G содержит не более k сфер, поэтому выполняется неравенство

$$\max_{i \in \mathbb{N}_m} D_{S_i} \leq (k - 1)(2k + 1)R + 2R.$$

Применяя неравенство (2.4) и учитывая очевидную двустороннюю оценку $D \leq MSF \leq OPT$ для веса минимального остовного леса $\{T_1, T_2, \dots, T_k\}$, получаем

$$R \leq \left(\frac{d}{2d + 2} \right)^{1/2} D \leq \left(\frac{d}{2d + 2} \right)^{1/2} OPT.$$

Отсюда верна оценка

$$\max_{i \in \mathbb{N}_m} D_{S_i} \leq \left(\frac{d}{2d + 2} \right)^{1/2} (2k^2 - k + 1)OPT.$$

□

Таким образом, если $m = k$, то задача Euclidean Min- k -SCCP разбивается на k независимых подзадач TSP. В частности, PTAS для задачи Euclidean Min- k -SCCP может быть построена комбинацией PTAS для этих подзадач.

Однако, если количество построенных кластеров строго меньше k , то необходимо перебрать все возможные случаи распределения k циклов по m кластерам, для каждого случая решить m независимых подзадач о цикловом покрытии и выбрать оптимальное решение. Количество таких случаев совпадает с числом композиций k длины m и равно биномиальному коэффициенту из $(k - 1)$ по $(m - 1)$ [10].

Остановимся на рассмотрении частного случая задачи Euclidean Min- k -SCCP, для которого $m = 1$, так как он является наихудшим с точки зрения вычислительной сложности.

2.3.2 Округленная задача Euclidean Min- k -SCCP

Покажем, что для построения PTAS для задачи Euclidean Min- k -SCCP достаточно построить аналогичную схему для некоторого ее подкласса. По аналогии с понятием округленной задачи TSP (well-rounded TSP), принятым в [15], введем понятие округленной задачи Euclidean Min- k -SCCP.

Определение 3. *Округленной назовем постановку задачи Euclidean Min- k -SCCP, для которой выполняются следующие ограничения: все вершины графа имеют целочисленные координаты $x_i, y_i \in \mathbb{N}_{O(n)}^0$ и вес любого ребра e_{ij} больше или равен 4.*

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *PTAS для округленной Euclidean Min- k -SCCP индуцирует PTAS для общей задачи Euclidean Min- k -SCCP.*

Доказательство. Докажем лемму конструктивно, сопоставив постановке зада-

чи Euclidean Min- k -SCCP округленную постановку так, чтобы стоимость любой пары маршрутов изменилась несущественно.

Положим

$$L = \left(\frac{d}{2d+2}\right)^{1/2} (2k^2 - k + 1)MSF \leq \left(\frac{d}{2d+2}\right)^{1/2} (2k^2 - k + 1)OPT$$

и построим объемлющий вершины графа G гиперкуб \mathcal{S} со стороной L . Исходная постановка задачи Euclidean Min- k -SCCP удовлетворяет неравенству (2.5), следовательно, такое построение возможно.

Построим внутри \mathcal{S} ортогональную решетку с расстоянием между гиперплоскостями $L/8cn\sqrt{d}$ и переместим вершины заданного графа в ближайшие к ним узлы решетки. Расстояние между любыми двумя вершинами увеличится при этом не более чем на $L/4cn$, соответственно вес циклового покрытия размера k изменится не более чем на $L/4c$.

Изменим расстояние между гиперплоскостями решетки, умножив все координаты на $32cn\sqrt{d}/L$. Тогда минимальное расстояние между вершинами станет равно 4, а длина стороны объемлющего гиперкуба — $O(cn\sqrt{d})$. Поместим начало координат в одном из углов \mathcal{S} и расположим координатные оси таким образом, чтобы ребра гиперкуба принадлежали осям и все вершины графа имели неотрицательные координаты.

Изначально расстояние между любыми двумя вершинами не превосходило $\sqrt{d}L$. Следовательно, после произведенных преобразований расстояние между произвольными вершинами будет ограничено сверху $O(n)$ и координаты всех вершин $x, y \in \mathbb{N}_{O(n)}^0$.

Заметим, что для любого маршрута в исходной задаче стоимостью W стоимость W' соответствующего ему маршрута в округленной задаче удовлетворяет соотношению

$$\frac{32cn\sqrt{d}}{L} \left(W - \frac{L}{4c}\right) \leq W' \leq \frac{32cn\sqrt{d}}{L} \left(W + \frac{L}{4c}\right).$$

Пусть OPT и OPT' — стоимости оптимальных решений задачи Min- k -SCCP в исходной и округленной постановках, W' — стоимость приближенного решения округленной задачи, полученного PTAS, и W — стоимость соответствующего решения задачи в исходной постановке. Поскольку

$$OPT' \leq W' \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) OPT'$$

и

$$\frac{32cn\sqrt{d}}{L} \left(OPT - \frac{L}{4c} \right) \leq OPT' \leq \frac{32cn\sqrt{d}}{L} \left(OPT + \frac{L}{4c} \right),$$

то

$$\frac{32cn\sqrt{d}}{L} \left(W - \frac{L}{4c} \right) \leq W' \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) OPT' \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) \frac{32cn\sqrt{d}}{L} \left(OPT + \frac{L}{4c} \right),$$

откуда

$$W - \frac{L}{4c} \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) \left(OPT + \frac{L}{4c} \right)$$

и, следовательно,

$$OPT \leq W \leq \left(1 + \frac{1}{c} + \left(\frac{d}{2d+2}\right)^{1/2} (2k^2 - k + 1) \left(\frac{1}{4c^2} + \frac{1}{2c}\right)\right) OPT.$$

□

2.3.3 Рекурсивное разбиение объемлющего гиперкуба \mathcal{S}

Построим геометрическое разбиение задачи с помощью структуры данных 2^d -дерево, аналогичной 4-дереву [54] для случая плоскости.

Длину стороны L объемлющего гиперкуба \mathcal{S} примем равной наименьшей подходящей степени двойки. Организуем процедуру построения 2^d -дерева следующим образом: \mathcal{S} — корень дерева, каждый гиперкуб, включая корневой, делим на 2^d равных дочерних гиперкуба. Повторяем данную процедуру рекурсивно до тех пор, пока не получим гиперкубы, содержащие не более одной вершины исходной задачи (Рис. 2.6). Договоримся считать, что \mathcal{S} принадлежит

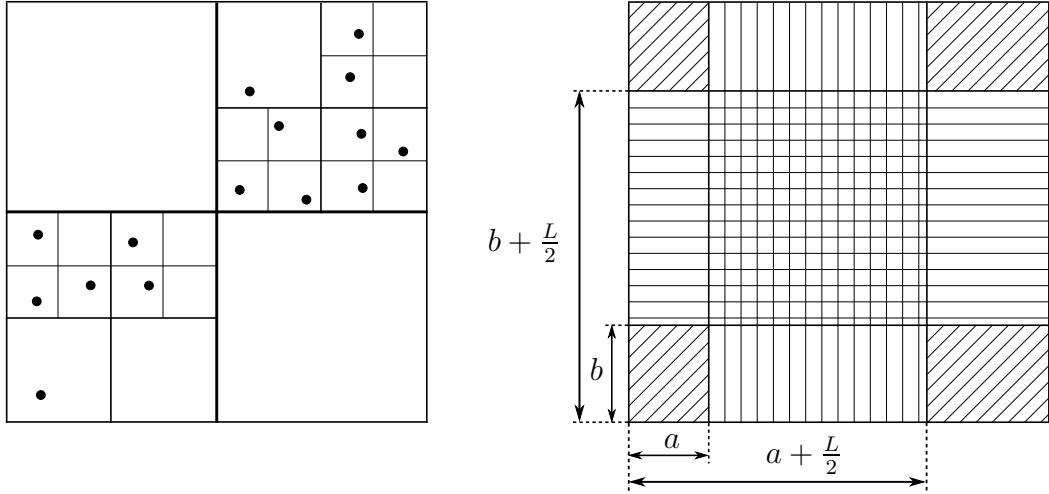


Рис. 2.6: 2^d -дерево для случая $d = 2$ и схема сдвига $T(a, b)$

уровню 0, 2^d его дочерних гиперкуба — уровню 1 и так далее. Заметим, что построенное дерево содержит $O(2^d n)$ листьев, $O(\log L) = O(\log(cn\sqrt{d}))$ уровней, и соответственно количество узлов 2^d -дерева можно оценить сверху как $O(2^d n \log(cn\sqrt{d}))$.

Зададимся значением параметра $m \in \mathbb{N}$ и поставим в соответствие каждой $(d - 1)$ -мерной грани узла дерева ортогональную сетку из $m + 2^{d-1}$ порталов. Заметим, что в отличие от случая плоскости не каждое натуральное число является допустимым значением параметра m .

Утверждение 4. Расстояние между ближайшими порталами на грани узла i -го уровня 2^d -дерева равно $O(L/2^i m^{1/(d-1)})$.

Доказательство. Для построения ортогональной сетки на грани d -мерного куба необходимо $(m_1 + 2)^{d-1} - 2^{d-1}$ порталов, где $m_1 \in \mathbb{N}$ — это количество порталов на ребре гиперкуба (Рис. 2.7).

Длина стороны гиперкуба i -го уровня равна $L/2^i$ по построению, отсюда расстояние между соседними порталами на грани данного узла вычисляется как $L/2^i(m_1 + 1)$.

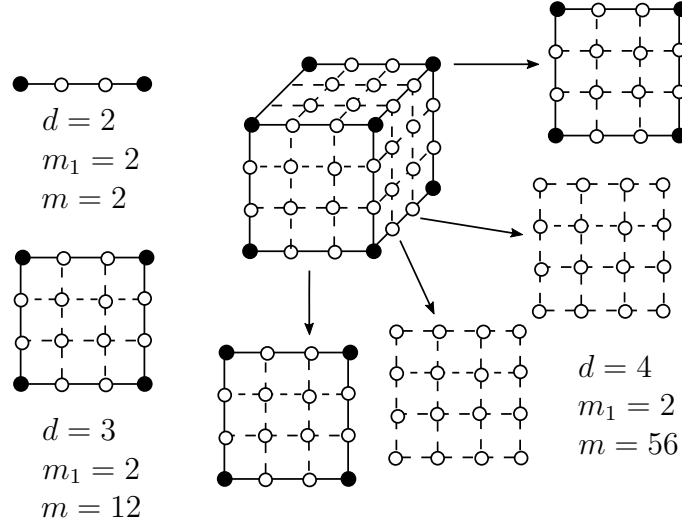


Рис. 2.7: Пример построения ортогональной сетки порталов при $d = 2, 3, 4$.

Покажем, что верно неравенство

$$\frac{L}{2^i(m_1 + 1)} \leq \frac{3}{2} \cdot \frac{L}{2^i m^{1/(d-1)}};$$

это эквивалентно

$$m_1 + 1 \geq \frac{2}{3}((m_1 + 2)^{d-1} - 2^{d-1})^{1/(d-1)}.$$

При стремлении d к бесконечности значение выражения $((m_1 + 2)^{d-1} - 2^{d-1})^{1/(d-1)}$ асимптотически стремится снизу к величине $m_1 + 2$, поэтому

$$\frac{m_1 + 1}{((m_1 + 2)^{d-1} - 2^{d-1})^{1/(d-1)}} \geq \frac{m_1 + 1}{m_1 + 2} \geq \frac{2}{3}.$$

Таким образом, если гиперкуб в 2^d -дереве имеет уровень i , то расстояние между ближайшими порталами можно оценить как $O(L/2^i m^{1/(d-1)})$. \square

Введем понятия центральной точки и дерева с циклическим сдвигом, необходимые для дальнейших построений.

Назовем центральной d -мерную точку, все координаты которой равны $L/2$.

Определение 4. Пусть $a_1, a_2, \dots, a_d \in \mathbb{N}_L$ 2^d -деревом $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ назовем 2^d -дерево, для которого точка $((L/2 + a_1) \bmod L, (L/2 + a_2) \bmod L, \dots, (L/2 + a_d) \bmod L)$ является центральной.

Гиперкубы, принадлежащие произвольному уровню $i \geq 1$ дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$, как и его центральная точка, подвергаются циклическому сдвигу по каждой из d координатных осей, при этом положение \mathcal{S} и координаты вершин графа G остаются неизменными (Рис. 2.6).

Определение 5. *Объединение разбиений порталами $(d - 1)$ -мерных граней всех узлов 2^d -дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ за исключением \mathcal{S} называется m -регулярным множеством порталов и обозначается $P(a_1, a_2, \dots, a_d; m)$.*

2.3.4 Теорема существования

Обоснуем в этом разделе существование циклового покрытия размера k для заданного графа G , обладающего рядом свойств. Обозначим через $V(C)$ множество вершин произвольного цикла C в графе G ($V(C) \subseteq V$).

Определение 6. *(m, r) -аппроксимацией называется замкнутая ломаная $l(C)$, удовлетворяющая следующим условиям:*

- (i) множество вершин $l(C)$ является подмножеством $V(C) \cup P(a_1, a_2, \dots, a_d; m)$;*
- (ii) ломаная $l(C)$ обходит вершины $V(C)$ в порядке, задаваемом маршрутом C ;*
- (iii) $l(C)$ пересекает каждую грань произвольного узла дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ не более r раз ($r \in \mathbb{N}$), причем исключительно в точках множества $P(a_1, a_2, \dots, a_d; m)$.*

Приведем одну из эквивалентных формулировок теоремы 5 из [15].

Теорема 2 (Structure Theorem for Euclidean TSP in \mathbb{R}^d). *Пусть постановка округленной задачи TSP в \mathbb{R}^d задается полным евклидовым графом G , длина стороны обьемлющего гиперкуба \mathcal{S} которого равна L , и задана константа*

$c > 0$. Пусть дискретные случайные величины a_1, a_2, \dots, a_d распределены равномерно и независимо на множестве \mathbb{N}_L .

Тогда для любого $\eta \in (0, 1)$ найдутся $D_1, D_2 > 0$ такие, что при $r = \lceil (D_1 \sqrt{dc})^{d-1} \rceil$, $m = \lceil (D_2 dc \log L)^{d-1} \rceil$ для произвольного простого цикла C в графе G веса $W(C)$ с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, существует (m, r) -аппроксимация $l(C)$, вес которой не превосходит $(1 + 1/c)W(C)$.

Определение 7. Пусть $\mathcal{C} = \{C_1, \dots, C_k\}$ — произвольное цикловое покрытие размера k графа G , $l(C_i)$ — (m, r) -аппроксимация цикла C_i . Множество $\mathcal{L}(\mathcal{C}) = \{l(C_1), \dots, l(C_k)\}$ назовем цикловым (m, r, k) -покрытием графа G .

Докажем следующую теорему.

Теорема 3. Пусть $c > 0$ — произвольная постоянная, L — размер объемлющего гиперкуба \mathcal{S} для округленной постановки задачи Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d . Дискретные случайные величины a_1, a_2, \dots, a_d распределены равномерно и независимо на множестве \mathbb{N}_L . Тогда при $m = (O(dc \log L))^{d-1}$ и $r = (O(\sqrt{dc}))^{d-1}$ с вероятностью, не меньшей $1/2$, существует цикловое (m, r, k) -покрытие стоимости, не превышающей $(1 + 1/c)OPT$.

Доказательство. Рассмотрим $\mathcal{C}^* = \{C_1^*, C_2^*, \dots, C_k^*\}$ — цикловое покрытие размера k наименьшего веса как решение рассматриваемой округленной постановки задачи Euclidean Min- k -SCCP. Обозначим вес \mathcal{C}^* через OPT , т.е. $\sum_{i=1}^k W(C_i^*) = OPT$.

Воспользуемся теоремой 2: при $\eta = 1/2k$ для каждого цикла C_i^* с вероятностью, не меньшей $1 - 1/2k$, существует (m, r) -аппроксимация $l(C_i^*)$ веса

$$W(l(C_i^*)) \leq (1 + 1/c)W(C_i^*). \quad (2.8)$$

Значения параметров m и r удовлетворяют оценкам $(O(dc \log L))^{d-1}$ и $(O(\sqrt{dc}))^{d-1}$ соответственно.

В силу равномерности распределения случайных величин a_1, a_2, \dots, a_d вероятность объединения обратных событий, состоящих в отсутствии для цикла C_i^* (m, r) -аппроксимации $l(C_i^*)$, вес которой удовлетворяет (2.8), ограничена сверху $1/2$. Таким образом, с вероятностью, не меньшей $1/2$, существует такое цикловое (m, r, k) -покрытие $\{l(C_1^*), l(C_2^*), \dots, l(C_k^*)\}$, что

$$\sum_{i=1}^k W(l(C_i^*)) \leq \left(1 + \frac{1}{c}\right) \sum_{i=1}^k W(C_i^*) = \left(1 + \frac{1}{c}\right) OPT.$$

□

2.3.5 Динамическое программирование

Опишем процедуру поиска циклового (m, r, k) -покрытия $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$ наименьшего веса в задаче Euclidean Min- k -SCCP, основанную на методе динамического программирования. Время работы алгоритма составит $O(n(\log n)^{O(\sqrt{dc})^{d-1}})$.

Определение 8. *Часть циклового (m, r, k) -покрытия, целиком находящаяся внутри произвольного квадрата S , узла дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ и посещающая все расположенные в нем вершины исходного графа, назовем (m, r, k, S) -фрагментом данного покрытия.*

Внутренняя подзадача для узла 2^d -дерева S состоит в поиске (m, r, k, S) -фрагмента минимальной стоимости.

В начале процедуры динамического программирования рассматриваются листья 2^d -дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$. Пусть S — произвольный лист дерева. По построению S содержит не более одной вершины исходного графа G , и соответствующая подзадача может быть решена прямым перебором за $O(2dr)$ операций.

Рассмотрим случай, когда S не является листом дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$. Обозначим через S^1, \dots, S^{2^d} его дочерние гиперкубы, для которых предполагаем решенными внутренние подзадачи. Построим решение для S рекуррентно, считая

выполненным условие, что ответ состоит из фрагментов (m, r) -аппроксимаций $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$.

Для оценки трудоемкости процедуры динамического программирования введем следующее обозначение. Пусть \mathfrak{P} — это семейство всевозможных мультимножеств P , состоящих не более чем из $2dr$ порталов, расположенных на внутренних относительно S гранях дочерних гиперкубов S^1, \dots, S^{2^d} . По построению на каждой такой грани расположено $m + 2^{d-1}$ портала, и в силу ограничений, накладываемых на цикловое покрытие, грань может быть пересечена не более r раз. Получим, что $|\mathfrak{P}| = O((m + 2^{d-1})^{2dr})$.

Для произвольного мультимножества $P \in \mathfrak{P}$ существует $O((dr)^{2dr})$ способов назначить каждому порталу ломаную, соответствующую одной из k (m, r) -аппроксимаций, и $O((2dr)!)^k$ вариантов разбиения мультимножества на упорядоченные пары.

Трудоемкость подзадачи, соответствующей S , может быть оценена сверху величиной

$$O((m + 2^{d-1})^{2dr} (dr)^{2dr} (2dr)!).$$

Задача поиска циклового (m, r, k) -покрытия минимального веса эквивалентна решению подзадачи для объемлющего гиперкуба S .

Оценим сверху число подзадач для вывода общей трудоемкости процедуры динамического программирования. Заметим, что каждому узлу 2^d -дерева S соответствует $O((m + 2^{d-1})^{2dr})$ способов выбора мультимножества P порталов на $(d - 1)$ -мерных гранях S .

Каждому такому мультимножеству соответствует $O((2dr)!)$ способов разбиения его на упорядоченные пары, и каждому такому разбиению — $O(k^{dr})$ способов распределения этих пар между маршрутами $\{l_1, l_2, \dots, l_k\}$. Принимая во внимание, что общее число узлов дерева $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$ составляет $O(2^d n \log(cn\sqrt{d}))$, получаем искомую оценку трудоемкости процедуры для про-

извольной фиксированной центральной точки (a_1, a_2, \dots, a_d) :

$$O(2^d n \log(cn\sqrt{d}) \times (m + 2^{d-1})^{4dr} ((2dr)!)^2 (dr)^{2dr} \times k^{dr}). \quad (2.9)$$

Переменные d и c не являются частью входа задачи Euclidean Min- k -SCCP. При значениях параметров $m = (O(dc \log(cn\sqrt{d})))^{d-1}$ и $r = (O(\sqrt{dc}))^{d-1}$, а также, с учетом того, что количество способов распределения k циклов по m кластерам равно $O(2^k)$, оценка трудоемкости алгоритма поиска (m, r, k) -покрытия наименьшего веса составляет

$$O(n(k \log n)^{(O(\sqrt{dc}))^{d-1}} 2^k).$$

2.3.6 Дерандомизация

Описанная в предыдущем разделе схема динамического программирования для каждого набора (a_1, a_2, \dots, a_d) находит приближенное решение округленной задачи Euclidean Min- k -SCCP, ассоциированное с деревом $T(a_1, a_2, \dots, a_d)$. Обозначим через $APP(a_1, a_2, \dots, a_d)$ вес этого решения. В условиях теоремы 3 имеем $P(APP(a_1, a_2, \dots, a_d) \leq (1 + 1/c)OPT) \geq 1/2$, где вероятностная мера порождена распределением случайных величин a_1, a_2, \dots, a_d . Следовательно, с необходимостью найдется кортеж $(a_1^*, a_2^*, \dots, a_d^*)$, в котором все элементы принимают значения из \mathbb{N}_L , для которого выполнено неравенство $OPT \leq APP(a_1^*, a_2^*, \dots, a_d^*) \leq (1 + 1/c)OPT$. Данная пара, очевидно, может быть найдена полным перебором за $O(L^d)$ итераций. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4. *Задача Euclidean Min- k -SCCP в \mathbb{R}^d обладает полиномиальной приближенной схемой трудоемкости*

$$O(n^{d+1} (k \log n)^{(O(\sqrt{dc}))^{d-1}} 2^k). \quad (2.10)$$

Следствие 1. Задача *Euclidean Min-k-SCCP* в \mathbb{R}^d с условием, что k является частью входа, обладает полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O(n^{O(d)}(\log n)^{O(\sqrt{dc})^{d-1}})$ для $k = O(\log n)$.

Следствие 2. Задача *Euclidean Min-k-SCCP* в \mathbb{R}^d обладает эффективной полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O(n^{d+2}2^{k+O(\sqrt{dc})^{2(d-1)}}k^{O(\sqrt{dc})^{d-1}})$.

Глава 3

Обобщенная задача коммивояжера

В главе обоснована разрешимость за $O(4^l n^3)$ и $O(2^l k^{l+4} n^3)$ задач поиска оптимальных маршрутов для GTSP в классах l -квазипирамидальных и l -псевдопирамидальных маршрутов соответственно. Как следствие, доказана полиномиальная разрешимость подкласса задачи EGTSP- k -GC, в котором введено дополнительное ограничение на высоту порождающей кластеры решетки $H \leq 2$.

Кроме того, предлагаются три приближенные схемы для задачи EGTSP- k -GC при $k > 4$. В случае если $k \leq 4$ вес оптимального маршрута может оказаться сколь угодно мал по отношению к k , что препятствует построению приближенных алгоритмов. При произвольном фиксированном $k > 4$ все построенные схемы являются эффективными полиномиальными схемами, более того, первые две из них обладают линейной по n трудоемкостью. В то время как трудоемкость первых двух схем остается полиномиальной при условии $k = O(\log n)$, последняя сохраняет свойство полиномиальности при $k = n - O(\log n)$.

3.1 Квази- и псевдопирамидальные маршруты

Пусть $V = (V_1, \dots, V_k)$ — линейно упорядоченное множество из k кластеров вершин заданного графа. Введем отношение частичного порядка на множестве

вершин, для $\forall u, v : u \in V_i, v \in V_j$ $u \prec v$, если $i < j$.

Определение 9. l -квазипирамидальным маршрутом называется маршрут вида $v_1, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v_k, v_{j_{k-r-2}}, \dots, v_{j_1}$, в котором $v_t \in V_t$ для каждого $t \in \{1, \dots, k\}$ и выполняются неравенства $i_p - i_q \leq l$ и $j_{p'} - j_{q'} \leq l$ при $l \in \mathbb{Z}_+$ для произвольных $1 \leq p < q \leq r$ и $1 \leq p' < q' \leq k - r - 2$.

Следующая теорема обобщает результат, полученный в [98] для случая классической задачи коммивояжера.

Теорема 5. *Оптимальный l -квазипирамидальный маршрут для постановки задачи GTSP с произвольной весовой функцией $w: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ может быть найден за время $O(4^l n^3)$.*

Доказательство. Для произвольной постановки задачи GTSP опишем процедуру поиска l -квазипирамидального маршрута минимальной стоимости. Для произвольных вершин $u \in V_i$ и $v \in V_j$, $1 \leq i \neq j \leq k$ и подмножества S , удовлетворяющего соотношению

$$(S \subset [i - l, i] \setminus \{1, j\}) \vee (S \subset [j - l, j] \setminus \{1, i\}),$$

обозначим через $g(u, S, v)$ вес кратчайшего $(|S| + 1)$ -реберного пути из u в v , посещающего каждый из кластеров $\{V_t : t \in S\}$ (Рис. 3.1). Значения функции g могут быть вычислены рекурсивно, поскольку $g(u, \emptyset, v) = w(\{u, v\})$ и

$$g(u, S, v) = \begin{cases} \min_{m \in S} \min_{v' \in V_m} \{g(u, S \setminus \{m\}, v') + w(\{v', v\})\}, & \text{если } S \subseteq [j - l, j] \setminus \{1, i\}, \\ \min_{m \in S} \min_{u' \in V_m} \{w(\{u, u'\}) + g(u', S \setminus \{m\}, v)\}, & \text{если } S \subseteq [i - l, i] \setminus \{1, j\}. \end{cases} \quad (3.1)$$

Для произвольных $1 \leq j < i \leq k$ и подмножества $T \subseteq [i - l, i] \cup [j - l, j] \setminus \{1, i, j\}$ через $f(u, v, T)$ обозначим вес кратчайшего пути P из $u \in V_i$ в

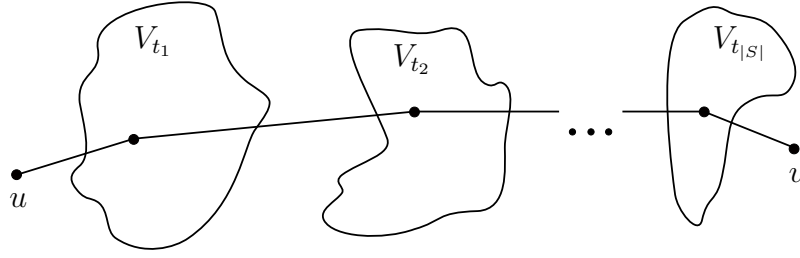


Рис. 3.1: u - v -путь, посещающий кластеры V_{t_j} , $t_j \in S$

$v \in V_j$, посещающего каждый кластер V_p , $p \in [1, i] \setminus T$ в единственной вершине и имеющего вид

$$u = v_{i_0}, v_{i_1}, \dots, v_{i_r} = \bar{v} = v_{j_0}, v_{j_1}, \dots, v_{j_s} = v,$$

причем $\bar{v} \in V_1$, индексы $i_0, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s$ попарно различны, $i_t < i$ и $j_{t'} < j$ для каждого $1 \leq t \leq r$ и $0 \leq t' \leq s - 1$, соответственно, и

$$i_q - i_p \leq l, \quad (0 < p < q \leq r), \quad j_{p'} - j_{q'} \leq l, \quad (0 \leq p' < q' < s).$$

Как и в случае с функцией g , значения введенной выше функции f могут быть вычислены рекурсивно. Базу рекурсии составляют значения $f(u, v, (1, t)) = w(\{u, v\})$, вычисляемые непосредственно для произвольной пары вершин $u \in V_t$ и $v \in V_1$, $2 \leq t \leq l + 2$. Остальные значения $f(u, v, T)$ для произвольных $u \in V_i$, $v \in V_j$ и $T \subset [i - l, i] \cup [j - l, j] \setminus \{1, i, j\}$, необходимые для дальнейших построений, могут быть вычислены в порядке возрастания i и $j < i$ следующим образом.

Пусть $m = \max\{p: p \in [1, i] \cup [1, j] \setminus T\}$ — наибольший номер промежуточного кластера, посещаемого маршрутом из u в v . В случае $m > j$ значение $f(u, v, T)$ может быть вычислено по формуле

$$f(u, v, T) = \min_{S \subseteq [m-l, m] \setminus (T \cup \{1, j\})} \min_{u' \in V_m} \{g(u, S, u') + f(u', v, T \cup S)\}, \quad (3.2)$$

в случае $m < j$ — по формуле

$$f(u, v, T) = \min \begin{cases} \min_{S \subseteq [m-l, m] \setminus (T \cup \{1\})} \min_{u' \in V_m} \{g(u, S, u') + f(u', v, T \cup S)\}, \\ \text{если } m \in \{i_1, \dots, i_{r-1}\}, \\ \min_{S \subseteq [m-l, m] \setminus (T \cup \{1\})} \min_{u' \in V_m} \{f(u, u', T \cup S) + g(u', S, v)\}, \\ \text{в противном случае.} \end{cases} \quad (3.3)$$

На завершающем этапе вычисляются значения $f(u, v, T)$ для произвольных вершин $u \in V_k$ и $v \in V_{k-1}$ и произвольного подмножества $T \subseteq [k-l-1, k-1] \setminus \{1\}$.

Вес оптимального l -квазипирамидального маршрута (Рис. 3.2) определяется соотношением

$$\min_{T \subseteq [k-l-1, k-1] \setminus \{1\}} \min_{u \in V_k} \min_{v \in V_{k-1}} \{f(u, v, T) + g(v, T, u)\}. \quad (3.4)$$

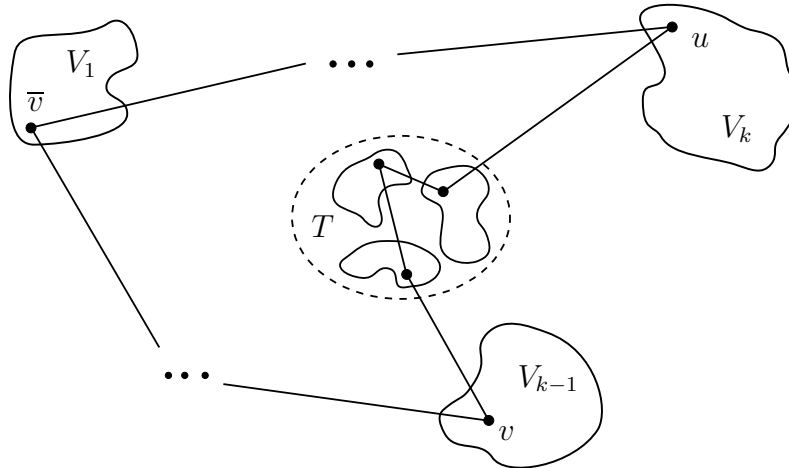


Рис. 3.2: Построение l -квазипирамидального маршрута минимальной стоимости

Оценим трудоемкость описанного выше алгоритма. Необходимые для построения оптимального l -квазипирамидального маршрута значения $g(v, S, u)$ могут быть вычислены по формуле (3.1) за время $O(2^l n^3)$. Временная сложность вычисления базовых значений $f(u, v, (1, t))$ рекурсивной процедуры определения функции f не превышает $O(n^2)$. Далее, для произвольных фиксированных u, v и T , трудоемкость вычислений по формулам (3.2) и (3.3) не превышает $O(2^l n)$, число вызовов которых ограничено сверху величиной $O(2^l n^2)$. Следовательно, суммарная временная сложность алгоритма не превышает $O(4^l n^3)$. \square

Замечание 1. Суммарный объем памяти, используемой описанным в доказательстве теоремы 5 алгоритмом, совпадает по порядку величины с размером хеш-таблиц f и g и составляет $O(2^l n^2)$.

Замечание 2. Обобщенная задача коммивояжера с симметричной неотрицательной матрицей весов принадлежит классу FPT.

Определение 10. l -псевдопирамидальным называется маршрут вида $v_1, v_{i_1}, \dots, v_{i_r}, v_k, v_{j_{k-r-2}}, \dots, v_{j_1}$, в котором $v_t \in V_t$ для каждого $t \in [1, k]$ и выполняются неравенства $i_p - i_{p+1} \leq l$ и $j_{p'} - j_{p'+1} \leq l$ для произвольных $1 \leq p < r$ и $1 \leq p' < k - r - 2$.

Произвольный l -квазипирамидальный маршрут является также и l -псевдопирамидальным. Покажем, что поиск оптимального l -псевдопирамидального маршрута может быть организован за полиномиальное по количеству вершин время.

Теорема 6. Оптимальный l -псевдопирамидальный маршрут для постановки задачи GTSP с произвольной весовой функцией $w: E \rightarrow \mathbb{R}$ может быть найден за время $O(2^l k^{l+4} n^3)$.

Доказательство. Обоснование состоит из двух частей. Во-первых, мы строим вспомогательное множество θ_l всевозможных l -псевдопирамидальных маршрутов вспомогательного полного графа K_k на множестве вершин $\{1, \dots, k\}$.

Во-вторых, для каждого l -псевдопирамидального маршрута $\theta = (i_1, \dots, i_k) \in \Theta_l$ и произвольной вершины $u \in V_1$ строим кратчайший u - u -маршрут $\rho(\theta, u)$ в $(k+1)$ -дольном графе $G_{\theta, u}$, имеющем следующую структуру (Рис. 3.3).

Доли π_0 и π_k графа $G_{\theta, u}$ состоят из единственной вершины $u \in V_1$, другие доли совпадают с соответствующими кластерами исходного графа G . Произвольный образованный двумя соседними долями граф является полным k -дольным графом. $G_{\theta, u}$ — взвешенный граф, каждое его ребро наследует вес

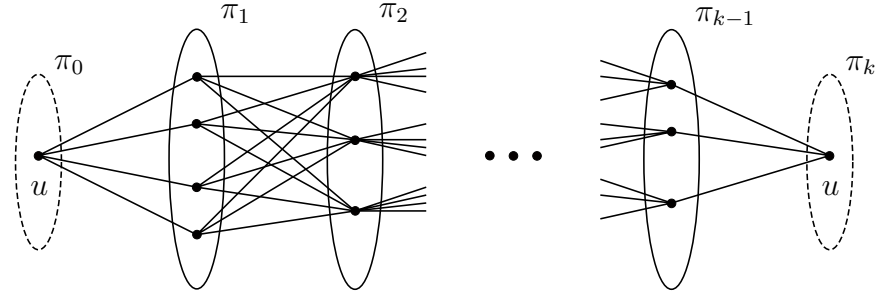


Рис. 3.3: Вспомогательный граф $G_{\theta, u}$

соответствующего ребра графа G .

По построению произвольный u - u -маршрут графа $G_{\theta, u}$ эквивалентен равному ему по весу подходящему l -квазипирамидальному маршруту в графе G .

Трудоемкость построения оптимального l -псевдопирамидального маршрута не превосходит произведения трудоемкости $T(\Theta_l)$ построения множества Θ_l , мощности кластера V_1 и временной сложности $O(k \cdot n^2)$ поиска кратчайшего u - u -маршрута в графе $G_{\theta, u}$. Поскольку без ограничения общности всегда можно полагать, что $|V_1| = \min\{|V_i| : i \in \mathbb{N}_k\} \leq n/k$, то итоговая трудоемкость составляет $T(\Theta_l) \cdot O(n^3)$.

Для построения множества Θ_l воспользуемся подходом, развивающим подход, предложенный в работе [98]. Введем в рассмотрение множества Θ_l^+ и Θ_l^- частичных (возможно, замкнутых) простых путей в графе H . Каждый элемент множества Θ_l^+ — путь $\theta^+ = (i_1, \dots, i_c)$, удовлетворяющий условию $i_p - i_{p+1} \leq l$ при каждом $p \in [1, c)$. Аналогично для произвольного $\theta^- = (j_1, \dots, j_d) \in \Theta_l^-$ соотношение $j_{q+1} - j_q \leq l$ выполнено при каждом $q \in [1, d)$. Текущее состояние описываемой ниже рекурсивной процедуры характеризуется упорядоченной тройкой (i, S, \mathcal{E}) , состоящей из следующих компонент. Число $i \in [1, k-1]$ определяет глубину рекурсии. Множество $S = \{p_1, \dots, p_m\}$ состоит из пар $(i, j) \in [1, k]^2$, помеченных знаками $+$ и $-$, удовлетворяющих условиям:

- 1) $p_1 = (1, s)^+$ и $p_2 = (t, 1)^-$ для некоторого подмножества $\{s, t\} \subset [1, k]$;
- 2) произвольной паре $p_a = (i_a, j_a)^+ \in S$ ($p_a = (i_a, j_a)^- \in S$) соответству-

ет частичный (i_a, j_a) -путь $\theta_a \in \Theta_l^+$ ($\theta_a \in \Theta_l^-$) так что все пути $\theta_1, \dots, \theta_m$ за исключением θ_1 и θ_2 , пересекающихся в вершине 1, не имеют общих вершин.

Множество \mathcal{E} , последняя компонента состояния (i, S, \mathcal{E}) , содержит ребра строящегося искомого l -псевдопирамидального маршрута.

Введем обозначение $Q = \bigcup \{ \{i_a, j_a\} : p_a \in S \}$. Рекурсивная процедура начинается с рассмотрения следующего множества начальных состояний

$$\{ (k-1, \{(1, s)^+, (t, 1)^-\}, \{(s, k), (k, t)\}) : \{s, t\} \subset [1, k] \}$$

На каждом шаге рекурсии возможна одна из перечисленных ниже альтернатив.

Case 1. Множество S текущего состояния содержит пару $p = (i, i)^+$ или $p = (i, i)^-$. В этом случае производим рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \setminus \{p\}, \mathcal{E})$.

Case 2. Множество S содержит пару $p_a = (i, j)^+$. Тогда в пути $\theta_a \in \Theta_l^+$ вершина i обладает некоторым последователем $t \in [i-l, i-1]$. Для произвольного $t \in [i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{j\})$ производим рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \cup \{(t, j)^+\} \setminus \{p_a\}, \mathcal{E} \cup \{(i, t)\})$.

Case 3. Множество S содержит пару $p_a = (i, j)^-$. Поскольку в этом случае путь $\theta_a \in \Theta_l^-$ с необходимостью содержит некоторого последователя $t \in [1, i-1]$ вершины i , для каждого $t \in [1, i-1] \setminus (Q \setminus \{j\})$ производим рекурсивный вызов с переходом в состояние $(i-1, S \cup \{(t, j)^-\} \setminus \{p_a\}, \mathcal{E} \cup \{(i, t)\})$.

Case 4 и 5. Варианты, в которых множество S содержит пару $(j, i)^+$ или $(j, i)^-$ могут быть рассмотрены по аналогии с Case 3 и Case 2, соответственно.

Case 6. В этом случае вершина i не принадлежит множеству Q и может выступать в качестве промежуточной вершины пути θ_a , соответствующего произвольной паре $p_a \in S$. Следовательно, каждой паре $p_a \in S$ нам потребуется сопоставить серию рекурсивных вызовов. Допустим, пара $p_a = (i_a, j_a)^+$. Обозначив через s и t предшественника и последователя вершины i в маршруте θ_a , совершаем рекурсивный переход в состояние $(i-1, S \cup \{(i_a, s)^+, (t, j_a)^+\}, \mathcal{E} \cup \{(s, i), (i, t)\})$

для произвольного $\{s, t\} \subset ([1, i-1] \setminus (Q \setminus \{i_a\}) \times ([i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{j_a\})))$. Аналогично паре $p_a = (i_a, j_a)^-$ сопоставим серию рекурсивных переходов в состояния $(i-1, S \cup \{(i_a, s)^-, (t, j_a)^-\}, \mathcal{E} \cup \{(s, i), (i, t)\})$ для произвольного $\{s, t\} \subset ([i-l, i-1] \setminus (Q \setminus \{i_a\}) \times ([1, i-1] \setminus (Q \setminus \{j_a\})))$.

Всякое состояние $(1, S, \mathcal{E})$, в котором $S = \{(1, 1)^+, (1, 1)^-\}$, является финальным. Компонента \mathcal{E} содержит ребра очередного l -квазипирамидального маршрута в графе K_k , который может быть восстановлен за время $O(k)$.

Временная сложность описанной выше рекурсивной процедуры совпадает с трудоемкостью $O(2^l k^{l+3})$ процедуры, предложенной в доказательстве теоремы 3.7 работы [98], общая трудоемкость построения оптимального l -квазипирамидального маршрута составляет $T(\Theta_l) \cdot O(n^3) = O(2^l k^{l+3}) \cdot O(k) \cdot O(n^3) = O(2^l k^{l+4} n^3)$. \square

Отметим, что построенный алгоритм является FPT-алгоритмом относительно параметров k и l .

3.2 Полиномиально разрешимый подкласс

Опишем полиномиально разрешимый подкласс геометрического частного случая задачи GTSP, известного под названием обобщенной задачи коммивояжера на сеточных кластерах (GTSP-GC).

Для простоты изложения, дальнейшие рассуждения мы проведем для евклидовой метрики, хотя аналогичные результаты могут быть получены и для некоторых других метрик, например, для метрики l_1 . На Рис. 3.4 представлено решение задачи GTSP-GC на восьми кластерах.

Пусть далее H и W обозначают *высоту* и *ширину* (число строк и колонок) заданной решетки, соответственно. Рассмотрим специальный случай задачи GTSP-GC, в котором один из параметров, например, H , не превосходит

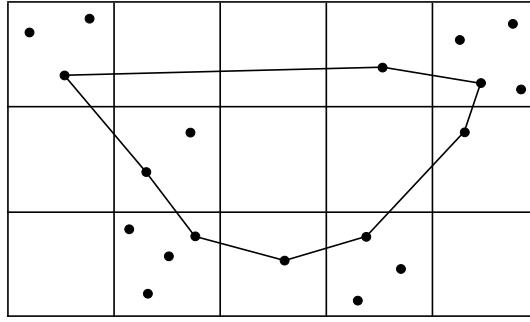


Рис. 3.4: Пример постановки и оптимального решения задачи GTSP-GC

2 (в то время как W может принимать произвольные значения). Назовем эту задачу GTSP-GC(H2) и покажем, что произвольная постановка такой задачи обладает l -квазипирамидальным маршрутом для некоторого l , не зависящего от числа вершин n и числа кластеров k . Тем самым, в силу теоремы 5 нами будет обоснована полиномиальная разрешимость задачи GTSP-GC(H2).

Рассмотрим следующую процедуру преобразования маршрута, названную нами *распрямляющей*. По существу данная процедура близка к известным эвристикам локального поиска. Для ее описания пронумеруем столбцы решетки натуральными числами $1, 2, \dots, W$ слева направо. Зададимся произвольным допустимым маршрутом τ . Сопоставив каждой его вершине v_i номер c_i содержащего ее столбца, получим последовательность σ номеров столбцов, перечисленных в порядке их посещения маршрутом τ . Без ограничения общности полагаем, что σ имеет вид

$$1 = c_1, c_2, \dots, c_r = W, c_{r+1}, \dots, c_s = 1 \quad (3.5)$$

для некоторых подходящих чисел r и s .

Пусть для некоторого числа t , значение которого мы зададим позже, найдутся индексы

$$1 \leq p < q < r, \quad \text{такие, что} \quad c_p - c_q \geq t - 1, \quad \text{или} \quad (3.6)$$

$$r + 1 \leq p' < q' \leq s, \quad \text{такие, что} \quad c_{q'} - c_{p'} \geq t - 1. \quad (3.7)$$

В этом случае мы будем говорить, что маршрут τ содержит t -zigzag. Приведен-

ный ниже алгоритм исключает из маршрута τ все t -зигзаги, замещая фрагмент маршрута, находящийся в соответствующих столбцах решетки фрагментами специального вида (Рис. 3.6).

А л г о р и т м 3

Распрямляющая процедура

Input: постановка задачи GTSP-GC(H2) и допустимый маршрут τ .

Output: допустимый маршрут τ' не содержащий t -зигзагов.

1. Инициализируем $\tau' := \tau$.

2. **while** (τ' содержит t -зигзаг)

пусть справедливо соотношение (3.6), случай соотношения (3.7) может быть рассмотрен по аналогии, кроме того, пусть $t' > t$ и выполняется равенство $c_p = c_q + t' - 1$;

через C обозначим множество столбцов решетки с номерами c_q, \dots, c_p (Рис. 3.5);

через $Y = (y_1, \dots, y_m)$, где $m \leq 2t' + 4$ обозначим последовательность ординат вершин, посещенных маршрутом τ в столбцах из множества C , дополненную ординатами точек пересечения левой и правой границ соответствующего подмножества столбцов;

построим 2-medians кластеризацию для выборки Y , обозначив через m_1 и m_2 найденные медианы;

заменяем фрагменты маршрута τ' лежащие в столбцах из C , горизонтальными линиями с ординатами m_1 и m_2 , связав их с вершинами, имеющими ординаты из Y , прямолинейными отрезками (Рис. 3.6)

end while

3. Результатом работы алгоритма является маршрут τ' .

Для определения значения t' заметим, что вес исключаемых на каждой итерации Алгоритма 3 фрагментов допускает очевидную нижнюю оценку $t' + 2(t' -$

1) $+t' - 2 = 4t' - 4$. В то же время, вес добавленных фрагментов не превосходит $2t' + 2F(Y, [0, 2])$, где $F(Y, S)$ — оптимальное значение целевой функции задачи 2-medians для выборки Y , распределенной на отрезке S . Верхняя оценка для $F(Y, S)$ следует из приведенной ниже леммы.

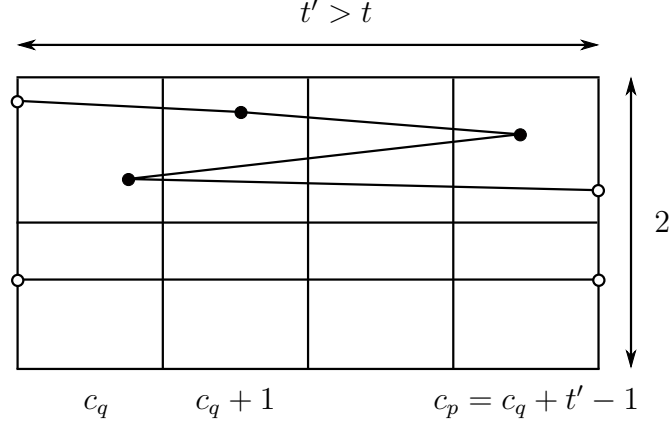


Рис. 3.5: Фрагмент маршрута τ , содержащий t -зигзаг

Лемма 2. Для произвольной выборки p_1, \dots, p_n из отрезка $[0, 1]$ найдутся точки m_1 и $m_2 \in [0, 1]$ для которых

$$\sum_{i=1}^n \min\{|p_i - m_1|, |p_i - m_2|\} \leq n/6. \quad (3.8)$$

Доказательство. Рассмотрим следующую антагонистическую игру двух игроков с нулевой суммой. Стратегиями первого игрока являются n -элементные выборки $\xi = (p_1, \dots, p_n)$ из отрезка $[0, 1]$. Множество стратегий второго игрока состоит из всевозможных разбиений множества $\{1, \dots, n\}$ на два подмножества C_1 и C_2 . Платежная функция

$$F(\xi, (C_1, C_2)) = \sum_{i \in C_1} |p_i - m_1| + \sum_{i \in C_2} |p_i - m_2| = \sum_{i=1}^n \min\{|p_i - m_1|, |p_i - m_2|\},$$

где m_1 и m_2 — медианы подвыборок $\xi_1 = (p_i : i \in C_1)$ и $\xi_2 = (p_i : i \in C_2)$, соответственно.

Отметим, что описанная выше игра не имеет цены. Для завершения доказательства леммы достаточно оценить сверху нижнюю цену игры

$$v_* = \sup_{\xi} \inf_{C_1, C_2} F(\xi, (C_1, C_2)). \quad (3.9)$$

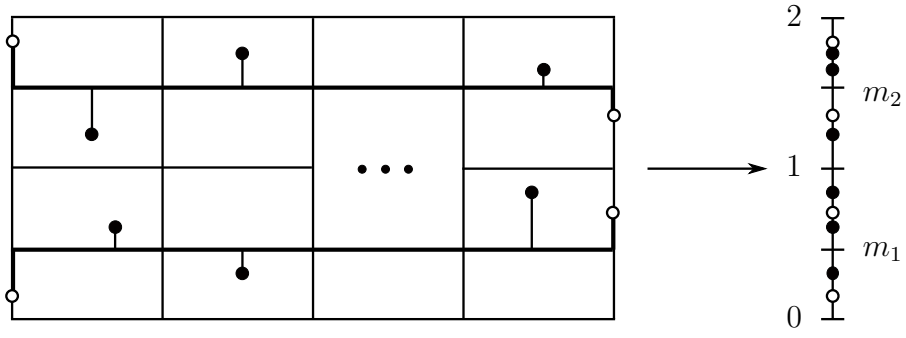


Рис. 3.6: Замещение t -зигзага фрагментом специального вида

Учитывая, что соотношение

$$\sum_{i=1}^{\nu} |p_i - m| = \begin{cases} \sum_{i=k+1}^{2k} p_i - \sum_{i=1}^k p_i, & \text{если } \nu = 2k, \\ \sum_{i=k+2}^{2k+1} p_i - \sum_{i=1}^k p_i, & \text{если } \nu = 2k + 1 \end{cases}$$

справедливо для произвольного $\nu \in \mathbb{N}$, выборки p_1, \dots, p_ν и ее медианы m , убеждаемся, что v_* является оптимальным значением подходящей задачи линейного программирования

$$v_* = \max u$$

$$\text{s.t.} \quad \sum_{i=\lceil |C_1|/2 \rceil + 1}^{|C_1|} p_i - \sum_{i=1}^{\lfloor |C_1|/2 \rfloor} p_i + \sum_{i=\lceil |C_2|/2 \rceil + 1}^{|C_2|} p_i - \sum_{i=1}^{\lfloor |C_2|/2 \rfloor} p_i \geq u \quad (3.10)$$

$$(C_1 \cup C_2 = [1, n])$$

$$0 \leq p_1, \dots, p_n \leq 1$$

Применяя, например, метод последовательного исключения неизвестных, нетрудно показать, что $v_* \leq n/6$, что завершает доказательство леммы, поскольку внутренний \inf в соотношении (3.9) достижим при произвольной выборке ξ . \square

Замечание 3. Для произвольного $n > 2$ оценка (3.8) является достижимой.

Из леммы 2 и по построению последовательности Y

$$F(Y, [0, 2]) \leq 2 \cdot 1/6(2t' + 4),$$

следовательно, произвольная итерация Алгоритма 3 не увеличивает стоимость маршрута τ' при условии

$$2t' + 2F(Y, [0, 2]) \leq 2t' + 4t'/3 + 8/3 \leq 4t' - 4,$$

справедливым при $t' \geq 10$.

Пусть далее ячейки решетки, задающей условие задачи пронумерованы как указано на Рис.3.7. По-доказанному выше, для $t = 10$, произвольному k -циклу Алгоритм 3 сопоставляет 20-квазипирамидальный маршрут, не превосходящий его по весу.

1	3	5		$k - 1$
2	4	6		k

Рис. 3.7: Нумерация кластеров

Тем самым, доказана следующая теорема.

Теорема 7. *Произвольная постановка задачи GTSP-GC(H2) обладает оптимальным 20-квазипирамидальным маршрутом.*

В качестве непосредственного следствия из теорем 5 и 7, получаем окончательный результат: оптимальное решение произвольной постановки задачи GTSP-GC(H2) может быть найдено за время $O(n^3)$.

3.3 Приближенные схемы для случая медленно растущих значений параметра k

Для случая медленно растущих значений параметра k ниже предложены две полиномиальные приближенные схемы. Первая схема основана на классиче-

ском алгоритме динамического программирования Хелда — Карпа, применимом при поиске точных решений для набора вспомогательных постановок евклидовой задачи коммивояжера. Второй алгоритм обобщает PTAS Ароры на случай EGTSP- k -GC.

3.3.1 Применение метода динамического программирования при построении приближенной схемы

Основная идея алгоритма заключается в объединении полного перебора множеств представителей из k вершин для заданного множества кластеров и применении метода динамического программирования для построения на выбранных вершинах гамильтоновых циклов и последующем сравнении их длин.

Введем дополнительный параметр t и разделим все непустые клетки заданной решетки на t^2 равных клеток с длиной стороны $1/t$. Далее для каждой непустой полученной клетки заменим все содержащиеся в ней узлы исходного графа G на центр соответствующей клетки. В результате этой процедуры произойдет замена вершин кластера на не более чем t^2 новых выделенных вершин. Заметим, что имеется не более чем t^{2k} способов выбрать k центров в качестве представителей заданных кластеров. Далее для каждого такого набора вершин построим гамильтонов цикл минимального веса с помощью алгоритма динамического программирования Хелда — Карпа [65] за время $O(k^2 2^k)$. Общая трудоемкость алгоритма составит $O(t^{2k} k^2 2^k) + O(n)$.

А л г о р и т м 4

Input: задана постановка задачи EGTSP- k -GC и необходимое значение параметра точности ε .

Output: $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение.

1. Строим разбиение k непустых узлов решетки на t^2 клеток с длиной стороны $1/t$ (значение t будет определено позже).

2. Каждой j -ой клетке поставим в соответствие множество C_j , содержащее центры непустых дочерних клеток.

3. Для всех $(c_1, \dots, c_k) \in C_1 \times \dots \times C_k$, используя процедуру динамического программирования, построим точное решение $S(c_1, \dots, c_k)$ соответствующей постановки задачи коммивояжера.

4. Результатом работы алгоритма является кратчайший маршрут $S(c_1, \dots, c_k)$.

Оценка точности Алгоритма 4 основана на том факте, что для любой вершины $v \in V$ расстояние между узлом v и ближайшим центром дочерней клетки не превосходит $\sqrt{2}/(2t)$. Рассмотрим произвольное оптимальное решение изначальной постановки GTSP- k -GC. Накопленная погрешность, индуцированная заменой заданных узлов ближайшими центрами дочерних квадратов, не превосходит $k\sqrt{2}/t$.

Чтобы оценить k в терминах длины оптимального решения GTSP, используем недавний результат, связанный с аппроксимируемостью иной задачи комбинаторной оптимизации, заданной на кластерах (Generalized Minimum Spanning Tree Problem, GMSTP). В отличие от классической постановки задачи о минимальном остовном дереве (Minimum Spanning Tree Problem, MSTP), которая может быть решена точно за полиномиальное время, ее обобщение на кластерах является NP -трудной задачей даже в случае евклидовой плоскости, где кластеры определяются клетками целочисленной решетки.

Теорема 8 ([23]). Пусть OPT_{GMSTP} — длина кратчайшего остовного дерева, решения евклидовой задачи GMSTP на k кластерах в целочисленной решетке, тогда $k \leq 4 OPT_{\text{GMSTP}} + 4$.

Так как остовное дерево может быть получено из гамильтонова цикла путем удаления произвольного ребра, то верно неравенство $OPT_{\text{GTSP}} \geq OPT_{\text{GMSTP}}$ для любой неотрицательно определенной весовой функции. Отсюда для евкли-

довой обобщенной задачи коммивояжера верно аналогичное утверждение.

Следствие 3. Пусть OPT_{GTSP} — длина кратчайшего гамильтонова цикла, решения задачи $EGTSP-k-GC$, тогда $k \leq 4 OPT_{GTSP} + 4$.

Для любого $k > 4$ и $\varepsilon > 0$ выберем значение параметра t так, чтобы выполнялось неравенство

$$\frac{k\sqrt{2}}{t} \leq \frac{k-4}{4}\varepsilon \leq \varepsilon OPT_{GTSP},$$

т. е.

$$t \geq \frac{4\sqrt{2}k}{(k-4)\varepsilon} = \frac{4\sqrt{2}}{\varepsilon} \left(1 + \frac{4}{k-4}\right) \geq \frac{20\sqrt{2}}{\varepsilon}.$$

Таким образом мы гарантируем, что при произвольном $k > 4$ накопленная погрешность не превысит εOPT_{GTSP} . Следовательно, доказана следующая теорема.

Теорема 9. Для любых значений $\varepsilon > 0$ и $k > 4$ Алгоритм 4 находит $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение задачи $EGTSP-k-GC$ за время $O(k^2(O(1/\varepsilon))^{2k}) + O(n)$.

Следствие 4. 1) При произвольном фиксированном $k > 4$ Алгоритм 4 является эффективной линейной приближенной схемой. 2) При $k = O(\log n)$ Алгоритм 4 является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O((\log n)^2 n^{O(\log(1/\varepsilon))})$.

3.3.2 Обобщение схемы Ароры для задачи коммивояжера на плоскости на случай $EGTSP-k-GC$

В данном разделе будет описана полиномиальная приближенная схема, обобщающая подход, предложенный С. Аророй [15] для евклидовой задачи TSP. Предположим, что $k > 4$.

Основная идея предлагаемого алгоритма заключается в рандомизированном рекурсивном разделении объемлющего квадрата на квадраты меньшей площа-

ди и последующем поиске замкнутого маршрута минимального веса, удовлетворяющего следующим ограничениям:

- a) маршрут посещает в точности одну вершину из каждого кластера V_i ;
- b) отрезки маршрута, соединяющие соседние вершины, являются непрерывными ломаными и могут пересекать границы построенных квадратов лишь в заданных наперед точках (порталах);
- c) число и местоположение порталов, равно как и предельное количество допустимых пересечений сторон каждого квадрата, также задаются заранее и зависят от параметра ε , определяющего точность приближения.

В разделе 2.3.2 введено понятие округленной постановки задачи Euclidean Min- k -SCCP и обосновано, что построение PTAS для округленной задачи Euclidean Min- k -SCCP влечет за собой PTAS для общей постановки исследуемой задачи (лемма 1). Ниже данный результат обобщен на случай задачи EGTSP- k -GC.

Назовем постановку евклидовой обобщенной задачи коммивояжера округленной, если

- (i) существует $L' = O(k)$ такое, что для любого узла $v_i = [x_i, y_i]$ заданного графа G его координаты $x_i, y_i \in \{0, \dots, L'\}$;
- (ii) для любых вершин $u \neq v \in V$, $w(\{u, v\}) \geq 4$.

Покажем, что существование PTAS для округленной EGTSP- k -GC влечет за собой существование PTAS для исходной постановки задачи. Рассмотрим произвольную постановку EGTSP- k -GC и соответствующую ей округленную постановку. Обозначим максимальное расстояние между кластерами через D , тогда $OPT = OPT_{GTSP} \geq 2D \geq 2$ по неравенству треугольника. Отсюда размер L , минимального выровненного по осям объемлющего квадрата для заданной

постановки задачи, удовлетворяет неравенству

$$L \leq D + 2 \leq 1.5 OPT. \quad (3.11)$$

Далее построим выровненную по осям сетку со стороной квадрата $L\varepsilon/(2k)$ и переместим каждую вершину исходного графа в ближайший узел получившейся сетки. Очевидно некоторые узлы могут быть отображены в один и тот же узел сетки, следовательно, округленная постановка задачи может иметь меньшую размерность. Кроме того, возможна ситуация, когда два или более различных кластеров делят один узел сетки, тогда мы будем относить данный узел ко всем этим кластерам. В результате преобразований расстояние между любыми двумя вершинами изменится не более, чем на $L\varepsilon/k$, а значит, длина произвольного k -цикла изменится не более, чем на $L\varepsilon$.

Изменим расстояние между линиями сетки, умножив все координаты на $8k/(L\varepsilon)$. Получим сетку со стороной клетки 4. Сдвинем начало координат так, чтобы оно совпало с левым нижним углом решетки. После описанных преобразований каждая вершина примет неотрицательные координаты, а минимальное расстояние между ними станет не менее четырех. Размер объемлющего квадрата будет равен $L' = O(k/\varepsilon) = O(k)$ для любого фиксированного значения ε .

Рассмотрим произвольный цикл на k вершинах C в заданной постановке задачи и соответствующий ему цикл C' в округленной постановке. Обозначим их веса через W и W' , соответственно. Получим

$$8k(W - L\varepsilon)/(L\varepsilon) \leq W' \leq 8k(W + L\varepsilon)/(L\varepsilon). \quad (3.12)$$

Подставим в правую часть неравенства (3.12) оптимальные значения OPT и OPT' рассмотренных задач, т. е. $OPT' \leq 8k(OPT + L\varepsilon)/(L\varepsilon)$. Предположим, что $W' \leq (1 + \varepsilon)OPT'$ для некоторого $\varepsilon \in (0, 1)$. Тогда

$$8k(W - L\varepsilon)/(L\varepsilon) \leq W' \leq (1 + \varepsilon)OPT' \leq 8k(1 + \varepsilon)(OPT + L\varepsilon)/(L\varepsilon)$$

и, следовательно,

$$OPT \leq W \leq (1 + \varepsilon)(OPT + L\varepsilon) + L\varepsilon \leq (1 + 4\varepsilon)OPT$$

согласно (3.11). Таким образом мы доказали следующую лемму.

Лемма 3. *Произвольная PTAS для округленной EGTSP- k -GC индуцирует PTAS для общей EGTSP- k -GC с аналогичной по порядку величины оценкой трудоемкости.*

Далее в данном разделе рассматриваются именно постановки округленной задачи EGTSP- k -GC.

Обозначим наименьший содержащий постановку исходной задачи квадрат, стороны которого параллельны осям координат, через \mathcal{S} . Без ограничения общности положим длину стороны L' объемлющего квадрата равной наименьшей подходящей степени двойки.

Для дальнейших построений воспользуемся структурой данных 4-дерево. Корнем дерева назовем объемлющий квадрат \mathcal{S} . Каждый квадрат, включая корневой, делим на четыре равных дочерних квадрата. Повторяем данную процедуру рекурсивно до тех пор, пока не получим квадраты, содержащие не более одной вершины исходной задачи. По построению 4-дерево содержит $O(k^2)$ листьев, $O(\log L') = O(\log k)$ уровней и $O(k^2 \log k)$ узлов всего.

Центральная точка данного 4-дерева — это точка пересечения ребер квадратов с длиной стороны $L'/2$. Мы рассмотрим деревья $T(a, b)$, центральная точка которых имеет координаты $((L'/2 + a) \bmod L', (L'/2 + b) \bmod L')$, где $a, b \in \mathbb{N}_{L'}^0$. Квадраты дерева $T(a, b)$, как и его центральная точка, подвергаются циклическому сдвигу по горизонтали и вертикали.

Зададимся значениями параметров $m, r \in \mathbb{N}$. Произвольному квадрату S сопоставим регулярное разбиение его границы, включающее все вершины квадрата и состоящее из $4(m + 1)$ точек (порталов).

Нам потребуются понятие (m, r) -аппроксимации, введенное в разделе 2.3.4, и основной результат работы [15], одна из эквивалентных формулировок которого приведена ниже.

Теорема 10 (Structure Theorem for \mathbb{R}^2). Пусть постановка округленной задачи TSP на плоскости задается полным евклидовым графом G , длина стороны охватывающего квадрата \mathcal{S} которого равна L , и заданы константы $c > 0$ и $\eta \in (0, 1)$. Пусть дискретные случайные величины a, b распределены равномерно и независимо на множестве \mathbb{N}_L , а значения параметров m и r определяются соотношениями $m = \lceil 2s \log L \rceil$, $r = s + 4$ и $s = \lceil 36c/\eta \rceil$.

Тогда для произвольного простого цикла C в графе G веса $W(C)$ с вероятностью, не меньшей $1 - \eta$, существует (m, r) -аппроксимация $l(C)$, вес которой не превосходит $(1 + 1/c)W(C)$.

Результат теоремы 10 гарантирует нам существование (m, r) -аппроксимации оптимального решения округленной EGTSP- k -GC. Для произвольного 4-дерева $T(a, b)$ обозначим (m, r) -аппроксимацию наименьшего веса $C(a, b)$. Следуя подходу, предложенному Аророй, для произвольных фиксированных значений параметров a и b вычислим $C(a, b)$ с помощью процедуры динамического программирования. Количество подзадач в сравнении с [15] будет отличаться на некоторый множитель, зависящий от k .

А л г о р и т м 5

Input: задана постановка задачи EGTSP- k -GC и необходимое значение параметра точности ε .

Output: $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение.

1. Определим для заданной постановки задачи соответствующую ей округленную постановку и построим охватывающий квадрат с длиной стороны L' .

2. Для всех $a, b \in \mathbb{N}_{L'}^0$, следуя подходу [15], построим 4-дерево $T(a, b)$ и определим значение $C(a, b)$ с помощью процедуры динамического программирования.

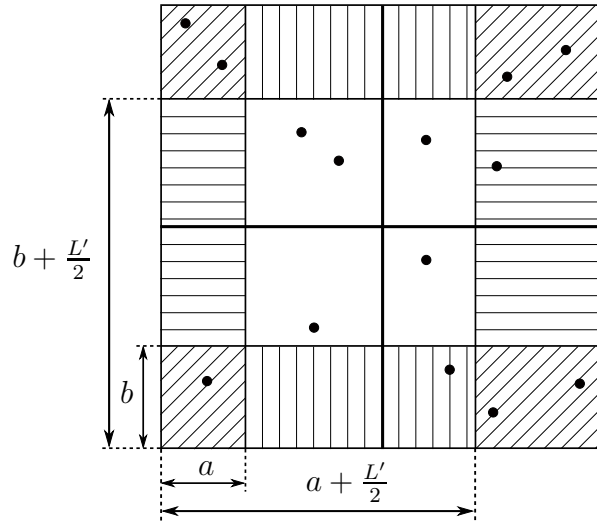


Рис. 3.8: Пример размещения кластеров в клетке $T(a, b)$

ния. Подзадача в процедуре динамического программирования для произвольного узла $T(a, b)$ наряду с параметрами, введенными в [15], обладает дополнительными параметрами, определяющими посещение кластеров V_{i_1}, \dots, V_{i_t} , соответствующих данному узлу. Таким образом, каждая подзадача процедуры динамического программирования Ароры индуцирует $4^t \leq 4^k$ подзадач в соответствии со всеми способами назначения кластеров дочерним клеткам данного узла $T(a, b)$.

На рис. 3.8 кластеры индуцированы четырьмя клетками с длиной стороны $\frac{L'}{2}$ и точкой пересечения сторон $(\frac{L'}{2}, \frac{L'}{2})$. Каждый дочерний узел $T(a, b)$ с аналогичной длиной стороны содержит фрагменты четырех заданных кластеров, следовательно, в процедуре динамического программирования при построении решения для узла дерева каждая подзадача индуцирует 4^4 подзадач.

3. Результатом работы алгоритма является (m, r) -аппроксимация наименьшего веса $C(a, b)$.

Таким образом, верна следующая теорема.

Теорема 11. Для произвольного фиксированного $\varepsilon \in (0, 1)$ и $k > 4$ Алгоритм 5 находит $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение для EGTSP- k -GC за время $2^{O(k)} k^4 (\log k)^{O(1/\varepsilon)} + O(n)$.

Следствие 5.1) Для любых фиксированных значений $k > 4$ Алгоритм 5 является эффективной линейной приближенной схемой для EGTSP- k -GC. 2) Для $k = O(\log n)$ Алгоритм 5 является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O(n(\log n)^4(\log \log n)^{O(1/\varepsilon)})$ и эффективной полиномиальной приближенной схемой с оценкой трудоемкости $O(2^{O(1/\varepsilon^2)}n(\log n)^5)$.

Последнее утверждение следует из очевидного неравенства $(\ln n)^C \leq 2^{C^2}n$.

3.4 Приближенная схема для случая быстро растущих значений параметра k

Для случая быстро растущих значений параметра k в данном разделе описан подход, основанный на непосредственном применении PTAS [15] для евклидовой задачи коммивояжера на плоскости.

А л г о р и т м 6

Input: задана постановка задачи EGTSP- k -GC и необходимое значение параметра точности ε .

Output: $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение.

1. Рассмотрим разбиение V_1, \dots, V_k множества вершин V заданного графа, индуцированное целочисленной решеткой.

2. Для всех $(v_1, \dots, v_k) \in V_1 \times \dots \times V_k$ строим $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение $S(v_1, \dots, v_k)$ для соответствующей постановки TSP с помощью PTAS Ароры.

3. Ответом является маршрут наименьшего веса $S(c_1, \dots, c_k)$.

Обозначим через t_i число узлов, принадлежащих i -му кластеру. Количество способов определить постановку задачи TSP, выбирая по одному узлу из каждого кластера, равно $t_1 \times \dots \times t_k$. Данное произведение достигает максимального значения при условии $\sum_{i=1}^k t_i = n$ в точке $t_i = n/k$. Так как для произвольного фиксированного $\varepsilon > 0$ временная сложность PTAS Ароры для постановки

евклидовой TSP на k узлах составляет $O(k^3(\log k)^{O(\log(1/\varepsilon))})$, то временная сложность Алгоритма 6 равна $\left(\frac{n}{k}\right)^k k^3(\log k)^{O(1/\varepsilon)}$.

Для любого фиксированного k временная сложность зависит от n полиномиально, и Алгоритм 6 является полиномиальной приближенной схемой для EGTSP- k -GC. Чтобы получить аналогичный результат для значений параметра k , зависящих от n , выберем $k = k(n)$ таким образом, чтобы выполнялось неравенство

$$\left(\frac{n}{k}\right)^k \leq n^D \quad (3.13)$$

для некоторого постоянного значения $D > 0$. Предположим, что $\frac{n - k(n)}{k(n)} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Так как в данном случае

$$\left(\frac{n}{k(n)}\right)^{k(n)} = \left(1 + \frac{n - k(n)}{k(n)}\right)^{k(n)} \leq e^{n - k(n)},$$

при $k(n) \geq n - D \log n$ выполняется неравенство (3.13). Таким образом доказана следующая теорема.

Теорема 12. *Для любых значений k и $\varepsilon > 0$ Алгоритм 6 находит $(1 + \varepsilon)$ -приближенное решение EGTSP- k -GC за время $n^k(\log k)^{O(1/\varepsilon)}$.*

Следствие 6. 1) *Алгоритм 6 является эффективной полиномиальной приближенной схемой для EGTSP- k -GC при произвольном фиксированном k .*
 2) *Для $k = n - O(\log n)$ Алгоритм 6 является полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $O(n^{D+3}(\log n)^{O(1/\varepsilon)})$ и эффективной полиномиальной приближенной схемой с оценкой трудоемкости $O(2^{O(1/\varepsilon^2)}n^{D+4})$.*

Заключение

В диссертационной работе исследованы несколько задач маршрутизации, являющихся обобщениями классической задачи коммивояжера. Основные результаты диссертации заключаются в следующем:

1. Для задачи о цикловом покрытии фиксированного размера k (Min- k -SCCP):

(а) обоснована NP-трудность в сильном смысле даже в частной евклидовой постановке;

(б) для метрической постановки задачи при условии, что значение параметра k является частью входа, построен 2-приближенный алгоритм с асимптотически достижимой оценкой точности;

(в) для евклидовой постановки задачи в пространстве произвольной фиксированной размерности d предложена эффективная полиномиальная приближенная схема с трудоемкостью $O(n^{O(d)}(\log n)^{O(\frac{\sqrt{d}}{\varepsilon})^{d-1}})$.

Таким образом, исследование сложностного статуса и аппроксимируемости в классе детерминированных алгоритмов задачи Min- k -SCCP можно считать завершенным. В качестве интересного открытого вопроса отметим вопрос неулучшаемости оценки точности 2 для алгоритма из п. 1(б).

2. Для обобщенной задачи коммивояжера (GTSP):

(а) введены понятия l -квазипирамидального и l -псевдопирамидального маршрутов;

(б) построен алгоритм поиска оптимального l -квазипирамидального маршрута;

рута с трудоемкостью $O(4^l n^3)$, тем самым показано, что обобщенная задача коммивояжера с неотрицательной симметричной матрицей весов принадлежит классу FPT;

(в) предложен FPT-алгоритм (относительно параметров k и l) построения оптимального l -псевдопирамидального маршрута с трудоемкостью $O(2^l k^{l+4} n^3)$.

3. Для обобщенной задачи коммивояжера на сетке (EGTSP- k -GC):

(а) показано, что при дополнительном ограничении на высоту сетки $H \leq 2$ задача разрешима за время $O(n^3)$;

(б) для евклидовой постановки задачи построены три приближенные схемы для случая быстро $k = n - O(\log n)$ и медленно $k = O(\log n)$ растущих значений параметра k . Для случая медленно растущего значения k две предложенные схемы являются линейными приближенными схемами с трудоемкостью $O(k^2(O(1/\varepsilon))^{2k}) + O(n)$ и $2^{O(k)} k^4 (\log k)^{O(1/\varepsilon)} + O(n)$ соответственно и представляют практический интерес при фиксированном значении параметра, несмотря на полиномиальную разрешимость задачи в этом случае, так как известный точный алгоритм имеет кубическую трудоемкость. При фиксированном значении параметра k третья схема является эффективной полиномиальной приближенной схемой с трудоемкостью $n^k (\log k)^{O(1/\varepsilon)}$ и сохраняет полиномиальность при $k = n - O(\log n)$.

Статусы вычислительной сложности обобщенной задачи коммивояжера на сетке при промежуточных значениях параметра k (между $O(\log n)$ и $n - O(\log n)$) и при высоте сетки $H > 2$ являются важными открытыми вопросами.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи в научных журналах из списка ВАК

1. Khachay M., Neznakhina K. Approximability of the minimum-weight k -size cycle cover problem // Journal of Global Optimization. - 2016. - Vol. 66. - №. 1. - P. 65-82. DOI: 10.1007/s10898-015-0391-3. (Web of science, Scopus)

2. Хачай М. Ю., Незнахина Е. Д. Аппроксимируемость задачи о минимальном по весу цикловом покрытии графа // Доклады академии наук. - 2015. - Т. 461. - №. 6. - С. 644-649. DOI: 10.7868/S086956521512004X. (РИНЦ)

Khachai M. Y., Neznakhina E. D. Approximability of the problem about a minimum-weight cycle cover of a graph // Doklady Mathematics. - Pleiades Publishing, 2015. - Vol. 91. - №. 2. - P. 240-245. DOI: 10.1134/S1064562415020313. (Web of science, Scopus)

3. Незнахина Е. Д. PTAS для задачи Min- k -SCCP в евклидовом пространстве произвольной фиксированной размерности // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2015. - Т. 21. - №. 3. - С. 268-278. (РИНЦ)

Neznakhina E. D. A PTAS for Min- k -SCCP in Euclidean space of arbitrary fixed dimension // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. - 2016. - Vol. 295. - №. 1. - P. 120-130. DOI: 10.1134/S0081543816090133. (Web of science, Scopus)

4. Хачай М. Ю., Незнахина Е. Д. Разрешимость обобщенной задачи коммивояжера в классе квази- и псевдопирамидальных маршрутов // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2017. - Т. 22. - №. 3 - С. 280-291. DOI: 10.21538/0134-4889-2017-23-3-280-291. (РИНЦ)

5. Хачай М. Ю., Незнахина Е. Д. Приближенные схемы для обобщенной задачи коммивояжера //Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2016. - Т. 22. - №. 3. - С. 283-292. DOI: 10.21538/0134-4889-2016-22-3-283-292. (РИНЦ)

6. Khachay M., Neznakhina K. Towards a PTAS for the generalized TSP in grid clusters //AIP Conference Proceedings. - AIP Publishing, 2016. - Vol. 1776. - №. 1. - P. 050003. DOI: 10.1063/1.4965324. (Web of science, Scopus)

7. Khachay M., Neznakhina K. Polynomial Time Approximation Scheme for the Minimum-weight k-Size Cycle Cover Problem in Euclidean space of an arbitrary fixed dimension //IFAC-PapersOnLine. - 2016. - Vol. 49. - №. 12. - P. 6-10. DOI: 10.1016/j.ifacol.2016.07.541. (Web of science, Scopus)

8. Хачай М. Ю., Незнахина Е. Д. Полиномиальная приближенная схема для евклидовой задачи о цикловом покрытии графа // Труды Института математики и механики УрО РАН. - 2014. - Т. 20. - №. 4. - С. 297-311. (РИНЦ)

Khachai M. Y., Neznakhina E. D. A polynomial-time approximation scheme for the Euclidean problem on a cycle cover of a graph // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. - 2015. - Vol. 289. - №. 1. - P. 111-125. DOI: 10.1134/S0081543815050107. (Web of science, Scopus)

Материалы конференций

1. Khachay M., Neznakhina K. Approximation Schemes for the Generalized TSP in Grid Clusters // VIII International Conference on Optimization Methods and Applications (Petrovac, Montenegro, October 2 - 7, 2017) :тез.докл. - Moscow, 2017, P. 81.

2. Khachay M., Neznakhina K. Efficient optimal algorithm for the Quasipyramidal GTSP // 17th Baikal international school-seminar "Methods of Optimization and Their Applications"(Maksimikha, Russia, July 31 – August 6, 2017) :тез.докл. - Irkutsk, 2017, P. 109.

3. Khachay M., Neznakhina K. Approximation Schemes for the Generalized TSP in Grid Clusters // VII International Conference on Optimization Methods and Applications (Petrovac, Montenegro, September 25 - October 2, 2016) :тез.докл. - Moscow, 2016, P. 88.

4. Khachay M., Neznakhina K. Approximation Algorithms for Generalized TSP in Grid Clusters // CEUR Workshop Proceedings. - 2016. - Vol. 1623. - P. 39-48. (Scopus)

5. Khachay M., Neznakhina K. Polynomial Time Approximation Scheme for Euclidean Minimum-weight k -Size Cycle Cover Problem in R^d // VI International Conference on Optimization Methods and Applications (Petrovac, Montenegro, September 27 - October 3, 2015) :тез.докл. - Moscow, 2015, P. 104.

6. Khachay M., Neznakhina K. Polynomial Time Approximation Scheme for Euclidean Minimum-weight k -Size Cycle Cover Problem on the plane // 28th Conference of the European Chapter on Combinatorial Optimization (Catania, Italy, 28-30 May 2015):тез.докл. - 2015, P. 29.

7. Незнахина Е.Д., Хачай М.Ю. PTAS для евклидовой задачи Min- k -SCCP на плоскости для произвольных фиксированных значений параметра k // XV Всероссийская конференция "Математическое программирование и приложения"(Екатеринбург, Россия, 2 - 6 марта 2015 г.) : тез.докл. - Екатеринбург, 2015, С. 151.

8. Незнахина Е.Д. Аппроксимируемость евклидовой задачи о цикловом покрытии графа произвольного фиксированного размера // Современные проблемы математики и её приложений (г. Екатеринбург, 25-31 января 2015 г.) : Труды 46-й Международной молодежной школы-конференции - Екатеринбург, 2015, С. 115.

9. Khachay M., Neznakhina E. Polynomial-time approximability of geometric multiple traveling salesmen problem // 10-я международная конференция Ин-

теллектуализация обработки информации (о.Крит, Греция , 4-11 октября 2014 г.) : тез.докл. - Москва, 2014, Р. 99.

10. Khachay M., Neznakhina E. k-Minimum Hamiltonian Cycles Problem. Complexity and Approximability // V International Conference on Optimization Methods and Applications (Petrovac, Montenegro, September 2014) :тез.докл. - Moscow, 2014, Р. 112.

11. Khachay M., Neznakhina E. Approximation of k-Minimum Hamiltonian Cover Problem // 15th International Conference on Operational Research (Osijek, Croatia, 24-26 September 2014) :тез.докл. - 2014, Р. 41.

12. Хачай М.Ю., Незнахина Е.Д. Полиномиальная приближенная схема для задачи о разбиении полного евклидова графа на два гамильтоновых цикла минимального веса // XVI Байкальская международная школа-семинар, Методы оптимизации и их приложения (о. Ольхон, Байкал, 30 июня - 6 июля 2014 г.) : тез.докл. - Красноярск, 2014, С. 88.

13. Незнахина Е.Д. PTAS для некоторых обобщений евклидовой задачи TSP // Современные проблемы математики и её приложений (г. Екатеринбург, 2-8 февраля 2014 г.) : Труды 45-й Международной молодежной школы-конференции - Екатеринбург, 2014, С. 181.

Благодарности

Прежде всего, автор выражает искреннюю благодарность научному руководителю, заведующему отделом математического программирования ИММ УрО РАН, профессору Хачаю Михаилу Юрьевичу за предложенную тему, совместную увлеченную исследовательскую работу в течение обучения автора в аспирантуре и руководство при написании диссертации.

Особую благодарность автор выражает своему супругу научному сотруднику отдела магнетизма твердых тел НИИ физики и прикладной математики Института естественных наук и математики УрФУ Незнахину Дмитрию Сергеевичу за всестороннюю поддержку во время написания диссертационной работы.

Литература

- [1] Гимади Э.Х., Истомин А.М., Рыков И.А., Цидулко О.Ю. Вероятностный анализ приближенного алгоритма для решения задачи о нескольких коммивояжерах на случайных входных данных, неограниченных сверху // *Тр. ИММ УрО РАН*, 20(2):88–98, 2014.
- [2] Гимади Э.Х., Кельманов А.В., Пяткин А.В., Хачай М.Ю. Эффективные алгоритмы с оценками точности для некоторых задач поиска нескольких клик в полном неориентированном взвешенном графе // *Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН*, 20(2):99–112, 2014.
- [3] Гимади Э.Х., Перепелица В.А. Асимптотически точный подход к решению задачи коммивояжера // *Управляемые системы: сб. науч. тр.*, 12:35–45, 1974.
- [4] Гимади Э.Х., Хачай М.Ю. *Экстремальные задачи на множествах перестановок* // Издательство УМЦ УПИ, 2016.
- [5] Гимади Э.Х., Цидулко О.Ю. Асимптотически точный алгоритм для задачи нескольких коммивояжеров на случайных входных данных с дискретным распределением // *Дискретн. анализ и исслед. опер.*, 24(3):5–19, 2017.
- [6] Сесекин А.Н., Ченцов А.А., Ченцов А.Г. *Задачи маршрутизации перемещений* // Лань, Санкт-Петербург, 2011.

- [7] Ченцов А.Г. Задача последовательного обхода мегаполисов с условиями предшествования // *Автомат. и телемех.*, 4:170–190, 2014.
- [8] Ченцов А.Г., Хачай М.Ю., Хачай Д.М. Точный алгоритм с линейной трудоемкостью для одной задачи обхода мегаполисов // *Тр. ИММ УрО РАН*, 21(3):309–317, 2015.
- [9] Ченцов А.Г., Ченцов П.А. Маршрутизация в условиях ограничений: задача о посещении мегаполисов // *Автомат. и телемех.*, 11:96–117, 2016.
- [10] Эндрюс Г. *Теория разбиений* // М.: Наука, 1982.
- [11] Ageev A. Constant-Factor Approximations for Cycle Cover Problems. *LNCS*, 9869:93–104, 2016.
- [12] Aizenshtat V., Kravchuk D. Algorithms for finding the extremum of a linear form on the set of all cycles in special cases // *Dokl. Akad. Nauk BSSR*, 12:401–404, 1968.
- [13] Applegate D., Bixby R., Chvatal V., Cook. W On the solution of traveling salesman problems // *Documenta Mathematica*, III:645–656, 1998.
- [14] Arkin E.M. and Hassin R. Approximation algorithms for the geometric covering salesman problem // *Discrete Appl. Math.*, 55(3):197–218, 1994.
- [15] Arora S. Polynomial-time approximation schemes for euclidean traveling salesman and other geometric problems // *Journal of the ACM*, 45:753–782, 1998.
- [16] Arora S., Lund C., Motwani R., Sudan M., Szegedy M. Proof verification and the hardness of approximation problems // *Journal of the ACM*, 45(3):501–555, 1998.

- [17] Arora S., Safra S. Probabilistic checking of proofs: a new characterization of NP // *Journal of the ACM*, 45:70–122, 1 1998.
- [18] Baburin A.E., Della Croce F., Gimadi E.Kh., Glazkov Yu.V., Paschos V.Th. Approximation algorithms for the 2-peripatetic salesman problem with edge weights 1 and 2 // *Discrete Applied Mathematics*, 157(9):1988–1992, 2009.
- [19] Baki F., Kabadi S. Some sufficient conditions for pyramidal optimal traveling salesman tours // *Working paper #95-021, Faculty of Administration, University of New Brunswick*, 1995.
- [20] Bellman R. Dynamic programming treatment of the travelling salesman problem // *J. ACM*, 9(1):61–63, 1962.
- [21] Ben-Arieh D., Gutin G., Penn M., Yeo A. Transformations of Generalized ATSP into ATSP // *Operations Research Letters*, 31:357–365, 2003.
- [22] Buchin K., Jansen B., Woeginger G., Berg M. Fine-grained complexity analysis of two classic TSP variants // *Proceedings of the 43rd International Colloquium on Automata, Languages, and Programming*, 55:5:1–5:14, 2016.
- [23] Bhattacharya B., Čustić A., Rafiey A., Sokol V. *Combinatorial Optimization and Applications: 9th International Conference, COCOA 2015, Houston, TX, USA, December 18-20, 2015, Proceedings*, chapter Approximation Algorithms for Generalized MST and TSP in Grid Clusters, pages 110–125. LNCS. Springer International Publishing, Cham, 2015.
- [24] Björklund A. Determinant sums for undirected hamiltonicity // *SIAM J. Comput.*, 43(1):280–299, 2010.
- [25] Bläser M. A $3/4$ -approximation algorithm for maximum ATSP with weights zero and one // *LNCS*, 3122:61–71, 2004.

- [26] Bläser M., Manthey B., Sgall J. An improved approximation algorithm for the Asymmetric TSP with strengthened triangle inequality // *Journal of Discrete Algorithms*, 4(4):623–632, 2006.
- [27] Bläser M., Ram S., Sviridenko M. Improved approximation algorithms for metric maximum ATSP and maximum 3-Cycle Cover Problems // *LNCS*, 3608:350–359, 2005.
- [28] Bläser M., Manthey B. Approximating maximum weight cycle covers in directed graphs with weights zero and one // *Algorithmica*, 42:121–139, 06 2005.
- [29] Bläser M., Manthey B., Sgall J. An improved approximation algorithm for the asymmetric TSP with strengthened triangle inequality // *Journal of Discrete Algorithms*, 4:623–632, 2006.
- [30] Bläser M., Siebert B. Computing cycle covers without short cycles // In *Algorithms—ESA 2001*, pages 368–379. Springer, 2001.
- [31] Blum A., Jiang T., Li M., Tromp J., Yannakakis M. Linear approximation of shortest superstrings // *Journal of the ACM*, 41(4):630–647, 1994.
- [32] Böckenhauer H., Hromkovic J., Klasing R., Seibert S., Unger W. Approximation algorithms for the TSP with sharpened triangle inequality // *Information Processing Letters*, 75(3):133–138, 2000.
- [33] Burkard R., Deineko V., Van Dal R., Van Der Veen J., Woeginger J. Well-solvable special cases of the traveling salesman problem: a survey // *SIAM Rev.*, 40(3):496–546, 1998.
- [34] Chandran L., Ram L. On the relationship between ATSP and the Cycle Cover Problem // *Theoretical Computer Science*, 370(1-3):218–228, 2007.

- [35] Chandran L., Ram L. On the relationship between ATSP and the cycle cover problem. *Theoretical Computer Science*, 370:218–228, 2007.
- [36] Chen Z., Nagoya T. Improved approximation algorithms for Metric Max TSP // *Journal of Combinatorial Optimization*, 13(4):321–336, 2007.
- [37] Chen Z., Okamoto Y., Wang L. Improved deterministic approximation algorithms for Max TSP // *Information Processing Letters*, 95(2):333–342, 2005.
- [38] Christofides N. Worst-case analysis of a new heuristic for the traveling salesman problem // In *Symposium on New Directions and Recent Results in Algorithms and Complexity*, page 441, 1975.
- [39] Cook S. The complexity of theorem-proving procedures // *Proceeding STOC '71 Proceedings of the third annual ACM symposium on Theory of computing*, pages 151–158, 1971.
- [40] Cormen T., Leiserson C., Rivest R., Stein C. *Introduction to Algorithms* // MIT, 3ed. edition, 2009.
- [41] Cormen T., Stein C., Rivest R., Leiserson C. *Introduction to Algorithms* // McGraw-Hill Higher Education, 2nd edition, 2001.
- [42] Cutler M. Efficient special case algorithms for the n -line planar traveling salesman problem // *Networks*, 10:183–195, 1980.
- [43] Danzig G., Fulkerson R., Johnson S. Solution of a large scale traveling salesman problem // *The RAND corporation*, pages 1–33, 1954.
- [44] Danzig G., Ramser J. The truck dispatching problem // *Management Science*, 6(1):80–91, 1959.

- [45] De Kort J. Lower bounds for symmetric k-Peripatetic Salesman Problems // *Optimization*, 20:113–122, 1991.
- [46] Dimitrijević V., Šarić Z. An efficient transformation of the Generalized Traveling Salesman Problem into the Traveling Salesman Problem on digraphs // *Information Sciences*, 102(1–4):105 – 110, 1997.
- [47] Dinur I. The PCP theorem by gap amplification // *Journal of the ACM*, 54(3):70–122, 2007.
- [48] Dror M., Orlin J. Combinatorial optimization with explicit delineation of the ground set by a collection of subsets // *SIAM J. Discrete Math.*, 21(4):1019–1034, 2008.
- [49] Dumitrescu A., Mitchell J. Approximation algorithms for TSP with neighborhoods in the plane // In *Proceedings of the Twelfth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '01, pages 38–46, Philadelphia, PA, USA, 2001. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [50] Dumitrescu A., Tóth C. The traveling salesman problem for lines, balls, and planes // *ACM Trans. Algorithms*, 12(3):43:1–43:29, April 2016.
- [51] Enomoto H., Oda Y., Ota K. Pyramidal tours with step-backs and the asymmetric traveling salesman problem // *Discrete Appl. Math.*, 87(1-3):57–65, 1998.
- [52] Feige U., Goldwasser S., Lovász L., Safra S., Szegedy M. Approximating clique is almost np-complete // In *Proceedings of the 32nd IEEE Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 2–12, 1991.
- [53] Feremans C., Grigoriev A., Sitters R. The geometric generalized minimum spanning tree problem with grid clustering // *4OR*, 4(4):319–329, 2006.

- [54] Finkel R., Bentley J. Quad trees: a data structure for retrieval on composite keys // *Acta Informatica*, 4(1):1–9, 1974.
- [55] Fischetti M., Gonzalez J., Toth P. A branch-and-cut algorithm for the symmetric Generalized Traveling Salesman Problem // *Operations Research*, 45(3):378–394, 1997.
- [56] Gan G., Ma C., Wu J. *Data Clustering: Theory, Algorithms, and Applications* // ASA-SIAM Series on Statistics and Applied Probability. SIAM, Society for Industrial and Applied Mathematics, 2007.
- [57] Garey M., Johnson D. *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completeness* // W. H. Freeman & Co., New York, NY, USA, 1979.
- [58] Garg N., Konjevod G. A polylogarithmic approximation algorithm for the group steiner tree problem // *Journal of Algorithms*, 37:66–84, 2000.
- [59] Gimadi E. Asymptotically optimal algorithm for finding one and two edge-disjoint traveling salesman routes of maximal weight in euclidean space // *Proc. of the Steklov institute of Mathematics*, 263:S57–S67, 2008.
- [60] Gimadi E.Kh., Glebov A.N., Skretneva A.A., Tsidulko O.Yu. and Zambalaeva D.Zh. Combinatorial algorithms with performance guarantees for finding several hamiltonian circuits in a complete directed weighted graph // *Discrete Applied Mathematics*, 196:54–61, 2015.
- [61] Golden B., Raghavan S., Wasil E. *The vehicle routing problem : latest advances and new challenges* // Operations research/Computer science interfaces series, 43. Springer, 2008.
- [62] Grötschel M., Holland O. Solution of large-scale symmetric travelling salesman problems // *Mathematical Programming*, 51:141–202, 1991.

- [63] Gutin G., Punnen A. and (eds.). *The Traveling Salesman Problem and Its Variations* // Springer, 2007.
- [64] Hassin R., Rubinstein S. On the complexity of the k -customer vehicle routing problem // *Operations Research Letters*, 33(1):71–76, 2005.
- [65] Held M., Karp R. A dynamic programming approach to sequencing problems // In *Proceedings of the 1961 16th ACM National Meeting*, ACM '61, pages 71.201–71.204, New York, NY, USA, 1961. ACM.
- [66] Helsgaun K. An effective implementation of the Lin-Kernighan traveling salesman heuristic // *Oper. Res.*, 126(1):106–130, 2000.
- [67] Helsgaun K. General k -opt submoves for the Lin-Kernighan TSP heuristic // *Math. Prog. Comput.*, 1(2-3):119–163, 2009.
- [68] Helsgaun K. Solving the equality generalized traveling salesman problem using the Lin–Kernighan–Helsgaun algorithm // *Math. Prog. Comput.*, 7(3):269–287, 2015.
- [69] Henry-Labordere A. The record balancing problem: a dynamic programming solution of a generalized traveling salesman problem // In *RIBO, B-2*, pages 736–743, 1969.
- [70] Huang H., Yang X., Hao Z., Wu C., Liang Y., Zhao X. Hybrid chromosome genetic algorithm for generalized traveling salesman problems // *LNCS*, 3612:137–140, 2005.
- [71] Jung H. Über die kleinste kugel, die eine räumliche figur einschliesst // *J. reine und angew. Math.*, 123:241–257, 1901.
- [72] Kalmanson K. Edge convex circuits and the traveling salesman problem // *Canad. J. Math.*, 27:1000–1010, 1975.

- [73] Karapetyan D., Gutin G. Lin–Kernighan heuristic adaptations for the generalized traveling salesman problem // *European Journal of Operational Research*, 208(3):221 – 232, 2011.
- [74] Karapetyan D., Gutin G. Lin-Kernighan heuristic adaptations for the generalized traveling salesman problem // *European Journal of Operational Research*, 208:221–232, 2011.
- [75] Karp R. Reducibility among combinatorial problems // In *Complexity of Computer Computations: Proc. Sympos. / eds. R. E. Miller and J. W. Thatcher.*, pages 85–103. New York: Plenum Press, 1972.
- [76] Klyaus P. Generation of testproblems for the traveling salesman problem (in Russian) // *Preprint Inst. Mat. Akad. Nauk. BSSR*, (16), 1976.
- [77] Krarup J. The peripatetic salesman and some related unsolved problems // In *Combinatorial programming: methods and applications*, pages 173–178. Springer, 1975.
- [78] Kruskal J. On the shortest spanning subtree of a graph and the traveling salesman problem // *Proceedings of the American Mathematical Society*, 7:48–50, 1956.
- [79] Laporte G., Asef-Vaziri A., Sriskandarajah C. Some applications of the generalized traveling salesman problem // *J. Oper. Res. Soc.*, 47:1461–1467, 1996.
- [80] Laporte G., Nobert Y. Generalized travelling salesman problem through n sets of nodes : An integer programming approach // *INFOR*, 31:61–75, 1984.
- [81] Laporte G., Semet F. Computational evaluation of a transformation procedure for the symmetric generalized traveling salesman problem // *INFOR*, 37:114–120, 1999.

- [82] Laporte G., Mercure H., Nobert Y. Generalized travelling salesman problem through n sets of nodes: the asymmetrical case // *Discrete Applied Mathematics*, 18(2):185 – 197, 1987.
- [83] Lawler E., Lenstra J., Rinnoy Kan A., Shmoys D. and (eds.). *The Traveling Salesman Problem* // Wiley, 1985.
- [84] Lien Y., Ma E., Wah B. Transformation of the generalized traveling-salesman problem into the standard traveling-salesman problem. *Information Sciences*, 74(1–2):177 – 189, 1993.
- [85] Lin S., Kernighan B. An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem // *Oper. Res.*, 21:498–516, 1973.
- [86] Lin S., Kernighan B. An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem // *Oper. Res.*, 21(2):498–516, 1973.
- [87] Lovász L., Plummer M. *Matching Theory* // Elsevier, 1986.
- [88] Manthey B. On approximating restricted cycle covers // *SIAM Journal on Computing*, 38:181–206, 2008.
- [89] Manthey B. Minimum-weight cycle covers and their approximability // *Discrete Applied Mathematics*, 157:1470–1480, 2009.
- [90] Mata C., Mitchell J. Approximation algorithms for geometric tour and network design problems (extended abstract) // In *Proceedings of the Eleventh Annual Symposium on Computational Geometry*, SCG '95, pages 360–369, New York, NY, USA, 1995. ACM.
- [91] Mitchell J. Guillotine subdivisions approximate polygonal subdivisions: a simple polynomial-time approximation scheme for geometric TSP, k -MST, and related problems // *SIAM J. Comput.*, 28(4):1298–1309, 1999.

- [92] Mitchell J. A PTAS for TSP with neighborhoods among fat regions in the plane // In *Proceedings of the Eighteenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms*, SODA '07, pages 11–18, Philadelphia, PA, USA, 2007. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- [93] Naddef D., Rinaldi G. The graphical relaxation: A new framework for the symmetric traveling salesman polytope // *Mathematical Programming*, 58:53–88, 1992.
- [94] Nešetřil J., Milková E., Nešetřilová H. Otakar Borůvka on Minimum Spanning Tree problem: translation of both the 1926 papers, comments, history // *Discrete Mathematics*, 233:3–36, 2001.
- [95] Noon C., Bean J. An efficient transformation of the generalized traveling salesman problem // *INFOR*, 31:39–44, 1993.
- [96] Noon C. The generalized traveling salesman problem // *Ph.D. Thesis, Dept Ind. Oper. Res., University of Tennessee*, 1988.
- [97] Oda Y. An asymmetric analogue of Van Der Veen conditions and the traveling salesman problem // *Discrete Applied Mathematics*, 109(3):279 – 292, 2001.
- [98] Oda Y., Ota K. Algorithmic aspects of pyramidal tours with restricted jump-backs // *Interdisciplinary Information Sciences*, 7(1):123–133, 2001.
- [99] Papadimitriou C., Yannakakis M. Optimization, approximation and complexity classes // *J. Comput. Syst. Sci.*, 43:425–440, 1991.
- [100] Papadimitriou C. Euclidean TSP is NP-complete // *Theoret. Comput. Sci.*, pages 237–244, 1977.
- [101] Park J. A special case of the n-vertex traveling salesman problem that can be solved in $O(n)$ time // *Inform. Process. Lett.*, 40:247–254, 1991.

- [102] Reinelt G. TSPLIB - a traveling salesman library // *ORSA Journal on Computing*, 3:376–384, 1991.
- [103] Reinelt G. *The Traveling Salesman: Computational Solutions for TSP Applications* // Springer-Verlag, Berlin, 1994.
- [104] Rote G. The n -line traveling salesman problem // *Networks*, 22:91–108, 1992.
- [105] Safra S., Schwartz O. On the complexity of approximating TSP with neighborhoods and related problems // *Computational Complexity*, 14(4):281–307, 2006.
- [106] Sahni S., Gonzales T. P-complete approximation problems // *Journal of the ACM*, 23:555–565, 1976.
- [107] Saksena J. Mathematical model for scheduling clients through welfare agencies // *CORS Journal*, 8:185–200, 1970.
- [108] Schrijver A. *Combinatorial Optimization: Polyhedra and Efficiency* // Springer, 2003.
- [109] Slavík P. On the approximation of the generalized traveling salesman problem // *Tech. rep., Department of Computer Science, SUNY-Buffalo*, 1997.
- [110] Snyder L., Daskin M. A random-key genetic algorithm for the generalized traveling salesman problem // *European Journal of Operational Research*, 174:38–53, 2006.
- [111] Sweedyk Z. A $2\frac{1}{2}$ -approximation algorithm for shortest superstring // *SIAM Journal on Computing*, 29(3):954–986, 1999.
- [112] Szwarcfiter J., Wilson L. The cycle cover problem // Technical Report 131, University of Newcastle upon Tyne, February 1979.

- [113] Toth P., Vigo D. *The Vehicle Routing Problem* // Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, PA, USA, 2001.
- [114] Van Der Veen J. Solvable cases of the traveling salesman problem with various objective functions // *Ph.D. thesis, University of Groningen, The Netherlands*, 1992.
- [115] Woeginger G. Exact algorithms for NP-hard problems: A survey // *Combinatorial Optimization*, LNCS 2570:185–207, 2003.
- [116] Woeginger G. Open problems around exact algorithms // *Discrete Applied Mathematics*, 156:397–405, 2008.