На правах рукописи

Байдакова Наталия Васильевна

Полиномиальная интерполяция на симплексах

01.01.01 — вещественный, комплексный и функциональный анализ

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук

Екатеринбург – 2018

Работа выполнена в ФГБУН Институте математики и механики им. Н.Н.Красовского Уральского отделения Российской академии наук, отдел теории приближения функций

Научный консультант:	доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН, профессор Субботин Юрий Николаевич
Официальные оппоненты:	Волков Юрий Степанович, доктор физико-математических наук, доцент, главный научный сотрудник лаборатории численных методов математического анализа ИМ СО РАН, г. Новосибирск;
	Иванов Валерий Иванович, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой прикладной математики и информатики ФГБОУ ВО "ТулГУ", г. Тула;
	Лукомский Сергей Федорович, доктор физико-математических наук, профессор, профессор кафедры математического анализа ФГБОУ ВО "СГУ имени Н.Г. Чернышевского", г. Саратов.
Ведущая организация:	ФГБУН Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук

Защита состоится 20 июня 2018 г. в ____ часов ____ минут на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 при ФГБУН Институте математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. С.Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ИММ УрО РАН и на сайте ИММ УрО РАН: http://www.imm.uran.ru/rus/Dissertation_councils/D_004.006.04/.

Автореферат разослан "____" ___________________ 2018 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета Д 004.006.04
доктор физико-математических наук В.Д.Скарин

Общая характеристика работы

Актуальность темы. Предметом изучения диссертации являются вопросы, связанные с интерполяцией и аппроксимацией функций многих переменных алгебраическими многочленами степени не выше n по совокупности переменных на d-симплексе в равномерной норме. Способы интерполяции на произвольном симплексе выбираются таким образом, чтобы результирующий сплайн, определенный на триангулированной области, обладал свойством непрерывности или гладкости порядка m, $m \geq 1$ (под сплайном мы понимаем функцию, которая на каждом симплексе из триангуляции области Ω является алгебраическим многочленом, причем эти многочлены задаются таким образом, чтобы результирующая кусочно-полиномиальная функция на всей области обладала свойством непрерывности или гладкости заданного порядка; под гладкостью порядка m — существование и непрерывность всех производных до порядка m включительно). В первой и третьей главах рассматривается интерполяция Лагранжа (интерполируются значения приближаемой функции) в равномерных узлах симплекса. Такой выбор интерполяционных условий часто используется в методе конечных элементов, но может также представлять самостоятельный интерес как способ аппроксимации функции. Во второй главе рассмотрен ряд способов интерполяции Эрмита и Биркгофа (интерполируются значения приближаемой функции и значения ее производных: последовательных — в случае интерполяции Эрмита, и с пропусками — в случае интерполяции Биркгофа) с интерполяцией производных высокого порядка в связи с изучением возможности применения соответствующих сплайнов, построенных на триангулированной исходной области, в методе конечных элементов.

В первой главе изучаются константа и функция Лебега для процесса интерполяции Лагранжа многочленами степени не выше n по равномерным узлам произвольного d-симплекса Δ в $\mathbb{R}^d$, т. е. по узлам $\{a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}\}$, имеющим следующие барицентрические координаты:

$$a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}} = \left(\frac{i_1}{n}, \frac{i_2}{n}, \dots, \frac{i_{d+1}}{n}\right), \tag{1}$$

$$i_k \in \{0, \dots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \dots + i_{d+1} = n.$$

Напомним, что константой Лебега называется норма оператора, действующего из $C(\Delta)$ в $C(\Delta)$, который каждой непрерывной функции ставит в соответствие ее интерполяционный многочлен степени не выше n по совокупности переменных (через $C(\Delta)$ обозначено пространство функций, непрерывных на Δ); функцией Лебега называется норма функционала в пространстве $C(\Delta)$, ставящего в соответствие каждой непрерывной функции f значение ее интерполяционного многочлена в точке симплекса Δ . Константы и функции Лебега позволяют получать оценки неустранимой погрешности интерполирования, обусловленной ошибками задания значений интерполируемой функции в узлах и могут быть использованы при исследовании сходимости интерполяционных процессов для заданной матрицы узлов. Для $d = 1, n \in \mathbb{N}$ задачами, связанными с оценками констант Лебега занимались А.Х. Турецкий (получена асимптотика по n), А. Шёнхаге, М. Коломб, Т.Дж. Ривлин, Р.-К. Джиа, П. Хенричи, Л. Трефетен, Дж. Видеман, Т.М. Милс, С. Смит, А. Айзинберг, Г. Феделе, Г. Франц. Для произвольных $d, n \in \mathbb{N}$ Л.П. Бос получил оценку сверху порядка константы Лебега, Т. Блумом была найдена логарифмическая асимптотика константы Лебега (по n при фиксированном d) и получены результаты, связанные с логарифмической асимтотикой подпоследовательностей функций Лебега. В диссертационной работе найден точный порядок роста константы Лебега по n при фиксированном d и получены результаты, связанные с поточечной оценкой снизу функции Лебега.

Вторая и третья главы посвящены получению оценок сверху и снизу величин погрешности аппроксимации функции, заданной на симплексе, и ее производных интерполяционными многочленами типа Лагранжа, Эрмита или Биркгофа и их производными соответственно. Рассматривается множество $W^{n+1}M = W^{n+1}M(\Omega)$ функций, определенных на произвольном многограннике $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, непрерывных на Ω вместе со всеми своими частными производными до порядка $n+1$ включительно, у которых все производные порядка $n+1$ ограничены по модулю константой $M \geq 0$. Согласно лемме Сеа [5] (глава 2, предложение 3.1), оценка погрешности аппроксимации решения краевой задачи кусочно-полиномиальными функциями, полученными в ходе реализации метода конечных элементов, зависит от расстояния между точным решением краевой задачи и построенным подпространством конечных элементов. Поскольку вычисление величины наилучшего приближения функции элементами соответствующего подпространства является достаточно сложной задачей, то для оценки погрешности метода обычно используют не элемент наилучшего приближения из пространства конечных элементов, а интерполяционную кусочно-полиномиальную функцию. Последняя задача, в свою очередь, сводится к проблеме локальной интерполяции на отдельном d-симплексе. Отметим, что при получении оценок сверху обычно (в том числе в диссертации) также решается задача выбора подходящих интерполяционных условий, которые и определяют способ построения пространства конечных элементов, использующегося впоследствии для поиска приближенного решения краевой задачи. От того, какие выбраны условия интерполяции, зависят получаемые оценки погрешности аппроксимации производных интерполируемой функции. *Конечным элементом* будем называть d-симплекс вместе с выбранными на нем условиями интерполяции функции $f \in W^{n+1}M$. Везде речь будет идти о конечных элементах, применение которых ведет к получению непрерывной или достаточно гладкой результирующей кусочно-полиномиальной функции на триангулированной исходной области Ω.

Договоримся о следующих обозначениях: Δ — d-симплекс из триангуляции многогранника Ω; $a_1, a_2, \ldots, a_{d+1}$ — вершины Δ;

$$\|f\|_\Delta = \sup_{u \in \Delta} |f(u)|;$$

$\lambda(u) = \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{d+1}) \in \mathbb{R}^{d+1}$ — барицентрические координаты точки u симплекса Δ относительно его вершин $a_1, a_2, \ldots, a_{d+1}$;

$$P_n^d[f](u) = P_n^d(u) = P_n^d[f](\lambda) = P_n^d(\lambda)$$

— многочлен степени не выше n по совокупности переменных, являющихся координатами точки $u \in \Delta$ (в некоторой системе координат), удовлетворяющий каким-либо условиям интерполяции функции $f \in W^{n+1}M(\Delta)$; $D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s} f$ — производная порядка s функции $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ по направлениям произвольных единичных векторов $\xi_1, \ldots, \xi_s \in \mathbb{R}^d$;

$$\mathbf{E}^d_{n,s} = \sup_{\substack{f \in W^{n+1}M(\Delta), \\ \xi_i \in \mathbb{R}^d,\ \|\xi_i\|=1,\ i=1,\ldots,s}} \|D^s_{\xi_1 \ldots \xi_s}(f - P_n^d)\|_\Delta$$

— величина погрешности аппроксимации производной порядка s ($s = 1, \ldots, n$) функции f интерполяционным многочленом P_n^d на Δ (отметим, что величина $\mathbf{E}^d_{n,s}$ зависит от способа выбора интерполяционных условий, используемых при задании многочлена P_n^d). Мы будем говорить об изучении зависимости величины $\mathbf{E}^d_{n,s}$ от геометрических характеристик симплекса, что тесно связано с контролем триангуляции исходной области при применении метода конечных элементов.

Во второй главе диссертационной работы рассматриваются задачи простой и кратной (в большей степени кратной) интерполяции для случаев $d = 2, 3$. Под простой интерполяцией мы будем понимать случаи, когда интерполируются только значения исходной функции f в точках (узлах) многомерной сетки; под кратной — любые случаи, когда кроме значений функции интерполируются также значения каких-либо ее производных в выбранных точках (в том числе, в частности, значения самой функции в таких точках могут не интерполироваться). Договоримся в обозначении многочлена P^d_n опускать верхний индекс, если из контекста понятно, о какой размерности идет речь.

Пусть $d = 2$ и имеется триангуляция области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. На каждом треугольнике из триангуляции Ω для $f \in W^{n+1}M(\Omega)$ строится многочлен $P_n = P_n[f]$ степени не выше n по совокупности переменных, интерполирующий функцию f (и ее производные, если речь идет о кратной интерполяции) в некоторых узлах треугольника. Всего задается $(n+1)(n+2)/2$ условий интерполяции на каждом треугольнике. Будем говорить в таком случае, что сплайн получен с помощью локальной интерполяции. Пусть условия для построения $P_n = P_n[f]$ таковы, что результирующая кусочно-полиномиальная функция на Ω имеет гладкость порядка m , $m \in \mathbb{Z}_+$, $n \geq 4m+1$ (последнее ограничение на соотношение между n и m является естественным и обусловлено тем, что при локальной интерполяции степень $n = 4m+1$ является наименьшей, обеспечивающей гладкость порядка m результирующего сплайна на Ω).

Построенная кусочно-полиномиальная функция аппроксимирует f, а ее производные аппроксимируют соответствующие производные функции f. Так как оценки величин $\mathbf{E}^d_{n,s}$ обычно зависят от геометрических характеристик треугольников триангуляции, то на триангуляцию, как правило, накладываются определенные требования. Первоначально используемым ограничением на триангуляцию являлось *условие наименьшего угла* — ограничение снизу величин наименьших углов треугольников. Это связано с тем, что во многих первых (ставших широко известными) оценках сверху величин $\mathbf{E}^d_{n,s}$ в знаменателях дробей, участвующих в этих оценках, присутствуют синусы наименьших углов треугольников, составляющих разбиение исходной области, или их аналоги. В качестве примера можно указать полученные в конце 60-х и начале 70-х годов прошлого века оценки М. Зламала, А. Женишека, Дж. Брамбла и М. Зламала, а также существенно обобщающие их оценки Ф. Сьярле и П.А. Равьяра [6] для многомерного случая, полученные в 1972 г. Некоторую дополнительную информацию и обзор вариантов обобщений условия наименьшего угла на случаи d-симплексов можно найти в серии совместных работ Я. Брандтса, А. Ханнукайнена, С. Коротова, М. Крижека. Отметим, что в большинстве уже указанных и цитируемых ниже работ речь идет не только о полученных авторами оценках, но и о выборе способов интерполяции.

С другой стороны, для $d = 2$ и малых значений n с 1957 по 1976 гг. в работах Дж.Л. Синжа, К. Фенга, Дж. Грегори, И. Бабушки, А.К. Азиза был получен ряд результатов, связанных с простой интерполяцией, из которых следует, что по существу оценки сверху величин $\mathbf{E}^d_{n,s}$ зависят не от наименьшего, а от наибольшего угла треугольника (что позволяет заменять условие наименьшего угла, накладываемое на триангуляцию, на *условие наибольшего угла* — ограничение сверху на величины наибольших углов треугольников, точнее, отделенность величин наибольших углов треугольников от π). Названные результаты положили начало серии работ, в которых рассматриваются различные виды интерполяции и устанавливаются оценки сверху величин аппроксимации функций из $W^{n+1}M$ и их производных, представленные через различные геометрические характеристики симплекса, иногда с точными константами. В случае простой интерполяции в равноотстоящих узлах симплекса для различных d и n здесь нужно отметить работы П. Жамэ ($d \geq 2, n \in \mathbb{N}$), Ю.С. Завьялова, Б.И. Квасова, В.Л. Мирошниченко ($d = 2, n = 1$, случай прямоугольных треугольников), Ю.Н. Субботина ($d \geq 2, n \in \mathbb{N}$), Д. Хандскомба ($d = 2, n = 1$), Ю.А. Килижекова ($d \geq 2, n = 1$), Ш. Уолдрона ($d \geq 2, n = 1$), М. Стампфле ($d \geq 2, n = 1$), М. Крижека ($d = 2, 3 \quad n = 1$), В.А. Клячина и А.А Широкого ($d = 3 \quad n = 1$), Ф. Гетманюка и П. Кнупа ($d = 2, 3, \quad n \in \mathbb{N}$), В.А. Клячина и Е.А. Пабат ($d \geq 2, \quad n = 1$), В.А. Клячина ($d \geq 2, \quad n = 1$), С. Коротова, М. Крижека, А. Ханнукайнена ($d \geq 2, \quad n = 1$). В случае кратной интерполяции оценки сверху величин $\mathbf{E}^d_{n,s}$ получали Ю.Н. Субботин ($d = 2, \quad n = 3, 5$), Н.В. Латыпова ($d = 2, \quad n = 4m + 3, \quad m \geq 0$), А. Женишек ($d = 2,$

$n=3$), Т. Апель ($d=2,3,\ \ n\in\mathbb{N}$), Ю.В. Куприянова (Ю.В. Матвеева) ($d=2,3,\ \ n=3$), А. Женишек и Я. Ходерова-Зламалова ($d=3$, $n=3$). Некоторые из характеристик симплекса, введенные в указанных работах, использовались в дальнейшем при $d=2,3$ разными авторами для получения оценок в ряде других ситуаций, связанных с другими способами интерполяции, другими пространствами. В качестве примера можно привести работы Г. Акосты, Р.Г. Дюрана, Т. Апеля, А.Л. Ломбарди (обзор и сравнение ряда характеристик можно найти в [2] и [4]).

Наряду с оценками сверху величин $\mathbf{E}^d_{n,s}$ представляют интерес оценки снизу, показывающие, что условие наибольшего угла, накладываемое на треугольник, является, вообще говоря, существенным при аппроксимации производных функции, заданной на треугольнике, производными интерполяционного многочлена. Первым и наиболее известным примером, демонстрирующим существенность условия наибольшего угла, является пример Шварца конца 19-го века. Данный пример показывает, что при определенном соотношении диаметра треугольника и величины наибольшего угла может даже не быть сходимости при аппроксимации градиента функции f градиентом линейной функции, заданной на треугольнике и интерполирующей значения f в вершинах треугольника. Также ряд оценок снизу величин $\mathbf{E}^d_{n,s}$ получен в работах Ю.Н. Субботина при доказательстве неулучшаемости соответствующих оценок сверху на множестве функций $W^{n+1}M$ при исследуемых им интерполяционных условиях (в том числе для случая простой интерполяции по равномерным узлам равнобедренного треугольника при произвольном $n\in\mathbb{N}$). Для $d=2,3$ и $n=1$ оценки снизу для аппроксимации производных функции получены Дж.Р. Шевчуком через радиус R описанной окружности треугольника или тетраэдра Δ. В.А.Клячиным доказано, что при $d=3$ оценки снизу, полученные Дж.Р. Шевчуком, не являются точными. Интересно отметить, что даже если функция f, являющаяся решением эллиптической краевой задачи на $\Omega\subset\mathbb{R}^2$, такова, что для сходимости производных интерполяционного многочлена к производным функции f требуется выполнение условия наибольшего угла, то это не означает, что при аппроксимации функции f (и ее производных) с использованием метода конечных элементов условие наибольшего угла является обязательным. Условие наибольшего угла, вообще говоря, не является необходимым для сходимости метода конечных элементов, пример чего получен С. Коротовым, М. Крижеком, А. Ханнукайненом. С другой стороны, в работах И. Бабушки, А.К. Азиза, П. Освальда, В. Кучеры показано, что невыполнение этого условия может также приводить к сколь угодно медленной сходимости и даже расходимости метода конечных элементов.

В главе 2 диссертационной работы в § 2.1 при $d = 2, 3$ предложены новые конечные элементы, для которых получены оценки сверху величин $\mathbf{E}^d_{n,s}$, более точные по сравнению с известными оценками, полученными ранее для других конечных элементов. В § 2.2 доказано, что для широкого множества способов выбора условий интерполяции, в том числе и для традиционных, при $m \geq 1$ влияние наименьшего угла треугольника на величину $\mathbf{E}^d_{n,s}$ является существенным для $s \geq 2$. В случае $m = 0$ существенным является влияние среднего (наибольшего) угла (независимо случай $m = 0, n = 1$ для интерполяции функции в вершинах треугольника рассмотрен В. Кучерой в 2016 г.). Как следствие, в диссертации показана оптимальность полученных ранее автором оценок сверху величин аппроксимации производных (для специально выбираемых условий интерполяции) не только для выбранного частного способа интерполяции, но и для широкого класса интерполяционных условий, обеспечивающих гладкость порядка m результирующего сплайна на Ω. Отметим, что все оценки получены на множестве функций $W^{n+1}M$. Исследования оценок сверху, при которых учитывается возможное анизотропное поведение функции и начало которым положено в работах Э. Надлера, Н. Дин, Д. Левина, Ш. Риппа, Е.Ф. Д'Азеведо, Р.Б. Симпсона, выходят за рамки данной диссертации.

В § 2.3 и § 2.4 при $d = 2$ для величин погрешности аппроксимации производных функций получены соответственно оценки сверху для *составных конечных элементов* (или, что то же самое, *макроэлементов* — конечных элементов, составленных из нескольких треугольников) типа Сие-Клафа-Точера и оценки снизу для составных конечных элементов некоторого общего вида. В частности, полученные оценки сверху для величин аппроксимации производных первого порядка в случае макроэлементов типа Сие-Клафа-Точера позволяют накладывать на триангуляцию условие наибольшего (а не наименьшего, как это было ранее) угла. Идея построения макроэлементов впервые была предложена Сие в 1962 г. как идея сопряжения трех многочленов малой степени с целью получения гладкой итоговой кусочно-полиномиальной функции на триангулированной исходной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ (сведения об этом можно найти в [1, глава 6]). Реализовано такое сопряжение было Р. Клафом и Дж. Точером в 1965 г. для трех многочленов 3-й степени. Использование макроэлементов позволяет получать сплайны гладкости порядка m при меньшем числе определяющих параметров конечноэлементного пространства по сравнению с использованием простых (не составных) эрмитовых конечных элементов. Обзор на эту тему можно найти в книге М.-Я. Лая и Л. Шумейкера [8].

В главе 3 диссертации рассматривается интерполяция Лагранжа по равномерным узлам $\{a_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}}\}$, заданным в (1), на d-симплексе $\Delta \subset \mathbb{R}^d$. Как отмечено выше, для такой интерполяции на настоящий момент существует большое количество работ, где получены оценки сверху величин $\mathbf{E}^d_{n,s}$, представленные через различные геометрические характеристики симплекса. Однако чаще всего в этих работах отсутствуют полноценные сравнения найденных оценок с результатами, полученными ранее. Автором предлагается в качестве базовых рассматривать оценки П. Жамэ [7]. Отметим, что в настоящее время эти оценки являются почти не используемыми, несмотря на то, что в задаче оценки сверху величин аппроксимации производных нет результатов, которые утверждали бы, что какие-либо из вновь получаемых оценок являются более точными, чем те, которые доказаны в [7]. В § 3.1 вводится новая характеристика симплекса со свойствами, аналогичными свойствам характеристики П. Жамэ, являющаяся более простой для вычисления и использования на практике. Это делает более простыми процесс контроля триангуляции и сравнение оценок П. Жамэ с вновь получаемыми. В § 3.2 приводятся оценки снизу величины погрешности аппроксимации производных функции на классе $W^{n+1}M(\Delta)$, что связано с изучением проблемы неулучшаемости оценок сверху, полученных П. Жамэ. В § 3.3 приводится пример, демонстрирующий, что при $d = 3$, $n = 1$ для некоторого класса тетраэдров оценки П. Жамэ можно несколько улучшить.

Цель работы. 1) Для процесса интерполяции непрерывной функции d переменных алгебраическими многочленами степени n по равномерным узлам d-симплекса при фиксированном d получить точный порядок по степени многочлена n константы Лебега L^d_n; найти оценку снизу для верхнего предела последовательности функций Лебега $L^d_n(\lambda)$

($n \to \infty$) при каждом фиксированном $u = u(\lambda) \in \Delta$.

2) Найти новые способы интерполяции (типа Эрмита или Биркгофа) функции из $W^{n+1}M(\Delta)$ алгебраическими многочленами и близкими конструкциями (составные конечные элементы), позволяющие получать непрерывные или гладкие сплайны на триангулированной области и приводящие к более точной аппроксимации производных производных исходной функции производными аппроксимирующей функции, чем известные ранее способы интерполяции; получить соответствующие оценки сверху погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционных многочленов.

3) Показать, что требование гладкости результирующей кусочно-полиномиальной функции на триангулированной области ведет к тому, что при аппроксимации производных порядка два и выше условие наименьшего угла, накладываемое на триангуляцию, становится неустранимым.

4) Найти новую характеристику, позволяющую контролировать качество триангуляции и являющуюся более простой для вычисления, чем классическая характеристика П. Жамэ. Показать, что известные оценки сверху погрешности аппроксимации функции и ее производных для случая интерполяции функции из $W^{n+1}M(\Delta)$ алгебраическими многочленами степени n по равномерным узлам d-симплекса, полученные П. Жамэ, для широкого класса симплексов являются качественно неулучшаемыми, а соответствующее ограничение на триангуляцию — неустранимым.

Методы исследования. В работе используются методы математического анализа и теории приближения функций.

Научная новизна. Результаты диссертации являются новыми и состоят в следующем.

1) Найден точный порядок по n при фиксированном d константы Лебега L_n^d; получена оценка снизу для верхнего предела последовательности функций Лебега $L_n^d(\lambda)$ ($n \to \infty$) при каждом фиксированном $u = u(\lambda) \in \Delta$.

2) Предложены новые способы интерполяции функции на треугольниках и тетраэдрах, для которых получены оценки сверху величин $E_{n,s}^d$, более точные по сравнению с известными оценками, полученными ранее для для других конечных элементов. При этом также рассмотрены

составные конечные элементы.

3) Доказано, что для широкого множества способов выбора условий интерполяции функции двух переменных на треугольнике, в том числе традиционных, обеспечивающих локальное задание сплайна и гладкость порядка $m \geq 1$, влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для производных порядка 2 и выше. В случае $m = 0$ доказано, что существенным является влияние среднего (наибольшего) угла.

4) Введена новая характеристика d-симплекса, со свойствами, аналогичными свойствам характеристики П. Жамэ, являющаяся более простой для вычисления и использования на практике. С помощью этой характеристики показано, что во многих случаях условие на триангуляцию, введенное П. Жамэ в связи с интерполяцией Лагранжа по равномерным узлам d-симплекса и обеспечивающее сходимость метода конечных элементов, является неулучшаемым. Таким образом, показано, что оценки П. Жамэ для величины $\mathbf{E}^d_{n,s}$ являются близкими к оптимальным и должны приниматься во внимание при исследовании и использовании величины $\mathbf{E}^d_{n,s}$.

Теоретическая и практическая значимость. Работа носит теоретический характер. Полученные в диссертации результаты могут быть использованы при аппроксимации поверхностей, при решении краевых задач методом конечных элементов. Развитые методы могут быть использованы при дальнейшем изучении способов аппроксимации производных функции производными интерполяционных многочленов и получении соответствующих оценок погрешности аппроксимации.

Публикации. Результаты диссертации опубликованы в работах [10]–[20] (без соавторов) в изданиях, включенных в Перечень рецензируемых научных изданий ВАК.

Апробация. Результаты диссертации докладывались на летних Школах С.Б. Стечкина (Миасс 2000, 2002, 2011, 2012, 2013, 2015; Алексин, 2007), на 16-й, 18-й, 19-й Саратовских зимних школах "Современные проблемы теории функций и их приложения" (Саратов, 2012, 2016, 2018), на Двенадцатой международной Казанской летней научной школе-конференции "Теория функций, ее приложения и смежные вопросы" (Казань, 2016), на всероссийских конференциях "Алгоритмический анализ неустойчивых задач", посвященных памяти В.К. Иванова (Екатеринбург, 2001, 2008, 2011; Челябинск, 2014), на российских конференциях "Методы сплайн-функций", посвященных памяти Ю.С. Завьялова (Новосибирск, 2001, 2011), на международной конференции "Функциональные методы теории аппроксимации и теории операторов", посвященной памяти В.К. Дзядыка (Украина, Волынская область, 2009), на конференции "Теория приближения функций и ее приложения" (Украина, Каменец-Подольский, 2012), на IX Всероссийском совещании по проблемам построения сеток (Абрау-Дюрсо, 2002), на 3-й, 4-й, 7-й Всероссийских конференциях "Актуальные проблемы прикладной математики и механики", посвященной памяти академика А.Ф.Сидорова (Абрау-Дюрсо, 2006, 2008, 2014), на 31-й Региональной молодежной конференции (Екатеринбург, 2000), на международной школе-конференции "Геометрический анализ и его приложения" (Волгоград, 2016), на совместном семинаре отдела теории приближения функций и отдела аппроксимации и приложений Института математики и механики УрО РАН под руководством члена-корреспондента РАН Ю.Н. Субботина и профессора Н.И. Черных, на семинаре лаборатории численных методов математического анализа Института математики им. С.Л.Соболева (руководитель к.ф.-м.н. В.Л. Мирошниченко), на семинаре по теории функций действительного переменного (руководители академик РАН Б.С. Кашин, академик РАН С.В. Конягин, профессор Б.И. Голубов, профессор М.И. Дьяченко).

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Общий объем работы — 210 страниц. Список литературы содержит 93 наименования.

Основное содержание работы

Во введении описываются задачи, решаемые в диссертационной работе, описывается история тематики, приводится обзор литературы, обосновывается актуальность темы диссертации и формулируются основные результаты.

В **главе 1** для функции f, непрерывной на $\Delta \subset \mathbb{R}^d$, рассматривается задача интерполяции многочленами степени n по равномерным узлам $\{a_{i_1 i_2 \dots i_{d+1}}\}$ d-симплекса Δ, задаваемым формулой (1). Пусть алгебраический многочлен $P_n^d[f]$ удовлетворяет следующим условиям интерполяции:

$$P_n^d(a_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}}) = f(a_{i_1 i_2 \ldots i_{d+1}}), \quad i_k \in \{0, \ldots, n\}, \quad i_1 + i_2 + \ldots + i_{d+1} = n.$$

Известно, что такой многочлен существует и единственный (например, это следует из работы Р.А. Николайдиса [9], в которой построены соответствующие фундаментальные многочлены). Обозначим через $L_n^d(u) = L_n^d(\lambda)$ ($u \in \Delta$, λ — барицентрические координаты точки u) функцию Лебега данного лагранжева процесса интерполяции в равномерных узлах симплекса, через L_n^d — константу Лебега указанного интерполяционного процесса, т. е.

$$L_n^d(u) = L_n^d(\lambda) = \sup_{\substack{f \in C(\Delta) \\ f \neq 0}} \frac{|P_n^d[f](\lambda)|}{\|f\|_\Delta}, \quad L_n^d = \sup_{\substack{f \in C(\Delta) \\ f \neq 0}} \frac{\|P_n^d[f]\|_\Delta}{\|f\|_\Delta}.$$

В § 1.1 найден точный порядок по n при фиксированном d константы Лебега L_n^d; в § 1.2 получена оценка снизу по n при фиксированном d для верхнего предела последовательности функций Лебега $L_n^d(u)$ в любой точке $u \in \Delta$. А именно, доказаны следующие теоремы (нумерация теорем соответствует нумерации в диссертации).

Теорема 1.1.1. *Для константы Лебега интерполяционного процесса по равномерным узлам (1) на $d-$ симплексе Δ при фиксированном $d \geq 2$ справедлива двусторонняя оценка*

$$C_1 \frac{2^n}{n \ln n} \leq L_n^d \leq C_2(d) \frac{2^n}{n \ln n}.$$

где C_1 — некоторая положительная константа, а величина $C_2(d)$ может зависеть от d (но не зависит от n).

Введем множество числовых последовательностей

$$\mathcal{A} = \Big\{ \{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \mid \alpha_n > 0, \ \alpha_n \to \infty \text{ и } \alpha_n / n \to 0 \text{ при } n \to \infty \Big\}.$$

Теорема 1.2.1. *Пусть $d \geq 2$, $u \in \Delta$, $\{\alpha_n\}_{n=1}^\infty \in \mathcal{A}$. Если существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что для всех $n > n_0$ выполнено соотношение $\lambda_0 = \lambda_0(u) \stackrel{def}{=} \min\limits_{s=1,2,\ldots,d+1} \lambda_s \geq \alpha_n / n$, то найдется последовательность номеров $n_k \to \infty$ (при $k \to \infty$), для которых выполняются неравенства*

$$L_{n_k}^d(u) = L_{n_k}^d(\lambda) \geq c_d(\lambda_0) \frac{\sqrt{\alpha_{n_k}}}{n_k^{1+d/2}} \left[\varphi(\lambda_0)\right]^{n_k},$$

где $\varphi(\lambda_0) = 2\lambda_0^{\lambda_0}(1-\lambda_0)^{1-\lambda_0}$ *,* $c_d(\lambda_0) = C_d|\cos\pi\lambda_0|/\pi$ *,* C_d *— некоторая положительная величина, которая может зависеть только от* d *.*

Везде далее через H будем обозначать диаметр d-симплекса Δ.

Будем писать, что функции нескольких переменных ψ_1 и ψ_2 находятся в отношении порядка $\psi_1 \underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}{\lesssim} \psi_2$ (или $\psi_1 \underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}{\gtrsim} \psi_2$), где $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$ — некоторые числовые параметры, если найдется неотрицательное число $C(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)$, зависящее от $\alpha_1,\ldots,\alpha_s$, такое, что $\psi_1 \le C(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\psi_2$ (или $\psi_1 \ge C(\alpha_1,\ldots,\alpha_s)\psi_2$) для всех значений аргументов ψ_1 и ψ_2. Если $\psi_1 \underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}{\lesssim} \psi_2 \underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}{\lesssim} \psi_1$, то будем писать $\psi_1 \underset{\alpha_1,\ldots,\alpha_s}{\asymp} \psi_2$. Аналогично будем использовать обозначения $\psi_1 \lesssim \psi_2$, $\psi_1 \gtrsim \psi_2$, $\psi_1 \asymp \psi_2$, если найдется такая неотрицательная константа C, что соответственно выполняются соотношения $\psi_1 \le C\psi_2$, $\psi_1 \ge C\psi_2$, $\psi_1 \lesssim \psi_2 \lesssim \psi_1$.

В **главе 2** преимущественно рассматривается случай $d = 2$ (за исключением второго параграфа, где $d = 2$ и $d = 3$). Поэтому, говоря о главе 2, мы будем считать, что $d = 2$, Δ — произвольный треугольник из триангуляции многоугольника $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с вершинами a_1, a_2, a_3, если не сказано иное. Считаем, что $f \in W^{n+1}M(\Omega)$, $u = (x, y)$ — произвольная точка треугольника Δ, который помещен в прямоугольную систему координат Oxy таким образом, что его наибольшая сторона a_1a_2 параллельна оси Ox. Для определенности пусть $a_1 = (b, 0)$, $a_2 = (-a, 0)$, $a_3 = (0, h)$, где $a, b, h > 0$ и $a \le b$. Пусть α, β, γ — величины углов при вершинах a_1, a_2, a_3 соответственно, причем $0 < \alpha \le \beta \le \gamma$; тогда $a \le b$, и диаметр Δ равен $a + b = H$. Через $\mathbf{n}_{ij}$ $(i, j = 1, 2, 3; \quad i \ne j)$ будем обозначать вектор единичной нормали к стороне a_ia_j, через $d_{ij} = |a_ia_j| = |a_i - a_j|$ — длину стороны a_ia_j треугольника Δ; через τ_{ij} $(i \ne j)$ — единичные векторы, направленные от a_i к a_j (это обозначение используем в случаях $d = 2$ и $d = 3$).

Отметим, что два треугольника из триангуляции называются *соседними*, если они имеют общую сторону.

В **§ 2.1** предложен ряд новых способов интерполяции функции двух переменных и доказаны соответствующие этим способам интерполяции оценки сверху величин аппроксимации производных функции в равномерной метрике.

Для $n = 3$, $f \in W^4 M(\Omega)$ и многочлена $P_3 = P_3^2[f]$, удовлетворяющего интерполяционным условиям

$$P_3(a_i) = f(a_i),\ \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial x} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial P_3(a_i)}{\partial y} = \frac{\partial f(a_i)}{\partial y}\ ,\ i = 1, 2, 3; \quad (2)$$

$$\frac{\partial^2 P_3(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}} = \frac{\partial^2 f(a_2)}{\partial \tau_{21} \partial \tau_{23}}\ , \quad (3)$$

доказана следующая теорема.

Теорема 2.1.1. *Для способа интерполяции, определяемого условиями (2)–(3), справедливы оценки*

$$\mathbf{E}^2_{3,p} \lesssim \frac{M H^{4-p}}{\sin^p \beta}\ , \quad p = \overline{0,3}. \quad (4)$$

Отметим, что оценки (4) и другие оценки подобного типа, которые получены в диссертации, являются точными по порядку величины H. Это не является предметом исследования и следует из оценок в одномерном случае, к которому можем прийти, рассмотрев оценки величин аппроксимации функции из $W^{n+1}M$ и ее производных на ребре симплекса, длина которого совпадает с H . В диссертации изучается вопрос зависимости оценок от углов треугольника в случае $d = 2$ или от аналогичных характеристик симплекса при $d \geq 3$. Также заметим, что полученные оценки (4) дают положительный ответ на вопрос о корректности предложенного способа интерполяции (т. е. о существовании и единственности многочлена P_3), поскольку вопрос существования интерполяционного многочлена решается положительно в силу существования решения соответствующей системы уравнений (в теореме 2.1.1 по сути доказывается существование этого решения и проводится его оценка), и из (4) следует, что если $f(x, y) \equiv 0$, т. е. $M = 0$, то интерполяционный многочлен, удовлетворяющий рассматриваемым интерполяционным условиям, является единственным, а именно, $P_3(x, y) \equiv 0$. Для других способов интерполяции вопросы существования интерполяционного многочлена решаются аналогичным образом, и поэтому в дальнейшем обсуждаться не будут.

Замена условия (3) на условие

$$\frac{\partial^3 P_3}{\partial y^3} = \frac{\partial^3 f(a_2)}{\partial y^3}\ , \quad (5)$$

позволяет несколько уменьшить правую часть (4). А именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 2.1.2. *Пусть многочлен $P_3(x,y)$ удовлетворяет условиям (2),(5). Тогда имеют место оценки*

$$\mathbf{E}^2_{3,p} \lesssim MH^{4-p}\,(\sin\beta)^{-\min\{2,p\}}\,, \quad p=\overline{0,3}.$$

Задача интерполяции функции многочленами 3-й степени при условиях (2), (5) уже рассматривалась Н.В. Латыповой, однако в знаменателях дробей, участвующих там в оценках сверху для производных второго и третьего порядков, присутствовал синус наименьшего угла треугольника. Отметим, что в Ю.Н. Субботиным и независимо А. Женишеком доказаны (разными способами) теоремы, аналогичные теореме 2.1.1, для случаев, когда вместо (3) используются другие условия (в работе А. Женишека получены оценки погрешности аппроксимации только для первых производных функции).

Метод, использованный при доказательстве теоремы 2.1.2, применяется при доказательстве следующей теоремы. Дадим некоторые определения. Пусть Q — множество равномерных узлов на треугольнике Δ, т. е.

$$Q=\{u_{ijk}\}_{(i,j,k)\in I}=\{u_{ijk}|\ u_{ijk}=(i/n)a_1+(j/n)a_2+(k/n)a_3,\ (i,j,k)\in I\}\,,$$

где

$$I=\{(i,j,k)|\quad i,j,k\in\mathbb{Z}_+;\ i+j+k=n\}\,.$$

Рассмотрим множество троек чисел

$$I_0=\{(i,j,k)\in I|\quad i\cdot j\cdot k=0\}$$

и соответствующее подмножество Q_0 множества Q (точки из Q, принадлежащие сторонам треугольника):

$$Q_0=\{u_{ijk}|\quad u_{ijk}=(i/n)a_1+(j/n)a_2+(k/n)a_3,\ (i,j,k)\in I_0\}\,.$$

Пусть многочлен $P_n=P_n^2[f]$ степени не выше n по совокупности переменных определяется следующими условиями:

$$P_n(u)=f(u) \tag{6}$$

для всех $u\in Q_0$ и

$$\frac{\partial^{i+j}P_n(a_2)}{\partial\tau_{12}^i\partial n_{12}^j}=\frac{\partial^{i+j}f(a_2)}{\partial\tau_{12}^i\partial n_{12}^j}\,, \tag{7}$$

для всех $j=\overline{3,n}$, $i=\overline{0,n-j}$.

Теорема 2.1.6. *Пусть многочлен P_n определяется условиями (6)–(7). Тогда для любого числа $\beta_0<\pi/2$ и любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $\beta\le\beta_0$, справедливы оценки*

$$\mathbf{E}^2_{n,s}\le\begin{cases}C(n,\beta_0)MH^{n+1-s}\sin^{-s}\gamma, & s=0,1,2,\\ C(n,\beta_0)MH^{n+1-s}\sin^{-2}\gamma, & s=3,\dots,n.\end{cases}\tag{8}$$

где $C(n,\beta_0)$ — неотрицательная величина, зависящая только от n и β_0.

Вместо условий (7) при определении многочлена P_n можно использовать аналогичные условия в вершине при наибольшем угле треугольника, т. е. пусть

$$\frac{\partial^{i+j}P_n(a_3)}{\partial\tau_{31}^i\partial n_{31}^j}=\frac{\partial^{i+j}f(a_3)}{\partial\tau_{31}^i\partial n_{31}^j}\ ,$$

для всех $j=\overline{3,n}$, $i=\overline{0,n-j}$. В этом случае для любого числа $\gamma_0\in(0,\pi)$ такого, что $\gamma_0\ne\pi/2$, и любого треугольника Δ, удовлетворяющего условию $|\cos\gamma|>|\cos\gamma_0|$, имеют место оценки, аналогичные оценкам (8) (с величинами $C(n,\gamma_0)$ вместо $C(n,\beta_0)$).

Во втором параграфе второй главы рассмотрен также случай $d=3$, $n=3$. В этой ситуации мы считаем, что Δ — тетраэдр из триангуляции многогранника $\Omega\in\mathbb{R}^3$ с вершинами a_1,a_2,a_3,a_4; $f\in W^4(\Omega)$; T_i — грань Δ напротив вершины a_i; α_i, β_i, γ_i — соответственно наименьший, средний и наибольший углы в T_i. Через ϑ_{ij} обозначим угол между τ_{ij} и T_i; через ϑ_i и ϑ — такие углы, что

$$\sin\vartheta_i=\max_{\substack{1\le j\le 4\\ j\ne i}}\sin\vartheta_{ij},\quad \sin\vartheta=\min_{1\le i\le 4}\sin\vartheta_i.\tag{9}$$

Пусть $P_3=P_3^3[f]$ — многочлен, интерполирующий функцию f и ее производные на Δ. Такой многочлен задается с помощью 20 интерполяционных условий, из которых 16 традиционно имеют вид

$$P_3(a_i)=f(a_i),\qquad i=1,2,3,4;$$

$$\frac{\partial P_3(a_i)}{\partial\tau_{ij}}=\frac{\partial f(a_i)}{\partial\tau_{ij}}\qquad i=1,2,3,4;\quad j\in\{1,2,3,4\}\setminus\{i\}.$$

Оставшиеся условия могут варьироваться, при этом желательно выбирать их таким образом, чтобы в итоге можно было обеспечить непрерывность кусочно полиномиальной функции на исходной триангулированной области. В диссертации предложены новые способы выбора условий такого рода, основанные на теореме 2.1.1. Эти способы зависят от вида тетраэдра и однозначно определяют P_3. В результате получены следующие оценки сверху:

$$\mathbf{E}_{3,r}^{3} \lesssim \frac{MH^{4-r}}{\sin^r \vartheta}\ , \quad r=\overline{0,3}. \tag{10}$$

Оценки (10) дают ту же точность, что и оценки, найденные А. Женишеком и Я. Ходеровой-Зламаловой для кратной интерполяции при $n=3$ (с выбором интерполяционных условий другого типа), но используют более простую характеристику тетраэдра. При этом рассматриваемое в диссертации соответствующее пространство конечных элементов имеет ме́ньшую размерность по сравнению с пространствами, строящимися при интерполяции Лагранжа. Отметим, что при использовании условий интерполяции, предлагаемых в диссертации, для обеспечения непрерывности результирующего сплайна на Ω требуются, вообще говоря, некоторые дополнительные ограничения на триангуляцию (отсутствие в триангуляции тетраэдров определенного вида), однако эти ограничения являются наиболее слабыми из применяющихся при кратной интерполяции и известных автору.

Анализируя известные результаты (из рассмотренной выше литературы и представленные в § 2.1 диссертации) при $d=2$, касающиеся оценок сверху величин погрешности аппроксимации производных функции второго и более высоких порядков соответствующими производными интерполяционных многочленов, можно заметить, что если брать совокупность всех возможных направлений, по которым берутся производные, то синус наименьшего угла треугольника в знаменателях оценок отсутствует только в случаях, когда обеспечивается лишь непрерывность кусочно-полиномиальной функции $(m=0)$. В соответствии с этим наблюдением в **§ 2.2** диссертации доказано, что для широкого множества способов выбора условий интерполяции, в том числе традиционных, при $m \geq 1$ влияние наименьшего угла треугольника на величину погрешности аппроксимации производных функции производными интерполяционного многочлена является существенным для производных порядка 2 и выше. В случае $m=0$ существенным является влияние среднего (наибольшего) угла. Перейдем к более точным формулировкам.

Пусть на треугольнике Δ по функции f двух переменных строится интерполяционный многочлен $P_n(u) = P_n^2[f](u)$ таким образом, что сужения $P_n(u)$ и $\partial^k P_n(u)/\partial n_{ij}^k$ ($k = 1, \ldots, m$; $n \geq 4m+1$) на любую сторону $a_i a_j$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $a_i a_j$ (или в точках прямой, проходящей через a_i и a_j). Если при этом $P_n^*(u)$ — интерполяционный многочлен на соседнем с Δ треугольнике Δ^*, $a_i a_j$ — общая сторона Δ и Δ^*, условия для нахождения $P_n^*(u)$, задаваемые на $a_i a_j$, совпадают с условиями для $P_n(u)$, и это имеет место для всех соседних треугольников, то обеспечена гладкость порядка m кусочно-полиномиальной функции на Ω. Пусть, кроме того, условия для определения $P_n(u)$ задаются таким образом, что для любой стороны $a_i a_j$ треугольника Δ имеют место равенства

$$\left.\frac{\partial^k \left(f(u) - P_n(u)\right)}{\partial n_{ij}^k}\right|_{u\in[a_i,a_j]} = \frac{1}{(n+1-k)!}\,\frac{\partial^{n+1} f(\vartheta_{ij}^k)}{\partial n_{ij}^k \partial \tau_{ij}^{n+1-k}}\; d_{ij}^{n+1-k}\omega_{ij,n+1-k}\left(t\right), \tag{11}$$

$$k = 0, \ldots, m, \quad i,j \in \{1,2,3\}, \quad i \neq j,$$

где $\vartheta_{ij}^k \in a_i a_j$; $\omega_{ij,n+1-k}$ — многочлен одной переменной степени $n+1-k$ со старшим коэффициентом, равным единице; $t = \left|u - a_i\right|/d_{ij} \in [0,1]$, через $|u - a_i|$ обозначено расстояние между u и a_i.

Введем определитель

$$D = \begin{vmatrix} d_1 & d_2 & \ldots & d_m \\ \binom{n-2}{m-1} & \binom{n-2}{m} & \ldots & \binom{n-2}{2m-2} \\ \binom{n-3}{m-2} & \binom{n-3}{m-1} & \ldots & \binom{n-3}{2m-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \binom{n-m}{1} & \binom{n-m}{2} & \ldots & \binom{n-m}{m+1} \end{vmatrix},$$

где

$$d_s = \binom{n-1}{m-1+s}\left(n\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) + n\frac{a}{b}\omega_{21,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{31,n+1}^{(n)}(1)\right) +$$

$$+ \binom{n}{m+s}\left(\omega_{31,n}^{(n-1)}(1) - \omega_{21,n}^{(n-1)}(1)\right),$$

$$s = 1, \ldots, m;$$

положим

$$g = b\omega_{31,n+1}^{(n)}(1) - (a+b)\omega_{21,n+1}^{(n)}(1).$$

Теорема 2.2.1. *Пусть условия интерполяции функции* $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ *на треугольнике* Δ *многочленом* $P_n(u)$, $u \in \Delta$, *таковы, что выполнены условия* (11) *и имеют место неравенства*

$$\left|\omega^{(n-j)}_{kl,n+1-j}(1)\right| \underset{n,m}{\lesssim} 1, \quad j = 0,\ldots,m, \quad k,l \in \{1,2,3\};$$

$$|g| \underset{n,m}{\gtrsim} a;$$

$$|D| \underset{n,m}{\gtrsim} 1.$$

Тогда найдутся число $\alpha_0 > 0$ *и натуральное число* $s_0 \geq 2m+1$ *такие что для любого* $\alpha < \alpha_0$ *имеют место оценки*

$$\mathbf{E}^2_{n,s} \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{s-1}}\,, \quad s = 1,\ldots,s_0;$$

$$\mathbf{E}^2_{n,s} \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-s}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{s_0-1}}\,, \quad s = s_0+1,\ldots,n.$$

Если, кроме того, $m \geq 1$ *и*

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta} = 0,$$

то найдутся $\widetilde{\alpha}_0 > 0$ *и натуральные числа* $\{r_i\}_{i=0}^{m+1}$, $2m+1 = r_0 < r_1 < \cdots < r_{m+1} \leq n$ *такие что для любого* $\alpha < \widetilde{\alpha}_0$ *имеют место оценки*

$$\mathbf{E}^2_{n,r} \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r-2m-1}}\,, \quad r = r_1,\ldots,r_{m+1};$$

$$\mathbf{E}^2_{n,r} \underset{n,m}{\gtrsim} \frac{MH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r_{m+1}-2m-1}}\,, \quad r = r_{m+1}+1,\ldots,n;$$

$$\mathbf{E}^2_{n,r} \underset{n,m}{\gtrsim} \max\left\{\frac{MH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{p_r}(\operatorname{tg}\beta)^{q_r}}, \frac{MH^{n+1-r}}{\sin\beta(\sin\alpha)^{2m}(\operatorname{tg}\beta)^{r_{i-1}-2m-1}}\right\},$$
$$r = r_{i-1}+1,\ldots,r_i-1,\ i = 1,\ldots,m+1,$$

где $p_r = \max\{0, 2m - r_i + r\}$, $q_r = \min\{r_i - 2m, r\} - 1$.

Отметим, что условия теоремы 2.2.1 являются естественными для традиционных способов интерполяции функции на треугольнике с целью построения пространства конечных элементов (в диссертации это обсуждается в замечаниях к теореме, которые мы здесь не приводим). В частности, теорема применима ко всем интерполяционным многочленам, рассмотренным в § 2.1.

Ранее в [3] автором найдены условия интерполяции функции $f \in WM^{4m+2}$ многочленом $P_{4m+1} = P^2_{4m+1}[f]$, которые обеспечивают гладкость порядка m результирующей кусочно-полиномиальной функции на Ω и оценки

$$\mathbf{E}^2_{4m+1,s} \underset{m}{\lesssim} \frac{MH^{4m+2-s}}{(\sin\beta)^{\max\{1,s-2m\}}\,(\sin\alpha)^{\min\{s-1,2m\}}}, \tag{12}$$

где $s = 1,\ldots,4m+1$ (для $s = 0$ в правой части (12) остается MH^{4m+2}). Следствием теоремы 2.2.1, сформулированным в замечании 2.2.1 является то, что оценки (12) и соответствующий им выбор условий интерполяции являются экстремальными (наилучшими из возможных) с точки зрения аппроксимации величин $E^2_{4m+1,s}$ для $s = 1,\ldots,2m+1$, если речь идет о получении локального сплайна с гладкостью порядка m.

В оставшейся части главы 2 для $d = 2$ исследуются оценки величин погрешности аппроксимации производных функции с помощью составных конечных элементов (когда каждый треугольник из триангуляции в свою очередь разбивается на несколько треугольников).

Пусть S_3, S_Δ — кусочно полиномиальные функции, интерполирующие функцию f на Δ и являющиеся соответственно многочленами степени $n = 3$ или $n \in \mathbb{N}$ на каждом из треугольников, на которые триангулирован треугольник Δ ;

$$\mathcal{E}_{n,s} = \mathcal{E}_{n,s}(\Delta) = \mathcal{E}_{n,s}(\Delta, S) = \sup_{\substack{f\in W^{n+1}M(\Delta),\\ \xi_i\in\mathbb{R}^d,\ \|\xi_i\|=1,\ i=1,\ldots,s}} \operatorname*{ess\,sup}_{u\in\Delta} |D^s_{\xi_1\ldots\xi_s}(f(u) - S(u))|$$

— величина погрешности аппроксимации производных порядка s функции f соответствующими производными кусочно-полиномиальной функции S, где $S = S_3$, $n = 3$ или $S = S_\Delta$, $n \in \mathbb{N}$ (величина $\mathcal{E}_{n,s}$, как и $\mathbf{E}^d_{n,s}$, зависит от способа выбора интерполяционных условий, используемых при задании кусочно полиномиальной функции S).

В **§ 2.3** получены оценки сверху для элементов типа Сие-Клафа-Точера. Рассматривается ситуация, когда Δ является частным случаем треугольника Сие–Клафа–Точера, т. е. порождает составной конечный элемент, который строится следующим образом. Треугольник Δ разбивается на три треугольника $\mathcal{T}_i$ с вершинами a_0, a_{i+1}, a_{i+2}, $1 \le i \le 3$ (считаем, что $a_4 = a_1$, $a_5 = a_2$), где точка a_0 является точкой пересечения биссектрис внутренних углов треугольника Δ (мы рассматриваем именно такую точку a_0, тогда как в общем случае при построении треугольника Сие–Клафа–Точера точка a_0 может быть любой точкой внутри Δ; в случае, когда речь идет о конкретном выборе точки a_0 , обычно берется центр тяжести треугольника, как в [8]). Пусть b_1, b_2, b_3 — середины сторон a_2a_3, a_1a_3, a_1a_2 соответственно; В качестве аппроксиманта функции $f \in W^4M$ на Δ используется гладкая (т. е. из класса $C^1(\Delta)$) кусочно полиномиальная функция S_3, которая на каждом $\mathcal{T}_i$, $1 \le i \le 3$, является многочленом $P_{3,i}$ третьей степени (по совокупности переменных), для задания которого требуется 10 параметров. Таким образом, для определения S_3 требуется 30 условий. Требование того, что $S_3 \in C^1(\Delta)$, дает 18 условий: например, это могут быть условия непрерывности функции S_3 и ее производных первого порядка по двум несовпадающим направлениям в точке a_0 (всего 6 условий) и в точках a_1, a_2, a_3 (9 условий), а также условие непрерывности нормальных производных при переходе через середины отрезков a_0a_i (3 условия). Кроме того, потребуем, чтобы функция S_3 интерполировала значения функции f и ее производных первого порядка по двум различным направлениям в точках a_1, a_2, a_3 (9 условий) и производные первого порядка по направлениям n_{23}, n_{13}, n_{12} в точках b_1, b_2, b_3 соответственно (3 условия). Доказательство существования такого конечного элемента (а также описание воспроизведенного здесь способа его построения) можно найти в [1]. Отметим, что если все элементы на рассматриваемой триангуляции являются треугольниками Сие–Клафа–Точера, то результирующая кусочно-полиномиальная функция на Ω является гладкой, т. е. принадлежит классу $C^1(\Omega)$.

Теорема 2.3.1. *Имеют место следующие оценки:*

$$\mathcal{E}_{3,s}(\Delta, S_3) \lesssim \begin{cases} MH^4, & \text{если} \quad s = 0, \\ MH^3 \sin^{-1}\beta, & \text{если} \quad s = 1, \\ MH^{4-s} \sin^{-(s-1)}\beta \sin^{-1}\alpha, & \text{если} \quad s = 2, 3. \end{cases} \tag{13}$$

Отметим, что существовавшие ранее оценки сверху аппроксимации производных для макроэлементов были больше и требовали наложения на триангуляцию условия наименьшего угла (первые оценки были получены Ф. Сьярле и описаны в [1]; также ряд результатов может быть найден в [8]). Возможность получения оценок (13) обусловлена в том числе выбором в качестве точки a_0 точки пересечения биссектрис треугольника (ранее наиболее частым выбором являлся центр масс треугольника).

В **§ 2.4** доказаны оценки снизу величин погрешности аппроксимации производных функций для широкого класса составных конечных элементов. Результаты этого параграфа носят тот же характер, что и утверждение теоремы 2.2.1 из § 2.2. Для точной формулировки результатов дадим необходимые определения.

Пусть T — множество треугольников, из которых состоит триангуляция исходной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$; $\Delta \in T$. Пусть треугольник Δ с вершинами a_1, a_2, a_3 является составным конечным элементом, т. е. в свою очередь триангулирован на k треугольников $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \ldots, \mathcal{T}_k$; пусть $k \leq k_0$, где k_0 — некоторое заданное натуральное число. Рассматриваются только такие триангуляции треугольника Δ, что для каждой стороны $a_i a_j$ ($i, j \in \{1, 2, 3\}$, $i \neq j$) найдется треугольник $\mathcal{T}_s$ ($1 \leq s \leq k$), у которого одна из сторон совпадает с $a_i a_j$. На каждом из треугольников $\mathcal{T}_i$ задается многочлен $P_{n,i} = P_i$ степени не выше n по совокупности переменных. Таким образом, на Δ задана кусочно полиномиальная функция S_Δ. На S_Δ накладываются следующие ограничения.

C1. Кусочно-полиномиальная функция S_Δ интерполирует значения функции f и, возможно, ее производные по избранным направлениям в некоторых точках треугольника Δ, в том числе в вершинах и некоторых точках сторон, и полностью определяется интерполяционными условиями и условием принадлежности классу $C^m(\Delta)$ ($m \geq 1$), т. е. задается локально на Δ.

C2. Если $\widetilde{S} = \sum\limits_{\Delta \in T} \widetilde{S}_\Delta$, где

$$\widetilde{S}_\Delta(u) = \begin{cases} S_\Delta(u), & \text{если} \quad u \in \Delta, \\ 0, & \text{если} \quad u \in \Omega \setminus \Delta, \end{cases}$$

то $\widetilde{S} \in C^m(\Omega)$.

Пусть сужения сплайна $S_\Delta(u)$ и его производной $\partial S_\Delta(u)/\partial n_{ij}$ на любую сторону $a_i a_j$ треугольника однозначно определяются интерполяционными условиями, задаваемыми в точках стороны $a_i a_j$ (в силу условий **C1** и **C2** тем же условиям должен удовлетворять сплайн $S_{\Delta^*}(u)$ на соседнем с Δ треугольнике Δ^*). Пусть, кроме того, интерполяционные условия в точках сторон треугольника Δ задаются таким образом, что для любой стороны $a_i a_j$ треугольника Δ имеют место равенства

$$\left.\frac{\partial^s\left(f(u)-S_\Delta(u)\right)}{\partial n_{ij}^s}\right|_{u\in[a_i,a_j]} = \frac{1}{(n+1-s)!}\,\frac{\partial^{n+1}f(\vartheta_{ij}^s)}{\partial n_{ij}^s\partial\tau_{ij}^{n+1-s}}\;d_{ij}^{n+1-s}\omega_{ij,\;n+1-s}\left(t\right), \tag{14}$$
$$s=0,\ldots,m,\quad i,j\in\{1,2,3\},\quad i\neq j,$$

где $\vartheta_{ij}^s\in[a_i,a_j]$; $\omega_{ij,\;n+1-s}(t)$ — многочлен степени $n+1-s$ со старшим коэффициентом, равным единице; $t=|u-a_i|/d_{ij}\in[0,1]$. Далее без ограничений общности считаем, что $m=1$ (поскольку для доказательства результата достаточно принадлежности функции $\widetilde{S}$ классу $C^1(\Omega)$).

В связи с требованием выполнения условия **C2** обычно на всех сторонах треугольника Δ задаются однотипные условия интерполяции, т. е. $\omega_{ij,n+1-s}(x)$ не зависит от i,j , что означает

$$\omega_{ij,n+1-s}(x)=\omega_{pq,n+1-s}(x)$$

для любых i,j,p,q и $s=0,1$ (или $s=0,\ldots,r,$ если $r>1$). Это означает, что

$$\omega_{ij,n+1-s}(x)=(-1)^{n+1-s}\omega_{ij,n+1-s}(1-x) \tag{15}$$

и

$$\frac{\omega_{ij,n+1-s}^{(n-s)}(x)}{(n+1-s)!}=x-\frac{1}{2} \tag{16}$$

для любых $s=0,1$ и $i,j\in\{1,2,3\},\;\; i\neq j.$

В § 2.4 доказана следующая теорема.

Теорема 2.4.1. *Пусть Δ — составной конечный элемент, триангулированный на k треугольников $\mathcal{T}_1,\mathcal{T}_2,\ldots,\mathcal{T}_k,\;\; k\le k_0$. Если условия интерполяции функции $f\in W^{n+1}(\Delta)$ кусочно-полиномиальной функцией S_Δ таковы, что выполняются свойства $C1$, $C2$ и выполнены соотношения (14) и (16), то для любого $s=2,\ldots,n$ найдется $\alpha_0>0$ такое, что для любого $\alpha<\alpha_0$ имеют место оценки*

$$\mathcal{E}_{n,s}=\mathcal{E}_{n,s}(\Delta,S_\Delta)\ge\mathcal{K}(n,k_0)\frac{MH^{n+1-s}}{\sin\alpha}\;,$$

где $\mathcal{K}(n,k_0)$ — некоторая положительная величина, которая может зависеть только от n и k_0 .

Отметим, что условие (16) в формулировке теоремы 2.4.1 можно заменить на более наглядное условие (15).

Как и в случае теоремы 2.2.1, утверждение теоремы 2.4.1 означает, что оценки (13) и соответствующий им выбор условий интерполяции являются оптимальными (наилучшими из возможных), если речь идет о получении гладкого локального сплайна на триангулированной области Ω при $n = 3$.

В **главе 3** рассматривается задача лагранжевой интерполяции функции $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ алгебраическим многочленом $P_n^d = P_n^d[f]$ в узлах равномерной сетки (1) d-симплекса Δ с вершинами $a_1, \ldots, a_{d+1}$ и исследуется соответствующая величина $\mathbf{E}_{n,s}^d$.

Для произвольных $d \geq 2$ и $n \in \mathbb{N}$ П. Жамэ [7] был получен следующий результат. Пусть $U_d = \{e_s\}_{s=1}^d$ – множество единичных линейно независимых векторов; ξ – произвольный единичный вектор из $\mathbb{R}^d$; $\mathfrak{U}_N = \{e_s\}_{s=1}^N$ — множество всех единичных векторов, параллельных ребрам d-симплекса Δ. Пусть θ_s — угол между ξ и прямой с направляющим вектором e_s (т. е. $0 \leq \theta_s \leq \pi/2$). Положим

$$\theta = \theta(\Delta) = \min_{U_d \subset \mathfrak{U}_N} \max_{\xi \in \mathbb{R}^d} \min_{e_s \in U_d} \{\theta_s\}. \tag{17}$$

Тогда имеют место точные по порядку H оценки

$$\mathbf{E}_{n,s}^d \underset{n,d}{\lesssim} M \frac{H^{n+1-s}}{(\cos\theta)^s}, \quad s = 0, \ldots, n. \tag{18}$$

Таким образом, если существует число θ_* такое, что

$$\theta \leq \theta_* < \pi/2, \tag{19}$$

то

$$\mathbf{E}_{n,s}^d = \mathbf{E}_s(\Delta, P_n^d) \underset{n,d}{\lesssim} MH^{n+1-s} \tag{20}$$

для любых $s = 0, \ldots, n$.

Мы предполагаем, что вершины симплекса Δ занумерованы произвольным образом. Возьмем a_{l+1} ($2 \leq l \leq d$) и рассмотрим углы $\beta_{l+1,s} = \beta_{l+1,s}(\Delta)$ между прямыми, параллельными ребрам $a_{l+1}a_s$ ($s = 1, \ldots, l$) и $(l-1)$-мерной плоскостью, натянутой на точки a_1, a_2, $\ldots$, a_l. Обозначим через $\beta_{l+1} \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ такой угол, что

$$\sin\beta_{l+1} = \sin\beta_{l+1}(\Delta) = \max_{s=1,\ldots,l} \sin\beta_{l+1,s},$$

через $\Theta \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right]$ — угол, удовлетворяющий условию

$$\sin\Theta = \sin\Theta(\Delta) = \min_{l=2,\ldots,d} \sin\beta_{l+1}.$$

В **§ 3.1** введенная в диссертации характеристика Θ сравнивается с величиной θ.

Теорема 3.1.1. *Для любого d-симплекса Δ справедливо отношение*

$$\cos\theta \underset{d}{\lesssim} \sin\Theta \underset{d}{\lesssim} \sqrt[d]{\cos\theta}.$$

Таким образом, вместо выполнения условия (19) для получения оценок (20) можно требовать существования числа $\Theta_* > 0$ такого, что

$$\Theta \geq \Theta_*. \tag{21}$$

При контроле триангуляции замена условия (19) на (21) позволяет перейти от вычисления максимума в (17) по всем $\xi \in \mathbb{R}^d$ к выбору экстремума из конечного числа вариантов. Аналогичный результат получен в замечании 3.1.1 для ϑ из (9).

Замечание 3.1.1. *При $d = 3$ для величины ϑ, определенной в (9), также справедливо соотношение*

$$\cos\theta \lesssim \sin\vartheta \lesssim \sqrt[3]{\cos\theta}.$$

В **§ 3.2** изучаются вопросы, связанные со случаями неулучшаемости оценок сверху величин аппроксимации производных функций производными интерполяционных многочленов P_n^d, полученными в [7]. Приводятся оценки снизу величины погрешности аппроксимации производных функции на классе $W^{n+1}M(\Delta)$. В частности, показано, что во многих случаях условие (19), позволяющее использовать оценки (20), является неулучшаемым на $W^{n+1}M(\Delta)$ в следующем смысле: если θ является достаточно малым, то, вообще говоря, величина погрешности аппроксимации производных может оказаться большой. Для точной формулировки результатов дадим ряд определений.

Рассматривается последовательность d-симплексов $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ с вершинами $a_1^{(i)}, \ldots, a_{d+1}^{(i)}$, у которой $\cos\theta_i \to 0$ (или, что то же самое, $\sin\Theta_i \to 0$) при $i \to \infty$, где $\theta_i = \theta(\Delta_i)$, $\Theta_i = \Theta(\Delta_i)$. Считаем, что $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ выбраны таким образом, что $\left|a_1^{(i)} a_2^{(i)}\right| \underset{d}{\asymp} H_i = H(\Delta_i)$, где $H_i = H(\Delta_i)$ —диаметр симплекса Δ_i. Нумерацию остальных вершин считаем произвольной.

Для каждого симплекса $\Delta^{(i)}$ построим последовательность ориентированных деревьев $\{T_k^{(i)}\}_{k=1}^{d+1} = \{T_k(\Delta_i)\}_{k=1}^{d+1}$ с корнем $a_1^{(i)}$ следующим образом. Будем считать, что $T_1^{(i)}$ — дерево из одной вершины $a_1^{(i)}$;

$T_2^{(i)}$ — дерево с вершинами $a_1^{(i)}$, $a_2^{(i)}$ и дугой $e_{12}^{(i)}$ (через $e_{pq}^{(i)}$ обозначаем дугу или, другими словами, ориентированное ребро с началом в точке $a_p^{(i)}$ и концом в точке $a_q^{(i)}$). Для $l = 2, \ldots, d$ действуем следующим образом. Пусть построено дерево $T_l^{(i)}$ с вершинами $a_1^{(i)}$, $a_2^{(i)}$, $\ldots$, $a_l^{(i)}$ ($l \leq d$). Возьмем вершину $a_{l+1}^{(i)}$ и рассмотрим определенные выше величины $\sin\beta_{l+1}(\Delta_i)$ и $\sin\beta_{l+1,s}(\Delta_i)$. Положим

$$p = \min\{s: \quad \sin\beta_{l+1}(\Delta_i) = \sin\beta_{l+1,s}(\Delta_i), \quad s = 1, \ldots, l\}. \tag{22}$$

Тогда дерево $T_{l+1}^{(i)}$ получаем, добавляя к $T_l^{(i)}$ вершину $a_{l+1}^{(i)}$ и дугу $e_{p,l+1}^{(i)}$. Договоримся использовать запись $a_p^{(i)} = F(a_{l+1}^{(i)})$, означающую, что $a_p^{(i)}$ является отцом $a_{l+1}^{(i)}$.

Введем в рассмотрение деревья $\mathcal{T}_{s,1}^{(i)}$ и $\mathcal{T}_{s,2}^{(i)}$, полученные из $T_s^{(i)}$ удалением ребра, соединяющего вершины $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$, с корнями $a_1^{(i)}$ и $a_2^{(i)}$ соответственно ($s = 2, \ldots, d+1$).

Последовательность $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ состоит из конечного числа подпоследовательностей $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$, каждая из которых такова, что для некоторого $k \in \{2, \ldots, d\}$ имеют место соотношения

$$\sin\beta_l(\Delta_{i_s}) \underset{d}{\gtrsim} 1 \quad \text{при} \qquad 3 \leq l \leq k, \tag{23}$$

$$\sin\beta_{k+1}(\Delta_{i_s}) \to 0 \quad \text{при} \quad s \to \infty. \tag{24}$$

Если V — геометрически независимая система $(r+1)$ точек в $\mathbb{R}^d$ ($r \leq d$), $\mathcal{T}$ — ориентированное дерево со множеством вершин V, то через $\mathcal{P}(\mathcal{T})$ будем обозначать плоскость размерности r, натянутую на эти точки. Пусть $\rho\left(a_{k+1}^{(i_s)}, F(a_{k+1}^{(i_s)})\right)$ означает расстояние между вершиной $a_{k+1}^{(i_s)}$ и ее отцом $F(a_{k+1}^{(i_s)})$; $\alpha(v_1, v_2)$ — угол между v_1 и v_2, где v_i ($i = 1, 2$) может быть вектором, прямой или плоскостью некоторой размерности (v_1 или v_2 также могут быть точками, в этом случае по определению полагаем $\alpha(v_1, v_2) = \pi/2$).

Ниже в теореме 3.2.1 и следствиях показано, что на множестве функций $W^{n+1}M$ для широкого класса симплексов при $\cos\theta \to 0$ оценки (18) являются качественно неулучшаемыми (имеет место точность по порядку величины H, при этом знаменатель не может быть отделен от нуля).

Теорема 3.2.1. *Пусть в последовательности* $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ *имеется подпоследовательность* $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$ *такая, что для некоторого* k *выполняются соотношения (23)–(24);* l_{i_s} *— прямая, проходящая через вершины* $a_{k+1}^{(i_s)}$ *и* $F(a_{k+1}^{(i_s)})$ *; пусть число* $j \in \{1,2\}$ *таково, что* $a_{k+1}^{(i_s)} \in \mathcal{T}_{k+1,j}^{(i_s)}$ *. Если*

$$\frac{\rho\left(a_{k+1}^{(i_s)}, F(a_{k+1}^{(i_s)})\right)}{H_{i_s}} \to 0 \quad \textit{при} \quad s \to \infty \tag{25}$$

и

$$\frac{\sin\beta_{k+1}(\Delta_{i_s})}{\sin\alpha\left(l_{i_s}, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,j}^{(i_s)})\right)} \to 0 \quad \textit{при} \quad s \to \infty, \tag{26}$$

то найдется последовательность положительных вещественных чисел $\{w_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$ *такая, что* $w_{i_s} \to 0$ *при* $s \to \infty$ *, и для каждого* $\nu = 1,\ldots,n$ *и каждого* i_s *имеют место оценки*

$$\mathbf{E}_{n,\nu}^{d}(\Delta_{i_s}) \underset{d,n}{\gtrsim} M\frac{H_{i_s}^{n+1-\nu}}{w_{i_s}} \ . \tag{27}$$

Далее для упрощения обозначений будем считать, что подпоследовательность $\{\Delta_{i_s}\}_{s=1}^{\infty}$ с нужными свойствами совпадает с исходной последовательностью $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$, т. е. $i_s = s$ для всех $s \in \mathbb{N}$. Кроме того, договоримся не писать индексы i и считать, что $\Delta = \Delta_i$. При этом, если рассматривается некоторая характеристика $\phi_i = \phi(\Delta_i)$ симплекса Δ_i , то индекс i писать не будем, и под записью $\chi \to A$ при $\cos\theta \to 0$ или $\phi \to A$ при $\cos\theta \to 0$ (где $A \in \mathbb{R}$ или $A = \infty$) будем понимать, что некоторая последовательность величин $\{\chi^{(i)}\}_{i=1}^{\infty} = \{\chi(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ или $\{\phi_i\}_{i=1}^{\infty} = \{\phi(\Delta_i)\}_{i=1}^{\infty}$ обладает свойством $\chi^{(i)} \to A$ или $\phi_i \to A$ при $i \to \infty$, если последовательность $\{\Delta_i\}_{i=1}^{\infty}$ такова, что $\cos\theta_i \to 0$ при $i \to \infty$. Если $\chi/\phi \to 0$ при $\cos\theta \to 0$, то будем писать $\chi \ll \phi$. Таким образом, через Δ обозначаем d -симплекс с вершинами $a_1,\ldots,a_{d+1}$, занумерованными таким образом, что $|a_1a_2| \underset{d}{\asymp} H,$ и $\cos\theta \to 0$. Соотношения (23)–(24) для некоторого $k \in \{2,\ldots,d\}$ переписываются следующим образом:

$$\sin\beta_l(\Delta) \underset{d}{\gtrsim} 1 \quad \text{при} \qquad 3 \le l \le k, \tag{28}$$

$$\sin\beta_{k+1}(\Delta) \to 0 \quad \text{при} \quad \cos\theta \to 0. \tag{29}$$

В соответствии с алгоритмами, описанными выше, строим деревья $T_1, \ldots, T_{d+1}$, и $\mathcal{T}_{s,1}$, $\mathcal{T}_{s,2}$ для $s = 2, \ldots, d+1$. Без ограничений общности везде ниже считаем, что $F(a_{k+1}) \in \mathcal{T}_{k,2}$.

Следствие 3.2.1. *Пусть вершины d-симплекса Δ занумерованы таким образом, что если $|a_{s_1}a_j| \underset{d}{\asymp} H$ для любого $j = 1, \ldots, s_1 - 1$ и $|a_{s_2}a_j| \ll H$ для некоторого $j \in \{1, \ldots, s_2 - 1\}$, то $s_1 < s_2$; k — такое, что выполнены (28) и (29). Пусть выполнено одно из следующих условий:*

1) $\rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \underset{d}{\asymp} H$;

2) $\rho(a_{k+1}, F(a_{k+1})) \ll H$ и $\dfrac{\sin \beta_{k+1}(\Delta)}{\sin \alpha\,(l, \mathcal{P}(\mathcal{T}_{k,2}))} \to 0$ при $\cos\theta \to 0$, где l — прямая, проходящая через a_{k+1} и $F(a_{k+1})$.

Тогда найдется положительная функция $w(\cos\theta)$ такая, что $w(\cos\theta) \to 0$ при $\cos\theta \to 0$, и

$$\mathbf{E}^d_{n,\nu}(\Delta) \underset{d,n}{\gtrsim} M \frac{H^{n+1-\nu}}{w(\cos\theta)}, \quad \nu = 1, \ldots, n. \tag{30}$$

Сформулированное следствие означает, что если выбрана соответствующая нумерация вершин симплекса и характеристика П.Жамэ стремится к нулю, то для того, чтобы в теореме 3.2.1 была справедлива оценка (27), проверка условия (26) нужна лишь тогда, когда имеет место соотношение (25). В противном случае неравенство (27) выполняется всегда.

Для симплекса $\breve{\Delta}$ через $\mathrm{diam}(\breve{\Delta})$ обозначим диаметр этого симплекса.

Следствие 3.2.2. *Если для любого m-симплекса $\breve{\Delta}$ ($m < d$) с вершинами $b_1, \ldots, b_{m+1} \in \{a_1, \ldots, a_{d+1}\}$, удовлетворяющего условию $\mathrm{diam}(\breve{\Delta})/H \to 0$ при $\cos\theta \to 0$, выполнено условие*

$$\sin \Theta(\breve{\Delta}) \underset{d}{\gtrsim} 1$$

то найдется положительная функция $w(\cos\theta)$ такая, что $w(\cos\theta) \to 0$ при $\cos\theta \to 0$, и для всех $\nu = 1, \ldots, n$ справедливы оценки (30).

Следствие означает, что если для любого m-симплекса $\breve{\Delta}$ ($m < d$), являющегося гранью соответствующей размерности симплекса Δ и имеющего диаметр $\mathrm{diam}(\breve{\Delta}) \ll H$, величина $\sin \Theta(\breve{\Delta})$ отделена от нуля, то имеет место оценка (30).

Следствие 3.2.3. *Если* $d = 3$ *, и тетраэдр* Δ *содержит не менее* 4 *ребер, длины которых* $\mathbf{r}_j$ *,* $1 \le j \le k$ *(* $k \ge 4$ *), удовлетворяют соотношениям* $\mathbf{r}_j \asymp H$*, то существует положительная функция* $w(\cos\theta)$ *такая, что* $w(\cos\theta) \to 0$ *при* $\cos\theta \to 0$ *и*

$$\mathbf{E}^3_{n,\nu} \underset{n}{\gtrsim} M \frac{H^{n+1-\nu}}{w(\cos\theta)}, \quad \nu = 1, \ldots, n.$$

В **§ 3.3** для случая $d = 3$, $n = 1$ получены оценки сверху величин погрешности аппроксимации производных интерполируемой функции, демонстрирующие, что иногда (для некоторого класса тетраэдров) оценки П. Жамэ (18) могут быть несколько улучшены. Возможно, близкие оценки могут быть получены также в результате некоторой доработки результатов Т. Апеля из [2] (в диссертации используется другой метод доказательства соответствующей теоремы). Таким образом, § 3.3 имеет скорее иллюстративный характер.

Рассмотрим тетраэдр Δ , имеющий ровно три ребра, длины которых существенно меньше диаметра тетраэдра (в противном случае имеются оценки снизу из следствия 3.2.3 теоремы 3.2.1, показывающие, что в определенном смысле оценки П.Жамэ являются неулучшаемыми). Обозначим через T_j , $j = 1, 2, 3, 4$, треугольники, являющиеся гранями тетраэдра напротив вершин a_j; через γ_j и β_j — соответственно наибольшие и средние углы треугольников T_j; через $\mathbf{r}_j$ — диаметры треугольников T_j ($j = 1, 2, 3, 4$). Отметим, что $\sin\beta_j \asymp \sin\gamma_j$. Без ограничений общности можем считать, что $\mathbf{r}_2 \asymp \mathbf{r}_3 \asymp \mathbf{r}_4 \asymp H$ и $\sin\gamma_4 \gtrsim \max\{\sin\gamma_2, \sin\gamma_3\}$ Также в соответствии с нашим интересом считаем, что $\mathbf{r}_1/H \to 0$ при $\sin\vartheta \to 0$. Пусть φ_{14} — величина двугранного угла между плоскостями граней T_1 и T_4 .

Теорема 3.3.1. *Справедлива следующая оценка сверху:*

$$\mathbf{E}^2_{1,1} = \mathbf{E}^2_{1,1}(\Delta) \lesssim \frac{M}{\sin\varphi_{14}} \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sin\gamma_1} + \frac{H}{\sin\gamma_4} \right). \tag{31}$$

Замечание 3.3.5. *Если* $\sin\beta_4 \gtrsim 1$ *и* $\sin\varphi_{14} \gtrsim 1$ *, то имеет место оценка*

$$\mathbf{E}^2_{1,1}(\Delta) \lesssim M \left(\frac{\mathbf{r}_1}{\sin\gamma_1} + H \right) = MH \left(\frac{\mathbf{r}_1}{H} \, \frac{1}{\sin\gamma_1} + 1 \right).$$

Таким образом, если $\sin\gamma_1 \to 0$, то для величины ϑ из (9), имеет место свойство $\sin\vartheta \to 0$ и соответственно в силу замечания 3.1.1 выполняется $\cos\theta \to 0$, т. е. величина в знаменателе правой части оценки (18) стремится к нулю. Однако, если при этом $\mathbf{r}_1/H \asymp \sin\gamma_1$, то

$$\mathbf{E}^2_{1,1}(\Delta) \lesssim MH,$$

т. е. оценка (31) является более точной, чем (18).

Основные результаты

Найден точный порядок роста констант Лебега L^d_n по n при фиксированном d. Получена поточечная оценка снизу для верхнего предела последовательности функций Лебега.

Предложены способы интерполяции функции $f \in W^{n+1}M(\Delta)$ при $d = 2, 3$, позволяющие получать непрерывные или гладкие сплайны на Ω. Получены оценки аппроксимации величин $E^d_{n,s}$ и $\mathcal{E}^d_{n,s}$, являющиеся более точными, чем оценки в случаях известных ранее способов интерполяции.

Показано, что требование гладкости результирующего сплайна на Ω не позволяет полностью исключить "условие наименьшего угла" треугольников из требований к триангуляции. Рассмотрены простые и составные конечные элементы.

Введена новая характеристика d-симплекса, простая для вычисления и использования на практике. С помощью этой характеристики доказано, что в случае интерполяции Лагранжа по равномерным узлам d-симплекса оценки П.Жамэ являются близкими к оптимальным и должны приниматься во внимание при исследовании и использовании величины $\mathbf{E}^d_{n,s}$.

Благодарности

Автор выражает глубокую благодарность своему научному консультанту члену-корреспонденту РАН, д.ф.-м.н. Юрию Николаевичу Субботину за постоянное многолетнее внимание к работе, полезные обсуждения и поддержку. Автор глубоко признателен д.ф.-м.н. Валерию Трифоновичу Шевалдину за обсуждения и многочисленные ценные замечания.

Литература

[1] **Сьярле Ф.** Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980.

[2] **Apel T.** Anisotropic finite elements: local estimates and applications / Series "Advances in Numerical Mathematics". Stuttgart: Teubner. 1999. 261 p.

[3] **Baidakova N. V.** On some interpolation process by polynomials of degree $4m+1$ on the triangle // Russian Journal of numerical analysis and mathematical modelling. 1999. V. 14, No. 2. P. 87–107.

[4] **Brandts J., Hannukainen A., Korotov S., Křížek M.** On angle conditions in the finite element method // SeMA J. 2011. No. 56. P. 81–95.

[5] **Cea J.** Approximation variationelle les problèmes aux limites // Annales de l'institut Fourier. 1964. T. 14, № 2. P. 345–444.

[6] **Ciarlet P. G., Raviart P. A.** General Lagrange and Hermite interpolation in R^n with applications to finite element methods // Arch. Rational Mech. Anal. 1972. V. 46, No. 3. P. 177–199.

[7] **Jamet P.** Estimation d'erreur pour des éléments finis droits presque dégénérés // RAIRO Anal. Numer. 1976. T. 10, № 1. P. 43–60.

[8] **Lai M. J., Schumaker L. L.** Spline functions on triangulations. Cambribge, UK: Cambridge University Press. 2007. 609 p.

[9] **Nicolaidis R. A.** On the class of finite elements generated by Lagrange interpolation// SIAM J. Numer. Anal. 1972. V. 9. No. 3. P. 435–445.

Публикации автора по теме диссертации из списка ВАК

[10] **Байдакова Н. В.** Об одном способе эрмитовой интерполяции многочленами третьей степени на треугольнике // Труды ИММ УрО РАН. 2005. Т. 11, № 2. С. 47–52 (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** A Method of Hermite interpolation by polynomials of the third degree on a triangle // Proc. Steklov Inst. Math. 2005. Suppl. 2. P. S49–S55.)

[11] **Байдакова Н. В.** О порядке констант Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса // Матем. заметки. 2005. Т. 77, № 6. С. 814–831. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** On the order of the Lebesgue constants for interpolation by algebraic polynomials from values at uniform nodes of a simplex // Mathematical Notes. 2005 V. 77, Iss. 5-6. P. 751–766.)

[12] **Байдакова Н. В.** О некоторых интерполяционных многочленах третьей степени на трехмерном симплексе // Труды ИММ УрО РАН. 2008. Т. 14, № 3. С. 43–57. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** On some interpolation third-degree polynomials on a three-dimensional simplex // Proc. Steklov Inst. Math. V. 264, Suppl. 1. 2009. P. S44–S59.)

[13] **Байдакова Н. В.** Оценка снизу функции Лебега интерполяционного процесса алгебраическими многочленами по равномерным узлам симплекса // Матем. заметки. 2012. Т. 92, № 1. С. 19–26. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** Lower bound for the Lebesgue function of an interpolation process with algebraic polynomials on equidistant nodes of a simplex // Mathematical Notes. 2012. V. 92, Iss. 1-2. P. 16–22.)

[14] **Байдакова Н. В.** Оценки сверху величины погрешности аппроксимации производных в конечном элементе Сие-Клафа-Точера // Труды ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18, № 4. С. 80–89.

[15] **Байдакова Н. В.** Влияние гладкости на погрешность аппроксимации производных при локальной интерполяции на триангуляциях // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 3. С. 83–97. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** Influence of smoothness on the error of approximation of derivatives under local interpolation on triangulations // Proc. Steklov Inst. Math. V. 277, Suppl. 1. 2012. P. S33–S47.)

[16] **Байдакова Н. В.** Новые оценки величин погрешности аппроксимации производных при интерполяции функции многочленами третьей степени на треугольнике // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2013. Т. 13, № 1(2). С. 15–19.

[17] **Байдакова Н. В.** Оценки снизу погрешности аппроксимации производных для составных конечных элементов со свойством гладко-

сти // Труды ИММ УрО РАН. 2014. Т. 20, № 1. С. 32–42. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** Lower estimates for the error of approximation of derivatives for composite finite elements with smoothness property // Proc. Steklov Inst. Math. V. 288, Suppl. 1. 2015. P. S29–S39.)

[18] **Байдакова Н. В.** Треугольный конечный элемент с новыми аппроксимативными свойствами // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 67–77. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** A triangular finite element with new approximation properties // Proc. Steklov Inst. Math. V. 296, Suppl. 1. 2017. P. S74–S84.)

[19] **Байдакова Н. В.** Алгоритм построения эрмитовых конечных элементов третьей степени // Сиб. электрон. матем. изв. 2016. Т. 13. С. 799–814.

[20] **Байдакова Н. В.** Об оценках П. Жамэ для конечных элементов с интерполяцией в равномерных узлах симплекса // Математические труды. 2017. Т. 20, № 1. С. 43–74. (Перевод на англ.: **Baidakova N. V.** On Jamet's estimates for the finite element method with interpolation at uniform nodes of a simplex // Siberian Advances in Mathematics. V. 28, Iss. 1. 2018. P. 1–22.)