Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н. Ельцина
Специализированный учебно-научный центр

С.А. Ануфриенко

# Инверсия. Геометрия Мора-Маскерони

Учебное пособие

Екатеринбург
2019

Подготовлено на кафедре математики
СУНЦ УрФУ

**Ануфриенко С.А.** Инверсия. Геометрия Мора-Маскерони: Учеб. пособие. Екатеринбург: УрФУ, 2019. 40с.

Рецензенты: канд. физ.-мат. наук **М.И. Альперин**,
канд. физ.-мат. наук **С.Э. Нохрин**

В пособии изучаются круговые преобразования расширенной плоскости и использование их в решении задач на построение (построение одним циркулем в геометрии Мора-Маскерони, задачи Аполлония) и в доказательствах (формулы Эйлера, теоремы Фейербаха, теоремы об арбелосе). Основой исследования являются многочисленные свойства симметрии относительно окружности (инверсии).

Пособие адресовано учащимся и преподавателям лицея, учителям математики, старшеклассникам.

## Введение

Со временем замечаешь, как непохожи друг на друга пути, ведущие к решению красивых геометрических проблем. Бесконечность возможных направлений поиска многих людей приводит в трепет, но одновременно дает хорошую надежду отыскать свою собственную дорогу в геометрическом лабиринте. В любом случае открытие метода, позволяющего решить целый ряд сложных задач, является событием большой редкости. Об одном из таких методов и пойдет речь в теме о круговых преобразованиях. Мы начинаем с перечисления некоторых классических проблем, решения которых будут приведены позже.

**A.** Четыре окружности $\omega_1$, $\omega_2$, $\omega_3$ и $\omega_4$ расположены таким образом, что $\omega_i$ касается $\omega_{i+1}$ для $i < 4$, а $\omega_4$ касается $\omega_1$. Образуются четыре точки касания. Доказать, что найдется окружность, проходящая через все эти точки.

**B.** Разделить с помощью циркуля данный отрезок $[AB]$ на $n$ равных частей ($n \in N$).

**C.** Только с помощью циркуля найти центр данной окружности.

**D.** Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$ и окружность $\omega$. Только с помощью циркуля найти пересечение прямых $(AB)$ и $(CD)$, а также точки пересечения прямой $(AB)$ с окружностью $\omega$ (*задачи геометрии Мора-Маскерони*).

**E.** Построить окружность, которая проходит через две данные точки $A$ и $B$ и касается данной окружности $\omega_1$.

**F.** Построить окружность, проходящую через данную точку и касающуюся двух данных окружностей.

**G.** Построить окружность, касающуюся трех данных окружностей (*задача Аполлония*).

**H.** Для двух различных точек $A$ и $B$ и положительного числа $k$ найти геометрическое место точек $X$, для которых отношение $|XA|/|XB|$ равно $k \neq 1$ (окружность Аполлония).

**I.** Для произвольного треугольника через $r$, $R$ и $d$ обозначим соответственно радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами. Доказать, что $d^2 = R^2 - 2Rr$ (*формула Эйлера*).

**J.** Доказать, что окружность Эйлера произвольного треугольника касается вписанной в него окружности и трех его вневписанных окружностей.

**K.** Доказать, что если существует цепочка окружностей $S_1$, $S_2$, …, $S_n$, каждая из которых касается двух соседних ($S_n$ касается $S_{n-1}$ и $S_1$) и двух данных непересекающихся окружностей $R_1$ и $R_2$, то таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности $T_1$, касающейся $R_1$ и $R_2$ (одинаковым образом, если $R_1$ и $R_2$ не лежат одна в другой, внешним и внутренним образом в противном случае), существует аналогичная цепочка из $n$ касающихся окружностей $T_1$, $T_2, \ldots$, $T_n$ (поризм Штейнера).

# Глава 1

# Задачи на построение

## 1.1. Инверсия и ее свойства

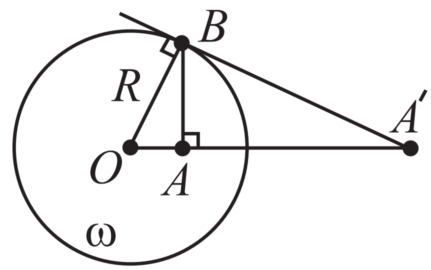

Рис. 1

В 1831 году Людвиг Иммануил Магнус[1] формально определил преобразование расширенной плоскости, которое получило название симметрии относительно окружности или инверсии (от лат. *inversio* — обращение). Под инверсией плоскости $\alpha$ относительно окружности $\omega(O, R)$ с центром в точке $O$ и радиусом $R$ понимают такое преобразование множества $\alpha \backslash \{O\}$, при котором каждой точке $A \in \alpha \backslash \{O\}$ ставится в соответствие такая точка $A'$, что $A'$ лежит на луче $[OA)$ и $OA \cdot OA' = R^2$ (далее будем использовать обозначение $inv_O^R(A) = A'$). Заметим сразу, что инверсия не определена в точке $O$, но иногда бывает полезно добавить к плоскости одну бесконечно удаленную точку, т.е. рассмотреть множество $\alpha \cup \{\infty\}$ (это множество называется *расширенной плоскостью*) и при этом считать, что $inv_O^R(O) = \infty$ и $inv_O^R(\infty) = O$.

На рис. 1 указан способ построения образа точки $A$ при инверсии относительно окружности $\omega = \omega(O, R)$. Для этого (если точка $A$ расположена внутри окружности) проводят перпендикуляр $(AB)$ к прямой $OA$ ($B \in \omega \cap (AB)$) и из точки $B$ проводят касательную к окружности $\omega$. Из подобия треугольников $OAB$ и $OBA'$ получаем отношение $OA : OB = OB : OA'$ или $OA \cdot OA' = OB^2 = R^2$. Следовательно $inv_O^R(A) = A'$. Если же точка $A$ расположена вне окруж-

[1]Немецкий математик. Род. в Берлине в 1790г. В юности был стрелком в наполеоновских войнах. Позже серьезно увлекся математикой, получил в 1834 докторскую степень, был профессором Берлинского ун-та. Основные труды относятся к проективной геометрии, дал систематический вывод всех основных формул стереографической проекции. Оставив преподавательскую деятельность, стал главным таможенным инспектором Берлина. Преобразование инверсии применял Якоб Штейнер еще в 1824.

ности, то сначала из точки $A$ проводят касательную к окружности, затем из точки касания опускают перпендикуляр на прямую $OA$ и получают точку $A'$.

На рис. 2 построение образа выполнено только с помощью циркуля (в предположении, что $OA > R/2$). Для этого достаточно провести следующую окружность $\omega(A, OA)$ и для двух точек пересечения $\omega(O,R) \cap \omega(A, OA)$ построить равные окружности $\omega(B,R)$ и $\omega(C,R)$. Вторая точка из $\omega(B,R) \cap \omega(C,R)$, отличная от точки $O$, является искомой. Для доказательства используем подобие равнобедренных треугольников $OBA'$ и $OBA$. Сначала получаем $OA' : OB = = OB : OA$, а затем, необходимое $OA \cdot OA' = OB^2 = R^2$. Если же $OA \leqslant R/2$, то сначала увеличивают отрезок $OA$ в $n$ раз до отрезка $OB$ (удвоение отрезка показано на рис. 3 — последовательно откладывают радиус $OA$ на окружности $\omega(A, OA)$ и используют свойство правильного вписанного шестиугольника), после этого находят $B' = inv_O^R(B)$ и снова увеличивают (а не уменьшают!) отрезок $OB'$ в $n$ раз до отрезка $OC$. Можно доказать, что $C = inv_O^R(A)$.

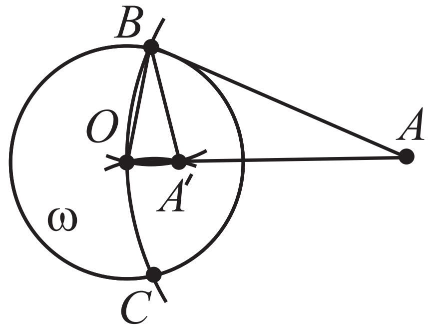

Рис. 2

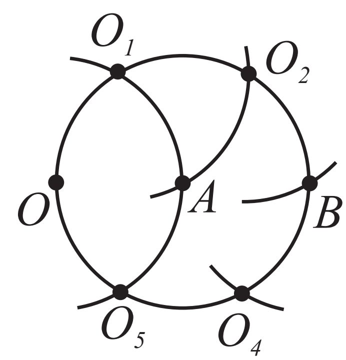

Рис. 3

Из многочисленных свойств инверсии рассмотрим лишь следующие. Пусть $A' = inv_O^R(A)$ и $B' = inv_O^R(B)$.

**I.** Если $A \neq B$, то $A' \neq B'$.

Утверждение требует проверки только когда лучи $[OA)$ и $[OB)$ совпадают. В этом случае $OA \neq OB$ и поэтому $OA' \neq OB'$. Приходим к неравенству $A' \neq B'$.

**II.** Все точки окружности $\omega(O,R)$ при инверсии $inv_O^R$ остаются неподвижными. Внутренние точки круга с границей $\omega(O,R)$ переходят во внешние, а внешние — во внутренние.

Первая часть утверждения очевидна, а вторая следует из замечания: если $OA < R$, то $OA' = R^2/OA > R$.

**III.** Если $A' = inv_O^R(A)$, то $A = inv_O^R(A')$. Для произвольных фигур $\Phi$ и $\Phi'$ из условия $\Phi' = inv_O^R(\Phi)$ также следует $\Phi = inv_O^R(\Phi')$.

**IV.** Треугольники $AOB$ и $A'OB'$ подобны, причем $\angle OBA = \angle OA'B'$.

Достаточно заметить, что эти треугольники имеют общий угол, а из равенства $OA \cdot OA' = R^2 = OB \cdot OB'$ следует $OA : OB' = OB : OA'$. Обратите внимание, что в отличие от подобия, пропорциональность связывает стороны $OA$ и $OB'$, $OB$ и $OA'$, а не $OA$ и $OA'$, $OB$ и $OB'$. Из подобия получаем $\angle OBA = \angle OA'B'$.

**V.** $A'B' = \dfrac{AB}{OA \cdot OB} \cdot R^2$. Действительно, по свойству IV имеем

$$A'B' = \frac{AB \cdot OA'}{OB} = \frac{AB}{OA \cdot OB} \cdot R^2.$$

**VI.** Прямая $a$, проходящая через центр инверсии, отображается в себя. Если же $O \notin a$ и $A$ — основание перпендикуляра из точки $O$ на прямую $a$ (рис. 4), то образом прямой $a$ будет окружность $\omega_1$, построенная на отрезке $OA'$ как на диаметре ($A' = inv_O^R(A)$).

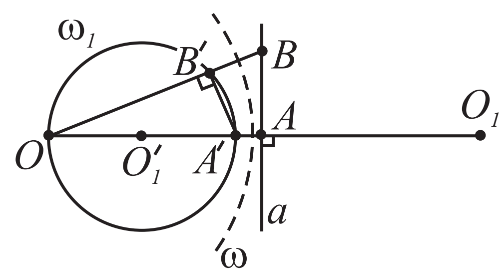


Рис. 4

Для доказательства этого свойства рассмотрим произвольную точку $B$ прямой $a$. По свойству IV имеем $\angle OB'A' = \angle OAB = 90°$. Следовательно точка $B'$ лежит на окружности с диаметром $OA'$. Удивление от такого неожиданного действия инверсии на произвольную прямую пройдет, если принять в расчет бесконечно удаленную точку. Каждая прямая проходит через $\infty$. Поэтому переход точки $\infty$ в точку $O$ заставляет концы прямой сжиматься к точке $O$.

Следующее свойство позволяет определить центр окружности, которая является образом прямой из свойства VI.

**VII.** Пусть $\omega_1 = inv_O^R(a)$. Обозначим через $O_1 = S_a(O)$, где $S_a$ — осевая симметрия с осью $a$ (рис. 4). Тогда центром окружности $\omega_1$ является точка $O_1' = inv_O^R(O_1)$.

Сохраняя принятые в предыдущем свойстве обозначения, имеем $OO_1 = 2OA$. Подставляя это в равенство $OA \cdot OA' = R^2 = OO_1 \cdot OO_1'$, получаем $OO_1' = OA'/2$. Поэтому точка $O_1'$ является серединой отрезка $OA'$.

**VIII.** Окружность $\omega_1(O_1, r)$, проходящая через центр инверсии, отображается на некоторую прямую $a$. Более того, если $A$ — конец диаметра, проходящего через $O$ и $O_1$ ($A \neq O$), то прямая $a$ проходит через точку $A' = inv_O^R(A)$ и перпендикулярна прямой $OO_1$.

Справедливость этого свойства сразу следует из свойств III и VI.

**IX.** Окружность $\omega_1(O_1, r_1)$, не проходящая через центр инверсии, отображается при $inv_O^R$ на некоторую окружность $\omega_2(O_2, r_2)$. Точнее, если точки $A$ и $B$ являются концами диаметра, лежащего на прямой $OO_1$ (рис. 5), то отрезок $A'B'$ является диаметром окружности $\omega_2$ ($A' = inv_O^R(A),\ B' = inv_O^R(B)$).

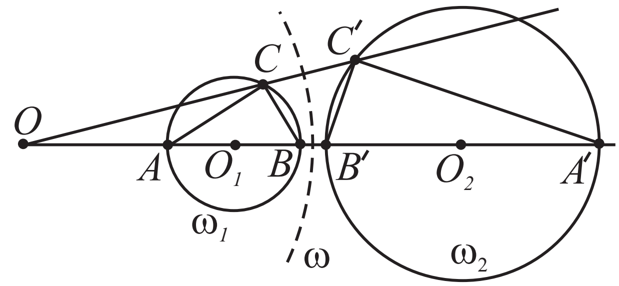


Рис. 5

Для доказательства рассмотрим произвольную точку $C$ окружности $\omega_1$ и покажем, что $C' = inv_O^R(C) \in \omega_2$. Из свойства IV имеем равенства $\angle OCA = = \angle OA'C'$ и $\angle OCB = \angle OB'C'$. Поэтому

$$\angle A'C'B' = \angle OB'C' - \angle OA'C' = \angle OCB - \angle OCA = 90^\circ.$$

Следовательно $C' \in \omega_2$.

Переходит ли центр $O_1$ в центр окружности $\omega_2$, точку $O_2$? Оказывается, никогда не переходит (убедитесь в этом с помощью прямых вычислений, т.е. докажите, что точка $O_1' = inv_O^R(O_1)$ не может быть серединой $[A'B']$). Этот "недостаток" инверсии с лихвой компенсируется замечательным ее свойством сохранять величину угла. Напомним, что угол между пересекающимися окружностями по определению равен углу между касательными к этим окружностям в точке их пересечения. Аналогично определяется и угол между пересекающимися прямой и окружностью. Рассмотрим частный случай: для двух касающихся окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ определим величину угла между $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$. Вид образов $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ во многом зависит от положения точки $O$ относительно окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$. Так, если $O \notin \omega_1 \cup \omega_2$, то из свойств I и IX получаем, что $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ являются касающимися окружностями. Если же $O$ лежит только на одной из окружностей, например на $\omega_1$, то из свойств I, VIII и IX получим касающиеся прямую $inv_O^R(\omega_1)$ и окружность $inv_O^R(\omega_2)$. И, наконец, если $O$ совпадает с точкой касания окружностей, то $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ являются параллельными прямыми (величина угла между параллельными прямыми по определению равна нулю). Итак, в каждом из случаев, величина угла между $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ равна нулю. Аналогично можно установить, что если прямые $a$ и $b$ параллельны, то величина угла между $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ также равна нулю.

**X.** Инверсия сохраняет величину угла между прямыми, пересекающимися окружностями, пересекающимися прямой и окружностью.

Докажем сначала, что для любых прямых угол $\angle ab$ совпадает с углом между $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$. Утверждение очевидно, если прямые проходят через точку $O$. Пусть теперь $O \in a$ и $O \notin b$ (рис. 6). Обозначим через $\omega_1$ окружность, в которую переходит прямая $b$, и через $b_1$ — касательную к $\omega_1$ в точке $O$. Так прямые $b$ и $b_1$ перпендикулярны одному и тому же диаметру, то они параллельны. Поэтому угол между $a$ и $\omega_1$, равный по определению углу между $a$ и $b_1$, совпадает с углом $\angle ab$. Рассуждения аналогичны и в случае, когда $O \notin a \cup b$ (надо рассмотреть касательные к окружностям $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ в точке $O$).

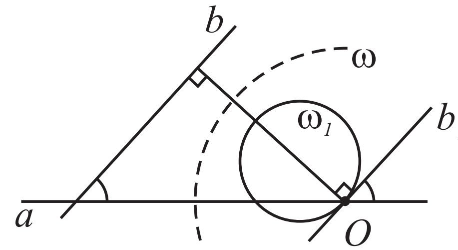

Рис. 6

Поскольку угол между окружностями и между прямой и окружностью определялся через касательные, доказательство остальных двух утверждений легко сводятся к случаю сохранения угла между прямыми.

## 1.2. Геометрия Мора-Маскерони

Теория построения одним циркулем получила свою известность благодаря книге “Геометрия циркуля” (1797 г.) Лоренцо Маскерони[2]. Значительно позже в одном из букинистических магазинов была обнаружена книга датского математика Георга Мора “Датский Евклид”, датированная 1672 годом! Обе книги содержат следующий основной результат геометрии циркуля.

**Теорема Мора-Маскерони 1.2.1.** *Все построения, выполненные с помощью циркуля и линейки, могут быть проделаны только с помощью циркуля (при этом мы считаем прямую построенной, если найдены хотя бы две точки этой прямой).*

Для доказательства этой теоремы достаточно научиться находить только с помощью циркуля пересечения двух прямых, прямой и окружности. Далее рассмотрим несколько задач, в решении которых разрешается пользоваться только циркулем.

*Пример 1.* Разделить с помощью циркуля данный отрезок $AB$ на $n$ равных частей ($n \in N$).

*Решение.* Чтобы разделить отрезок $AB$ на $n$ равных частей, сначала увеличим его в $n$ раз, т.е. на луче $[AB)$ найдем точку $C$, что $AC = n \cdot AB$. А затем построим точку $C'$ — образ точки $C$ при инверсии относительно окружности $\omega(A, AB)$. Из соотношения $AC \cdot AC' = AB^2$ получаем $AC' = AB/n$. Все указанные построения можно выполнить только с помощью циркуля (для этого даже не нужна прямая $AB$).

*Пример 2.* Только с помощью циркуля найти центр данной окружности.

*Решение.* Выберем произвольную точку $O$ окружности $\omega_1(X, r)$, центр $X$ которой нам нужно определить (рис. 7). Из точки $O$ проведем произвольную окружность $\omega(O, R)$ так, чтобы она пересекала исходную окружность $\omega_1$. Обозначим точки пересечения $\omega \cap \omega_1$ через $A$ и $B$. Куда перейдет прямая $AB$ при

[2]Л. Маскерони(1750-1800), итальянский инженер, изучал математику самостоятельно. Работы относятся к теории геометрических построений, теории многоугольников, интегральному исчислению. Результаты его геометрических исследований доложил в 1797 году на заседании Национального института Наполеон Бонапарт.

инверсии $inv_O^R$? Конечно же в $\omega_1$, поскольку точки $A$ и $B$ остаются неподвижными (свойства II и VI). По свойству VII центр $inv_O^R((AB))$ (т.е. центр $\omega_1$) является образом точки $S_{(AB)}(O)$ при $inv_O^R$. Из этих рассуждений следует цепочка необходимых построений. Сначала находим точку $O_1 = S_{(AB)}(O)$, симметричную $O$ относительно прямой $AB$. А затем строим образ точки $O_1$ при $inv_O^R$, он и будет искомым центром. Все указанные построения выполняются только с помощью циркуля.

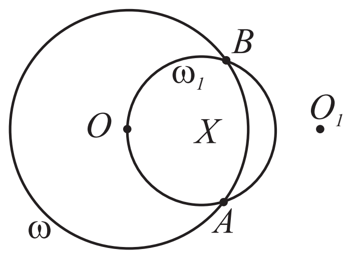


Рис. 7

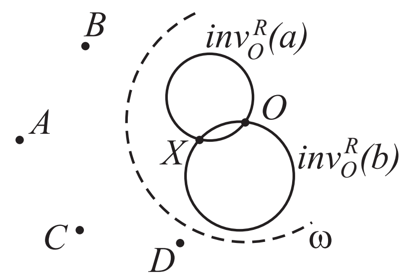


Рис. 8

*Пример 3.* Даны точки $A$, $B$, $C$, $D$ и окружность $\omega$. Только с помощью циркуля найти пересечение прямых $AB$ и $CD$, а также точки пересечения прямой $AB$ с окружностью $\omega$.

*Решение.* Опишем поиск пересечения двух прямых только с помощью циркуля. Пусть даны точки $A$, $B$, $C$ и $D$ (рис. 8). Выберем точку $O$ так, чтобы она не лежала на прямых $a = (AB)$ и $b = (CD)$ (для этого достаточно провести две окружности, описанные около треугольников $ABC$ и $BCD$ и выбрать точку их пересечения, отличную от точки $C$; если же эти две окружности совпадают, т.е. $ABCD$ — вписанный четырехугольник, выбираем на этой окружности любую точку, отличную от $A$, $B$, $C$ и $D$). При инверсии $inv_O^R$ прямые $a$ и $b$ должны перейти в окружности $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, а их точка пересечения отобразится в точку пересечения окружностей $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, отличную от точки $O$ (свойства VI и I). Теперь необходимые построения становятся очевидными: с помощью свойства VII строим окружности $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$, находим точку пересечения этих окружностей — точку $X$, и снова действуем инверсией уже на точку $X$. Точка $Y = inv_O^R(X)$ является искомой. Пересечение прямой и окружности находится похожим образом.

Теперь терема Мора-Маскерони следует из решения задач предыдущих трех примеров.

## 1.3. Задачи Аполлония

В этом параграфе рассмотрим задачу о построении окружности, касающейся трех данных окружностей, названную в честь крупнейшего специалиста по коническим сечениям древности Аполлония Пергского[3]. Решению проблемы **G** предшествуют решения задач **E** и **F**.

Решение **E**. Чтобы построить окружность $\omega_2$, проходящую через точки $A$ и $B$ и касающуюся данной окружности $\omega_1$, рассмотрим инверсию с центром в точке $O = A$ относительно окружности произвольного радиуса $R$. Образом $\omega_2$ при инверсии $inv_O^R$ должна быть некоторая прямая $a$, проходящая через точку $B' = inv_O^R(B)$ и касающаяся окружности $inv_O^R(\omega_1)$ (свойства VIII и IX). Касательные из произвольной точки $X$ к произвольной окружности $\omega(Y, r)$ провести довольно легко: для этого достаточно построить вспомогательную окружность $\omega'$ на диаметре $[XY]$ и соединить $X$ с точками пересечения $\omega \cap \omega'$. Теперь выполняем необходимые построения в следующем порядке: находим $B' = inv_O^R(B)$ и $inv_O^R(\omega_1)$, через точку $B'$ проводим касательные $a$ и $b$ к окружности $inv_O^R(\omega_1)$, строим образы $inv_O^R(a)$ и $inv_O^R(b)$ при инверсии $inv_O^R$. В зависимости от расположения точки $B'$ относительно окружности $inv_O^R(\omega_1)$ может быть два, одно и ни одного решения (например, когда $B'$ находится внутри $inv_O^R(\omega_1)$).

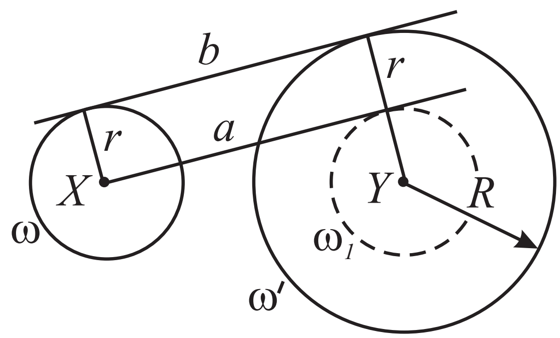


Рис. 9

Решение **F**. Для решения этой задачи достаточно уметь проводить общую касательную к двум произвольным окружностям $\omega(X, r)$ и $\omega'(Y, R)$. Будем считать, что $r < R$. Проведем из точки $X$ касательную $a$ к окружности $\omega_1(Y, R-r)$ (рис. 9), тогда искомая внешняя касательная $b$ к окружностям $\omega$ и $\omega'$ будет параллельна прямой $a$ и находится от нее на расстоянии $r$.

[3]Аполлоний(2-я половина 3 в.– 1-я половина 2 в. до н.э.). Родился в Перге (Малая Азия). Главный его труд “Конические сечения” сохранился не полностью (первые четыре книги) в оригинале, частично (три последующие книги) в арабском переводе, восьмая книга утеряна. Исследуя свойства конических сечений, их диаметров, фокусов, нормалей и касательных, пользовался проективно-геометрическими методами.

Для проведения внутренней касательной вместо $\omega_1(Y, R - r)$ надо рассмотреть окружность $\omega_2(Y, R + r)$. В общем случае возможно до четырех решений. Теперь вернемся к исходной задаче. Пусть даны точка $A$ и две окружности $\omega_1$ и $\omega_2$. Искомая окружность $\omega$, проходящая через $A$ и касающаяся $\omega_1$ и $\omega_2$, при инверсии с центром $O = A$ должна перейти в некоторую прямую $a$, которая касается окружностей $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$ (свойства VIII и IX). Таким образом, приходим к следующему порядку построений: находим $inv_O^R(\omega_1)$ и $inv_O^R(\omega_2)$, проводим общие касательные $(a, b, c, d)$ и строим образы этих касательных при $inv_O^R$. В общем случае получится до четырех искомых окружностей, однако в одном случае решений будет бесконечно много (представьте, что произойдет после инверсии с окружностями $\omega_1$ и $\omega_2$, если они касаются в точке $A$).

Решение **F**. Задача Аполлония легко сводится к предыдущей задаче. Пусть даны окружности $\omega_1(O_1, r_1)$, $\omega_2(O_2, r_2)$ и $\omega_3(O_3, r_3)$, и $r_1 < r_2 < r_3$. Построим окружность $\omega(O, R)$, проходящую через точку $O_1$ и касающуюся окружностей $\omega_2(O_2, r_2 - r_1)$ и $\omega_3(O_3, r_3 - r_1)$. Уменьшив радиус окружности $\omega$ на $r_1$, т.е. рассматривая $\omega(O, R - r_1)$, приходим к одной из искомых окружностей. Количество решений исследовать самим (кажется, исключая бесконечный случай, возможно до восьми решений).

## 1.4. Построения одной линейкой

Этот параграф посвящен построениям одной линейкой. Без дополнительно нарисованных линий на плоскости (например, двух параллельных прямых) одной линейкой мало что можно сделать. Например, с помощью только одной линейки без дополнительных линий нельзя даже разделить пополам произвольный отрезок. Но, зато, если на плоскости нарисована хотя бы одна окружность и отмечен ее центр, все дальнейшие построения можно выполнять только с помощью одной линейки. В 1833 году швейцарский математик Якоб Штейнер доказал следующую теорему: *любая задача на построение, которая может быть решена циркулем и линейкой, может быть решена только одной линейкой, если в плоскости чертежа задана хотя бы одна окружность и отмечен ее центр (при этом задача на построение какой-либо окружности считает-*

*ся решенной, если найден ее центр и отрезок, длина которого равна радиусу искомой окружности).* Чуть раньше, эту же теорему совершенно другими методами удалось доказать французским математиком Жаном Понселе (будучи участником войны 1812 года Понселе попал в плен и несколько важных работ по геометрии им были написаны в Саратове в 1812–14 годах). Здесь мы разберем несколько задач геометрии линейки (эту часть геометрии принято называть *геометрией Понселе-Штейнера*).

*Пример 1.* На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью одной линейки построить прямоугольник.

*Решение.* Через точку $O$ — центр данной окружности достаточно провести два различных диаметра. Концы этих диаметров будут вершинами прямоугольника, поскольку каждый из углов этого вписанного четырехугольника опирается на диаметр.

*Пример 2.* Дана пара различных параллельных прямых и на одной из них лежит отрезок. Разделить данный отрезок пополам, используя одну линейку.

*Решение.* Пусть $a \| b$ и $[AB] \subseteq a$ (рис. 10). Выберем произвольно $D \in b$ и на продолжении прямой $AD$ за точку $D$ отметим точку $M$. В пересечении прямых $b$ и $BM$ получим точку $C$, а в пересечении прямых $AC$ и $BD$ — точку $O$. Точки пересечения прямой $OM$ с прямыми $a$ и $b$ обозначим через $K$ и $L$ соответственно. Четырехугольник $ABCD$ является трапецией, отсюда точки $K$ и $L$ — середины ее оснований (в любой трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой — *основное* свойство трапеции).

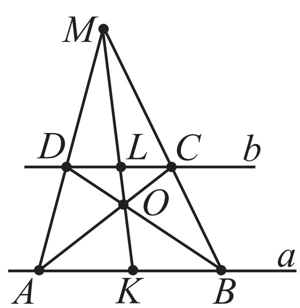


Рис. 10

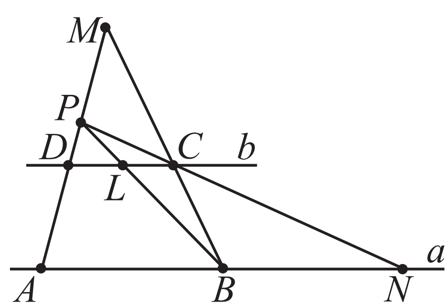


Рис. 11

*Пример 3.* Дана пара различных параллельных прямых и на одной из них лежит отрезок. Увеличить данный отрезок в два раза, используя одну линейку.

*Решение.* Используем обозначения предыдущей задачи и рис. 11. Последовательно найдем точки $P$ и $N$, где $\{P\} = (BL) \cap (AM)$ и $\{N\} = (PC) \cap a$. Используя трапецию $ADCN$, получаем, что $B$ — середина отрезка $AN$. Отсюда отрезок $AN$ — искомый.

*Пример 4.* На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью одной линейки вписать в эту окружность квадрат.

*Решение.* Пусть $ABCD$ — вписанный в данную окружность прямоугольник (он построен в первом примере). Его противоположные стороны параллельны, поэтому, используя пример 2, мы можем найти точки $K$, $L$, $M$ и $N$, которые являются соответственно серединами его сторон $AB$, $BC$, $CD$ и $DA$. Прямые $KM$ и $LN$ содержат перпендикулярные диаметры данной окружности, поэтому высекают на ней четыре точки, являющиеся вершинами квадрата.

*Пример 5.* Дана прямая $a$ и два равных отрезка $AB$ и $BN$, лежащих на это прямой. Через произвольную точку $D$ провести прямую, параллельную прямой $a$.

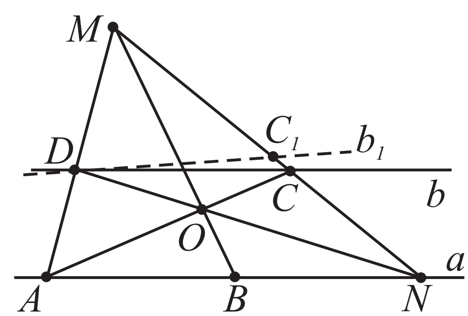

Рис. 12

*Решение.* Фактически, эта задача является обратной к задаче из примера 2. Сначала на продолжении прямой $AD$ за точку $D$ произвольно выберем точку $M$ (рис. 12). Пусть $O$ — точка пересечения прямых $MB$ и $DN$, а $C$ — точка пересечения прямых $AO$ и $MN$. Докажем, что прямая $b = (DC)$ является искомой. Пусть это не так, тогда рассмотрим прямую $b_1$, которая проходит через $D$, параллельна прямой $a$ и не совпадает с $b$. Точку пересечения прямых $b_1$ и $MN$ обозначим через $C_1$. Тогда $ANC_1D$ — трапеция, причем точка $O$, одновременно лежащая на прямых $DN$ и $MB$ должна быть точкой пересечения диагоналей этой трапеции. Таким образом, $C_1 \in (AO)$, откуда $C = C_1$ и $b_1 = b$. Это противоречит предположению $b_1 \neq b$. Параллельность прямых $b$ и $a$ доказана.

*Пример 6.* На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью линейки через данную точку $H$ провести прямую, параллельную данной прямой $a$.

*Решение.* Используя примеры 1 и 2 в данную окружность можно вписать прямоугольник $ABCD$ и найти середины его сторон. Прямая $a$ не может быть параллельна каждой стороне этого прямоугольника. Пусть, например прямые $AB$ и $a$ не параллельны. Обозначим через $K$ и $M$ середины отрезков $AB$ и $CD$. Тогда тройка параллельных прямых — $(AD)$, $(KM)$ и $(BC)$ — высечет согласно теореме Фалеса на прямой $a$ два равных отрезка. Затем, используя результат предыдущей задачи, через любую точку плоскости, в том числе и через $H$, можно провести прямую, параллельную данной прямой $a$ (используя при этом только линейку).

*Пример 7.* На плоскости задана окружность и отмечен ее центр. Только с помощью линейки через данную точку $H$ провести прямую, перпендикулярную данной прямой $a$.

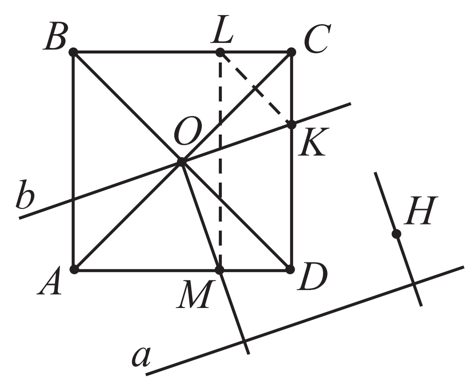

Рис. 13

*Решение.* Можно считать, что на плоскости, кроме данных прямой и точки нарисован квадрат $ABCD$ (см. пример 4), его центр — точка $O$, а также прямая $b$ (см. пример 5), которая проходит через точку $O$ и параллельна прямой $a$ (рис. 13). Пусть $K$ — точка пересечения прямой $a$ со стороной $CD$, прямая $KL$ параллельна диагонали $BD$ (см. пример 5), причем $L \in [BC]$. И, наконец, проводя через $L$ прямую параллельно $(AB)$, получаем на стороне $AD$ точку $M$. Докажем, что $(OM) \perp b$. Из равенств $DM = CL = CK$ следует равенство треугольников $ODM$ и $OCK$ (две пары соответственно равных сторон и равенство углов между ними). Из равенства этих треугольников и условия $(OC) \perp (OD)$ следует, что $(OM) \perp b$. Теперь остается через точку $H$ провести прямую, параллельную прямой $OM$ (см. пример 5).

# Глава 2

# Использование инверсии в доказательствах

## 2.1. Отношение четырех точек. Формула Эйлера

Основой исследований в этом параграфе будет формула V для вычисления расстояния между образами точек $A$ и $B$ при инверсии относительно $\omega(O, R)$: $|A'B'| = |AB|R^2/(|OA| \cdot |OB|)$. Из этой формулы сразу видно, что расстояние при инверсии для произвольных точек $A$ и $B$ не сохраняется и искажение расстояния происходит сильнее при приближении точек $A$ и $B$ к центру окружности инверсии. Прежде чем установить менее очевидный факт, введем важное в теории круговых преобразований[1] понятие *двойного отношения четырех точек.*

**Определение.** *Двойным отношением четырех точек $A$, $B$, $C$ и $D$ называют число*

$$\frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|}.$$

**Теорема 2.1.1.** *Двойное отношение четырех точек сохраняется при инверсии.*

[1]Круговым называется такое преобразованием множества $\alpha \cup \{\infty\}$ ($\alpha$ — плоскость и $\infty$ — бесконечно удаленная точка), при котором каждая обобщенная окружность (т.е. окружность или прямая) отображается на обобщенную окружность. Инверсия — частный случай кругового преобразования.

**Доказательство.** Обозначим через $A'$, $B'$, $C'$ и $D'$ соответственно образы точек $A$, $B$, $C$ и $D$ при инверсии относительно окружности $\omega(O, R)$. Тогда из формулы V имеем

$$\frac{|A'C'|}{|B'C'|} : \frac{|A'D'|}{|B'D'|} = \frac{|AC|/(|OA| \cdot |OC|)}{|BC|/|OB| \cdot |OC|} : \frac{|AD|/(|OA| \cdot |OD|)}{|BD|/(|OB| \cdot |OD|)} =$$

$$= \frac{|AC|}{|BC|} : \frac{|AD|}{|BD|}.$$

Следующая теорема является решением проблемы **H**.

**Теорема 2.1.2.** *Пусть даны точки $A$, $B$ и число $k > 0$ $(k \neq 1)$. Множество $\Phi$ состоит из всех таких точек $X$ плоскости, для которых $|XA|/|XB| = k$. Тогда $\Phi$ является окружностью (окружность Аполлония), центр которой лежит на прямой $(AB)$.*

**Доказательство.** На прямой $(AB)$ можно легко найти две точки $O$ и $C$, принадлежащие множеству $\Phi$ (одна из них будет внутренней точкой отрезка $[AB]$, другая — внешней точкой этого отрезка). Рассмотрим инверсию относительно окружности с центром в точке $O$ произвольного радиуса $R$. Для образов точек $A$, $B$ и $C$ имеем

$$\frac{|C'A'|}{|C'B'|} = \frac{|CA|R^2/(|OC| \cdot |OA|)}{|CB|R^2/(|OC| \cdot |OB|)} = \frac{|CA|}{|CB|} : \frac{|OA|}{|OB|} = k : k = 1. \tag{1}$$

Пусть $X' = inv_O^R(X)$ и $\Phi' = inv_O^R(\Phi)$. Тогда, учитывая (1) и сохранение при инверсии отношения четырех точек, получаем

$$X \in \Phi \Leftrightarrow \frac{|XA|}{|XB|} : \frac{|CA|}{|CB|} = k : k = 1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{|X'A'|}{|X'B'|} : \frac{|C'A'|}{|C'B'|} = 1 \Leftrightarrow \frac{|X'A'|}{|X'B'|} = 1.$$

Последнее означает, что $\Phi'$ — серединный перпендикуляр к отрезку $[A'B']$. Отсюда $\Phi = inv_O^R(\Phi')$ — окружность, диаметр которой лежит на прямой $(AB)$. Теорема доказана.

Формула следующей теоремы, названная в честь Леонарда Эйлера[2], связывает между собой радиусы вписанной и описанной окружностей произвольного треугольника с расстоянием между их центрами.

**Теорема 2.1.3.** *Пусть для произвольного треугольника $ABC$ числа $r$, $R$ и $d$ соответственно обозначают радиусы вписанной и описанной окружностей и расстояние между их центрами. Тогда $d^2 = R^2 - 2Rr$.*

**Доказательство.** Точки касания вписанной окружности $\omega(O, r)$ со сторонами $[AB]$, $[AC]$ и $[BC]$ обозначим соответственно через $K$, $L$ и $M$ (рис. 14).

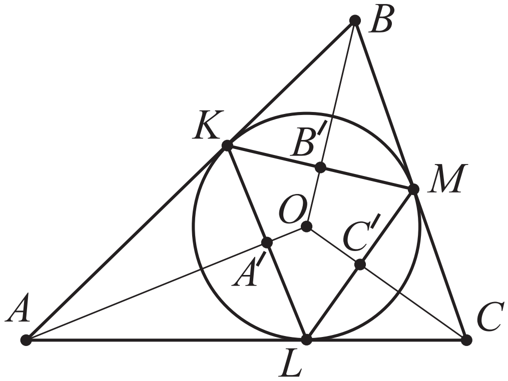


Рис. 14

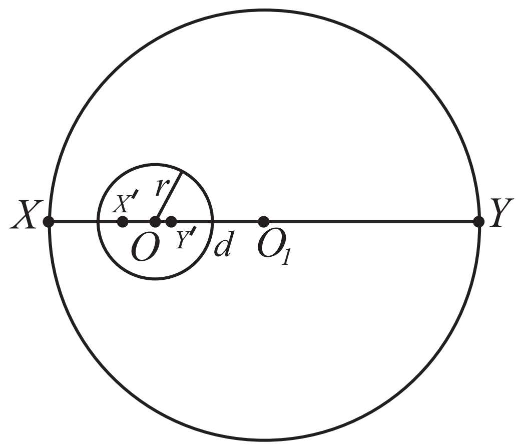


Рис. 15

Пусть также $\omega_1(O_1, R)$ — описанная около треугольника $\triangle ABC$ окружность. Рассмотрим инверсию относительно вписанной окружности $\omega(O, r)$. Так как прямые $(AK)$ и $(AL)$ являются касательными к окружности инверсии, образом точки $A$ будет середина отрезка $[KL]$ (точка $A'$), аналогично $B' = inv_O^r(B)$ — середина $[KM]$ и $C' = inv_O^r(C)$ — середина $[LM]$. Образом окружности $\omega_1(O_1, R)$ будет окружность $\omega_1'$, проходящая через точки $A', B', C'$ и имеющая радиус равный $r/2$ (так как при гомотетии $H_O^{-1/2}$ окружность $\omega$ переходит в окружность, проходящую через середины сторон $\triangle KLM$, т.е. в $\omega_1'$). Теперь попробуем

[2] Л. Эйлер (1707-1783), математик, механик, физик и астроном. Родился в Базеле. С 1726 по 1741 и с 1766 являлся академиком Петербургской АН. Список трудов Эйлера содержит более 850 названий. Основные работы относятся к вариационному исчислению, интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнений, степенным рядам, дифференциальной геометрии, теории чисел, небесной механике, оптике, гидродинамике. В конце 1766 года почти полностью потерял зрение, но, продолжая интенсивно работать, за 17 лет подготовил около 400 научных работ.

выяснить, как вообще изменяется радиус окружности при инверсии. Обозначим через $X$ и $Y$ точки диаметра окружности $\omega_1(O_1, R)$, лежащие на прямой $(OO_1)$ (рис. 15). По свойству IX отрезок $[inv_O^r(X)\ inv_O^r(Y)]$ является диаметром окружности $inv_O^r(\omega_1)$, а по свойству V его длина равна

$$|X'Y'| = \frac{|XY|}{|OX| \cdot |OY|} \cdot r^2 = \frac{2Rr^2}{|R-d| \cdot |R+d|} = \frac{2Rr^2}{R^2 - d^2}.$$

Учитывая, что $|X'Y'| = 2R'$, где $R'$ — радиус окружности $inv_O^r(\omega_1)$, получаем формулу $R' = \frac{Rr^2}{R^2-d^2}$. Возвращаясь к образу описанной окружности при инверсии относительно $\omega(O, r)$, имеем

$$\frac{r}{2} = \frac{Rr^2}{R^2 - d^2} \Leftrightarrow R^2 - d^2 = 2Rr \Leftrightarrow d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Теорема доказана.

## 2.2. Арбелос. Теорема Паппа

Напомним, что гомотетией плоскости $\alpha$ с центром в точке $O$ и коэффициентом $k$ ($k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$) называется такое преобразование $H_O^k : \alpha \to \alpha$, что для каждой точки $A \in \alpha$ ее образ $A' = H_O^k(A)$ определяется соотношением $\overrightarrow{OA'} = k \cdot \overrightarrow{OA}$. Нетрудно проверить, что для любых двух различных точек $A$ и $B$ и их образов $A' = H_O^k(A)$, $B' = H_O^k(B)$ выполняются свойства: $|A'B'| = |k| \cdot |AB|$, $(A'B') \| (AB)$. Кроме того, из условия $C \in [AB]$ сразу следует (достаточно воспользоваться неравенством треугольника), что $C' = H_O^k(C) \in [A'B']$. Таким образом, гомотетия, сохраняя отношение лежать между, предсказуемо переводит любой отрезок в отрезок, прямую — в параллельную прямую, луч — в луч, треугольник — в подобный треугольник с коэффициентом подобия $|k|$. Изменение расстояния в $|k|$ раз также влечет, что образом окружности $\omega = \omega(O_1, r_1)$ при $H_O^k$ будет окружность $\omega' = \omega(O_1', r_1')$, причем $O_1' = H_O^k(O_1)$ и $r_1' = |k| \cdot r_1$. В следующей лемме обнаружим простую связь между инверсией и гомотетией.

**Лемма 2.2.1.** *Пусть $\omega = \omega(O, R)$ — окружность инверсии, $O \notin \omega_1$, $\omega_1 = \omega(O_1, r_1)$ и $inv_O^R(\omega_1) = \omega_1'$. Тогда существует такой коэффициент $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$, что $H_O^k(\omega_1) = \omega_1'$.*

**Доказательство.** Обозначим диаметр окружности $\omega_1$, лежащий на прямой $(OO_1)$, через $[AB]$, $A' = inv_O^R(A)$, $B' = inv_O^R(B)$, тогда $[A'B']$ — диаметр окружности $\omega_1'$ и $OA \cdot OA' = R^2 = OB \cdot OB'$, что дает $OA'/OB = OB'/OA$. Теперь рассмотрим два случая: точка $O$ лежит вне окружности $\omega_1$ и точка $O$ лежит внутри $\omega_1$.

Если центр окружности инверсии лежит вне $\omega_1$ (рис. 16), то $A'$, $B' \in [OA)$. Пусть теперь $k = OA'/OB$, тогда $H_O^k(B) = A'$ и $H_O^k(A) = B'$. Учитывая, что $H_O^k(O_1) \in [A'B']$, получаем, что $[A'B']$ — диаметр окружности $H_O^k(\omega_1)$, поэтому $H_O^k(\omega_1) = inv_O^R(\omega_1)$. Можно также заметить, что для произвольной точки $C \in \omega_1$ и ее образа $C' = inv_O^R(C)$ (рис. 16), выполняется $\angle OBC = \angle OC'B' = \angle OA'D$, где $D$ — вторая точка пересечения луча $[OC)$ с $\omega_1'$. Последнее означает, что $(BC) \| (A'D)$ и $D = H_O^k(C)$ из-за свойства гомотетии переводить прямую в параллельную прямую.

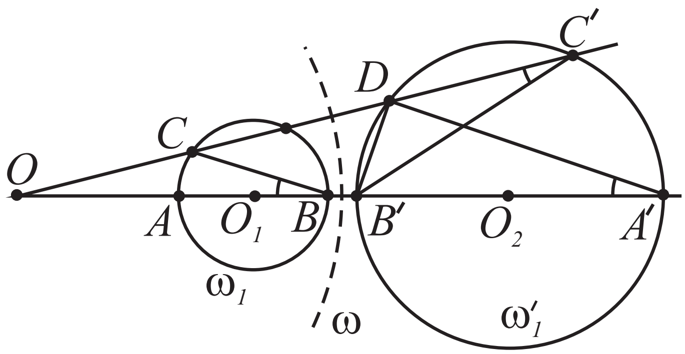


Рис. 16

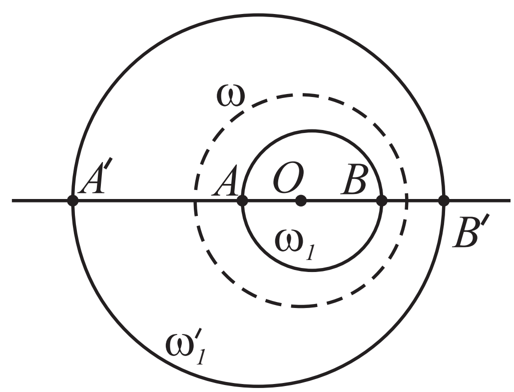


Рис. 17

Рассмотрим второй случай, когда центр окружности инверсии лежит внутри $\omega_1$ (рис. 17), что означает $O \in [AB]$ и $O \in [A'B']$. Пусть теперь $k = -OA'/OB$, тогда $H_O^k(B) = A'$ и $H_O^k(A) = B'$. Учитывая, что $H_O^k(O_1) \in [A'B']$, получаем, что $[A'B']$ — диаметр окружности $H_O^k(\omega_1)$, поэтому $H_O^k(\omega_1) = inv_O^R(\omega_1)$. Лемма доказана.

Далее обсудим две классические задачи, связанные с арбелосом[3]. Пусть точка $B$ лежит между точками $A$ и $C$. Рассмотрим полуокружности, с диаметрами $AC$, $AB$ и $BC$, которые лежат по одну сторону от прямой $AC$. Часть плоскости,

[3] Áрбелос (греч. αρβυλøς) — сапожный нож, его лезвие похоже на рассматриваемую далее геометрическую фигуру.

ограниченная этими тремя полуокружностями, называется *арбелосом.* Обозначать арбелос будем так: $Arb(ABC)$ (предполагая, что $B$ — внутренняя точка интервала $AC$). В следующем утверждении решается первая задача об арбелосе, которая называется *задачей Архимеда.*

**Теорема 2.2.2.** *Пусть половины окружностей $\Omega_1$, $\Omega_2$ и $\Omega_3$ ограничивают арбелос $Arb(ABC)$, прямая $l$ перпендикулярна $(AB)$ и $B \in l$. В криволинейные сегменты, ограниченные прямой $l$ и половинами окружностей $\Omega_1$, $\Omega_2$ и $\Omega_3$ вписываются окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ (рис. 18). Тогда радиусы $\omega_1$ и $\omega_2$ равны.*

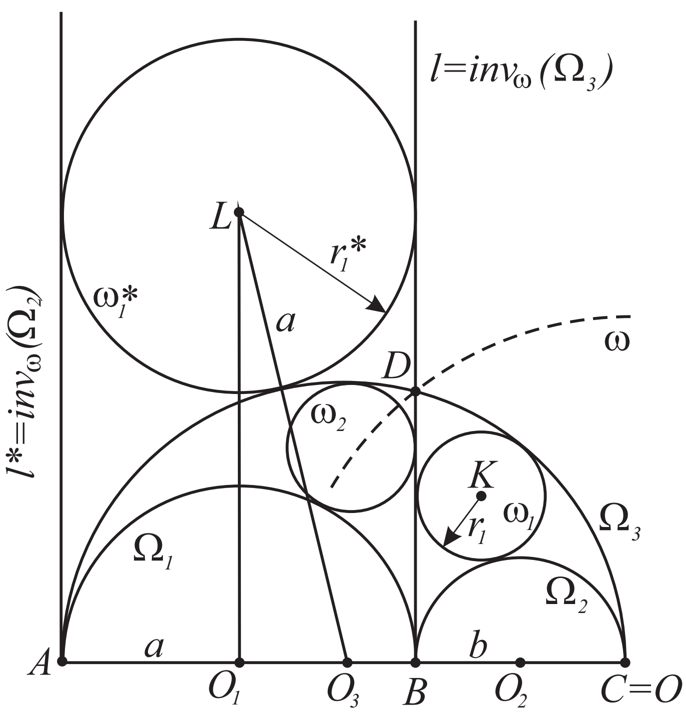


Рис. 18

**Доказательство.** Пусть радиусы окружностей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ равны $a$ и $b$ соответственно, тогда радиус $\Omega_3$ равен $a + b$. Далее будем рассматривать только ту полуплоскость с границей $(AC)$, которая содержит арбелос и через $D$ обозначим точку пересечения прямой $l$ с $\Omega_3$. Центром инверсии выберем точку $O = C$ и радиус окружности инверсии будем считать $R = CD$. Учитывая, что угол $CDA$ вписан в $\Omega_3$ и опирается на диаметр, получим $\angle CDA = 90^\circ$ и $CB \cdot CA = CD^2 = R^2$ (так как треугольники $CBD$ и $CDA$ подобны). Отсюда следует справедливость следующих соотношений: $inv_O^R(A) = B$, $inv_O^R(B) = A$, $inv_O^R(\Omega_3) = l$, $inv_O^R(l) = \Omega_3$, $inv_O^R(\Omega_2) = l^*$ и $inv_O^R(\Omega_2) = \Omega_2$. Теперь ясно, что инверсным образом окружности $\omega_1$, будет окружность $\omega_1^* = inv_O^R(\omega_1)$, которая касается $\Omega_3$, $l$ и $l^*$. Ясно, что радиус $\omega_1^*$ равен $r^* = a$. Проведем предварительные вычисления. Учитывая, что $O_3O_1 = b$, $O_3L = 2a + b$ и $O_1C = a + 2b$, применяя теорему Пифагора, последовательно находим $LO_1 = \sqrt{4a^2 + 4ab}$ и $LO^2 = 5a^2 + 8ab + 4b^2$. Применим формулу изменения радиуса окружности при инверсии (см. вывод формулы Эйлера в предыдущем параграфе) и найдем радиус $r_1$ окружности $\omega_1 = inv_O^R(\omega_1^*)$

$$r_1 = a \cdot \frac{R^2}{|r_1^{*2} - LO^2|} = a \cdot \frac{4b(a+b)}{4(a^2+2ab+b^2)} = \frac{ab}{a+b}.$$

Аналогично рассматривая инверсию относительно окружности с центром в точке $A$ и радиусом $AD$, получим, что радиус окружности $\omega_2$ также равен $ab/(a+b)$. Теорема доказана.

Заметим, что громоздких вычислений в доказательстве последней теоремы можно было избежать. Действительно, мы знаем, что инверсные окружности $\omega_1^*$ и $\omega_1$ гомотетичны с тем же центром $O = C$. При этой гомотетии касательная $l^*$ должна перейти в $l$, поэтому коэффициент гомотетии равен $2b/(2a+2b)$ и $r_1 = a \cdot \frac{b}{a+b}$. Может возникнуть вопрос о существовании окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ из последней теоремы. Внимательный читатель быстро сведет задачу построения таких окружностей к задаче Аполлония, решение которой было дано в первой главе.

Сформулируем вторую задачу об арбелосе, используя уже введенные обозначения. Пусть окружность $S_1 = \omega(O_1, r_1)$ касается половин окружностей $\Omega_1$, $\Omega_2$ и $\Omega_3$, т.е. вписана в арбелос $Arb(ABC)$. Тогда расстояние от точки $O_1$ до прямой $AC$ равно диаметру окружности $S_1$. Следующая теорема многократно перекрывает этот результат.

**Теорема (Паппа[4]) 2.2.3.** *Пусть половины окружностей $\Omega_1$, $\Omega_2$ и $\Omega_3$ ограничивают арбелос $Arb(ABC)$. В него вписывается цепочка окружностей $S_1 = \omega(P_1, r_1)$, $S_2 = \omega(P_2, r_2), \ldots$, $S_n = \omega(P_n, r_n), \ldots$ следующим образом (рис. 19): $S_1$ касается всех трех окружностей арбелоса, а $S_i$ при $i \geqslant 2$ касается $\Omega_1$, $\Omega_3$, $S_{i-1}$ и $S_{i+1}$. Обозначим через $d_n = 2r_n$ — диаметр $n$-ой окружности, тогда расстояние от $P_n$ до прямой $AC$ равно $n \cdot d_n$ при всех $n \in \mathbb{N}$.*

[4]Папп Александрийский — греческий математик и механик, живший и работавший в Александрии. Годы его жизни не известны, предположительно III-IV в.н.э. Главный его труд — трактат «Математическое собрание» в восьми книгах дошел до нас не полностью.

**Доказательство.** Далее используем обозначения рис. 19.

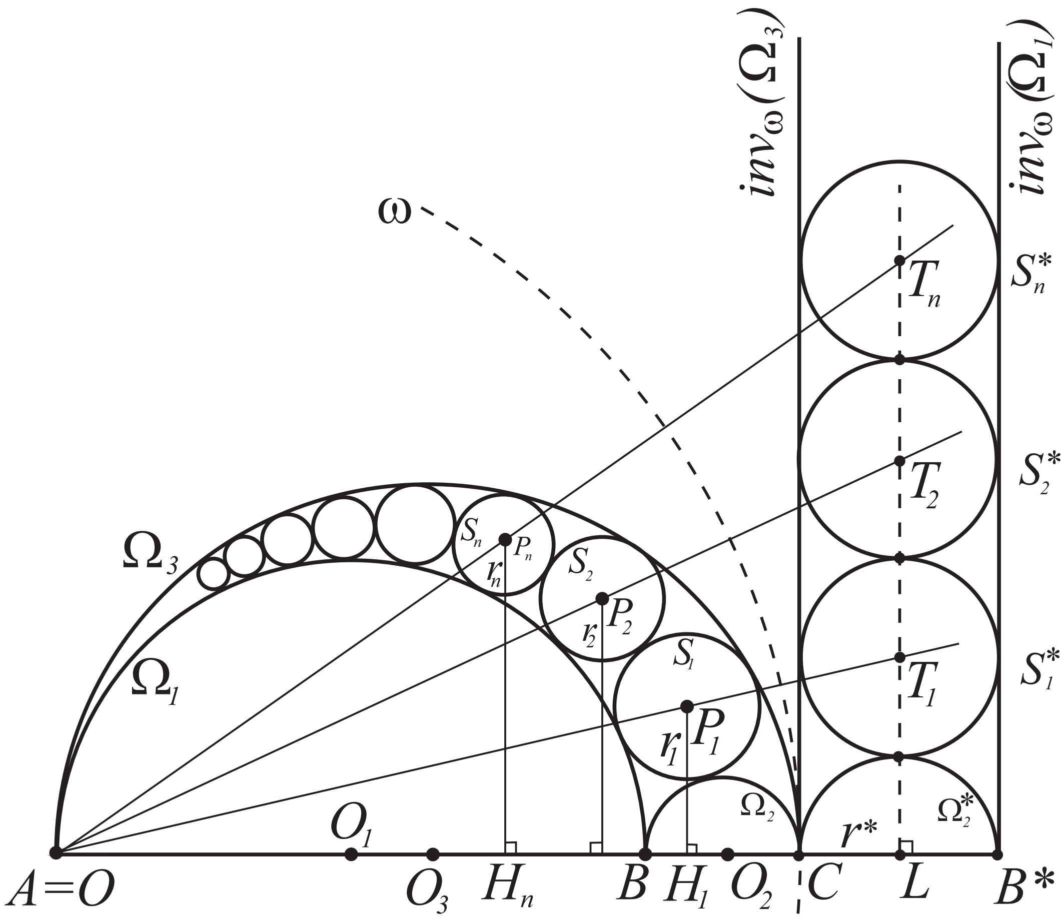


Рис. 19

Будем рассматривать инверсию относительно окружности $\omega$ с центром в точке $O = A$ радиуса $R = AC$. Пусть $B^* = inv_O^R(B)$, тогда образом окружности $\Omega_1$ является прямая $l_1$, проходящая через точку $B^*$ и перпендикулярная прямой $AC$. Окружность $\Omega_3$ также перейдет в прямую $l_3$, проходящую через точку $C$, которая неподвижна относительно этой инверсии. Окружности $\Omega_2$, $S_1$, $S_2$, $\ldots$, $S_n, \ldots$ переходят соответственно в цепочку окружностей $\Omega_2^*$, $S_1^*$, $S_2^*$, $\ldots$, $S_n^*, \ldots$ последовательно касающихся друг друга, а также касающихся прямых $l_1$ и $l_3$. Ясно, что отрезок $CB^*$ — диаметр окружности $\Omega_2^*$, обозначим через $r^* = CB^*/2$. Учитывая, что $l_1 \| l_3$, получаем, что в цепочке $\Omega_2^*$, $S_1^*$, $S_2^*, \ldots S_n^*, \ldots$ все окружности имеют радиус $r^*$. Обозначим центры окружностей $\Omega_2^*$, $S_1^*$, $S_2^*$, $\ldots$, $S_n^*, \ldots$ соответственно через $L$, $T_1$, $T_2$, $\ldots$, $T_n$, $\ldots$. Используя лемму, получим, что окружности $S_n$ и $S_n^*$ гомотетичны друг другу с центром в той же точке

$O$, поэтому для расстояния от центра окружности $S_n$ до прямой $AC$ выполняется следующее соотношение

$$\frac{P_nH_n}{r_n} = \frac{T_nL}{r^*} = \frac{2r^* \cdot n}{r^*} = 2n \Rightarrow \frac{P_nH_n}{d_n} = n.$$

Теорема доказана.

## 2.3. Теорема Фейербаха

Продолжим обзор основных приложений инверсии одним совершенно неожиданным результатом об окружности девяти точек. Сначала напомним некоторые определения и факты. *Окружностью Эйлера* треугольника $ABC$ называется окружность, проходящая через середины его сторон. На этой окружности также лежат основания высот $\triangle ABC$ и середины трех отрезков, соединяющих ортоцентр этого треугольника (т.е. точку пересечения его высот или их продолжений[5]) с вершинами. Поскольку на окружности Эйлера лежат девять точек, естественно связанных с треугольником $ABC$, ее называют еще *окружностью девяти точек. Вневписанной* окружностью треугольника $ABC$ называется окружность, касающаяся стороны этого треугольника и продолжений двух других его сторон. В следующей лемме перечисляются некоторые свойства вневписанной окружности.

**Лемма 2.3.1.** *Пусть $|AB| = c$, $|AC| = b$, $|BC| = a$, $p$ — полупериметр $\triangle ABC$, $O_1$ и $O_a$ — центры вписанной ($\omega_1$) и вневписанной ($\omega_a$) окружностей (рис. 20), $r_1$ и $r_a$ — их радиусы, $X$ и $X_a$ — точки касания этих окружностей со стороной $[BC]$, $K$ и $L$ — с прямой $(AC)$, $M$ и $N$ — с прямой $(AB)$, $r_b$, $r_c$ — радиусы вневписанных окружностей этого треугольника, которые касаются соответственно сторон $AC$ и $AB$, и $S$ — площадь данного треугольника. Пусть также $(B_1C_1)$ — общая внутренняя касательная к $\omega_1$ и $\omega_a$, отличная от $(BC)$. Тогда*

1. *$|AL| = p$;*

[5] в случае, если треугольник $ABC$ является тупоугольным.

*2.* $|AK| = p - a$, $|CK| = p - c$, $|BX| = p - b$;

*3.* $|BX| = |CX_a|$;

*4.* $|BC_1| = |B_1C| = |b - c|$;

*5.* $pr_1 = r_a(p - a)$;

*6.* $r_1 r_a = (p - b)(p - c)$;

*7.* $S = \sqrt{p(p - a)(p - b)(p - c)}$;

*8.* $S = \sqrt{r_1 r_a r_b r_c}$;

*9.* $\dfrac{1}{r_1} = \dfrac{1}{r_a} + \dfrac{1}{r_b} + \dfrac{1}{r_c}$.

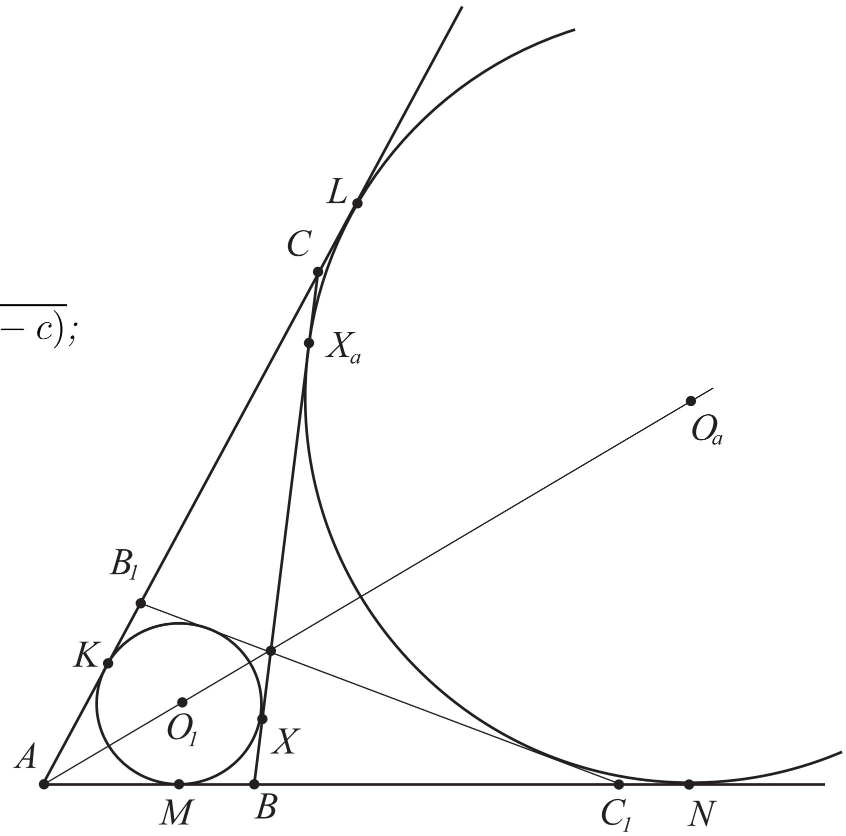


Рис. 20

**Доказательство.** 1) Следует из $2|AL| = |AL| + |AN| = (|AC| + |CX_a|) + (|AB| + |BX_a|) = 2p$.

2) Первое равенство получается из $2|AK| = |AK| + |AM| = (|AC| - |CX|) + (|AB| - |BX|) = 2p - 2a$. Остальные доказываются аналогично.

3) Из (2) и (1) имеем $|BX| = p - b = |AL| - |AC| = |CL| = |CX_a|$.

4) При симметрии относительно биссектрисы $[AO_a)$ угла $\angle BAC$ окружности $\omega_1$ и $\omega_a$ остаются неподвижными и отрезок $[BC]$ одной внутренней касательной переходит в отрезок $[B_1C_1]$ другой внутренней касательной. Отсюда $|BC_1| = |B_1C|$ и $|C_1N| = |CL|$. Из последнего равенства в предположении $b > c$ получаем $|BC_1| = |AN| - |AB| - |CL| = p - c - (p - b) = b - c$.

5) Следует из (1) и (2) и из подобия треугольников $\triangle AO_1K$ и $\triangle AO_aL$.

6) Следует из (1) и (2) и из подобия треугольников $\triangle KO_1C$ и $\triangle LCO_a$ (надо только заметить, что биссектрисы $[CO_1)$ и $[CO_a)$ двух смежных углов перпендикулярны).

7) Перемножая соответственно левые части и правые части равенств $p = p$, $pr_1 = r_a(p-a)$, и $r_1r_a = (p-b)(p-c)$, получим $S^2 = (pr_1)^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$.

8) Перемножая четыре равенства $r_1 = S/p$, $r_a = S/(p-a)$, $r_b = S/(p-b)$, $r_c = S/(p-c)$ (справедливость последних следует из (5)) получим $r_1r_ar_br_c = S^4/S^2 = S^2$.

9) Промежуточные формулы из доказательства предыдущего пункта дают

$$\frac{1}{r_a} + \frac{1}{r_b} + \frac{1}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{3p-2p}{S} = \frac{p}{S} = \frac{1}{r_1}.$$

Лемма доказана.

**Лемма 2.3.2.** *1) Пусть точка $O$ лежит вне окружности $\omega_1 = \omega(O_1, R_1)$ и $A, X, Y \in \omega_1$. Тогда $(OA)$ — касательная к $\omega$ тогда и только тогда, когда $OA^2 = OX \cdot OY$.*
*2) Для окружностей $\omega = \omega(O, R)$ и $\omega_1 = \omega(O_1, R_1)$ условие $inv_O^R(\omega_1) = \omega_1$ выполнено тогда и только тогда, когда $\omega \perp \omega_1$.*

**Доказательство.** 1) В одну сторону утверждение следует из свойства касательной к окружности, которое следует из подобия треугольников $OAX$ и $OYA$ (рис. 21). В обратную сторону предположим противное, и на луче $[OA)$ найдется такая точка $B \neq A$, что $B \in \omega_1$. Тогда $OA^2 = OX \cdot OY = OA \cdot OB$, откуда $OA = OB$, что противоречит выбору точки $B$.

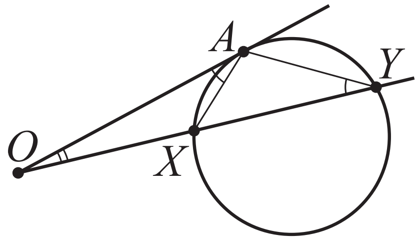


Рис. 21

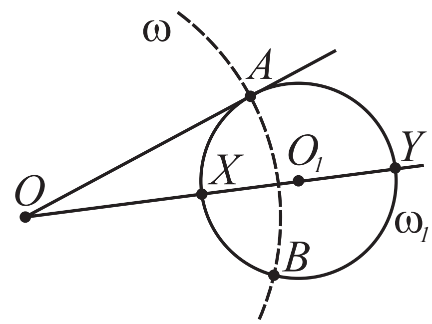


Рис. 22

2) Пусть $inv_O^R(\omega_1) = \omega_1$, $\omega \cap \omega_1 = \{A, B\}$ и $\omega_1 \cap (OO_1) = \{X, Y\}$ (рис. 22). Тогда $inv_O^R(X) = Y$. Отсюда $|OX| \cdot |OY| = R^2 = |OA|^2$. Последнее, по первому пункту леммы, равносильно тому, что $(OA)$ — касательная к окружности $\omega_1$, что означает $(OA) \perp (O_1A)$ и $\omega \perp \omega_1$. Лемма доказана.

**Теорема (Фейербах[6], 1822) 2.3.3.** *Окружность Эйлера треугольника $ABC$ касается вписанной и трех вневписанных окружностей этого треугольника.*

**Доказательство.** Сохраним некоторые обозначения леммы 2.3.1. Середины сторон данного треугольника обозначим через $A'$, $B'$ и $C'$ (рис. 23).

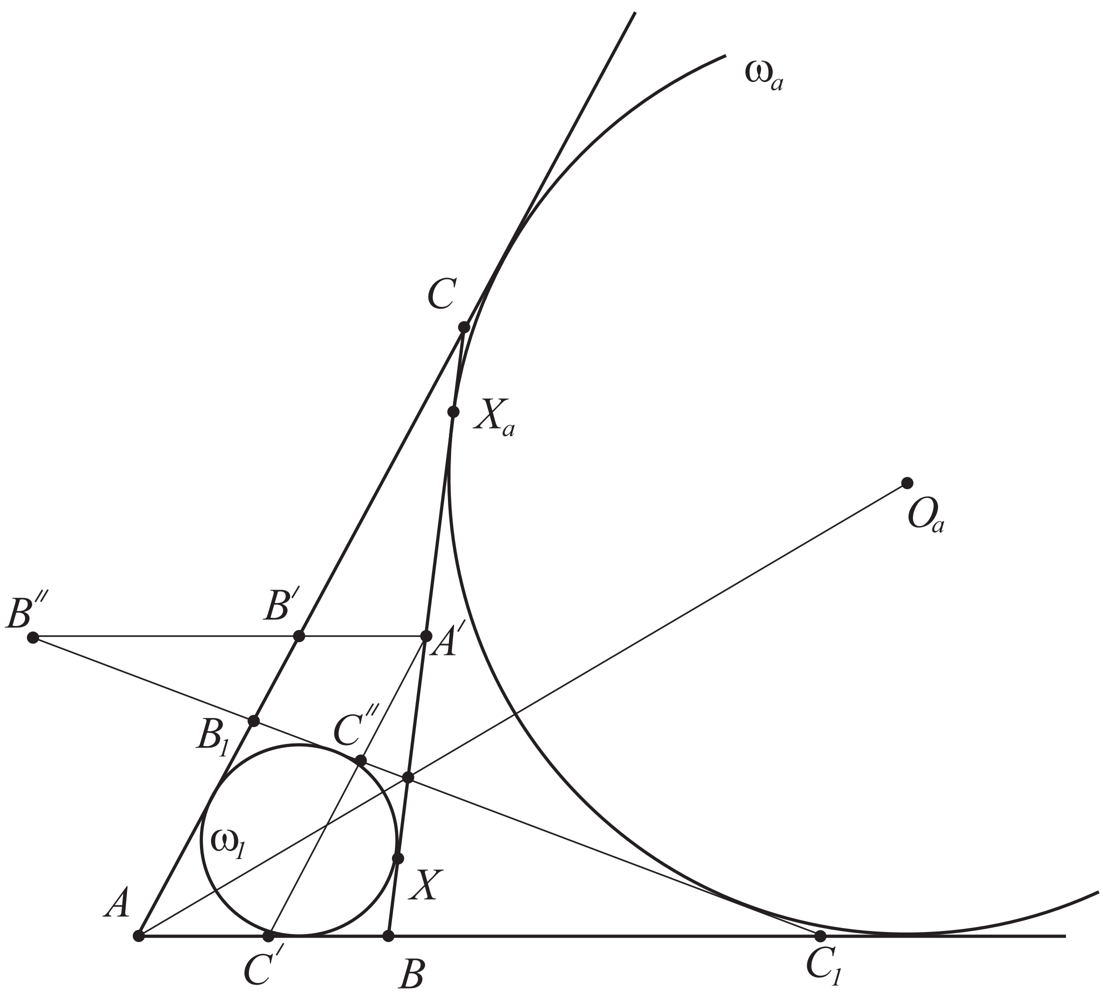


Рис. 23

[6]Карл Вильгельм фон Фейербах (1800-1834) — немецкий математик, сын криминалиста Пауля Фейербаха, старший брат философа Людвига Фейербаха, преподаватель гимназии в Эрлангене.

На отрезке $[XX_a]$ как на диаметре построим окружность $\omega$. Из леммы 2.3.1 сразу получаем, что точка $A'$ будет центром $\omega$ (так как $|BX| = |CX_a|$), а ее радиус $R = |XX_a|/2 = (a - 2|BX|)/2 = (b - c)/2$ (далее предполагаем, что $b \geqslant c$). Рассмотрим симметрию относительно $\omega$. Из условий $\omega_1 \perp \omega$ и $\omega_a \perp \omega$ и по лемме 2.3.2 заключаем, что $inv_O^R(\omega_1) = \omega_1$ и $inv_O^R(\omega_a) = \omega_a$. Чтобы найти образ окружности Эйлера ($\omega_э$) при инверсии относительно $\omega$ введем дополнительные обозначения.

Пусть $S$ — общая точка биссектрисы $[AO_a)$ и прямых $(BC)$ и $(B_1C_1)$. Тогда $|SC| = ab/(b+c)$ и $|SB| = ac/(b+c)$. Отсюда

$$|SA'| = (|SC| - |SB|)/2 = \frac{a}{2} \cdot \frac{b-c}{b+c}.$$

Пусть также точки $B''$ и $C''$ являются соответственно пересечением касательной $(B_1C_1)$ с прямыми $(A'B')$ и $(A'C')$. Из подобия треугольников $\triangle SA'B''$ и $\triangle SBC_1$ получаем

$$|A'B''| = |BC_1| \cdot \frac{|SA'|}{|SB|} = (b-c) \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b-c}{b+c}}{a \cdot \frac{c}{b+c}} = \frac{(b-c)^2}{2c}.$$

Поскольку $|A'B'| = c/2$,

$$|A'B'| \cdot |A'B''| = (b-c)^2/4 = R^2. \tag{1}$$

Рассматривая подобные треугольники $\triangle A'SC''$ и $\triangle CSB_1$ приходим к

$$|A'C''| = |B_1C| \cdot \frac{|SA'|}{|SC|} = (b-c) \cdot \frac{\frac{a}{2} \cdot \frac{b-c}{b+c}}{a \cdot \frac{b}{b+c}} = \frac{(b-c)^2}{2b}.$$

Отсюда

$$|A'C''| \cdot |A'C'| = \frac{(b-c)^2}{2b} \cdot \frac{b}{2} = R^2. \tag{2}$$

Равенства (1) и (2) означают, что $inv_O^R(B') = B''$ и $inv_O^R(C') = C''$. Поэтому $inv_O^R(\omega_э) = (B''C'') = (B_1C_1)$ и $\omega_э$ касается $inv_O^R(\omega_1) = \omega_1$ и $inv_O^R(\omega_a) = \omega_a$. Аналогично доказывается, что $\omega_э$ касается оставшихся двух вневписанных окружностей. Теорема доказана.

Нетрудно заметить, что окружность Эйлера $\omega_э$ треугольника $ABC$ является окружностью Эйлера для каждого из следующих треугольников: $\triangle HAB$,

$HAC$, $HBC$ ($H$ — ортоцентр $\triangle ABC$). Каждый из этих треугольников имеет свою вписанную и три вневписанные окружности. Таким образом, теорема Фейербаха приводит к фантастическому результату: окружность Эйлера треугольника $ABC$ касается по крайней мере шестнадцати окружностей, естественно определенных этим треугольником.

## 2.4. Радикальная ось окружностей. Поризм Штейнера

В предыдущем параграфе, в лемме 2.3.2, мы вспомнили, что для любой секущей к окружности произведение отрезков постоянно и равно квадрату касательной. Аналогичное свойство выполняется и для хорд окружности, проходящих через одну точку: для двух произвольных хорд $AB$ и $CD$ окружности $\omega$, пересекающихся в точке $M$, верно соотношение $AM \cdot MB = CM \cdot MD$. Тот факт, что произведение отрезков не зависит от выбора прямой, является основой для следующего определения.

**Определение.** Пусть прямая $a$ проходит через точку $M$ и пересекает окружность $\omega = \omega(O, R)$ в точках $A$ и $B$[7]. Степенью точки $M$ относительно окружности $\omega$ называется число

$$\deg(M, \omega) = \begin{cases} MA \cdot MB, & \text{если } M \text{ расположена вне } \omega; \\ -MA \cdot MB, & \text{если } M \text{ расположена внутри } \omega; \\ 0, & \text{если } M \in \omega. \end{cases}$$

В следующей лемме доказывается простое правило вычисления $\deg(M, \omega)$.

**Лемма 2.4.1.** *Для произвольной точки $M$ и окружности $\omega = \omega(O, R)$ пусть $d = |MO|$, тогда* $\deg(M, \omega) = d^2 - R^2$.

**Доказательство.** Случай $M \in \omega$ очевиден. Пусть точка $M$ расположена вне $\omega$, тогда $MA \cdot MB = MK^2$, где $(MK)$ — касательная к $\omega$ и $K$ — точка касания. По теореме Пифагора сразу получаем $\deg(M, \omega) = MK^2 = MO^2 - OK^2 = d^2 - R^2$.

[7]В случае, если $a$ — касательная к $\omega$, будет выполняться $A = B$.

Осталось рассмотреть случай, когда $M$ расположена внутри окружности $\omega$. Проведем через $M$ диаметр $CD$, тогда

$$\deg(M, \omega) = -MA \cdot MB = -MC \cdot MD = -(R-d)(R+d) = d^2 - R^2.$$

Лемма доказана.

Перед следующей теоремой вспомним, в чем суть координатного метода. На плоскости вводится прямоугольная (декартова) система координат, при этом каждой точке $M$ ставится в соответствие упорядоченная пара ее координат — $(x, y)$ (точку с ее координатами обычно записывают в виде $M(x, y)$). Появляется возможность некоторые фигуры на плоскости описать с помощью алгебраических уравнений. Напомним, что уравнение $f(x, y) = 0$ называется *координатным уравнением* фигуры $\Phi$, если

$$M(x, y) \in \Phi \Leftrightarrow \text{ координаты точки } M \text{ удовлетворяют уравнению } f(x, y) = 0\,,$$

или, что то же самое, $\Phi = \{M(x, y) : f(x, y) = 0\}$. Хорошо известны координатные уравнения прямых и окружностей. Любая прямая на плоскости имеет своим координатным уравнением уравнение вида $y = k \cdot x + b$, если она не параллельна оси $Oy$, и $x = x_0$ — в противном случае. Верно и обратное, любое уравнение вида $y = k \cdot x + b$ или $x = x_0$ является координатным уравнением некоторой прямой. Координатным уравнением окружности радиуса $R > 0$ с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$ является уравнение

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2.$$

Верно также, что любое такое уравнение задает на плоскости окружность радиуса $R > 0$ с центром в точке $O_1(x_0, y_0)$.

**Теорема 2.4.2.** *Даны две неконцентрические*[8] *окружности $\omega_1$ и $\omega_2$. Тогда множество всех точек $M$, для которых $\deg(M, \omega_1) = \deg(M, \omega_2)$ является прямой, перпендикулярной линии центров этих окружностей (радикальная ось двух окружностей).*

**Доказательство.** Выберем систему координат так, что ось $Ox$ проходит через центры данных окружностей и начало координат совпадает с центром

[8] т.е. с разными центрами

одной из них. Пусть, например, $\omega_1 = \omega(O, r)$, $\omega_2 = \omega(O_1, R)$, $O_1(x_1, 0)$ и $x_1 > 0$. Рассмотрим произвольную точку $M(x, y)$. Тогда по предыдущей лемме выполняется $\deg(M, \omega_1) = MO^2 - r^2 = x^2 + y^2 - r^2$. Аналогично находим, что $\deg(M, \omega_2) = MO_1^2 - R^2 = (x - x_1)^2 + y^2 - R^2$. Таким образом,

$$x^2 + y^2 - r^2 = (x - x_1)^2 + y^2 - R^2 \Leftrightarrow x = \frac{x_1^2 + r^2 - R^2}{2x_1}.$$

Последнее уравнение задает перпендикулярную к $(OO_1)$ прямую вида $x = x_0$. Теорема доказана.

Предыдущая теорема имеет несколько полезных следствий. Во-первых, для трех окружностей $\omega_1$, $\omega_2$ и $\omega_3$, центры которых не лежат на одной прямой, три радикальные оси пересекаются в одной точке (несложно доказать, что точка пересечения двух радикальных осей лежит на третьей радикальной оси). Эта точка называется *радикальным центром* трех окружностей. Во-вторых, если окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ пересекаются в двух различных точках $A$ и $B$, то радикальной осью этих окружностей является прямая $AB$ (действительно, эти точки имеют нулевую степень относительно каждой из окружностей). Наконец, в-третьих, если окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ не пересекаются, то на прямой $O_1O_2$ всегда найдется точка, из которой отрезки касательных к обеим окружностям равны между собой. Выбрав точку пересечения радикальной оси окружностей $\omega_1$ и $\omega_2$ с линией центров $(O_1O_2)$ сразу обнаруживаем, что квадраты касательных из этой точки к к обеим окружностям одинаковы, поэтому эта точка и обладает нужным свойством.

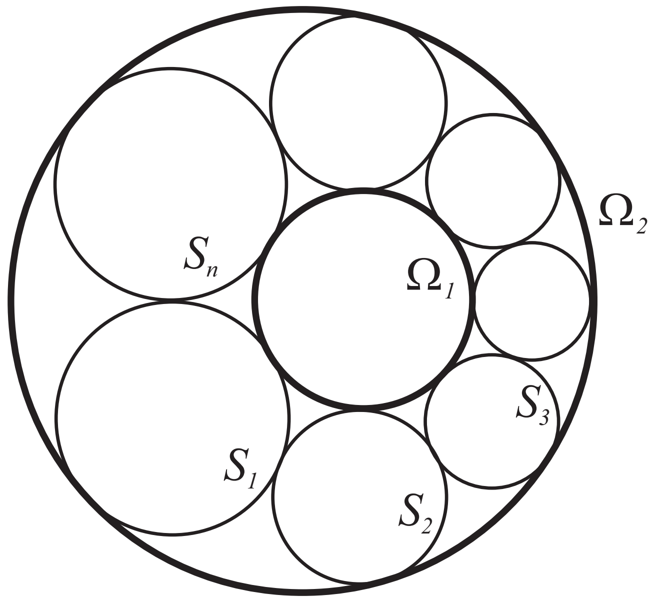


Рис. 24

**Теорема (поризм Штейнера[9]) 2.4.3.** *Пусть окружность $\Omega_1$ лежит внутри $\Omega_2$ и для них существует «уникальная» цепочка окружностей $S_1$, $S_2$, …, $S_n$ (рис. 24), каждая из которых касается двух соседних ($S_n$ касается $S_{n-1}$ и $S_1$), внешне касается $\Omega_1$ и внутренним образом касающиеся $\Omega_2$. Тогда таких цепочек бесконечно много. А именно, для любой окружности $T_1$, внешне касающейся $\Omega_1$ и внутренним образом $\Omega_2$, существует аналогичная цепочка из $n$ (количество окружностей в «уникальных» цепочках одинаково!) касающихся окружностей $T_1, T_2, \ldots, T_n$.*

**Доказательство.** Сразу заметим, что утверждение очевидно, если окружности $\Omega_1$ и $\Omega_2$ концентрические, поскольку такие «уникальные» цепочки получаются друг из друга поворотом вокруг общего центра этих окружностей.

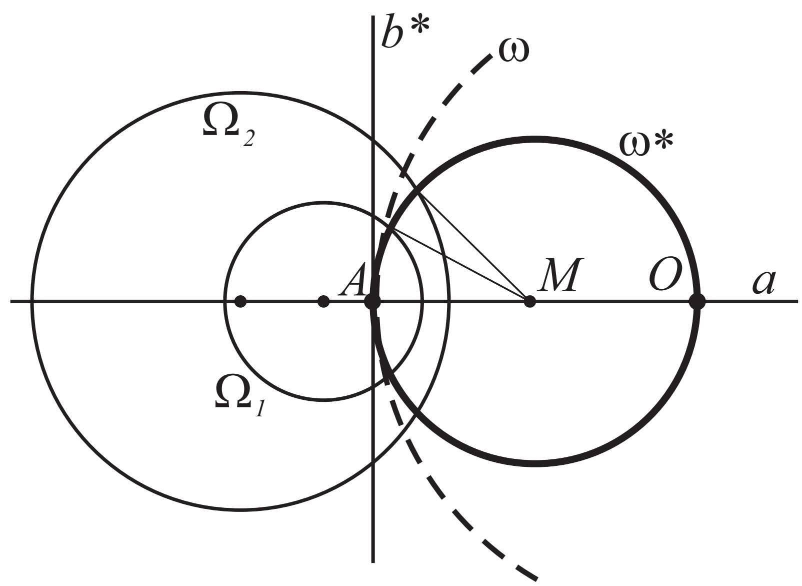


Рис. 25

Пусть $M$ — точка пересечения линии центров $a = (O_1O_2)$ окружностей $\Omega_1$, $\Omega_2$ с их радикальной осью (рис. 25). Выше мы заметили, что отрезки касательных из $M$ к $\Omega_1$ и $\Omega_2$ равны, обозначим их длину через $r$. Пусть окружность $\omega^* = \omega(M, r)$ пересекает прямую $a$ в точках $O$ и $A$. Обозначим через $R$ расстояние между точками $O$ и $A$ и рассмотрим инверсию относительно окружности $\omega = \omega(O, R)$. При этой инверсии $\Omega_1^* = inv_O^R(\Omega_1)$, $\Omega_2^* = inv_O^R(\Omega_2)$ — окружности, а $b^* = inv_O^R(\omega^*)$ — прямая, причем $b^* \perp a$. Радиус окружности $\omega^*$ подбирался так, что он равен отрезку касательной из $M$ к окружности $\Omega_1$ и поэтому радиусы этих окружностей, проведенные в точку пересечения этих окружностей, перпендикулярны друг другу, поэтому и окружности перпендикулярны. Учитывая сохранение величины угла при инверсии, получим, что $b^* \perp \Omega_1^*$. Аналогично приходим к $b^* \perp \Omega_2^*$. Ясно, что $a \perp \Omega_1^*$

[9]Якоб Штейнер(1796–1863) — швейцарский математик, основатель синтетической геометрии кривых линий и поверхностей 2-го и высших порядков.

и $a \perp \Omega_2^*$, поэтому диаметры окружностей $\Omega_1^*$ и $\Omega_2^*$ одновременно лежат на $a$ и на $b^*$. Из этого следует, что $a \cap b^*$ — общий центр этих окружностей, т.е. $\Omega_1^*$ и $\Omega_2^*$ — концентрические. Цепочка окружностей $S_1$, $S_2, \ldots$, $S_n$ перейдет в цепочку окружностей $S_1^*$, $S_2^*, \ldots$, $S_n^*$ с сохранением условия касания их между собой, кроме того, они будут касаться $\Omega_1^*$ и $\Omega_2^*$. Нам удалось свести общий случай расположения окружностей $\Omega_1$ и $\Omega_2$ к концентрическим окружностям $\Omega_1^*$ и $\Omega_2^*$ для которых уже было доказано, что существование одной «уникальной» цепочки влечет «уникальность» цепочки, начатой с произвольной окружности $T_1^*$. Повторное применение инверсии $inv_O^R$ обеспечивает «уникальность» цепочки, начинающейся с произвольной окружности $T_1$, которая касается $\Omega_1$ внешним и $\Omega_2$ — внутренним образом. Теорема доказана.

## Задачи

**1.** Где-то в пустыне находится лев. Требуется загнать его в круглую клетку (будьте осторожны с выбором своего местоположения).

**2.** Докажите, что касающиеся окружности (окружность и прямая) переходят при инверсии в касающиеся окружности или в окружность и прямую, или в пару параллельных прямых.

**3.** Что может быть образом двух пересекающихся прямой и окружности при инверсии? Перечислить все возможности.

**4.** Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ имеют ровно две общие точки. Что может быть образом этих окружностей при инверсии? Перечислить все возможности.

**5.** Точки $A'$ и $B'$ — образы точек $A$ и $B$ при инверсии относительно окружности $\omega = \omega(O, R)$. Докажите, что $A$, $B$, $A'$ и $B'$ лежат на одной окружности.

**6.** С помощью циркуля и линейки постройте образ прямой при инверсии относительно данной окружности.

**7.** С помощью циркуля и линейки постройте образ данной окружности при инверсии относительно другой данной окружности.

**8.** а) Увеличить данный отрезок в три раза, используя только циркуль. б) Разделить данный отрезок на три равные части, используя только циркуль.

**9.** Построить середину отрезка с данными концами, используя только циркуль.

**10.** Только с помощью циркуля построить окружность, в которую переходит данная прямая $AB$ при инверсии относительно данной окружности с данным центром $O$.

**11.** Только с помощью циркуля построить построить точку пересечения данной окружности и прямой, проходящей через данные точки $A$ и $B$.

**12.** Окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ имеют ровно две общие точки. Найти инверсию, при которой они отображаются друг на друга.

**13.** Пусть на плоскости дано конечное множество точек, причем прямая, проходящая через любые две точки этого множества, содержит также третью точку этого множества. Докажите, что все точки данного множества лежат на одной прямой (*теорема Сильвестра*).

**14.** На плоскости дано конечное множество точек, причем никакие три из них не лежат на одной прямой, и окружность, проходящая через любые три данные точки, содержит еще одну точку этого же множества. Докажите, что тогда все данные точки лежат на одной окружности.

**15.** С помощью циркуля и линейки постройте окружность, касающуюся двух данных окружностей и проходящую через данную точку, лежащую вне этих окружностей.

**16.** С помощью циркуля и линейки постройте окружность, касающуюся трёх данных попарно пересекающихся окружностей, проходящих через одну точку.

**17.** Даны четыре окружности, причем окружности $S_1$ и $S_3$ пересекаются с обеими окружностями $S_2$ и $S_4$. Докажите, что если точки пересечения $S_1$ с $S_2$ и $S_3$ с $S_4$ лежат на одной окружности или прямой, то и точки пересечения $S_1$ с $S_4$ и $S_2$ с $S_3$ лежат на одной окружности или прямой.

**18.** В треугольнике $ABC$ проведена биссектриса $AD$. Точки $M$ и $N$ являются проекциями вершин $B$ и $C$ на $AD$. Окружность с диаметром $MN$ пересекает $BC$ в точках $X$ и $Y$. Доказать, что $\angle BAX = \angle CAY$.

**19.** В сегмент вписываются всевозможные пары касающихся окружностей. Найти множество их точек касания.

**20.** Найти множество точек касания пар окружностей, касающихся сторон данного угла в данных точках $A$ и $B$.

**21.** Доказать, что инверсия с центром в вершине $A$ равнобедренного треугольника $ABC$ ($AB = AC$) и степенью $AB^2$ переводит основание $BC$ треугольника в дугу $BC$ описанной окружности.

**22.** Доказать, что две непересекающиеся окружности $\omega_1$ и $\omega_2$ можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

**23.** Доказать, что непересекающиеся окружность $\omega$ и прямую $l$ можно при помощи инверсии перевести в пару концентрических окружностей.

**24.** Через точку $A$ проведена прямая $l$, пересекающая окружность $S$ с центром $O$ в точках $M$ и $N$ и не проходящая через $O$. Пусть $M'$ и $N'$ — точки, симметричные $M$ и $N$ относительно $OA$, а $A'$ — точка пересечения прямых $MN'$ и $M'N$. Доказать, что $A'$ совпадает с образом точки $A$ при инверсии относительно $S$ (и, следовательно, не зависит от выбора прямой $l$).

**25.** Провести через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

**26.** Построить окружность, касающуюся данной окружности $\omega$ и перпендикулярную двум данным окружностям $\omega_1$ и $\omega_2$.

**27.** Провести через данные точки $A$ и $B$ окружность, пересекающую данную окружность $\omega$ под данным углом $\alpha$.

**28.** Провести через данную точку окружность, перпендикулярную двум данным окружностям.

**29.** Постройте окружность, касающуюся данной окружности $S$ и перпендикулярную двум данным окружностям $S_1$ и $S_2$.

**30.** Ортоцентр $H$ треугольника $ABC$ лежит на вписанной в треугольник окружности. Докажите, что три окружности с центрами $A$, $B$, $C$, проходящие через $H$, имеют общую касательную.

**31.** В сегмент вписываются всевозможные пары пересекающихся окружностей, и для каждой пары через точки их пересечения проводится прямая. Доказать, что все эти прямые проходят через одну точку.

**32.** Никакие три из четырех точек $A$, $B$, $C$, $D$ не лежат на одной прямой. Доказать, что угол между описанными окружностями треугольников $ABC$ и $ABD$ равен углу между описанными окружностями треугольников $ACD$ и $BCD$.

**33.** Через точки $A$ и $B$ проведены окружности $S_1$ и $S_2$, касающиеся окружности $S$, и окружность $S_3$, перпендикулярная $S$. Доказать, что $S_3$ образует равные углы с окружностями $S_1$ и $S_2$.

**34.** Две окружности, пересекающиеся в точке $A$, касаются окружности (или прямой) $S_1$ в точках $B_1$ и $C_1$, а окружности (или прямой) $S_2$ в точках $B_2$ и $C_2$

(причем касание в $B_2$ и $C_2$ такое же, как в $B_1$ и $C_1$). Доказать, что окружности, описанные вокруг треугольников $AB_1C_1$ и $AB_2C_2$, касаются друг друга.

**35.** Окружность $S_A$ проходит через точки $A$ и $C$, окружность $S_B$ проходит через точки $B$ и $C$; центры обеих окружностей лежать на прямой $AB$. Окружность $S$ касается окружностей $S_A$ и $S_B$, а кроме того, она касается отрезка $AB$ в точке $C_1$. Доказать, что $CC_1$ — биссектриса треугольника $ABC$.

**36.** Даны четыре окружности $S_1$, $S_2$, $S_3$, $S_4$. Пусть $S_1$ и $S_2$ пересекаются в точках $A_1$ и $A_2$, $S_2$ и $S_3$ — в точках $B_1$ и $B_2$, $S_3$ и $S_4$ — в точках $C_1$ и $C_2$, $S_4$ и $S_1$ — в точках $D_1$ и $D_2$. Докажите, что если точки $A_1$, $B_1$, $C_1$, $D_1$ лежат на одной окружности (или прямой), то и точки $A_2$, $B_2$, $C_2$, $D_2$ лежат на одной окружности (или прямой).

**37.** Окружности $S_1, S_2, \ldots, S_n$ касаются двух окружностей $R_1$ и $R_2$ и, кроме того, $S_1$ касается $S_2$ в точке $A_1$, $S_2$ касается $S_3$ в точке $A_2, \ldots, S_{n-1}$ касается $S_n$ в точке $A_{n-1}$. Доказать, что точки $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ лежат на одной окружности.

**38.** Доказать, что при инверсии относительно описанной окружности изодинамические центры треугольника переходят друг в друга. (Напомним определение изодинамических центров. Пусть $AD$ и $AE$ — биссектрисы внутреннего и внешнего углов треугольника $ABC$ и $S_a$ — окружность с диаметром $DE$, окружности $S_b$ и $S_c$ определяются аналогично. Эти три окружности имеют две общие точки $M$ и $N$, причем прямая $MN$ проходит через центр описанной около треугольника $ABC$ окружности. Точки $M$ и $N$ называются изодинамическими центрами треугольника $ABC$.)

**39.** Стороны выпуклого пятиугольника $ABCDE$ продолжили так, что образовалась пятиконечная звезда $AHBKCLDMEN$. Около треугольников–лучей звезды описали окружности. Докажите, что пять точек пересечения этих окружностей, отличных от $A$, $B$, $C$, $D$, $E$, лежат на одной окружности.

**40.** Через точку $A$ проведена прямая $l$, пересекающая окружность $S$ с центром $O$ в точках $M$ и $N$ и не проходящая через $O$. Пусть $M'$ и $N'$ — точки, симметричные $M$ и $N$ относительно прямой $OA$, а $A'$ — точка пересечения прямых $MN'$ и $M'N$. Доказать, что $A'$ совпадает с образом точки $A$ при инверсии относительно $S$ (и, следовательно, не зависит от выбора прямой $l$).

## Список литературы


1. **Жижилкин И.Д.** Инверсия. – М.: МЦНМО, 2009.
2. **Калинин А.Ю., Терешин Д.А.** Стереометрия 10. – М.: Изд.-во МФТИ, 1996.
3. **Калинин А.Ю., Терешин Д.А.** Стереометрия 11. – М.: Изд.-во МФТИ, 2001.
4. **Калинин А.Ю., Терешин Д.А.** Сборник задач по геометрии 10–11 классы. – М.: Изд.-во МЦНМО, 2011.
5. **Коксетер Г.С.М., Грейтцер С.Л.** Новые встречи с геометрией. – М.: Наука, 1978.
6. **Кокстер Г.С.М.** Введение в геометрию. – М.: Наука, 1966.
7. **Прасолов В.В.** Задачи по планиметрии. Ч. 1. – М.: Наука, 1991.
8. **Прасолов В.В.** Задачи по планиметрии. Ч. 2. – М.: Наука, 1991.
9. **Понарин Я.П.** Элементарная геометрия. Т. 1.: Планиметрия. – М.: Изд.-во МЦНМО, 2008.
10. **Понарин Я.П.** Элементарная геометрия. Т. 2.: Стереометрия. – М.: Изд.-во МЦНМО, 2008.
11. **Понарин Я.П.** Элементарная геометрия. Т. 3.: Треугольники и тетраэдры. – М.: Изд.-во МЦНМО, 2009.
12. **Яглом И.М.** Геометрические преобразования. Т. 1. – М.: Изд.-во технико-теоретической литературы, 1955.
13. **Яглом И.М.** Геометрические преобразования. Т. 2. – М.: Изд.-во технико-теоретической литературы, 1956.

# Оглавление