Мельников Ю.Б., Погадаева М.Г.

ОБУЧЕНИЕ РЕАЛИЗАЦИИ СТРАТЕГИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

calathea@freemail.ru
Уральский государственный педуниверситет
г. Екатеринбург

В статье рассматривается стратегия решения уравнений и ее реализация. Стратегия рассматривается как механизм управления деятельностью. Показаны преимущества обучения решению уравнений, основанные на обучении реализации соответствующей стратегии.

Strategy of the decision of the equations and its realization is considered in this article. The strategy is considered as the mechanism of management of activity. It is shown advantages of the education of the decision of equations, founded on learning the realization corresponding to strategies.

В теории и методике обучения математике общепринятым является понимание обучения как обучения деятельности. Отличительной чертой человеческой деятельности является целеполагание. Под целью мы понимаем модель, состоящую из эталонных моделей результата деятельности, на которой определены различные отношения: сравнение по уровню сложности и т.п., и различные функции: априорные оценки сложности и трудоемкости плана, его выполнимости и др. Например, если цель сформулирована следующим образом: найти сумму корней уравнения $x^2 - 3x + 1 = 0$, то примерами эталонных моделей результата деятельности являются: форма представления результата, конкретное значение, формула для корней квадратного уравнения, записанная для данного конкретного примера, ссылка на теорему Виета и соответсввующие выкладки и др. Эталонная модель результата деятельности может быть представлена как в корректной, так и в некорректной форме. Нередко это обусловлено неоднозначностью трактовки термина. Например, под радиусом окружности понимают и соответствующий отрезок, и его длину. Требование: «найти стороны треугольника» на самом деле предполагает в качестве эталонной модели значение *длин* этих сторон.

Одним из видов моделей деятельности является ***план*** достижения целей деятельности. Анализ уровня детализованности описания деятельности приводит к выделению двух крайних форм плана. Одним из «крайних случаев» является ситуация, когда деятельность описана достаточно подробно для того, чтобы конкретный исполнитель воспринимал пункты плана как конкретные предписания. План деятельности называется **планом-предписанием**, если его основные пункты исполнитель воспринимает как конкретные предписания, команды.

Другой «крайний случай» состоит в том, что в пункте плана отсутствуют явные указания на конкретный способ деятельности. В этом случае деятельность определяется целью, поэтому такие пункты плана содержат описание целей. Таким образом, **планом-целью** называется план, основные пункты которого исполнителем трактуются как описание целей деятельности, без указания на конкретный способ достижения этих целей. Например, рассмотрим план решения неравенства $\frac{x^2-3x+2}{x+1}<0$, состоящий из следующих пунктов: 1) найти значения переменной, в окрестности которых значение выражения в левой части неравенства может менять знак; 2) найти искомые значения неизвестной, т.е. значения, при которых исходное неравенство выполняется; 3) выбрать форму записи ответа (язык неравенств, язык теории множеств); 4) записать ответ.

Выделение этих двух типов планов позволяет выделить в процессе исследования (в частности, поиска решения задачи) этапы 1) создания плана-цели; 2) преобразования плана-цели в план-предписание; 3) анализа уровня адекватности, как самой деятельности, так и ее результата. Отметим, что анализ адекватности является неотъемлемой компонентой деятельности на каждом из рассматриваемых этапов.

В качестве механизма построения планов рассматривается стратегия [1, 2]. Стратегия определяется как система из 5 компонентов: 1) совокупность целей; 2) система отношений на множестве целей; 3) система стандартных планов и механизм разработки планов; 4) система доступных ресурсов (включая отношения между ресурсами); 5) механизм контроля адекватности. Недостаток этого определения состоит в том, что в нем не указаны явно связи между этими компонентами.

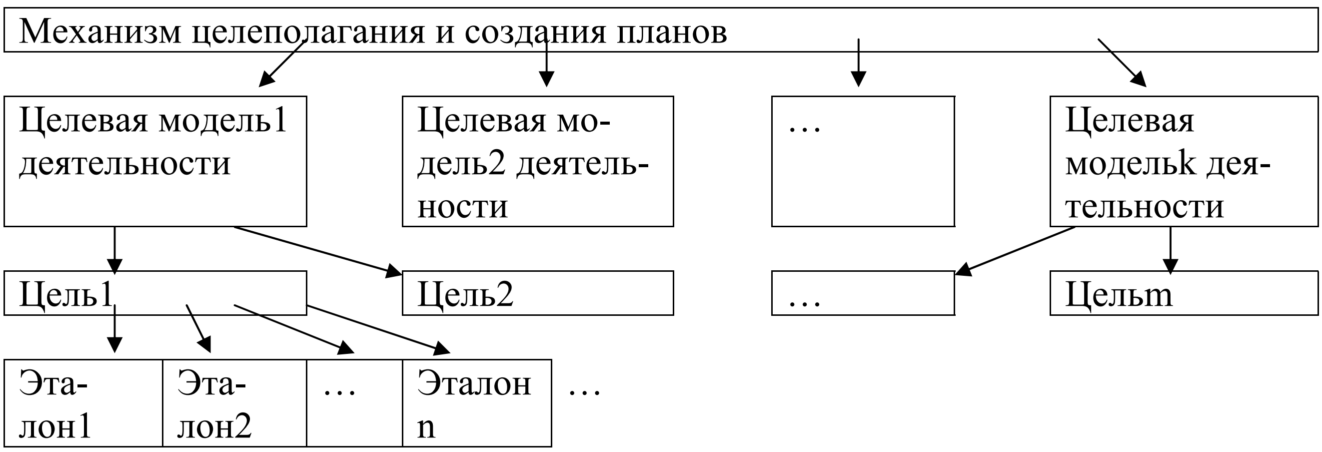

Рис. 1. Иерархическая модель стратегии.

Как мы уже отмечали выше, с точки зрения теории моделирования **цель** представляет собой совокупность эталонных моделей деятельности с различными оценками уровня корректности, сложности и трудности ее формулировки и др., а также различчные отношения. Совокупность целей образует **целевую модель деятельности**. На этой совокупности целей в целевой модели деятльности определены различные отношения (сравнение по уровню общности и др.), и функции, сопоставляющая каждой цели а) типовые планы ее достижения: б) совокупность «подчиненных», вторичных целей и др.

В случае, когда для достижения цели исполнителю не известен план ее достижения, т.е. целевая модель деятельности является **неполной**, для реализации стратегии необходимо этот план создать. Обычно создание плана сначала проходит стадию разработки плана-цели, с последующим постепенным преобразованием его в план-предписание. Таким образом, в процессе деятельности под управлением стратегии происходит постепенное обогащение стратегии: обогащение новыми целями, планами, ресурсами и др. Следовательно, стратегия не тождественна ее реализации, т.е. деятельности под управлением стратегии. Поэтому следует различать обучение **стратегии** и обучение **реализации стратегии**. Во втором случае, при обьучении реализации стратегии, допустимо, чтобы формирование компонентов стратегии проходило для обучаемого латентным образом, скрыто от него. Чаще всего оказывается скрытым механизм формирования планов. Нередко неявным для обучаемого образом осуществляется формирование ресурсов, не выделяется к какому конкретному компоненту формируемой стратегии относится изучаемый материал и др.

В качестве примера рассмотрим задачу: найти сумму корней уравнения $3x-1=-2x^2$ (корень понимается в «школьном» смысле, как действительное число). Представленная цель включает в себя такие эталонные модели результата деятельности как допусктимые формы представления результата, конкретные числовые значения и др. Поставленной цели соответсвуют различные типовые планы деятельности, например, следующий план: I) привести к квадратному уравнению; II) решить квадратное уравнение (найти корни уравнения); III) найти сумму полученных корней. В случае, если субъекту, реализующему стратегию, известна теорема Виета, он может реализовать более простой план: I) привести к квадратному уравнению; II) преобразовать полученное квадратное уравнение к виду с коэффициентом при x^2, равным единице; III) определить, существуют ли корни (точнее, являются ли корни дейстивтельными); IV) найти сумму полученных корней как коэффициент перед x, взятый с обратным знаком. Оба плана являются компонентами полной целевой модели деятельности.

В процессе создания плана достижения цели, являющейся компонентой уравнения, возникают различные иерархии целей. Например, если целью является нахождение корней уравнения, для которого обучаемому неизвестен типовой план решения, приоритетной является цель выделения частных целей, обеспечивающих достижение основной цели (построение плана-цели). В зависимости от уровня развития обучаемого и индивидуальных предпочтений устанавливаются различные иерархии на совокупности перечисленных выше целей и таких целей как «найти аналогичное уравнение», «выбрать наиболее цель, наиболее перспективную для достижения исходной цели» и др. Первоначально совокупность целей для решения уравнений состоит из различных вариантов требований задачи, например: а) найти корни уравнения (если такие имеются); б) найти функцию от корней (сумму, произведение корней, наибольший, наименьший корень); в) определить наличие корней, их количество.

Совокупность целей стратегии решения уравнений состоит а) в сведении к простейшим уравнениям $p(q(x))=C$, где p – одна из основных элементарных функций (основная цель) б) приведение к виду «произведение равно нулю», т.е. к виду $f(x)g(x)=0$; в) «значение функции является экстремальным», т.е. к виду $f(x) = C$, где C есть экстремальное значение функции f (мы не рассматриваем метод подбора). Конкретизация этих целей осуществляется с помощью планов, содержащих такие пункты как «свернуть выражение, чтобы получить уравнение известного вида», «определить тип уравнения и применить известный субъекту специфический план решения».

Механизм целеполагания и построения планов включает в себя два подхода к созданию планов: процедурный и функциональный.

При **процедурном подходе** процесс решения воспринимается как последовательное применение «разрешённых» преобразований («перенести… в левую часть равенства» и т.п.) и формул, в результате которых в одной части уравнения останется неизвестная, а в другой – числовое выражение. Использование процедурного подхода предполагает запоминание большого числа правил, включающих в себя описание условий применимости этих преобразований (нельзя возводить в квадрат обе части неравенства, нельзя извлекать корень из обеих частей неравенства и др.).

Применение процедурного подхода возможно лишь в случае, когда для рассматриваемого уравнения или неравенства имеются типовые преобразования. Но, например, для уравнения

$$\arcsin x + \arcsin \sqrt{3}x = \frac{\pi}{2} \tag{1}$$

учащимся, как правило, не известны соответствующие преобразования. Перспективным нам представляется **функциональный подход**, в рамках которого каждое преобразование формулы $L(x)=R(x)$, отличное от тождественного преобразования выражений $L(x)$ и $R(x)$, рассматривается как применение некоторой функции к левой и правой частям уравнения, т.е. как переход к равенству $p(L(x))=p(R(x))$. Корректность этого подхода обусловлена определением функции как однозначного отображения, что на «языке равенств» можно представить формулой («по умолчанию» α и β - элементы из области определения функции p)

$$\alpha=\beta \Rightarrow p(\alpha)=p(\beta). \tag{2}$$

Например, процесс решения уравнения (1) можно представить в виде следующей цепочки преобразований: применяя к левой и правой частям уравнения функцию $p_1(t) = t - \arcsin\sqrt{3}x$, получаем уравнение $p_1\left(\arcsin x + \arcsin\sqrt{3}x\right) = p_1\left(\frac{\pi}{2}\right)$, т.е. $\arcsin x = \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{3}x$, равносильное исходному. Применим к обеим частям уравнения функцию «синус», обратную к функции арксинус:

$$\sin(\arcsin x) = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{3}x\right) \tag{3}$$

Функция sin не является взаимно однозначной, поэтому полученное уравнение не равносильно исходному. Следовательно, либо после получения корней потребуется провести их отбор, либо следует дополнить полученное уравнение (3) условием, которое бы обеспечило его равносильность исходному уравнению (1). Примером такого условия является система неравенств $-\frac{\pi}{2} \le \frac{\pi}{2} - \arcsin\sqrt{3}x \le \frac{\pi}{2}$.

Используя тождественные преобразования, уравнение (3) можно привести к виду $x = \cos\left(\arcsin\sqrt{3}x\right)$. Далее применив основное тригонометрическое тождество (в виде $\cos(x) = \pm\sqrt{1-\sin^2(x)}$) можно записать: $x = \pm\sqrt{1-\sin^2(\arcsin(\sqrt{3}x))}$. Преобразовав подкоренное выражение и учитывая, что область значений $E(\arcsin) = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, а «косинус» на этом промежутке неотрицательный, получаем: $x = \sqrt{1-\left(\sqrt{3}x\right)^2}$. Теперь напрашивается к обеим частям равенства применить функцию, обратную к функции, задаваемой выражением $\sqrt{t}$, т.е. функцию $p_2(t)=t^2$. Последняя функция не является взаимно однозначной, поэтому могут «появиться посторонние корни», т.е. множество корней уравнения $x = \sqrt{1-\left(\sqrt{3}x\right)^2}$ может оказаться собственным подмножеством множества корней уравнения $x^2 = 1-3x^2$. Решая полученное квадратное уравнение, получаем корни $x = \frac{1}{2}$ и $x = -\frac{1}{2}$. Некоторые из функций, использованных для получения вторичных уравнений, не являлись взаимно однозначными Поэтому потребуется отбор корней:

при $x = \frac{1}{2}$ получаем $\arcsin\frac{1}{2} + \arcsin\sqrt{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\pi}{2}$

при $x = -\frac{1}{2}$ получаем $\arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) + \arcsin\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2}$.

Таким образом, решением уравнения является $x = \frac{1}{2}$.

Обучение решению уравнений, основанное на обучении реализации соответствующей стратегии, с одной стороны, обеспечить формирование умений построения моделей. *Во-первых*, при функциональном подходе мы алгебраические выражения воспринимаем как представления (модели) соответствующих функций. Например, многочлены мы воспринимаем не как выражения, а как функции.

Во-вторых, сам процесс решения мы делим на составные части (причем делаем это по-разному): при процедурном подходе это расчленение на «разрешенные преобразования» и «необходимые атрибуты» (например, условия применимости), а также на формулы, равносильные исходному равенству или неравенству. При функциональном подходе мы расчленяем алгебраические выражения таким образом, чтобы выделить элементарные функции, после чего представляем это алгебраическое выражение в виде суперпозиции этих элементарных функций.

В-третьих, результат преобразований (получается ли равносильное уравнение, будут ли «посторонние корни», «можно ли» выполнять преобразование) определяется не «набором заклинаний», а свойствами функций: является ли функция взаимно однозначной, все ли значения левой и правой частей исходного уравнения включаются в область определния функции p, с помощью которой осуществляется преобразование, т.е. переход от равенства $L(x)=R(x)$, отличное от тождественного преобразования выражений $L(x)$ и $R(x)$ к равенству $p(L(x))=p(R(x))$.

С другой стороны, ориентация на обучение стратегии решения уравнений позволяет существенно изменить характер процесса обучения, в особенности характер использования информационно-обучающей среды. Обычно обучение решению уравнений сводится к рассмотрению большого числа типов уравнений и частных случаев. В этой ситуации поиск решения задачи ориентирован на планы-предписания, что приводит к перегрузке памяти в ущерб развитию конструкторских и исследовательских умений. Создание компьютеризованных систем, ориентированных на обучение использованию стратегии, является актуальной проблемой для дидактов и специалистов в компьютерных технологиях.

1. Мельников Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография.- Екатеринбург: Уральское издательство, 2004, 384 с.
2. Мельников Ю.Б., Мельникова Н.В., Мельникова Ю.Ю. Стратегия решения уравнений и неравенств// Проблемы подготовки учителя математики к преподаванию в профильных классах: Материалы XXV Всерос. семинара преподавателей математики университетов и педагогических вузов, 20-22 сентября 2006 г, Киров; М.: ВятГГУ, МГПУ, 2006, С. 250-252.%.---300 с.