

**Мельников Ю.Б., Гундерин А.В., Вольхина Д.В.**

**ПОСТРОЕНИЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ЧЕРТЕЖА КАК ИЛЛЮСТРАТИВНОЙ  
ГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ**

*melnikov@k66.ru*

*Уральский государственный педуниверситет  
г. Екатеринбург*

*В работе рассматриваются теоретические аспекты проблемы обучения построению геометрических чертежей. Работа базируется на теории моделирования и является одним из шагов по созданию авторской методической системы обучения геометрии с применением компьютерных технологий, в особенности в условиях минимального личного общения обучаемого с преподавателем.*

*In this work there are considered theoretical aspects of the problem of the education to building the geometric drawings. The work is based on the theory of modeling and is one of the steps of making the author's methodical system for the education to geometry with using computer technology, especially in condition of the minimum personal contact trained with teacher.*

Объяснительно-иллюстративный метод обучения является интуитивно наиболее очевидным, естественным как для обучающего, так и для обучаемого. По-видимому, подавляющее большинство людей, сталкиваясь с задачей обучения чему-либо, в первую очередь прибегают именно к этому методу. Как правило, обучаемый хотел бы получить информацию в уже готовом виде, требующем минимальных усилий для ее восприятия и усвоения.

Деятельностный подход к обучению проявляется, в частности, в переносе акцента в обучении с передачи обучаемому готовой информации на формирование у него механизмов самостоятельного ее поиска, преобразования, генерирования, оценивания полученной информации с точки зрения ее адекватности, полезности, перспективности ее использования. С дидактической точки зрения хороший учебник – это не столько учебник, в котором информация изложена просто, «доходчиво», понятно, сколько учебник, который учит думать, работать с информацией, обеспечивает целенаправленное управление процессом обучения [1, 6].

При переходе к обучению с широким использованием компьютерной техники и минимальным личным контактом с преподавателем (например, при дистантном обучении), возникают трудности с организацией определенных видов деятельности и, в частности, контролем этой деятельности и ее результатов. В частности, при использовании компьютерной информационно-обучающей среды возникают сложности с обучением построению геометрических чертежей и контролем сформированности соответствующих умений. Ситуация осложняется тем, что выполнение чертежа при решении геометрической задачи не всегда предусматривает соблюдение размеров элементов чертежа, соответствующих условию задачи. Более того, адекватность чертежа не имеет прямой связи с адекватностью основанного на нем решения. Как говорил Пойа «Гео-

метрия – это искусство правильно рассуждать по неправильным чертежам». Иногда по одному и тому же неправильному (неадекватному) чертежу можно получить как верное, так и неверное решение. Приведем пример.

**Задача 1.** В равнобедренной трапеции  $ABCD$  с основаниями  $AB = 17$  см,  $CD = 5$  см и боковой стороной  $AD = BC = 10$  см через вершину  $D$  проведена прямая, делящая диагональ  $AC$  пополам и пересекающая  $AB$  в точке  $M$ . Найдите отношение длин отрезков  $NM$  и  $MB$ .

При разборе задачи учащимися был выполнен чертёж, представленный на рис. 1

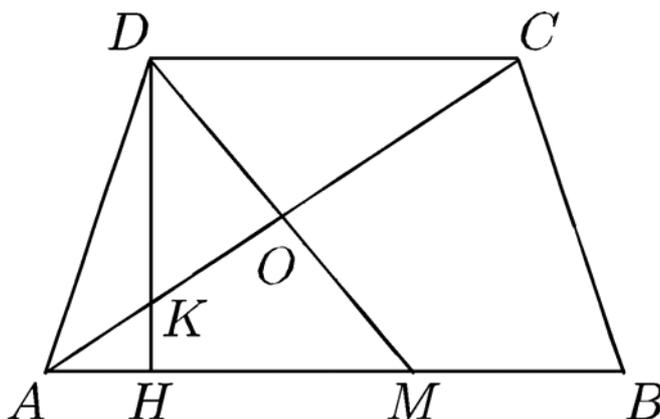


Рис. 1.

По этому чертежу, в принципе, можно получить верное решение. Но один из вариантов решения был основан на формуле  $MB = HB - HM$ , которая привела к неверному ответу. Действительно, нетрудно вычислить, что  $AM = 5$  см,  $AH = 6$  см. Из этого следует, что использованная для решения геометрическая модель, построенная по чертежу на рис. 1, является неадекватной. Таким образом, проведённая работа позволяет получить следующий чертёж, представленный на рис. 2, откуда  $MB = MH + BM$ .

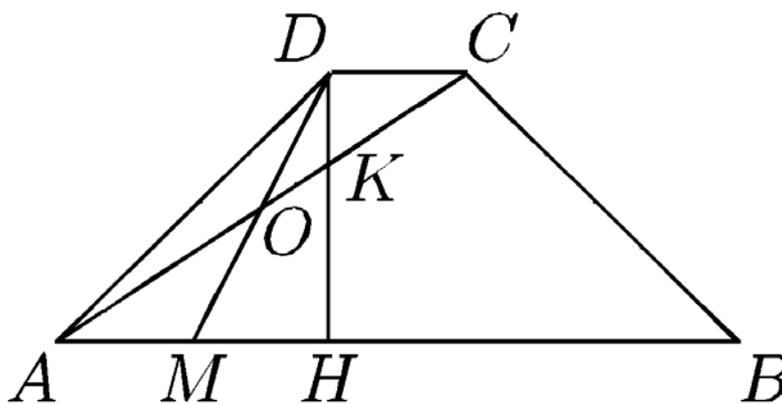


Рис. 2

Таким образом, организация обучения построению чертежей и соответствующего контроля, в особенности при использовании компьютеризованных обучающих систем, требует глубокой научной проработки, формализации процесса построения чертежа, анализа адекватности чертежа и решения задачи.

Мы предлагаем в качестве одного из направлений исследований в этой области использовать теорию моделирования, основанную на формально-конструктивном определении модели [2, 3, 4].

С точки зрения теории моделирования геометрический чертеж сам по себе не является геометрической моделью [2, 5]. Геометрическая модель состоит из тех геометрических фигур, которые мы рассматриваем в процессе построения чертежа и поиска решения задачи. Совокупность этих фигур называется **носителем геометрической модели**. В рамках геометрической модели рассматриваются отношения между этими фигурами и функции, значения всех аргументов которых содержатся в носителе геометрической модели. Нам представляется перспективным выделение следующих типов геометрических моделей: модели *этапа построения чертежа*, модели *этапа поиска решения задачи*, модели *этапа контроля адекватности*. Геометрическая модель этапа построения чертежа является иллюстративной моделью. Специфику иллюстративной геометрической модели проиллюстрируем примером.

**Задача 2.** Найти длину биссектрисы  $BM$  прямоугольного треугольника  $ABC$ , проведенную из прямого угла, если катеты этого треугольника равны 3 и 4.

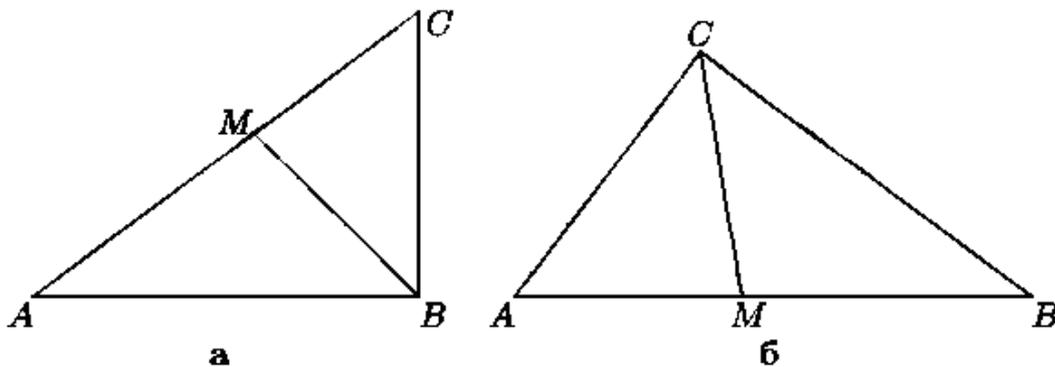


Рис. 3.

На рис. 3 представлены два чертежа к задаче 2. В геометрической модели по рис. 3а биссектриса  $BM$  визуально напоминает высоту в большей степени, чем на рис. 3б. Более высокая вероятность ошибки при создании субъективной геометрической модели (т.е. геометрической модели, созданной субъектом), созданную по рис. 3а, можно интерпретировать как меньшую адекватность соответствующей объективной геометрической модели.

Отметим, что геометрические модели, рассматриваемые на этапе построения чертежа, могут существенно отличаться от моделей, применяемых в процессе поиска решения геометрической задачи.

**Задача 3.** Найти длину стороны  $AB$  треугольника  $ABC$ , если  $BC=60$  и длины высот  $AK$  и  $CH$  равны, соответственно, 60 и 48.

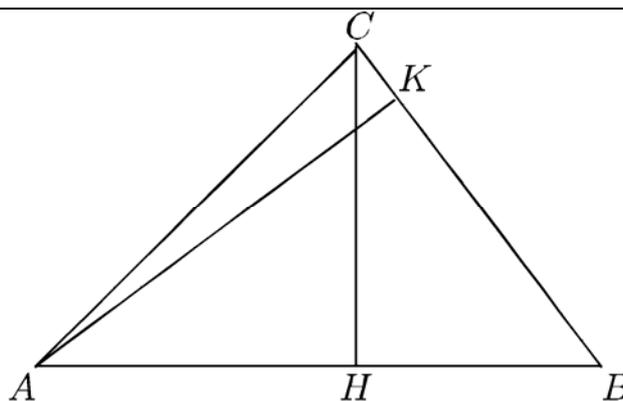


Рис. 4.

На этапе построения чертежа носитель геометрической модели состоит из треугольника  $ABC$  и отрезков  $AB$ ,  $BC$ ,  $AK$ ,  $CH$ . В этой геометрической модели рассматриваются также отношения «быть высотой треугольника, опущенной на основание...» и значения длин отрезков. Эта модель может быть использована и для поиска решения, в ситуации, когда уравнение составляется с помощью двукратного вычисления удвоенной площади треугольника  $ABC$ :  $60 \cdot 60 = 48 \cdot AB$ . Но можно предложить решение, основанное на существенно иной геометрической модели, носитель которой составляют отрезки  $AB$ ,  $BC$ ,  $AK$ ,  $CH$ , треугольники  $CHB$ ,  $AKB$  и углы  $ABC$ ,  $AKB$ ,  $CHB$ . Треугольники  $CHB$  и  $AKB$  подобны, откуда  $\frac{AB}{BC} = \frac{AK}{CH}$ . Последняя модель существенно отличается от иллюстративной геометрической модели, созданной на этапе построения чертеж. С одной стороны, в носитель последней модели не попадает треугольник  $ABC$ , не рассматривается отношение «быть высотой треугольника» (использовано следствие из него). С другой стороны, в носитель включены прямоугольные треугольники и три угла: два прямых угла и один угол, общий для треугольников  $CHB$ ,  $AKB$ . Кроме того, геометрическая модель обогащена отношением подобия этих треугольников.

В теории моделирования [2, 3, 4] оценивание адекватности модели осуществляется с помощью построения **модели адекватности**. Носитель этой модели состоит из всех моделей, рассматриваемых в конкретном исследовании. **Характеристики адекватности** – это функции, у которых все значения аргументов принадлежат носителю модели адекватности, при этом оценка адекватности производится сравнением оцениваемой модели с эталонной моделью. Отметим, что термин «эталонная модель» не означает «качественная», «лучшая». В случае, когда эталонная модель представлена набором требований к форме представления моделируемого объекта, характеристика адекватности называется **характеристикой корректности**. Если же в эталонной модели представлены способы нахождения значения величин, которые отождествляются с соответствующими величинами в оцениваемой модели, то в этом случае характеристики адекватности называются **характеристиками достоверности**. Если эталонная модель изоморфна моделируемому объекту, то мы называем ее **глобальной эталонной моделью**. Если эталонная модель изоморфно вкладывается

в моделируемый объект, то такая эталонная модель называется **локальной**. Те модели исследуемого или создаваемого объекта, которые субъект строит на этапе планирования деятельности, мы называем **априорными моделями**. Примерами априорных моделей, используемых при построении чертежа к геометрической задаче являются наброски, эскизы, «черновики чертежа». В процессе выполнения плана априорные модели могут быть подвергнуты переработке, переделке, могут быть созданы существенно иные модели. Модели, используемые и создаваемые на этапе реализации плана, именуется **актуальными** моделями. Например, при построении чертежа к геометрической задаче, актуальными моделями являются различные версии чертежа и его фрагментов (например, выполненных в увеличенном или уменьшенном масштабе), которые субъект использует в процессе поиска решения, а также вспомогательные чертежи, например, сечения тела плоскостью, развертки и др. После получения результатов деятельности может возникнуть необходимость в оценке и переосмыслении этих результатов. Модели исследуемого или созданного объекта, применяемые и создаваемые на этом этапе, называются **апостериорными моделями**. Примерами апостериорных моделей, применяемых в процессе построения и анализа чертежа, могут быть вспомогательные чертежи, выполняемые с целью оценивания полноты и достоверности полученного ответа. На апостериорных чертежах рассматриваются различные альтернативные ситуации расположения геометрических объектов, варианты отношений между ними, их размеров и формы.

Рассмотрим ситуацию, когда эталонного чертежа нет и задача не сводится к «перерисовыванию» чертежа в тетрадь, на доску и др. Как первое приближение к системе постулатов, предназначенных для формализации процесса построения чертежа, рассмотрим следующие положения.

**Чертеж как иллюстративная модель:** Построение чертежа есть процесс построения геометрической модели, иллюстрирующей условие и требование задачи (а не поиск решения, вообще говоря).

**Адекватность** иллюстративных геометрических моделей, применяемых при построении чертежа, оценивается сравнением моделей по уровню наглядности, трудоемкости выполнения и устойчивости к погрешностям чертежа. **Оценка корректности** таких геометрических моделей осуществляется сравнением с эталонной моделью, представленной формализованными требованиями к чертежу. **Оценка достоверности** (в частности, наглядности) геометрических моделей осуществляется сравнением с априорной моделью чертежа, приоритетными эталонными моделями являются локальные и глобальные модели, отражающие отношения между геометрическими фигурами и их величины.

**Обеспечение адекватности за счет аппроксимации:** при выявлении недостаточной адекватности геометрической модели повышение ее адекватности осуществляется с помощью последовательных преобразований, сводящихся либо к корректированию геометрической модели по прежнему чертежу, либо к созданию очередной версии чертежа или его фрагмента.

Таким образом, проблема обучения построению геометрических чертежей тесно связана с обучением построению иллюстративных геометрических

моделей. Нам представляется перспективным выделение трех типов геометрических моделей: иллюстративных (этап построения чертежа), геометрических моделей, ориентированных на поиск решения задачи (рассмотрены в [2]) и геометрических моделей, ориентированных на контроль адекватности полученных решений. Предложенные нами положения, связанные с построением иллюстративных геометрических моделей, следует дополнить и конкретизировать с целью, с одной стороны, получения достаточно полных рекомендаций по построению чертежа и, с другой стороны, создания компьютеризованных технологий обучения решению геометрических задач, включая построение геометрических чертежей при минимизации личного общения обучаемого с преподавателем.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Беспалько В.П. Теория учебника: Дидактический аспект. М.: Педагогика, 1988, 168 с.
2. Мельников Ю.Б. Математическое моделирование: структура, алгебра моделей, обучение построению математических моделей: Монография.- Екатеринбург: Уральское издательство, 2004, 384 с.
3. Мельников Б.Н., Мельников Ю.Б. Геотехногенные структуры: теория и практика: Монография.- Екатеринбург. Уральское изд-во, 2004.- 556 с.
4. Мельников Ю.Б. Геометрический чертеж как представление геометрической модели/ Вестник Томского государственного педагогического университета. Серия: Педагогика (теория и методика обучения), № 3, 2006, С.8-11.
5. Мельников Ю.Б. Стратегия решения геометрических задач/ Ю.Б. Мельников, Н.В. Мельникова/ Сб. трудов Всерос. науч.-практ. конф. «Современные проблемы математического и физического образования в школе и вузе», посв. 450-летию присоединения Башкортостана к России, г. Стерлитамак, 9-10 октября 2006 г./ Отв. ред. С.С.Салаватова.- Стерлитамак: Старлитамак. гос. пед. академия, 2006.- С. 50-55.
6. Хуторской А.В. Место учебника в дидактической системе // Педагогика. - 2005. - № 4, с. 10-18.