

О ФИГУРАХ ПЛУТОНА И ХАРОНА

К. В. Холшевников^{1,2}, М. А. Боруха¹, Б. Б. Эскин¹

¹Санкт-Петербургский государственный университет,

²Институт прикладной астрономии РАН

С борта космического аппарата NASA “New Horizons” получено много ценной информации о физических характеристиках системы Плутона. В частности, уточнены размеры главных тел. Возлагались надежды на определение полярного и экваториального сжатия фигур Плутона и Харона и второй гармоники их гравитационного потенциала. Однако точности приборов не хватило для определения этих величин: погрешности измерений их превосходили. Здесь мы даем теоретические оценки сжатия, второй и четвертой зональной гармоники в предположении, что фигуры Плутона и Харона находятся в гидростатическом равновесии и не подвержены действию внешних сил. Оказалось, что при всех правдоподобных предположениях о внутреннем строении тел указанные величины имеют порядок 10^{-4} . Для успешного определения сжатия и несферичности гравитационного поля тел приборы должны иметь соответствующую точность. В дальнейшем мы предполагаем учесть взаимодействие Плутона и Харона и действие Солнца и других небесных тел. Скорее всего, порядок рассмотренных величин не изменится.

ON THE FIGURES OF PLUTO AND CHARON

K. V. Kholshevnikov^{1,2}, M. A. Borukha¹, B. B. Eskin¹

¹*Saint-Petersburg State University*, ²*Institute of Applied Astronomy
Russian Academy of Science*

Using NASA's spacecraft *New Horizons*, a lot of valuable information on the physical characteristics of the Pluto system was received. In particular: the sizes of the main bodies. There were hopes for determining the polar and equatorial oblateness of the figures of Pluto and Charon, and the second harmonic of their gravitational potential. However, the accuracy of the devices was not sufficient to determine these values: the errors of the measurements exceeded them. In this paper we show theoretical estimates of the oblateness, and the second and the fourth zonal harmonics under the assumption that the figures of Pluto and Charon are in hydrostatic equilibrium and are not subject to the action of external forces. It turned out that with all plausible assumptions about the internal structure of bodies, these quantities are of the order of 10^{-4} . For the successful assignment of oblateness and nonsphericity of the gravitational field of bodies the devices must have the appropriate accuracy. In the future, we will take into account the interaction of Pluto and Charon, and the influence of the Sun and other celestial bodies. Most likely, the order of the quantities considered will not change.

Введение

Всплеск интереса к системе Плутона вызван результатами, полученными в 2015 г. космическим аппаратом NASA “New Horizons”. Предлагаемая статья посвящена геометрическим и динамическим характеристикам системы и ее гравитационного поля. Проведенные из космоса измерения уточнили наши знания о размерах тел системы, но не выявили несферичности ни их фигур, ни их гравитационных полей. Мы дадим теоретические оценки этих величин, предполагая Плутон и Харон фигурами гидростатического равновесия, синхронно и твердотельно вращающимися с постоянной угловой скоростью ω вокруг полярной оси.

Мы пока пренебрегаем взаимовлиянием Плутона и Харона, а также действием других небесных тел. Учитываются только силы гравитации, давления и центробежные. Скорость вращения мала, поэтому по теории Ляпунова оба тела являются телами вращения [1, 2, §5.3].

В дальнейшем предполагается учесть приливное взаимодействие Плутона и Харона и влияние других небесных тел, прежде всего Солнца.

Характеристики Плутона и Харона

Приборы аппарата “New Horizons” получили огромный массив данных о Плутоне, Хароне и мелких спутниках планеты [3–5]. В результате, в частности, удалось уточнить их размеры и форму. Однако при попытке описать фигуры Плутона и Харона эллипсоидами оказалось, что ошибки разностей полуосей превосходят их значения. Таким образом, ни полярного сжатия, ни вытянутости фигур Плутона и Харона друг к другу из наблюдений не выявлено. Определены лишь радиусы a сфер, аппроксимирующих поверхности тел [3]. С высокой точностью определен общий период вращения и обращения тел [6]. Что касается масс главных тел системы, то пока наиболее точными являются оценки, полученные по длительным наблюдениям космического телескопа Хаббл [6].

В табл. 1 мы приводим a , $\mathcal{G}m$ (произведение постоянной тяготения на массу) вместе с их относительными погрешностями δ_1 , δ_2 . Значения a , $\mathcal{G}m$ взяты из [3]. Там же указаны абсолютные погрешности этих величин, пересчитанные нами в относительные. Все значения на протяжении статьи даны в системе СИ.

Таблица 1. Параметры фигур равновесия системы Плутон—Харон

Параметр	Плутон	Харон
$10^{-6}a$	$1.1883(1 \pm 0.00135)$	$0.6060(1 \pm 0.00165)$
$10^{-11}\mathcal{G}m$	$8.696(1 \pm 0.00207)$	$1.059(1 \pm 0.00944)$
$10^5\omega$	1.1385592	
10^4q	$2.5013(1 \pm 0.00262)$	$2.7247(1 \pm 0.00616)$

Для простоты считаем, что размер (обозначенный в таблице как a) является случайной величиной ξ_1 , равномерно распределенной в промежутке $a(1 - \delta_1) \leq \xi_1 \leq a(1 + \delta_1)$. Аналогично взвешенная масса равномерно распределена в промежутке $\mathcal{G}m(1 - \delta_2) \leq \xi_2 \leq \mathcal{G}m(1 + \delta_2)$. Общий период вращения тел известен с точностью, на 3–4 порядка превышающей точность определения размеров и масс. Определяемую периодом угловую скорость ω считаем поэтому безошибочной.

Нам понадобятся математические ожидания μ_s случайных величин $\eta_1 = \xi_1^3$, $\eta_2 = \xi_1^6$, $\eta_3 = \xi_2^{-1}$, $\eta_4 = \xi_2^{-2}$. Поскольку плотности вероятности величин ξ_1 и ξ_2 постоянны, соответствующие интегралы элементарны:

$$\begin{aligned}\mu_1 &= \frac{1}{8a\delta_1} [(a + a\delta_1)^4 - (a - a\delta_1)^4] = a^3(1 + \delta_1^2), \\ \mu_2 &= \frac{1}{14a\delta_1} [(a + a\delta_1)^7 - (a - a\delta_1)^7] = a^6 \left(1 + 5\delta_1^2 + 3\delta_1^4 + \frac{1}{7}\delta_1^6 \right), \\ \mu_3 &= \frac{1}{2\mathcal{G}m\delta_2} \ln \frac{1 + \delta_2}{1 - \delta_2} = \frac{1}{\mathcal{G}m} \left(1 + \frac{\delta_2^2}{3} + \frac{\delta_2^4}{5} + \dots \right), \\ \mu_4 &= \frac{1}{(\mathcal{G}m)^2(1 - \delta_2^2)} = \frac{1}{(\mathcal{G}m)^2} (1 + \delta_2^2 + \delta_2^4 + \dots). \end{aligned} \quad (1)$$

Определяющую роль в теории фигур равновесия играет параметр Клеро

$$q = \frac{\omega^2 \bar{a}^3}{\mathcal{G}m} = \frac{3\omega^2}{4\pi\mathcal{G}\bar{\rho}}. \quad (2)$$

Здесь \bar{a} — радиус равновеликой сферы, $\bar{\rho}$ — средняя плотность (отношение массы к объему). Согласно вышесказанному можно считать пока $\bar{a} = a$. Погрешности случайной величины $\eta = \omega^2 \eta_1 \eta_3$, описывающей распределение параметра Клеро, определяются погрешностями величин ξ_1 и ξ_2 . Последние считаем независимыми, так что математическое ожидание q и взвешенная дисперсия δ^2 величины η даются формулами

$$q = \omega^2 \mu_1 \mu_3, \quad \delta^2 = \frac{\mu_2 \mu_4 - \mu_1^2 \mu_3^2}{\mu_1^2 \mu_3^2}. \quad (3)$$

Подставляя (1) в (3), найдем

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{\mathcal{G}m} \left(1 + \delta_1^2 + \frac{1}{3}\delta_2^2 + \frac{1}{3}\delta_1^2 \delta_2^2 + \frac{1}{5}\delta_2^4 + \dots \right), \quad (4)$$

$$\delta^2 = \left(3\delta_1^2 + \frac{1}{3}\delta_2^2 \right) + \left(-4\delta_1^4 + \delta_1^2 \delta_2^2 + \frac{4}{15}\delta_2^4 \right) + \dots \quad (5)$$

Значения q согласно (4) и δ согласно (5) приведены в последней строке табл. 1.

Замечание 1. Величины δ_s определяют относительные границы ξ_s ; их относительные среднеквадратичные отклонения равны $\delta_s/\sqrt{3}$.

Величина же δ представляет собой относительное среднеквадратичное уклонение η .

Замечание 2. Величины δ_s и δ имеет смысл приводить максимум с двумя значащими цифрами. Мы привели в этой и следующих таблицах три цифры только для того, чтобы не потерять точность при дальнейших вычислениях.

В следующих параграфах мы получим теоретические двусторонние оценки сжатия Плутона и Харона, а также коэффициентов второй и четвертой зональных гармоник ряда Лапласа для их гравитационного потенциала.

Уровенный эллипсоид

Основное принятое в этом разделе допущение: каждое из рассматриваемых тел \mathcal{T} ограничено слабо сжатым уровенным эллипсоидом вращения \mathcal{S} .

Обозначим через a , c , $\varepsilon = \sqrt{a^2 - c^2}/a$, $\alpha = (a - c)/a$ экваториальную и полярную полуоси, эксцентриситет меридионального сечения и сжатие \mathcal{S} соответственно. Последние величины связаны соотношениями

$$\alpha = 1 - \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{\varepsilon^2}{1 + \sqrt{1 - \varepsilon^2}} = \frac{\varepsilon^2}{2} \left(1 + \frac{1}{4}\varepsilon^2 + \dots \right),$$

$$\varepsilon^2 = 2\alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right). \quad (6)$$

Гравитационный потенциал V тела \mathcal{T} содержит лишь зональные гармоники четного порядка [7, 8]:

$$V = \frac{\mathcal{G}m}{r} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n I_{2n} \left(\frac{a}{r} \right)^{2n} P_{2n}(\cos \theta). \quad (7)$$

Здесь и ниже (r, θ, λ) — сферические координаты с началом в центре O тела \mathcal{T} , P_k — многочлены Лежандра со стандартной нормировкой $P_k(1) = 1$, I_k — коэффициенты Стокса (гармонические коэффициенты).

Для эллипсоида радиус равновеликой сферы определяется условием

$$\bar{a}^3 = a^2 c = a^3 \sqrt{1 - \varepsilon^2},$$

так что (2) принимает вид

$$q = \frac{\omega^2 a^3}{\mathcal{G}m} \sqrt{1 - \varepsilon^2} = \frac{\omega^2 a^3}{\mathcal{G}m} (1 - \alpha). \quad (8)$$

Согласно [8] постоянные Стокса уровенного эллипсоида однозначно определяются двумя независимыми параметрами ε и q :

$$I_{2n} = \frac{3 + 2An}{(2n + 1)(2n + 3)} \varepsilon^{2n}. \quad (9)$$

Здесь

$$\begin{aligned} A(q, \varepsilon) &= 1 - \frac{5q}{2\varepsilon^2 B(\varepsilon)}; \\ B(\varepsilon) &= \frac{15}{4\varepsilon^5} \left[(3 - 2\varepsilon^2) \sqrt{1 - \varepsilon^2} \arcsin \varepsilon - 3\varepsilon(1 - \varepsilon^2) \right] = \\ &= \frac{15}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(2-k)(2k)!!}{(2k+5)!!} \varepsilon^{2k} = 1 + \frac{1}{7}\varepsilon^2 - \frac{8}{231}\varepsilon^6 - \dots = \\ &= \left(1 - \frac{1}{7}\varepsilon^2 + \frac{1}{49}\varepsilon^4 + \dots \right)^{-1}. \end{aligned}$$

Выпишем первые ненулевые постоянные Стокса:

$$I_0 = 1, \quad I_2 = \frac{3 + 2A}{15} \varepsilon^2, \quad I_4 = \frac{3 + 4A}{35} \varepsilon^4.$$

Для обоих тел $q \sim 10^{-4}$, тогда как ε или α измерить не удалось. Есть лишь оценка $\alpha < 6 \cdot 10^{-3}$ для Плутона и $\alpha < 5 \cdot 10^{-3}$ для Харона [3]. Эти оценки грубы, хотя качественно и согласуются с теорией фигур равновесия, где принято $\alpha \sim \varepsilon^2 \sim q$. Поэтому более чем достаточно учесть лишь малые члены порядка α^2 , пренебрегая членами порядка α^3 и выше. Пользуясь рядом

$$A\varepsilon^2 = \varepsilon^2 - \frac{5}{2}q + \frac{5}{14}q\varepsilon^2 + \dots,$$

получим

$$I_0 = 1, \quad I_2 = \frac{1}{3}\varepsilon^2 - \frac{1}{21}q\varepsilon^2 + \dots, \quad I_4 = \frac{1}{5}\varepsilon^4 - \frac{2}{7}q\varepsilon^2 + \dots \quad (10)$$

Остальные I_{2n} имеют порядок не ниже α^3 .

Случай $A = 0$

Если предположить однородность \mathcal{T} , то мы приходим к эллипсоиду Маклорена, для которого [1, 9]

$$q = q^*(\varepsilon) := \frac{2}{5}\varepsilon^2 \left(1 + \frac{1}{7}\varepsilon^2 + \dots\right) = \frac{4}{5}\alpha \left(1 - \frac{3}{14}\alpha + \dots\right). \quad (11)$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 = \varepsilon^{*2}(q) &:= \frac{5}{2}q \left(1 - \frac{5}{14}q + \dots\right), \\ \alpha = \alpha^*(q) &:= \frac{5}{4}q \left(1 + \frac{15}{56}q + \dots\right). \end{aligned} \quad (12)$$

В [8] показано, что для эллипсоидов Маклорена $A = 0$ точно.

Итак, если тела однородны, то при данном q эксцентриситет и сжатие даются формулами (12), а первые коэффициенты Стокса равны

$$I_2 = \frac{1}{5}\varepsilon^2 = \frac{1}{2}q \left(1 - \frac{5}{14}q + \dots\right), \quad I_4 = \frac{3}{35}\varepsilon^4 = \frac{15}{28}q^2 + \dots \quad (13)$$

Относительные погрешности интересующих нас величин в силу (12), (13) равны

$$\begin{aligned} \delta(\alpha) &= \frac{\delta + (15/28)q\delta}{1 + (15/56)q} = \delta \left(1 + \frac{15}{56}q + \dots\right), \\ \delta(I_2) &= \frac{\delta - (5/7)q\delta}{1 - (5/14)q} = \delta \left(1 - \frac{5}{14}q + \dots\right), \\ \delta(I_4) &= 2\delta + \dots, \\ \delta(\alpha/q) &= \frac{15}{56}q\delta + \dots \end{aligned} \quad (14)$$

Числовые характеристики собраны в табл. 2. Значение последней величины в (14) столь мало, что величину α/q можно считать безошибочной.

Случай $A \neq 0$

Предполагая по-прежнему \mathcal{S} эллипсоидом, считаем теперь, что плотность возрастает с глубиной. Тогда [10, гл. 4] при постоянных a, m, q сжатие уменьшается тем сильнее, чем выше концентрация к

Таблица 2. Параметры фигур равновесия системы Плутон—Харон. Случай $A = 0$

Параметр	Плутон	Харон
$10^4\alpha$	$3.127(1 \pm 0.00262)$	$3.406(1 \pm 0.00616)$
α/q	1.2501	1.2501
$10^4 I_2$	$1.251(1 \pm 0.00262)$	$1.362(1 \pm 0.00616)$
$10^8 I_4$	$3.352(1 \pm 0.00524)$	$3.977(1 \pm 0.01231)$

центру. Следовательно, теперь $\varepsilon < \varepsilon^*$, $\alpha < \alpha^*$, так что $A < 0$. С другой стороны, у всех сжатых тел $I_2 \geq 0$ [7, §4.9]. Поэтому всегда

$$-3 \leq 2A \leq 0. \quad (15)$$

Мы приходим к выводу, что приведенные в табл. 2 числа α, I_2, I_4 служат верхними границами соответствующих величин.

Замечание 1. Мы фиксировали a, m, q и уменьшали ε . Согласно (8) это возможно за счет увеличения ω . Но соответствующий поправочный множитель для ω отличается от единицы менее чем на $2 \cdot 10^{-4}$.

Замечание 2. Убывание сжатия с ростом концентрации масс к центру известно со времен Клеро. Его доказательство элементарно. Из второго равенства (10) следует, что величины I_2, ε при фиксированном q — возрастающие функции друг друга. Но I_2 пропорционально моментам инерции, которые уменьшаются до нуля с ростом концентрации масс к центру.

Замечание 3. Любопытно, что неравенство (15) в точности совпадает с неравенством для параметра концентрации (содержится между формулами (3) и (4) главы 4 монографии [10]) и для параметра $(-\eta)$ (там же, после формулы (12)).

Ниже нам понадобится уравнение эллипсоида в сферических координатах:

$$\begin{aligned} \frac{r}{c} &= \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2 \sin^2 \theta}} = 1 + \frac{\varepsilon^2}{2} \sin^2 \theta + \frac{3\varepsilon^4}{8} \sin^4 \theta + \dots = \\ &= 1 + \alpha \left(1 - \frac{\alpha}{2}\right) \sin^2 \theta + \frac{3\alpha^2}{2} \sin^4 \theta + \dots \end{aligned} \quad (16)$$

Фигура Гюйгенса—Роша

В теории фигур равновесия установлено убывание плотности тела от центра к периферии. Один крайний случай — однородный эллипсоид Маклорена — встретился нам в предыдущем параграфе. Второй крайний случай — сосредоточенная в центре масса, окруженная невесомой атмосферой (фигура Гюйгенса—Роша). Уравнение поверхности можно записать в виде [1, 11]

$$\frac{r}{c} = \frac{3}{\sqrt{u}} \sin \left(\frac{1}{3} \arcsin \sqrt{u} \right) \quad (17)$$

при

$$u = \frac{27}{8} q \sin^2 \theta.$$

Правая часть (17) разлагается в ряд Маклорена по степеням u . В [1, 11] приведен общий член ряда. Но нам достаточно квадратичного приближения:

$$\frac{r}{c} = 1 + \frac{4}{27} u + \frac{16}{3^5} u^2 = 1 + \frac{1}{2} q \sin^2 \theta + \frac{3}{4} q^2 \sin^4 \theta. \quad (18)$$

Здесь и ниже мы опускаем указание на отброшенные члены. Отсюда

$$a = c \left(1 + \frac{1}{2} q + \frac{3}{4} q^2 \right), \quad \alpha = \frac{1}{2} q (1 + q), \quad q = 2\alpha(1 - 2\alpha). \quad (19)$$

С помощью (19) можно представить ряд (18) в виде

$$\frac{r}{c} = 1 + \alpha(1 - 2\alpha) \sin^2 \theta + 3\alpha^2 \sin^4 \theta. \quad (20)$$

Фигура Гюйгенса—Роша не является эллипсоидом, но ее экваториальную и полярную полуоси и сжатие мы по-прежнему обозначаем через a , c и $\alpha = (a - c)/a$.

Числовые характеристики собраны в табл. 3. Погрешности считались по аналогичным (14) формулам:

$$\delta(\alpha) = (1 + q)\delta, \quad \delta(\alpha/q) = q\delta.$$

Малость $q\delta$ делает величину α/q практически безошибочной.

Что касается коэффициентов Стокса I_n , то все они обращаются в нуль (за исключением $I_0 = 1$), поскольку вся масса сосредоточена в центре.

Таблица 3. Параметры фигуры Гюйгенс—Роша системы Плутон—Харон

Параметр	$10^4\alpha$	α/q
Плутон	$1.251(1 \pm 0.00262)$	0.5001
Харон	$1.363(1 \pm 0.00616)$	0.5001

Подход Ляпунова

Предположения постоянной плотности и сосредоточенной в центре массы — крайние. Обратимся к общему случаю, описываемому теорией Ляпунова [2], доведенной до рабочих алгоритмов в работах [1, 12, 13]. Изложим ее кратко.

Пусть эквиденситы (поверхности равной плотности) тела \mathcal{T} являются поверхностями вращения с уравнением

$$r = \bar{a}v[1 + q\zeta(q, v, \theta)]. \quad (21)$$

Здесь параметр $v \in [0, 1]$ отмечает эквиденситу, причем $v = 0$ отвечает центру тела, а $v = 1$ — поверхности \mathcal{S} . По определению плотность ϱ зависит только от v и считается известной. Элемент объема в криволинейных координатах v, θ, λ равен

$$d\tau = \bar{a}^3 v^2 (1 + q\zeta)^2 \left(1 + q \frac{\partial v \zeta}{\partial v}\right) \sin \theta \, dv d\theta d\lambda. \quad (22)$$

Объем бесконечно тонкого слоя между эквиденситами с параметрами v и $v + dv$ равен

$$d\tilde{\tau} = 4\pi \bar{a}^3 v^2 \, dv. \quad (23)$$

Рассмотрим частный случай, когда плотность изменяется по закону

$$\varrho = \varrho_0 (1 - \beta v^2), \quad 0 \leq \beta \leq 1. \quad (24)$$

Параметр β легко выразить через плотность в центре ϱ_0 и на поверхности ϱ_1 :

$$\beta = \frac{\varrho_0 - \varrho_1}{\varrho_0}. \quad (25)$$

Из (23, 24) следует простое выражение для массы m и средней плотности $\bar{\varrho}$:

$$m = \frac{4\pi \bar{a}^3 \varrho_0}{3} \left(1 - \frac{3}{5}\beta\right), \quad \frac{\bar{\varrho}}{\varrho_0} = 1 - \frac{3}{5}\beta. \quad (26)$$

Средняя плотность небесных тел известна с достаточной для наших расчетов точностью. Плотность в центре практически неизвестна. Однако ϱ_0 и β нетрудно выразить через среднюю плотность и плотность на поверхности, комбинируя (25) и (26):

$$\varrho_0 = \frac{5}{2}\bar{\varrho} - \frac{3}{2}\varrho_1, \quad \beta = \left(1 - \frac{\varrho_1}{\bar{\varrho}}\right) \left(1 - \frac{3\varrho_1}{5\bar{\varrho}}\right)^{-1}. \quad (27)$$

Закон (24) изменения плотности — сугубо модельный. Поэтому определим β по формуле (27) лишь с двумя значащими цифрами, не указывая погрешности. Средняя плотность приведена в работе [3]. Поверхность тел состоит большей частью из водяного льда при температуре 60 К [14]. Примем $\varrho_1 = 0.94 \cdot 10^3$ [15]. По Ляпунову функцию $q\zeta(q, v, \theta)$ следует разложить по степеням q . Ограничимся ниже линейным приближением. Тогда

$$\zeta = F(v)P_2(\cos \theta), \quad (28)$$

где F можно представить в виде ряда по степеням v^2

$$F = F^0 \sum_{k=0}^{\infty} F_k v^{2k} \quad (29)$$

с постоянными F_k, F^0 . Опираясь на изложенный в [12, 13] алгоритм, запишем рекуррентность

$$F_0 = 1, \quad F_k = \frac{3(2k^2 + 5k - 5)}{5k(2k + 5)} \beta F_{k-1}. \quad (30)$$

Вот первые значения F_k :

$$F_1 = \frac{6}{35}\beta, \quad F_2 = \frac{13}{175}\beta^2, \quad F_3 = \frac{52}{1375}\beta^3. \quad (31)$$

Для F^0 справедливо

$$F^0 = -\frac{5}{6} \left(1 - \frac{3}{5}\beta\right) \left(1 + \frac{3}{2}\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} F_k\right)^{-1}, \quad (32)$$

или в виде ряда по степеням β

$$F^0 = -\frac{5}{6} \left(1 - \frac{3}{5}\beta - \frac{9}{70}\beta^2 + \frac{1}{350}\beta^3 + \dots\right). \quad (33)$$

Теперь по формуле (29)

$$F(1) = -\frac{5}{6} \left(1 - \frac{3}{7}\beta - \frac{11}{70}\beta^2 - \frac{699}{26950}\beta^3 + \dots \right). \quad (34)$$

Пользуясь (21), (28), найдем сжатие поверхности \mathcal{S} . Пренебрегая квадратом параметра Клеро, получим

$$c = \bar{a}[1 + qF(1)], \quad a = \bar{a} \left[1 - \frac{1}{2}qF(1) \right], \quad \frac{\alpha}{q} = -\frac{3}{2}F(1). \quad (35)$$

С точностью до β^3 включительно

$$\frac{4\alpha}{5q} = 1 - \frac{3}{7}\beta - \frac{11}{70}\beta^2 - \frac{699}{26950}\beta^3. \quad (36)$$

В качестве (слабого) контроля заметим, что при $\beta = 0$ в линейном по q приближении (36) совпадает с (12). При $\beta > 0$, как и должно быть, $\alpha < \alpha^*$.

Замечание. Значения β нельзя назвать малыми (см. ниже табл. 4). Желательно поэтому оценить радиусы сходимости введенных рядов.

Из (30) следует, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F_k}{F_{k-1}} = \frac{3}{5}\beta.$$

Поэтому радиус сходимости ряда в (32) равен $5/3$.

Оценим сверху величину

$$w = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} F_k \right| \quad (37)$$

в круге $|\beta| \leq 5/4$ комплексной плоскости. Достаточно положить $\beta = 5/4$. Воспользуемся точными значениями $F_1 = 3/14$, $F_2 = 13/112$ и вытекающим из (30) неравенством

$$F_k < \left(\frac{3}{4} \right)^{k-2} F_2, \quad k > 2.$$

Выделяя в (37) первые два слагаемых и заменяя в остальных $k/(k+1)$ единицей, получим

$$w < \frac{1}{2}F_1 + \frac{2}{3}F_2 + \sum_{k=3}^{\infty} \left(\frac{3}{4} \right)^{k-2} F_2 = \frac{1}{2}F_1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{3/4}{1-3/4} \right) F_2 = \frac{179}{21 \cdot 16}.$$

Отсюда

$$\frac{3}{2}|\beta|w < \frac{895}{896}, \quad \left| 1 + \frac{3}{2}\beta \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k+1} F_k \right| > \frac{1}{896}.$$

Поэтому F^0 как функция от β не имеет особых точек в круге $|\beta| \leq 5/4$, и радиус сходимости рядов в (33), (34), (36) больше $5/4$.

Перейдем к параметру Стокса I_2 . Вот его интегральное представление [7]:

$$I_2 = -\frac{1}{ma^2} \int_{\mathcal{T}} r^2 P_2(\cos \theta) \varrho \, d\tau.$$

Пользуясь выражением (21) для радиуса, (22) для элемента объема и (24) для плотности, получим

$$I_2 = -\frac{2\pi \bar{a}^5 \varrho_0}{ma^2} \int_0^1 v^4 (1 - \beta v^2) \, dv \int_0^\pi \Phi(v, \theta) \sin \theta \, d\theta,$$

где

$$\Phi = (1 + q\zeta)^4 \left(1 + q \frac{\partial v \zeta}{\partial v} \right) P_2(\cos \theta).$$

С точностью до первой степени q

$$\Phi = P_2(\cos \theta) + q\Phi_1(v) [P_2(\cos \theta)]^2, \quad \Phi_1 = 4F(v) + \frac{\partial v F(v)}{\partial v}.$$

Интеграл от $P_2(\cos \theta) \sin \theta$ исчезает по ортогональности многочленов Лежандра, интеграл от $[P_2(\cos \theta)]^2 \sin \theta$ равен $2/5$. Далее,

$$\Phi_1 = F^0(5 + 7F_1 v^2 + 9F_2 v^4 + 11F_3 v^6) = F^0 \Phi_2,$$

$$\Phi_2 = 5 + \frac{6}{5}\beta v^2 + \frac{117}{175}\beta^2 v^4 + \frac{52}{125}\beta^3 v^6.$$

Поскольку с принятой точностью $a = \bar{a}$, то, в силу (26),

$$\frac{\bar{a}^5 \varrho_0}{ma^2} = \frac{3}{4\pi} \left(1 - \frac{3}{5}\beta \right)^{-1},$$

так что

$$\begin{aligned} I_2 &= -\frac{3}{5}qF^0 \left(1 - \frac{3}{5}\beta \right)^{-1} \int_0^1 v^4 (1 - \beta v^2) \Phi_2 \, dv = \\ &= \frac{q}{2} \left(1 - \frac{9}{70}\beta^2 - \frac{13}{175}\beta^3 \right) \int_0^1 v^4 (1 - \beta v^2) \Phi_2 \, dv. \end{aligned}$$

Последний интеграл равен

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(5v^4 - \frac{19}{5}\beta v^6 - \frac{93}{175}\beta^2 v^8 - \frac{221}{875}\beta^3 v^{10} \right) dv = \\ = 1 - \frac{19}{35}\beta - \frac{31}{525}\beta^2 - \frac{221}{9625}\beta^3. \end{aligned}$$

Окончательно,

$$\frac{2I_2}{q} = 1 - \frac{19}{35}\beta - \frac{197}{1050}\beta^2 - \frac{3699}{134750}\beta^3. \quad (38)$$

Напомним, что мы удерживаем члены до третьей степени β включительно.

Числовые данные соберем в табл. 4.

Таблица 4. Параметры фигур равновесия системы Плутон—Харон. Подход Ляпунова

Параметр	$10^{-3}\bar{\varrho}$	$10^{-3}\varrho_1$	β	$10^4\alpha$	α/q	10^4I_2	I_2/q
Плутон	1.854	0.94	0.71	1.90	0.76	0.64	0.26
Харон	1.703	0.94	0.67	2.16	0.79	0.74	0.27

Основные свойства фигур

Установим основные свойства трех рассмотренных фигур. Все они являются поверхностями вращения, поэтому достаточно исследовать свойства их меридиональных сечений. По симметрии можно ограничиться четвертью фигуры от полюса до экватора, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Обозначим через S_M , S_{HR} , S_L меридиональные сечения эллипсоида Маклорена, фигуры Гюйгенса—Роша и фигуры Ляпунова соответственно. Форма эллипсоида не нуждается в пояснении.

1. Фигура Гюйгенса—Роша. Ее уравнение (20), точное до α^2 включительно, имеет вид (45) при $A = c$, $B = c\alpha(1 - 2\alpha)$, $C = 3c\alpha^2$. Первое условие (48) приложения равносильно

$$4\alpha^2 - 2\alpha + 1 = \left(2\alpha - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$$

и выполнено тождественно для всех α . Второе условие (48) накладывает слишком сильное ограничение на α . Чтобы ослабить его, исследуем величину K_3 , определенную третьей формулой (47):

$$K_3(x) = 51y^2 + (5 - 46\alpha)y + (1 - 2\alpha + 4\alpha^2), \quad y = \alpha x.$$

Дискриминант квадратного трехчлена равен

$$D = 1300\alpha^2 - 52\alpha - 179.$$

Корни D равны

$$\alpha_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{233376}}{1300}, \quad \alpha_1 = 0.3916, \quad \alpha_2 = -0.3516.$$

При $\alpha < \alpha_1$ дискриминант отрицателен, $K_3(x) > 0$ при всех x . Но наибольшее возможное значение α для фигуры Гюйгенса—Роша равно $1/3$ [1].

Заключаем, что кривая S_{HR} выпукла и не имеет точек выпрямления при всех α .

Замечание. При $q = 8/27$, $\alpha = 1/3$ кривая S_{HR} имеет угловую точку, а поверхность \mathcal{S} — ребро. Кривизну при $\theta = \pi/2$ следует понимать как предел при $\theta \rightarrow \pi/2$, причем оба односторонних предела $\theta \rightarrow \pi/2 \pm 0$ равны между собой.

2. Фигура Ляпунова. Обозначим $h = -qF(1)/2$. Соотношения (35) запишутся в виде

$$c = \bar{a}(1 - 2h), \quad a = \bar{a}(1 + h),$$

что позволяет выразить \bar{a}, h через c, α :

$$\bar{a} = \frac{3 - \alpha}{3(1 - \alpha)}c, \quad h = \frac{\alpha}{3 - \alpha}. \quad (39)$$

Уравнение S_L (21) с учетом (28), (39) представим в виде

$$r = c[1 - 2hP_2(\cos \theta)] = a(1 - \alpha + \alpha \sin^2 \theta). \quad (40)$$

Уравнение (40) имеет вид (45) при $A = a(1 - \alpha)$, $B = a\alpha$, $C = 0$. Второе условие (48) выполнено, а первое равносильно $1 > 3\alpha$.

Таким образом, кривая S_L выпукла и не имеет точек выпрямления, если $\alpha < 1/3$.

При $\alpha = 1/3$ кривая S_L выпукла, но в полюсах имеет точки выпячивания.

Если $\alpha > 1/3$, то кривая S_L не является выпуклой. Она прогибается около полюсов.

Замечание. Отброшенные члены порядка q^2 при $\alpha > 1/3$ могут оказаться существенными, так что невыпуклость кривой S_L при $\alpha > 1/3$ нельзя считать доказанной. Но в системе Плутона q, α весьма малы, и там S_L безусловно выпукла.

3. Сравним формы фигур Гюйгенса—Роша и Ляпунова с формой эллипсоида Маклорена при одинаковых a, c, α .

Из (16) и (20) вытекает с точностью до α^2 включительно

$$r_M - r_{HR} = \frac{3c}{2} \alpha^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (41)$$

в понятных обозначениях. Формула (41) показывает, что эллипсоид охватывает фигуру Гюйгенса—Роша, касаясь ее в полюсах и на экваторе. Параметр Клеро согласно (11) и (19) существенно больше у фигуры Гюйгенса—Роша:

$$\frac{q_{HR}}{q_M} = \frac{5}{2} \left(1 - \frac{25}{14} \alpha \right). \quad (42)$$

Напротив, при одинаковых значениях параметра Клеро сжатие фигуры Гюйгенса—Роша существенно меньше:

$$\frac{\alpha_{HR}}{\alpha_M} = \frac{2}{5} \left(1 + \frac{41}{56} q \right). \quad (43)$$

Из соотношений (16) и (40) без труда находим с точностью до α^2 включительно

$$r_L - r_M = \frac{3c}{2} \alpha^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta. \quad (44)$$

Сравнение с (41) показывает, что при одинаковых a, c, α эллипсоид Маклорена находится посередине между фигурами Ляпунова и Гюйгенса—Роша. Все три фигуры касаются друг друга в полюсах и на экваторе.

На рис. 1 слева приведено меридиональное сечение трех фигур с общими a, c, α при $\alpha = 0.25$, а справа — с общими a, q при $q = 0.22$. Эти значения α, q на три порядка превышают реальные. Но для реальных значений α, q все три фигуры на глаз неотличимы от сферы.

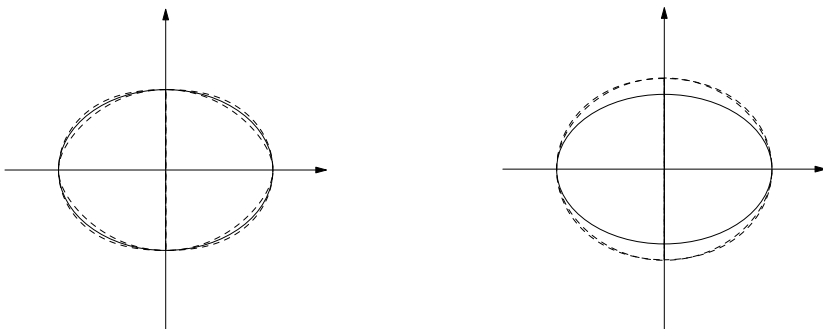


Рис. 1. Меридиональные сечения эллипсоида (сплошная линия), фигуры Гюйгенса—Роша (пунктир) и Ляпунова (штрих-пунктир); слева — с общими a, c, α при $\alpha = 0.25$; справа — с общими a, q при $q = 0.22$

Заключение

Для исследуемой пары небесных тел значение параметра Клеро q можно считать известным из наблюдений. Для сжатия меридионального сечения α и коэффициентов I_2, I_4 при зональных гармониках гравитационного потенциала сколько-нибудь надежных наблюдательных данных нет. Нами найдены границы их возможных значений, собранные в табл. 5 в понятных обозначениях.

Таблица 5. Границы возможных значений параметров фигур равновесия системы Плутон—Харон

Параметр	$10^4 q$	$10^4 \alpha^-$	$10^4 \alpha^+$	$10^4 I_2^+$	$10^8 I_4^+$
Плутон	2.5013	1.251	3.127	1.251	3.352
Харон	2.7247	1.363	3.406	1.362	3.977

Замечание 1. Равные нулю величины I_2^-, I_4^- мы не приводим.

Замечание 2. Обратим внимание, что отношение α/q практически одинаково для Плутона и Харона во всех моделях их строения. Как и должно быть, это отношение максимально для эллипсоидов Маклорена, минимально для фигур Гюйгенса—Роша и промежуточно для фигуры с плотностью (24). Скорее всего, истинные сжатия примерно равны этим промежуточным значениям.

Что касается коэффициентов Стокса, то они максимальны для эллипсоидов Маклорена и равны нулю для фигур Гюйгенса—Роша.

Полученные оценки показывают, какой точностью должны обладать приборы, чтобы измерить хотя бы с 10-процентной точностью величины α , I_2 . Измерить I_4 нереально в обозримом будущем.

Приложение

Исследуем на выпуклость плоскую кривую S , заданную в полярных координатах, уравнением

$$r = A + B \sin^2 \theta + C \sin^4 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \quad (45)$$

при $A > 0$, $B \geq 0$, $C \geq 0$. Для этого найдем ее кривизну K [16]:

$$K = \frac{K_1}{K_2^{3/2}}, \quad K_1 = r(r - r'') + 2r'^2, \quad K_2 = r^2 + r'^2. \quad (46)$$

Кривая (45) с ростом θ обходится по часовой стрелке. Поэтому в (46) принято правило знаков, по которому кривизна считается положительной, если касательная тоже вращается по часовой стрелке.

Полагая

$$x = \sin^2 \theta, \quad \frac{d}{d\theta} = \pm 2\sqrt{x(1-x)} \frac{d}{dx}, \quad \frac{d^2}{d\theta^2} = 4x(1-x) \frac{d^2}{dx^2} + 2(1-2x) \frac{d}{dx},$$

представим K_1 , K_2 в виде

$$\begin{aligned} K_1(x) &= (A + Bx + Cx^2)K_3(x) + K_4(x), \\ K_2(x) &= (A + Bx + Cx^2)^2 + 4x(1-x)(B + 2Cx)^2, \\ K_3(x) &= (A - 2B) + (5B - 12C)x + 17Cx^2, \\ K_4(x) &= 8x(1-x)(B + 2Cx)^2. \end{aligned} \quad (47)$$

Величина $K_2(x)$ положительна и отделена от нуля. Так как нас интересует только знак кривизны, о K_2 можно больше не упоминать. Знак $K_1(x)$ установить сложнее. Начнем со значений на полюсе и экваторе:

$$K_1(0) = A(A - 2B), \quad K_1(1) = (A + B + C)(A + 3B + 5C) > 0.$$

На экваторе кривизна положительна. На полюсе возможны три случая:

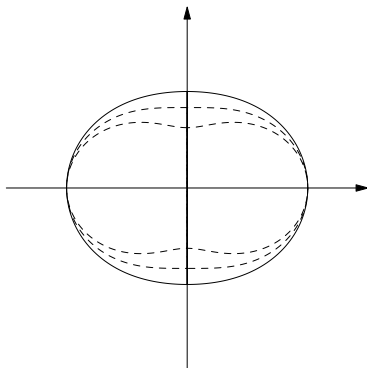


Рис. 2. Три кривые (45) при $C = 0$ и $A = 4/5$, $B = 1/5$ (сплошная линия); $A = 2/3$, $B = 1/3$ (пунктир), $A = B = 1/2$ (штрих-пунктир)

- а) $A > 2B$. Кривизна на полюсе положительна;
- б) $A = 2B$. Кривизна обращается в нуль на полюсе, так что последний служит точкой выпрямления;
- в) $A < 2B$. Кривизна на полюсе отрицательна. Кривая S не является выпуклой. Она прогибается в окрестности полюсов.

В первом случае в зависимости от C кривая S может быть и выпуклой, и невыпуклой. В частности, если

$$A - 2B > 0, \quad 12C \leq 5B, \quad (48)$$

то $K_3(x)$ и $K_1(x)$ положительны и отделены от нуля; кривая S выпукла и не имеет точек выпрямления.

Для иллюстрации на рис. 2 приведены три кривые (45) при $C = 0$.

Авторы благодарны В. Ш. Шайдулину за полезные замечания. Работа выполнена с использованием оборудования Вычислительного центра научного парка СПбГУ при финансовой поддержке РФФИ, грант 18-02-00552, (исследование фигур Ляпунова; М. А. Боруха, Б. Б. Эскин) и при финансовой поддержке РНФ, грант 18-12-00050 (исследование фигур Гюйгенса-Роша и гармоник гравитационного потенциала; К. В. Холшевников).

Библиографические ссылки

1. *Питъев Н. П., Титов В. Б., Холшевников К. В.* Фигуры равновесия небесных тел. — СПб. : Изд-во СПбГУ, 2002. — С. 108.
2. *Ляпунов А. М.* Исследования по теории фигуры небесных тел // Ляпунов А. М. Соч. — М. : Изд-во АН СССР, 1959. — Т. 3. — С. 114—146.

3. *Nimmo F., Umurhan O., Lisse S. et al.* Mean Radius and Shape of Pluto and Charon from New Horizons Images // *Icarus*. — 2017. — Vol. 287. — P. 12—29.
4. *Stern S. A., Grundy W. M., Mckinnon W. B. et al.* The Pluto System after New Horizons // *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* — 2018. — Vol. 56. — P. 357—392.
5. *Weaver H. A., Buie M. W., Buratti B. J. et al.* The small satellites of Pluto as observed by New Horizons // *Science*. — 2016. — Vol. 351. — P. 1281.
6. *Brozovič M., Showalter M. R., Jacobson R. A. et al.* The orbits and masses of satellites of Pluto // *Icarus*. — 2015. — Vol. 246. — P. 317—329.
7. Антонов В. А., Тимошкова Е. И., Холшевников К. В. Введение в теорию ньютоновского потенциала. — М. : Наука, 1988. — С. 270.
8. *Kholshevnikov K. V., Milanov D. V., Shaidulin V. Sh.* Laplace series of the level ellipsoid of revolution // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2018. — Vol. 130, iss. 10.
9. *Kholshevnikov K. V., Elkin A. V.* Convergence of Liapunov series for Maclaurin ellipsoids // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2002. — Vol. 84, iss. 1. — P. 57—63.
10. Пуанкаре А. Фигуры равновесия жидкой массы. — М. ; Ижевск : РХД, 2000. — С. 208.
11. *Kholshevnikov K. V., Kurdubov S. L.* Convergence of Liapunov series for Huygens—Roche figures // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2004. — Vol. 89, iss. 1. — P. 83—96.
12. Заки С. Ф., Елькин А. В., Холшевников К. В. Форма и строение небесных тел: вслед за Ляпуновым // *Астрон. журн.* — 1994. — Т. 71, вып. 5. — С. 785—793.
13. Елькин А. В., Холшевников К. В. Определение фигур небесных тел методом Ляпунова // *Тр. АО СПбГУ*. — 2003. — Т. 45. — С. 3—72.
14. *Grundy W. M et al.* Surface compositions across Pluto and Charon // *Science*. — 2016. — Vol. 351, iss. 6279. — P. 1283.
15. Чубик И. А., Маслов А. М. Справочник по теплофизическим характеристикам пищевых продуктов и полуфабрикатов. — М. : Пищевая промышленность, 1970. — С. 261.
16. Рашевский П. К. Курс дифференциальной геометрии. — М. : ГИТТЛ, 1956. — С. 420.