УДК 519.83; 519.6

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ АППРОКСИМАЦИИ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИСКРЕТНЫХ СИСТЕМ

ON ONE APPROXIMATION METHOD OF NONLINEAR DISCRETE-TIME SYSTEMS REACHABLE SETS

Калёв Виталий Игоревич, аспирант каф. «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: abc@def.com, Тел.: +7(992)018-89-42

Vitaliy I. Kalev, Postgraduate student, Department «Applied mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N.Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: abc@def.com. Ph.: +7(992)018-89-42

Аннотация: В работе предлагается один способ аппроксимации областей достижимости нелинейной дискретной управляемой динамической системы. Объектом исследования является класс систем, описываемых группой нелинейных рекуррентных уравнений. Метод заключается в преобразовании исходной рекуррентной нелинейной модели управляемого объекта к дискретному линейному виду. Предполагается, что ограничения фазового состояния и управления являются выпуклыми компактными многогранниками с конечным числом вершин. Построение областей достижимости осуществляется с помощью общего рекуррентного алгебраического метода для линейных дискретных систем. В конце работы приводится численный пример, показывающий эффективность предлагаемого метода.

Abstract: This paper provides an approximation method of reachable sets of nonlinear discrete-time controlled dynamical systems. The object of this research is the class of systems described by the group of nonlinear recurrence equations. Our approach consists in transformation of initial recurrence nonlinear model of controlled plant to discrete-time linear form. It is assumed that state and control constraints are convex polytopes with finite number of vertices. The reachable set computation is carried out by general recurrence algebraic approach for linear discrete-time systems. Finally, the numerical example is provided and good performance of provided method is shown.

***Ключевые слова*:** области достижимости; аппроксимация; нелинейные управляемые системы; многогранники; линейное программирование.

***Key words*:** reachable sets; approximation; nonlinear controlled systems; polyhedra; linear programming.

ВВЕДЕНИЕ

В задачах управления динамическими системами большое внимание уделяется построению и оцениванию множеств возможных фазовых состояний систем в различные моменты времени. Такие множества называются областями достижимости [1, 2] и играют важную роль в решении задач управления, наблюдения, прогнозирования и верификации. Построение областей достижимости нелинейной управляемой динамической системы дает ряд преимуществ и позволяет оценить допустимые фазовые состояния системы, что порой существенно упрощает решение, например, задач оптимизации гарантированного результата, наблюдения или управления [1-3]. На практике построение областей достижимости нелинейных управляемых систем представляет собой сложную задачу, поэтому особого внимания заслуживают эффективные методы их аппроксимации. В данной работе предлагается метод аппроксимации областей достижимости исходной нелинейной дискретной управляемой динамической системы с помощью построения на основе общего рекуррентного алгебраического метода [2, 3], точной области достижимости соответствующей линейной дискретной модели, полученной путем линеаризации исходной системы вдоль опорной траектории. Метод построения областей достижимости [2, 3], был модифицирован для сокращения времени вычислительного процесса, затрачиваемого на построение областей достижимости, а также уменьшения объемов памяти вычислительного устройства, необходимых для хранения информации об описании многогранника области достижимости. Полученные в данной статье результаты могут быть использованы при компьютерном моделировании динамических процессов, а также при разработке и создании систем оптимизации результатов управления в различных прикладных технических и экономических задачах.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассматривается класс объектов, динамика которых описывается системой нелинейных рекуррентных уравнений вида

$$x(t+1) = f(t, x(t), u(t)),\ t \in \overline{0, T-1}, \quad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$ – фазовый вектор объекта в момент времени t; $u(t) \in \mathbb{R}^p$ – вектор управления в момент времени t; $f : \overline{0,T-1} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$ – заданная нелинейная функция, непрерывно дифференцируемая по $x(t)$ и $u(t)$; $T \in \mathbb{N}$.

Далее мы предполагаем, что системе (1) в соответствие поставлена ее линейная аппроксимация, полученная путем проведения линеаризации вдоль опорной траектории [1, 5]. Таким образом, линейная модель, аппроксимирующая систему (1) на целочисленном промежутке времени $\overline{0, T-1}$ имеет вид

$$x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t),\ t \in \overline{0, T-1}, \quad (2)$$

где $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ – матрица состояния системы; $B(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$ – матрица управления; $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Далее вводятся следующие предположения.

Предположение 1. Фазовый вектор систем (1) и (2) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, имеющему вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$x(t) \in \mathbf{X}(t) \subset \mathbb{R}^n,\ t \in \overline{0, T}. \quad (3)$$

Предположение 2. Вектор управления систем (1) и (2) удовлетворяет заданному геометрическому ограничению, имеющему вид выпуклого, замкнутого и ограниченного многогранника с конечным числом вершин:

$$u(t) \in \mathbf{U}(t) \subset \mathbb{R}^p,\ t \in \overline{0, T-1}. \quad (4)$$

Тогда содержательно, рассматриваемая в работе задача может быть сформулирована следующим образом.

Задача 1. Для рассматриваемой на заданном целочисленном промежутке времени $\overline{0,T}$ линейной дискретной динамической системы (2) – (4) требуется для любого целочисленного момент времени $\tau \in \overline{0,T}$ определить множество всех возможных фазовых состояний системы $x(\tau)$, которые являются финальными состояниями фазовых траекторий системы, соответствующих всем парам $(x_0, u_\tau(\cdot))$, где $u_\tau(\cdot) = \{u_\tau(t)\}_{t \in \overline{0,\tau-1}}$, $\forall t \in \overline{0, \tau-1} : u_\tau(t) \in \mathbf{U}(t)$, то есть описать ее область достижимости на момент τ.

Введем строгое определение понятия области достижимости для линейной дискретной динамической системы (2) – (4).

Определение 1. Областью достижимости фазовых состояний линейной дискретной управляемой системы (2) – (4) на момент времени $\tau \in \overline{\vartheta+1, T}$, соответствующей паре $(\vartheta, X(\vartheta)) \in \overline{0, T-1} \times \mathbf{2}^{\mathbb{R}^n}$ называется множество

$$\begin{gathered} \mathbf{G}(\vartheta, X(\vartheta); \tau) = \{x(\tau) \mid x(\tau) \in \mathbb{R}^n, \\ x(t+1) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \in \mathbf{X}(t+1), \\ t \in \overline{\vartheta, \tau-1}, u(t) \in \mathbf{U}(t), x(\vartheta) \in X(\vartheta)\}. \end{gathered} \quad (5)$$

Известно [2], что такой тип множеств как выпуклые многогранники замкнут относительно основных преобразований над множествами, используемыми при построении областей достижимости, а именно линейного отображения, суммы Минковского и пересечения множеств. Основная идея метода построения областей достижимости, предлагаемого в данной работе, изложена в следующей главе.

ОБЩИЙ РЕКУРРЕНТЫЙ МЕТОД ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ

В работах [2-4] был разработан эффективный общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости для линейных дискретных управляемых динамических систем. Используя полугрупповое свойство

$$\begin{gathered} \mathbf{G}(0, x_0; T) = \mathbf{G}(t, X(t); T),\ t \in \overline{1, T-1}, \\ X(t) = \mathbf{G}(0, x_0; t), \end{gathered} \quad (6)$$

задачу построения области достижимости $\mathbf{G}(0, x_0; T)$ системы (2) – (4) можно свести к реализации рекуррентной последовательности только одношаговых областей достижимости $\mathbf{G}(t, X(t); t+1),\ t \in \overline{0, T-1}$.

Введем следующие определения.

Определение 2. Множество из $k \in \mathbb{N}$ крайних точек, задаваемых набором векторов $v_i \in \mathbb{R}^n$, $i \in \overline{1,k}$ выпуклая оболочка которых является многогранником $P \in \mathbb{R}^n$, называется вершинным описанием (*V-Rep*) этого многогранника:

$$P = \mathrm{conv}(v_1, v_2, \ldots, v_k),\ v_i \in \mathbb{R}^n, i = \overline{1,k} \quad (7)$$

Определение 3. Система из $m \in \mathbb{N}$ линейных неравенств, определяющая выпуклый многогранник $P \in \mathbb{R}^n$, называется фасетным описанием (*H-Rep*) этого многогранника:

$$P = \{x \mid x \in \mathbb{R}^n, Hx \le b\}, H \in \mathbb{R}^{m\times n}, b \in \mathbb{R}^m. \quad (8)$$

Отметим, что двойное описание многогранников необходимо в задаче построения областей достижимости в виду того, что имеет место ограничение фазового состояния (3), то есть в алгоритме построения областей достижимости присутствует операция пересечения множеств, которая может быть эффективно реализована над фасетным описанием многогранников.

Далее в виде псевдокода приведен общий рекуррентный алгебраический метод построения областей достижимости [2-4] системы (2) – (4).

Инициализация: $X(0) = x_0$.

1: **для всех** $t \in \overline{0, T-1}$ **выполнить**

2: $\hat{X}(t+1) = A(t)X(t) \oplus B(t)\mathbf{U}(t)$; (*V-Rep*)

3: $\bar{X}(t+1) = \mathrm{ch}(X(t))$; (*V-Rep*)

4: $\bar{X}(t+1)$: *V-Rep* ↔ *H-Rep*; (*V-Rep*)

5: $X(t+1) = \bar{X}(t+1) \cap \mathbf{X}(t+1)$; (*H-Rep*)

6: $X(t+1)$: *H-Rep* ↔ *V-Rep*; (*H-Rep*)

7: **конец цикла**

Выходная информация: $\mathbf{G}(0, x_0; T) = X(T)$.

Примечание. В приведенном алгоритме с помощью символа $\oplus$ обозначена сумма Минковского двух множеств. Оператор $\mathrm{ch}(\cdot)$ обозначает операцию нахождения всех крайних точек множества из k точек, и реализуется как решение k задач линейного программирования [3]. Операции формирования двойного описания многогранника обозначены как *V-Rep↔H-Rep* и *H-Rep↔V-Rep*. Справа в круглых скобках приведено описание многогранника, над которым реализуется текущий пункт алгоритма.

В данной работе используются следующие модификации общего алгебраического метода построения областей достижимости. В части алгоритма формирования двойного описания многогранников это модификации, реализованные на основе работ [8, 9], в части операции нахождения всех крайних точек – на основе работы [5] и в части аппроксимации областей достижимости – на основе работы [6]. Модификации направлены на

ЧИСЛЕННЫЙ ПРИМЕР

Рассмотрим аппроксимацию областей достижимости для нелинейной дискретной модели Лотки-Вольтерры:

$$x_1(t+1) = x_1(t) + T_0(ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t) + eu(t)),$$
$$x_2(t+1) = x_2(t) + T_0(-cx_2(t) + dx_1(t)x_2(t)),$$

где $t \in \overline{0, T-1}$, $a = 0.9$, $b = 0.003$, $c = 0.8$, $d = 0.002$, $e = 0.85$, $T_0 = 2\pi / T\sqrt{ac}$, $T = 60$, $x_1(0) = 410$, $x_2(0) = 300$.

Данная дискретная управляемая динамическая система линеаризована вдоль опорной траектории $\tilde{x}(\sigma)$ свободного движения, то есть при отсутствии управляющего воздействия $\tilde{u}(t) \equiv 0, \forall t \in \overline{0, T-1}$. Тогда сформированная линейная модель в векторно-матричной форме, соответствующая исходной модели, имеет вид (2), где $t \in \overline{0, T-1}$, $x(t) \in \mathbb{R}^2$, $x(0) = (1 \quad 2)^T$, $u(t) \in \mathbf{U}(t) \subset \mathbb{R}^1$, матрицы $A(t)$ и $B(t)$ принимают значения

$$A(t) = \begin{pmatrix} 1 + T_0 a - T_0 b\tilde{x}_2(t) & -T_0 b\tilde{x}_1(t) \\ T_0 d\tilde{x}_2(t) & 1 - T_0 c + T_0 d\tilde{x}_1(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} T_0 e \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предполагается, что управление $u(t)$ принимает значения на множестве $\mathbf{U}(t) = \{u(t) \mid |u(t)| \le 0.3\}$, $\forall t \in \overline{0, T-1}$.

Области достижимости нелинейной дискретной модели Лотки-Вольтерры и их аппроксимация, полученная с помощью предлагаемого метода, иллюстрируется на рисунке 1.

В таблице 1 приведены основные параметры (объем многогранника, количество вершин) области достижимости $\mathbf{G}(0, x_0; T)$, т.е. множества всех допустимых финальных фазовых состояний линейной системы, вычисленной с помощью общего рекуррентного алгебраического метода [2, 3] и его модификации, а также дополнительные показатели (время вычисления), позволяющие сравнить быстродействие общего и модифицированного алгоритмов.

Таблица 1.

Результаты моделирования

Алгоритм	Время работы	Кол-во вершин	Объем
Общих алгоритм	0.05 с	120	4.62
Модифицированный	0.01 с	16	4.34
Исходная система	–	120	4.68

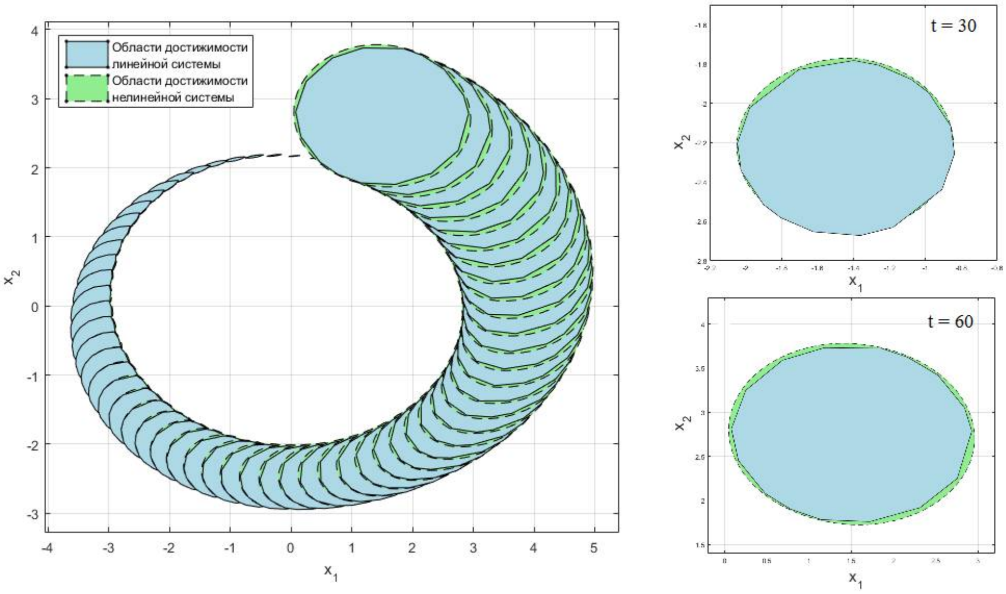

Рис. 1. Аппроксимация областей достижимости нелинейной модели Лотки-Вольтерры

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе описывается метод аппроксимации областей достижимости нелинейных дискретных систем с помощью построения областей достижимости соответствующих им линейных систем. Предложенный алгоритм базируется на общем рекуррентном алгебраическом методе [2-4], относящемуся к классу точных методов, дающих описание всех допустимых фазовых состояний линейной дискретной управляемой динамической системы в заданный момент времени. В работе использованы модификации общего рекуррентного алгебраического метода, основанные на результатах, полученных в работах [5-9], направленные на сокращение операций и уменьшение времени реализации процесса вычисления.

В качестве численного эксперимента была рассмотрена задача построения точных областей достижимости динамической модели Лотки-Вольтерры. Представленные в статье результаты работы предложенного алгоритма построения областей достижимости продемонстрировали его эффективность. Кроме того, использование модификаций оригинального метода позволяет существенно сократить время вычисления при построении областей достижимости.

Реализация построения областей достижимости осуществлена в программной среде MATLAB R2014a, где были реализованы численные алгоритмы оригинального общего рекуррентного алгебраического метода построения областей достижимости линейных дискретных систем и его модификаций.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Красовский Н.Н. Теория управления движением Москва: Наука, 1968. 476 с.
2. Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 1997. 242 с.
3. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Об одном алгоритме построения области достижимости линейной управляемой системы // Негладкие задачи оптимизации и управление. Свердловск: УрО АН СССР. 1988. С. 55-61.
4. Тюлюкин В. А., Шориков А. Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной системы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4. С. 115–127.
5. Шориков А.Ф., Горанов А.Ю. Методика аппроксимации области достижимости нелинейной управляемой динамической системы // Прикладная математика и вопросы управления. 2017. № 2. С. 112-121.
6. Булаев В.В. Об использовании симплекс-метода для аппроксимации выпуклых многогранников // Труды второй научно-технической конференции молодых ученых Уральского энергетического института. Екатеринбург: Уральский федеральный университет, 2017. С. 397–399.
7. Черников С. Н. Линейные неравенства. Москва: Наука, 1968. 488 с.
8. Бастраков С.И., Золотых Н.Ю. Использование идей алгоритма quickhull в методе двойного описания // Вычислительные методы и программирование. 2011. Т.12. С. 232–237.
9. Fukuda K., Prodon A. Double description method revisited // Combinatorics and Computer Science. 1996. P. 91–111.