# КРИТИКА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГУАНГА-ГИЛЬБЕРТА НА ОСНОВЕ АНАЛИЗА СВОЙСТВ МОНОКОМПОНЕНТ

*Н.Т. Сафиуллин[1], С.В. Поршнев[2]*
([1] Екатеринбург, УрФУ, ИРИТ–РТФ, aitsnt@gmail.com;
[2] Екатеринбург, УрФУ, ИРИТ–РТФ, sergey_porshnev@mail.ru)

# CRITIQUE OF HUANG-HILBERT TRANSFORM BASED ON ANALYSIS OF MONOCOMPONENTS PROPERTIES

*N.T. Safiullin, S.V. Porshnev*

Метод преобразования Гуанга-Гильберта (Huang-Hilbert Transform – HHT), предложенный Норденом Гуангом в 1998 г., является одним из универсальных методов анализа нестационарных временных рядов (НВР). В его основе лежит разложение исходного ВР $u(t)$, в соответствии с алгоритмом эмпирической модовой декомпозиции (EMD) в [1], на набор компонент, названных авторами характеристическими модовыми функциями (intrinsic mode functions – IMF), с дальнейшим нахождением их мгновенной частоты и амплитудной составляющей с помощью преобразования Гильберта:

$$u(t) = \mathrm{Re}\left\{\sum_{i=1}^{n} a_i(t)e^{j\phi_i(t)}\right\} + r_n(t), \tag{1}$$

где $a_i(t)$ – огибающая $i$-ой характеристической компоненты, $\phi_i(t)$ – фазовая составляющая $i$-ой моды, с помощью которой мы можем найти значения мгновенной частоты $\omega_i(t) = \dfrac{d\phi_i(t)}{dt}$, $r_n(t)$ – остаток декомпозиции. Каждая из этих мод трактуется как некоторая базовая функция, которая несет в себе информацию, отражающую ту или иную реальную физическую характеристику исходных данных.

По построению алгоритма EMD полученные компоненты IMF обладают следующими двумя свойствами:

1) число экстремумов и число нулей функции равны или отличаются на единицу;
2) среднее арифметическое значение верхней и нижней огибающих кривых равно нулю.

Второе условие выполняется в алгоритме EMD лишь приближенно, поэтому для множества функций *IMF* будем использовать более точное определение, предложенное в [2]: временной ряд $q(t)$ принадлежит множеству *IMF* только, если он не подлежит дальнейшей декомпозиции с помощью EMD, то есть, согласно (1), $u(t) = q(t)$, $n=1$, $r_1(t)=0$.

Согласно автору метода EMD [1], при выполнении двух указанных выше условий, компоненты являются по построению «удобными» для применения к ним преобразования Гильберта. Под этим автор понимал выполнение двух важных условий:

$$\begin{gathered} H\big(a(t)\cos\phi(t)\big) = a(t)\sin\phi(t), \\ \phi'(t) \ge 0. \end{gathered} \tag{2}$$

где $H$ – оператор преобразования Гильберта, $a(t), \phi(t)$ – амплитудная и фазовая составляющие. Первое свойство важно для реализации разбиения (1), подобно преобразованию Фурье, а второе несет в себе смысл наличия у компоненты аналитической мгновенной частоты, то есть временной ряд является физически реализуемым. Назовем компоненты, отвечающие этим двум условиям (2), множеством монокомпонент *MC* и будем считать, что они несут в себе определенный физический смысл.

Целью данной работы является показать, что два описанных множества функций *IMF* и *MC*, не совпадают и не являются подмножеством друг друга (3), в отличие от того, что считает автор преобразования Гуанга-Гильберта.

$$\begin{aligned} IMF \setminus MC &\neq \varnothing, \\ MC \setminus IMF &\neq \varnothing. \end{aligned} \qquad (3)$$

Идеальным вариантом было бы теоретическое доказательство этих (3) соотношений, но в силу эмпирического и адаптивного характера преобразования Гуанга-Гильберта, это, к сожалению, невозможно. Поэтому нашей целью будет найти такие временные ряды, один из которых является модой IMF, но не содержит аналитической мгновенной частоты ($\exists IMF_k \notin MC$), а другой – является монокомпонентой, но может быть декомпозирован на моды ($\exists MC_k \notin IMF$). Этих «исключений» будет достаточно, чтобы подтвердить наше утверждение (3).

Рассмотрим АМ сигнал вида $u_1(t) = e^{-0.01t}\cos(2\pi t/32)$, на отрезке времени $t \in [8;520]$. Этот ВР относится к множеству *IMF*, то есть не разделим с помощью EMD на составные части, что более подробно обсуждалось в [3]. Вид сигнала и значения его мгновенной частоты (МЧ) представлены на рис. 1а и рис. 1б соответственно. Как видно из рис. 1б, присутствуют отрезки с отрицательной МЧ, что противоречит одному из условий (2), определяющих монокомпоненты *MC*. Таким образом, утверждение $IMF \setminus MC \neq \varnothing$ доказано.

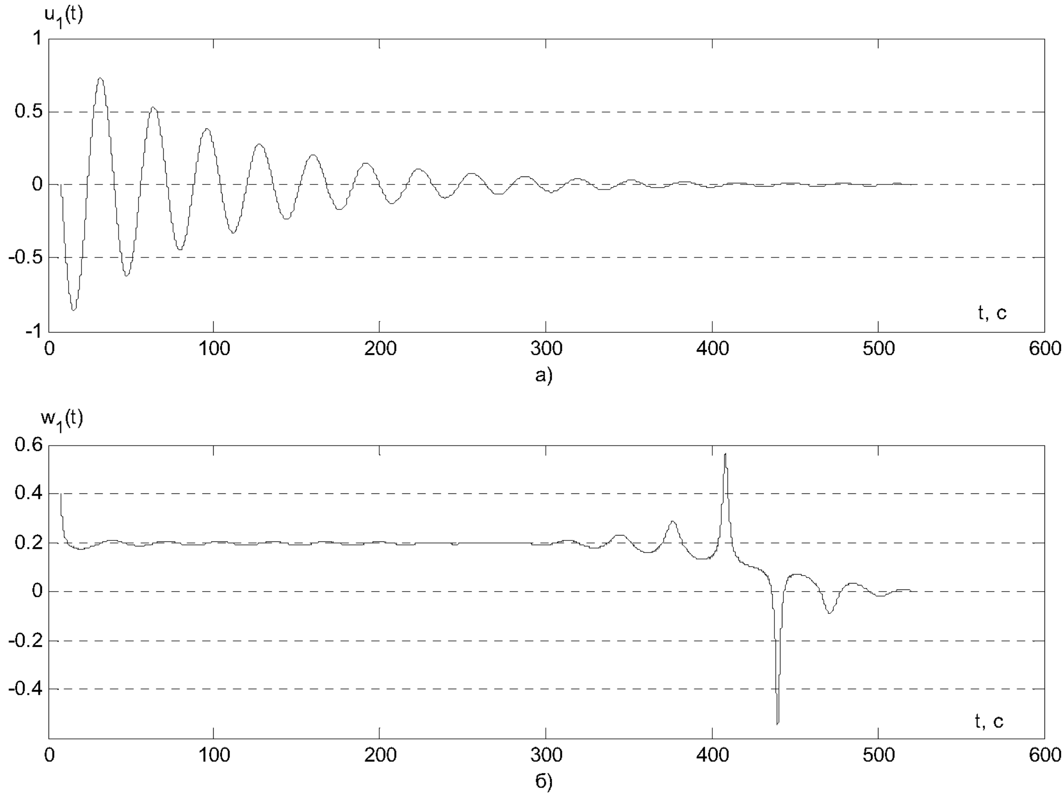


Рис. 1

Гораздо сложнее доказать утверждение $MC \setminus IMF \neq \varnothing$. Для этого сначала нужно найти вид сигналов, всецело удовлетворяющих условиям (2). Согласно [4], сигналы вида $u_2(t) = a(t)\cos\phi(t)$, как (4), относятся к классу монокомпонент *MC*

$$a(t)\cos\phi(t) = \left[a_0 \frac{\cos(\phi_0 - t) - r\cos(\phi_0)}{1 - 2r\cos(t) + r^2} + b\right] \cdot \frac{\cos(2t) - 2r\cos(t) + r^2}{1 - 2r\cos(t) + r^2} \qquad (4)$$

где $a_0, b, \phi_0, r$ – некоторые постоянные вещественные величины, ограниченные условиями $a(t) \geq 0$ и $0 < r < 1$. Подробное доказательство этой теоремы в данной работе не приводится и может быть найдено в публикации [4]. Для примера используем сигнал вида (4) с параметрами $a_0 = 1, b = 2, \phi_0 = 3\pi/4, r = 1/2, t \in [0;50]$. Исходный ВР (а), его две компоненты (б, в) и остаток (г) представлены на рис. 2. Значения МЧ исходного ВР приведены на рис. 3.

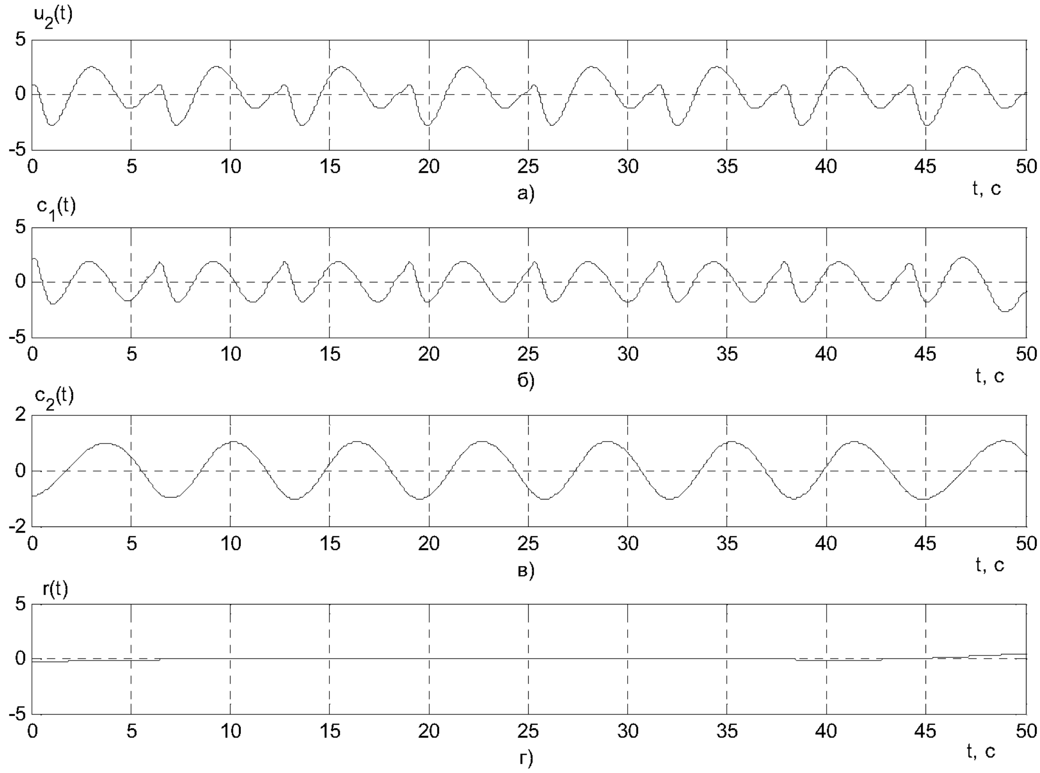


Рис. 2

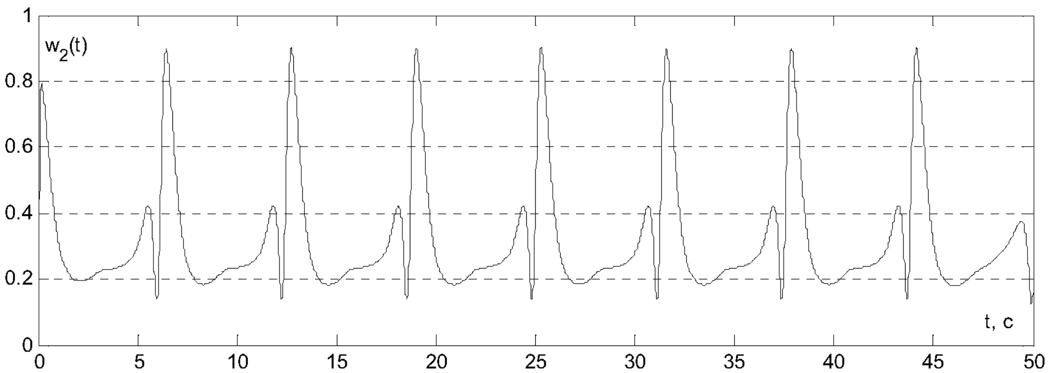


Рис. 3

Из рис. 2 следует, что, хотя условия (2) выполняются, алгоритм EMD все равно разбил исходный сигнал на «составные» части, то есть утверждение $MC \setminus IMF \neq \varnothing$ доказано.

Приведенные доказательства позволяют сделать следующие выводы:

- не все получаемые при декомпозиции компоненты являются монокомпонентами, то есть содержат аналитические значения МЧ.
- хотя метод преобразования Гуанга-Гильберта является универсальным и адаптивным, он не является одинаково эффективным для всех видов сигналов.

## Литература


1. Huang N. E. The Hilbert-Huang transform and its applications; ed. S.S. P. Shen. Singapore: World scientific publishing company, 2005. 324 p.
2. R. C. Sharpley and V. Vatchev. Analysis of intrinsic mode functions // Constr. Approx. 2006. № 24. P. 17–47.
3. Сафиуллин Н. Т., Поршнев С. В. Анализ характеристик компонент, получаемых с помощью преобразования Гуанга-Гильберта, на примере модельных сигналов. // Известия вузов России. Радиоэлектроника. 2012. (Статья в процессе публикации)
4. Tao Q., Zhang L. Mono-components vs IMFs in signal decomposition // Int. J. of wavelets, multiresolution and information processing. 2008. Vol. 6, № 3. P. 353–374.