УДК 330.88

Петренко Дмитрий Сергеевич,
Соискатель кафедры Экономической теории
и экономической политики,
Высшая школа экономики и менеджмента,
ФГАОУ ВО «Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б.Н.Ельцина»
г.Екатеринбург, Российская Федерация

МОДЕЛЬ ПОТРЕБИТЕЛЯ-ПРОИЗВОДИТЕЛЯ, ЭКОНОМИКА СПЕЦИАЛИЗАЦИИ И ТРАНЗАКЦИОННЫЕ ИЗДЕРЖКИ.

Анотация:
Автор развивает представленный ранее математический аппарат инфрамаржинальной экономики. Инфрамаржинальная экономика (inframarginal economics) - относительно новый раздел экономической теории, основанный на инфрамаржиналь-ном анализе, уделяющий основное внимание проблемам экономической организации. В статье рассматриваются решение задачи инфрамаржинального анализа как задачи поиска условного максимума.
Автором представлена трехмерная визуализация функций максимальной полезности экономических агентов для типов организационных структур, которые могут быть образованы экономическими агентами для достижения максимальной полезности.
Предложено графическое изображение общего инфрамаржинального равновесия, позволяющее определить оптимальную конфигурацию конкретных условий производства.
Теоретические положения могут быть использованы университетами для развития существующих программ по экономической теории.

Ключевые слова:
инфрамаржинальная экономика, инфрамаржинальный анализ, неоклассика, новая классическая модель, экономическая организация

Каждый экономический агент при принятии решения решает инфрамаржинальную задачу выбора вида деятельности, и маржинальную задачу распределения ресурсов по выбранному виду деятельности. В случае взаимодействия двух агентов с двумя видами продуктов возможны две экономические структуры – автаркия и полное разделение труда.

Неоднократно было показано, что в случае симметричной функции полезности критерием выбора экономической структуры является размер эффективность взаимодействия и уровня специализации. Однако в решении маржинальной задачи распределения ресурсов по выбранным видам деятельности в модели с симметричной функцией полезности $U=xy$ не учитывается предпочтения экономических агентов, таким образом, влияние предпочтений на структуру разделения труда не определено. Для решения задачи используем математический аппарат поиска условного максимума, результат представим графически.

Пусть функция полезности имеет вид функции Кобба-Дугласа:

$$U = (x + kx_d)^{\alpha}(y + ky_d)^{\beta}$$

где α и $\beta > 0$ – коэффициенты, характеризующее предпочтения экономических агентов;

k - коэффициент эффективности взаимодействия;

x, y – количества продукта произведенного экономическим агентом самостоятельно;

x_d, y_d количество продукта полученного экономическим агентом на рынке.

Рассмотрим конфигурацию *Автаркия*, в этом случае экономически агент производит продукт самостоятельно, $x_d = 0, y_d = 0$.

$$U = x^{\alpha}y^{\beta}$$

Для производства продукта x экономический агент затрачивает количество труда l_x^a; $x = l_x^a$.

Для производства продукта y экономический агент затрачивает количество труда l_y^a; $y = l_y^a$.

Количество труда ограничено, $l_x^a + l_y^a = 1$;

a – коэффициент специализации экономического агента в производстве продукта;

Функция полезности имеет вид:

$$U = l_x^{a\alpha}(1 - l_x^{a})^{\beta}$$

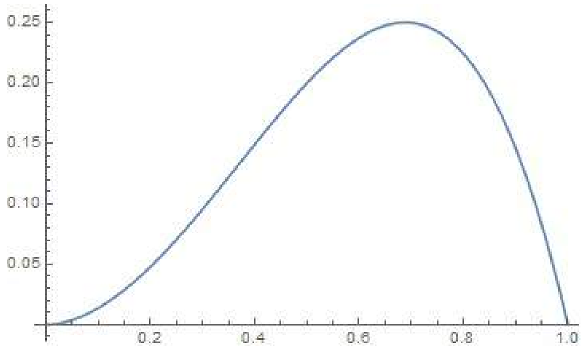


Рис.1 Функция полезности в условиях автаркии
Функция выпуклая, дважды дифференцируемая

.

Для поиска максимума необходимо решить следующую задачу:

$$U = l_x^{a\alpha} l_y^{a\beta} \rightarrow max$$

$$s.t. \begin{cases} l_x + l_y = 1 \\ l_x > 0 \\ l_y > 0 \end{cases}$$

Решение задачи производится методом множителей Лагранжа. Полученный лагранжиан будет иметь вид:

$$L(l_x, l_y) = l_x^{a\alpha} l_y^{a\beta} + \lambda(l_x + l_y - 1)$$

Для нахождения максимума дифференцируем лагранжиан и получаем систему из трех уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(l_x, l_y)}{\partial l_x} = a\alpha l_x^{a\alpha-1} l_y^{a\beta} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(l_x, l_y)}{\partial l_y} = a\beta l_x^{a\alpha} l_y^{a\beta-1} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(l_x, l_y)}{\partial \lambda} = l_x + l_y - 1 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$\lambda = -a\alpha l_x^{a\alpha-1} l_y^{a\beta}$$

Из второго уравнения:

$$\lambda = -a\beta l_x^{a\alpha} l_y^{a\beta-1}$$

$$a\alpha\, l_y^{a\beta} l_x^{a\alpha-1} = a\beta l_x^{a\alpha} l_y^{a\beta-1}$$

$$\alpha \frac{l_y^{a\beta}}{l_y^{a\beta-1}} = \beta \frac{l_x^{a\alpha}}{l_x^{a\alpha-1}}$$

$$\frac{l_y^{a\beta}}{l_y^{a\beta-1}} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{l_x^{a\alpha}}{l_x^{a\alpha-1}}$$

$$l_y = -\frac{\beta}{\alpha} l_x ;\, l_x = -\frac{\alpha}{\beta} l_y$$

Подставляем l_y и l_x в третье уравнение:

$$l_x + \frac{\beta}{\alpha} l_x - 1 = 0 ;l_y + \frac{\beta}{\alpha} l_y - 1 = 0$$

$$l_x(1 + \frac{\beta}{\alpha}) = 1; \; l_y(1 + \frac{\alpha}{\beta}) = 1$$

$$l_x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta} ;\, l_y = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$$

Максимальная полезность в случае автаркии будет иметь вид:

$$U_A = \left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{a\alpha} \left(\frac{\beta}{\beta+\alpha}\right)^{a\beta}$$

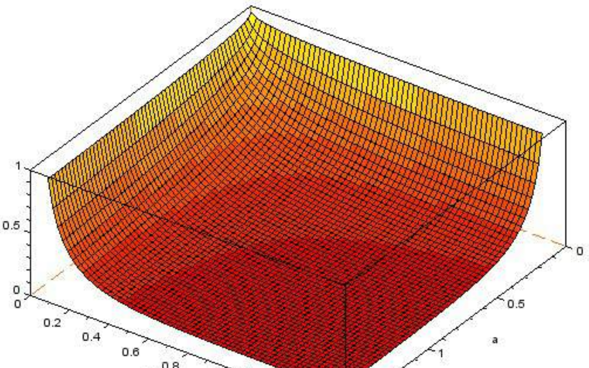


Рисунок 2. Функция максимальной полезности автаркии

Рассмотрим конфигурацию *полного разделения труда (x/y)*, в этом случае товар *x* производится, продаётся товар *x* и покупается y. Таким образом $x, x_s, y_d, l_x > 0,\; x_d, y_s, y,\; l_y = 0$.

$$U = x^{\alpha}(ky_d)^{\beta} \to max$$

$$x + x_s = l_x^a \;\; ; l_x = 1 \textit{ (ограничения производства)}$$

$$p_y y_d = p_x x_s \textit{ (ограничения бюджета)}$$

$$x_s = y_d \frac{p_y}{p_x};$$

Таким образом получаем задачу:

$$U = x^{\alpha}(ky_d)^{\beta} \to max$$

$$s.t.\begin{cases} x + y_d \dfrac{p_y}{p_x} = 1 \\ x > 0 \\ y_d > 0 \end{cases}$$

Полученный лагранжиан будет иметь вид:

$$L = x^{\alpha}(ky_d)^{\beta} + \lambda(x + y_d \frac{p_y}{p_x} - 1)$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L(x, y_d)}{\partial x} = \alpha x^{\alpha-1}(ky_d)^{\beta} + \lambda = 0 \\ \dfrac{\partial L(x, y_d)}{\partial y_d} = \beta k^{\beta} x^{\alpha} {y_d}^{\beta-1} + \lambda \dfrac{p_y}{p_x} = 0 \\ \dfrac{\partial L(x, y_d)}{\partial \lambda} = x + y_d \dfrac{p_y}{p_x} - 1 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$\lambda = -a x^{\alpha-1}(ky_d)^{\beta}$$

Из второго уравнения:

$$\lambda = -\beta k^{\beta} x^{\alpha} {y_d}^{\beta-1} \frac{p_x}{p_y}$$

$$a x^{\alpha-1}(ky_d)^{\beta} = \beta k^{\beta} x^{\alpha} {y_d}^{\beta-1}$$

$$x = \frac{\alpha p_y}{\beta p_x} y_d \quad y_d = \frac{\beta p_x}{\alpha p_y} x$$

Из третьего уравнения получаем:

$$y_d = \frac{\beta}{\alpha + \beta} \frac{p_x}{p_y} \text{ ; } x = \frac{\alpha}{\alpha + \beta}$$

Максимальная полезность в случае полной специализации (*x/y)* будет иметь вид:

$$U = k^{\beta} (\frac{\alpha}{\alpha + \beta})^{\alpha} (\frac{\beta}{\alpha + \beta})^{\beta} (\frac{p_x}{p_y})^{\beta}$$

Рассмотрим конфигурацию *полного разделения труда (y/x)*, в этом случае товар *y* производится, продаётся товар *y* и покупается *x*. Конфигурация определяется следующими условиями x_d, y, y_s, $l_y > 0$ *и* $y_d = x = x_s = l_x = 0$

$$U = (kx_d)^{\alpha} y^{\beta} \to max$$

$$y + y_s = l_y^a \text{ ; } l_y = 1 \textit{ (ограничения производства)}$$

$$p_y y_s = p_x x_d \textit{ (ограничения бюджета)}$$

Полученный лагранжиан будет иметь вид:

$$L = (kx_d)^{\alpha} y^{\beta} + \lambda(y + x_d \frac{p_x}{p_y} - 1)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L(x, y_d)}{\partial x} = \alpha k^{\alpha} {x_d}^{\alpha-1} y^{\beta} + \lambda \frac{p_x}{p_y} = 0 \\ \frac{\partial L(x, y_d)}{\partial y_d} = \beta k^{\alpha} {x_d}^{\alpha} y^{\beta-1} + \lambda = 0 \\ \frac{\partial L(x, y_d)}{\partial \lambda} = y + x_d \frac{p_x}{p_y} - 1 = 0 \end{cases}$$

Из первого уравнения:

$$\lambda = -\alpha k^{\alpha} {x_d}^{\alpha-1} y^{\beta} \frac{p_y}{p_x}$$

Из второго уравнения:

$$\lambda = -\beta k^{\alpha} {x_d}^{\alpha} y^{\beta-1}$$

$$x_d = y \frac{\alpha}{\beta} \frac{p_y}{p_x} \ ; \ y = x_d \frac{\beta}{\alpha} \frac{p_x}{p_y}$$

Из третьего уравнения получаем:

$$x_d = \frac{p_y}{p_x} \frac{\alpha}{\alpha + \beta}; \ y = \frac{\beta}{\alpha + \beta}$$

Максимальная полезность в случае полной специализации (*y/x)* будет иметь вид:

$$U = k^{\alpha} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha} \left(\frac{\beta}{\alpha + \beta}\right)^{\beta} (\frac{p_y}{p_x})^{\alpha}$$

Таблица 1Угловые решения.

Конфигурация	Уровень специализации	Косвенная функция полезности
A	$l_x = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}$; $l_y = \frac{\beta}{\beta+\alpha}$	$U_A = \left(\frac{\alpha}{\alpha + \beta}\right)^{\alpha\alpha} \left(\frac{\beta}{\beta + \alpha}\right)^{\alpha\beta}$
(x/y)	*l_x=1, l_y=0*	$U_{(x/y)} = k^{\beta} (\frac{\alpha}{\alpha + \beta})^{\alpha} (\frac{\beta}{\alpha + \beta})^{\beta} (\frac{p_x}{p_y})^{\beta}$

(y/x)	$l_x=0$, $l_y=1$	$U_{(y/x)} = k^{\alpha}\left(\frac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\alpha}\left(\frac{\beta}{\alpha+\beta}\right)^{\beta}(\frac{p_y}{p_x})^{\alpha}$

В случае полного разделения труда каждый экономический агент старается максимизировать свою полезность. Для достижения равновесия спроса и предложения максимальные полезности при производстве обоих продуктов должны быть равны.

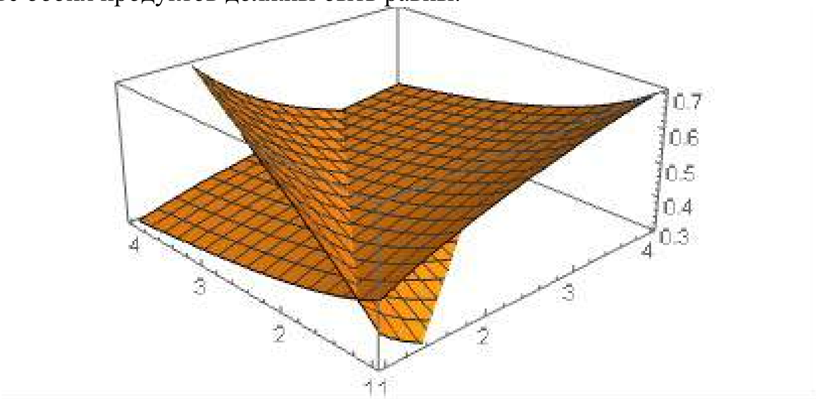


Рис 3. Угловое равновесие в случае полного разделения труда.

$$U_{(x/y)} = U_{(y/x)}$$
$$k^{\beta}(\frac{p_x}{p_y})^{\beta} = k^{\alpha}(\frac{p_y}{p_x})^{\alpha}$$
$$k^{\beta-\alpha} = (\frac{p_y}{p_x})^{\alpha+\beta}$$
$$k^{\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta}} = \frac{p_y}{p_x}$$
$$p_x = p_y k^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$$

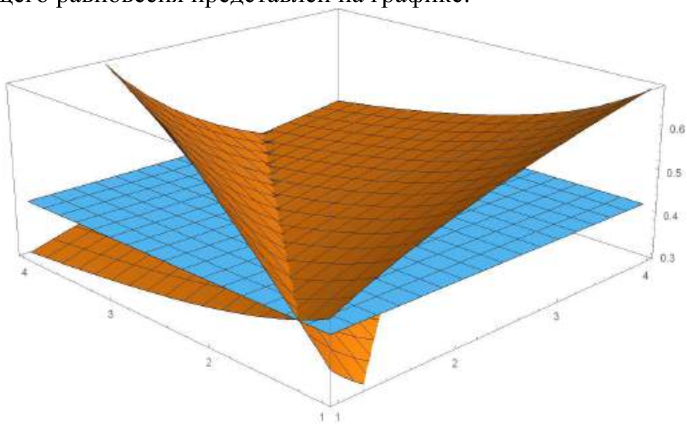
Таким образом, равновесная цена будет равна $p_x = p_y k^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}$.

Для того чтобы экономический агент выбрал полную специализацию должно выполняться условие:

$$\begin{cases} \dfrac{p_x}{p_y} > \dfrac{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{\frac{\alpha}{\beta}(a-1)}\left(\dfrac{\beta}{\beta+\alpha}\right)^{(a-1)}}{k}, U_{(x/y)} > U_A \\ \dfrac{p_x}{p_y} < \dfrac{\left(\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}\right)^{(a-1)}\left(\dfrac{\beta}{\beta+\alpha}\right)^{\frac{\beta}{\alpha}(a-1)}}{k}, U_{(y/x)} > U_A \\ \quad \dfrac{p_x}{p_y} = k^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}}, \qquad \text{(условие равновесия)} \end{cases}$$

,

Вид общего равновесия представлен на графике:



.

Рис 4. Общее равновесие для k=0.6, a=1.35, α=0.8, β=0.3

Таким образом, мы показали, что для решения задач инфрамаржинального анализа может использоваться уже известный математический аппарат задач условной максимизации, широко применяемый в микроэкономике. Полученные решения могут быть представлены в графической форме, что существенно упрощает понимание и анализ выбранной модели. Полученные результаты могут быть использованы в учебных процессах.

Petrenko Dmitry,
Applicant for a degree,
Department of Economic Theory and Economic Policy,
Graduate School of Economics and Management,
Ural Federal University
named after the first President of Russia B.N.Yeltsin
Ekaterinburg, Russian Federation

MODEL OF CONSUMER-PRODUCER, ECONOMICS OF SPECIALIZATION AND TRANSACTION COSTS

Abstract:
The author develops mathematical framework of inframarginal economics that was previously presented. Inframarginal economics is a relatively new sub-discipline of economics based on inframrginal analysis that paying the main attention to problems of economic organization. The article deals with the solution of the problem of inframarginal analysis as a problem of searching for a conditional maximum.
The author constructed three-dimensional visualization of functions maximum utility of economic agents for types of organizational structures which can be formed by economic agents for achievement of the maximum utility. The graphic representation of general inframarginal equilibrium allowing to determine an optimum configuration for specific conditions of production is offered.
Theoretical provisions can be used by universities for improvement of the existing courses of the economic theory.

Key words:
inframarginal economics, inframarginal analysis, neoclassical economics, new classical framework, economic organization