На правах рукописи

Лахтин Алексей Станиславович

КОНСТРУКЦИИ НЕГЛАДКОГО И МНОГОЗНАЧНОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧАХ ДИНАМИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ И ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА–ЯКОБИ

01.01.02. - дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург - 2001

Работа выполнена в Уральском государственном университете им. А.М. Горького на кафедре информатики и процессов управления.

Научные руководители: - доктор физико-математических наук, академик РАН А.И. Субботин;
- доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Ушаков.

Официальные оппоненты: - доктор физико-математических наук, член-корреспондент РАН А.Г. Ченцов;
- кандидат физико-математических наук, доцент М.И.Логинов.

Ведущая организация - Московский государственный университет им. М.В.Ломоносова.

Защита состоится 28 марта 2001 г. в 15^{00} часов на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете им. А.М. Горького (620083, г. Екатеринбург, К-83, пр. Ленина, 51, комн. 248).

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уральского государственного университета.

Автореферат разослан "   " февраля 2001 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м. н., доцент   В.Г. Пименов.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы.

Диссертация посвящена изучению свойств обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби и разработке вычислительных методов, для задач, возникающих в теории управления и дифференциальных играх. Исследования проводятся в рамках теории минимаксных решений, которая была создана А. И. Субботиным и продолжает развиваться в научной школе Н. Н. Красовского по оптимальному управлению.

Развитие теории обобщенных решений тесно связано с такими направлениями, как дифференциальные игры, оптимальное управление, негладкий и многозначный анализ.

Теория дифференциальных игр активно развивается с начала 60-х годов. Это развитие связано с именами отечественных и зарубежных математиков Н. Н. Красовского, Л. С. Понтрягина, Е. Ф. Мищенко, А. И. Субботина, Б. Н. Пшеничного, А. Б. Куржанского, Ю. С. Осипова, Р. Айзекса, В. Флеминга и других.

Кратко перечислим основные результаты, к которым примыкает диссертационная работа.

Н. Н. Красовским и его сотрудниками была создана концепция позиционных дифференциальных игр [4, 6, 18] и исследовано основополагающее понятие стабильности. В основе этой теории лежит принцип экстремального прицеливания на стабильные мосты. Для широкого круга дифференциальных игр доказана теорема об альтернативе [5, 6]. Эта теория объединила в себе подходы, направленные на решение целого ряда проблем, включающих в себя как вопросы существования, так и проблемы вычисления решений в дифференциальных играх. Так для решения регулярных задач теории позиционных дифференциальных игр были разработаны методы детерминированных и стохастических программных конструкций [7, 8, 18]. Было проведено численное моделирование различных динамических систем [2, 20].

Теория дифференциальных игр тесно связана с теорией обобщенных решений уравнений с частными производными первого порядка. Так, известно, что функция цены дифференциальной игры, будучи негладкой, в точках дифференцируемости удовлетворяет уравнению с частными производными первого порядка типа Гамильтона-

Якоби. Задачи, которые приводят к негладким решениям уравнений с частными производными первого порядка рассматривались в 50-70-е годы Н. С. Бахваловым, С. К. Годуновым, О. А. Ладыженской, О. А. Олейник, А. А. Самарским, А.Н. Тихоновым, П. Лаксом, Е. Хопфом, У. Флемингом и другими математиками. Среди этих исследований особо следует упомянуть результаты С. Н. Кружкова [9], полученные для уравнения Гамильтона-Якоби с выпуклым гамильтонианом.

В начале 80-х годов в работах М. Дж. Крэндала, П.-Л. Лионса и Л. С. Эванса [23, 24] был предложен подход к определению негладких решений краевых задач для уравнения Гамильтона-Якоби общего вида. Понятие решения было введено путем замены уравнения парой неравенств для субградиентов и суперградиентов. В основе доказательства теоремы существования обобщенного решения лежит метод исчезающей вязкости. Поэтому такие решения получили название вязкостных.

Исследования уравнений Гамильтона-Якоби-Беллмана на основе идемпотентного анализа были начаты и развиваются в последние годы В. П. Масловым и его сотрудниками [10, 11].

В данной диссертации развивается другой подход к определению обобщенных решений уравнений с частными производными первого порядка. Исследования проводятся в рамках теории минимаксных решений. Предлагаемые конструкции могут рассматриваться как обобщение классического метода характеристик.

Понятие минимаксных решений было введено А. И. Субботиным в конце 70-х годов в работах [12, 16]. Термин "минимаксные решения" и свойство слабой инвариантности, лежащее в основе этого понятия, происходят из теории управления и теории дифференциальных игр. В начале 70-х Н. Н. Красовский и А. И. Субботин ввели в рассмотрение u-стабильные и v-стабильные функции, которые мажорируют и минорируют функцию цены дифференциальной игры [6]. Свойства u и v-стабильности могут выражаться различными способами, например, с помощью дифференциальных неравенств для производных по направлению и субдифференциалов, а также с помощью контингентных конусов, называемых также конусами Булигана.

Первые результаты, связанные с заменой уравнений с частными производными первого порядка парой дифференциальных неравенств были получены в 1978 и 1980 годах А. И. Субботиным и

Н. Н. Субботиной [12, 16]. Дифференциальные неравенства в определении минимаксных решений применяются для описания свойства стабильности функции цены и выражаются в терминах производных по направлению.

Существенным фактом теории обобщенных решений уравнений с частными производными первого порядка является эквивалентность минимаксных и вязкостных подходов, доказательство которой требовало дополнительных усилий. На первом этапе было установлено совпадение минимаксного и вязкостного решения с функцией цены соответствующей дифференциальной игры [17]. Затем, А.И. Субботиным в работах [13, 27] было получено прямое доказательство эквивалентности определений минимаксных и вязкостных решений, опиравшееся на результат, полученный в работе [1].

В 70-х годах в теории дифференциальных игр для построения функции цены А. Г. Ченцовым в ряде работ был предложен и развит метод программных итераций [18, 21]. Позже А. И. Субботиным и А. Г. Ченцовым этот метод был применен для построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби [19]. Часть результатов данной диссертации является продолжением этих исследований.

Другое направление исследований, представленных в диссертации, связано с теорией разрывных решений. Необходимость рассматривать такие решения возникает при исследовании достаточно широкого круга практических задач. Например, подобная ситуация наблюдается в задачах оптимального быстродействия, где функция оптимального гарантированного результата может быть разрывной. При определенных условиях минимаксное решение краевой задачи типа Дирихле для уравнений с частными производными первого порядка существует и единственно в классе разрывных функций [14, 26].

В работе [15] А. И. Субботиным было предложено понятие многозначного M-решения, которое является естественным развитием понятия минимаксного решения. В основе этого понятия лежит свойство слабой инвариантности множества, представляющего M-решение, относительно характеристического дифференциального включения. Эта работа явилась продолжением исследований, опубликованных в [13]–[14]. Буква M в названии решения означает "многозначное" и "минимаксное". Введение этого понятия позволяет упростить и унифицировать исследования разрывных решений. Кроме того, понятие M-решений позволяет значительно расширить класс задач, для которых удается определить обобщенные решения уравнений с частными производными первого порядка.

Существенное продвижение в этих исследованиях было в значительной мере обусловлено развитием аппарата и методов негладкого и выпуклого анализа в работах А. Ф. Филиппова, В .И. Благодатских, Б. Н. Пшеничного, В. Ф. Демьянова, Ф. Кларка, Р. Рокафеллара, Ж.-П. Обэна и других.

В теории дифференциальных игр известно, что дифференциальную игру можно аппроксимировать многошаговыми играми. Конструкции, основанные на таких аппроксимациях, использовались в работах В. Флеминга, Н. Н. Красовского, Л. С. Понтрягина, Б. Н. Пшеничного и многих других авторов. Разработки вычислительных алгоритмов наиболее продвинуты в случае, когда функция цены или ее множества Лебега выпуклы. Основной задачей, которую требуется решать в этих алгоритмах является построение выпуклых оболочек функций или множеств. Разработки алгоритмов для упомянутого случая активно ведутся в Екатеринбурге В. С. Пацко и его сотрудниками, в Московском государственном университете на кафедре оптимального управления, а также в г.Долгопрудном в МФТИ Е. С. Половинкиным и его учениками.

В теории дифференциальных игр известны постановки задач аппроксимации областей достижимости дифференциальной игры с помощью заданного набора базовых множеств. Так, например, в работах Ф. Л. Черноусько [22] и А. В. Куржанского [25] области достижимости аппроксимируются эллипсоидами или параллелепипедами. Подобные задачи аппроксимации решаются либо за счет использования геометрических закономерностей, либо с использованием методов негладкого и выпуклого анализа, в частности, субградиентных методов. Из обширного списка известных работ в этой области особо следует упомянуть исследования Р. Рокафеллара и Б. Н. Пшеничного.

<u>**Целью работы**</u> является:

1) Исследование многозначных обобщенных решений уравнений Гамильтона-Якоби в случае, когда гамильтониан не удовлетворяет условию Липшица по фазовым переменным.

2) Применение M-решений для разрывных уравнений Гамильтона-

Якоби. Разработка метода построения M-решений этих уравнений.
3) Разработка численного метода построения функции цены линейной дифференциальной игры.
4) Применение методов выпуклого и негладкого анализа в задаче оптимизации хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми многогранниками.

Общие методы исследования опираются на концепции и результаты теории оптимального управления и дифференциальных игр, конструкции функционального, выпуклого, негладкого и многозначного анализа.

Научная новизна работы заключается в следующем:
1. Доказана теорема существования многозначных M-решений задачи Коши для уравнений Гамильтона-Якоби, гамильтониан которого не удовлетворяет условию липшица по фазовым переменным и исследованы их свойства.
3. Доказана теорема существования M-решений задачи Коши для разрывных уравнений Гамильтона-Якоби.
4. Обоснована возможность построения M-решения с помощью итерационной процедуры.
5. Предложен новый алгоритм построения кусочно-линейной сопряженной функции, который может использоваться, например, при построении функции цены дифференциальной игры.
6. Решена задача оптимизации хаусдорфова расстояния между двумя выпуклыми многогранниками, на основе свойств субградиентов.
Все основные результаты диссертационной работы являются новыми.

Теоретическая и практическая ценность работы.

Рассмотрены вопросы существования многозначных M-решений задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби для достаточно широкого класса задач. Предложенные в диссертации идеи и методы доказательств демонстрируют различные подходы к исследованию обобщенных решений. Предлагаемая итерационная процедура может быть положена в основу разработки алгоритмов и программ, реализуемых на ЭВМ и позволяющих получать M-решения.

Изложенный в диссертации метод построения кусочно-линейной сопряженной функции носит конструктивный характер. Все рассмотренные методы решения задачи оптимизации хаусдорфова расстояния между выпуклыми многогранниками теоретически обоснованы и численно реализованы на ЭВМ.

Апробация работы. Результаты работы докладывались на научных семинарах на кафедре информатики и процессов управления Уральского госуниверситета и в отделе динамических систем института Математики и Механики УрО РАН; на международной конференции "Nonlilear analysis and control theory" в Порто (Португалия) в 1999г.; на четвертой Всероссийской научно-технической конференции Информационные технологии и электроника в Екатеринбурге в 1999 г.; а также на ряде региональных школ и конференций.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 7 работ.

Структура и объем диссертации. Работа состоит из введения, четырех глав и списка литературы. Нумерация параграфов независимая в каждой главе. Объем работы составляет 109 страниц машинописного текста. Список литературы включает 134 наименования.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во **введении** обосновыватся актуальность темы, определяется цель исследований. Дается обзор литературы по исследуемой тематике, приводятся основные ссылки на используемые результаты. Кратко изложено содержание работы

Первая глава состоит из шести параграфов и посвящена исследованию задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби, гамильтониан которого не удовлетворяет условию Липшица по фазовым переменным.

В первом параграфе дается постановка задачи. Рассматривается задача Коши для уравнения Гамильтона-Якоби

$$\frac{\partial u(t,x)}{\partial t} + H(t,x,u(t,x),D_x u(t,x)) = 0, \qquad (t,x) \in [0,T] \times R^n, \quad (1)$$

с краевым условием

$$u(T,x) = \sigma(x), \quad x \in R^n. \quad (2)$$

Здесь $D_x u = (\partial u/\partial x_1, \ldots, \partial u/\partial x_n)$ — градиент функции $u(t,x)$ по переменной x; функция $\sigma : R^n \mapsto R$, задающая граничное условие, непрерывна.

Гамильтониан $H(t,x,z,s)$ данной системы удовлетворяет условиям:

(a) функция $H(t,x,z,s)$ непрерывна в области определения, и не возрастает по переменной z;
(b) для любых $(t,x) \in [0,T] \times R^n$ и $z \in R$ выполняется условие Липшица по переменной s

$$\sup_{p,s \in R^n} |H(t,x,z,p) - H(t,x,z,s)| - \lambda(x)\|p-s\| \leq 0,$$

где $\lambda(x) = \Lambda(1+\|x\|)$ с константой Λ;
(c) Для любых $(t,x) \in [0,T] \times R^n$ и $z \in R$ выполняется оценка

$$|H(t,x,z,0)| \leq \omega(1+\|x\|+|z|)$$

с константой ω.

Во втором параграфе для рассматриваемой задачи вводится многозначное отображение

$$E(t,x,z,s) = \{(f,g) \in R^n \times R : \tag{3}$$
$$\|f\| \leq \lambda(x),\ g = \langle s,f\rangle - H(t,x,z,s)\},$$

где $\lambda(x)$ — величина из условия (b) для гамильтониана и рассматривается характеристическое дифференциальное включение (ДВ)

$$(\dot{x},\dot{z}) \in E(t,x,z,s). \tag{4}$$

В работе [27] приводятся свойства, определяющие класс допустимых ДВ. В данном параграфе доказывается, что ДВ (4) удовлетворяет всем этим свойствам и, следовательно, является допустимым.

Аналогично понятию верхних и нижних решений в теории непрерывных минимаксных решений в третьем параграфе вводятся понятия эпи-решений и гипо-решений.

Определение 1.5 *Эпи-решением (соответственно, гипо-решением) задачи* (1), (2) *будем называть замкнутое множество $U \subset [0,T] \times R^n$ (соотв., $V \subset [0,T] \times R^n$), слабо инвариантное относительно ДВ* (4) *и удовлетворяющее условию $(T,x,z) \in U \Longrightarrow z \geq \sigma(x)$, (соотв., $(T,x,z) \in V \Longrightarrow z \leq \sigma(x)$).*

Вводятся следующие обозначения:

$$U_* = \mathrm{cl} \bigcup_{U \in \mathcal{U}} U, \qquad V_* = \mathrm{cl} \bigcup_{V \in \mathcal{V}} V.$$

Здесь символами $\mathcal{U}$ и $\mathcal{V}$ обозначены совокупности эпи-решений и гипо-решений, соответственно.

Исследуются свойства эпи-решений и гипо-решений и доказывается, что множества U_* и V_* являются максимальными по включению эпи-решением и гипо-решением, соответственно. Определяется M-решение исследуемой задачи.

Определение 1.6 *M-решением задачи* (1), (2) *называется множество*

$$W = U_* \cap V_*. \tag{5}$$

В четвертом параграфе содержится основной результат первой главы: теорема существования M-решения.

Теорема 1.2 *Множество W, определенное равенством* (5), *удовлетворяет условию*

$$W(t,x) = \{z \in R : (t,x,z) \in W\} \neq \emptyset \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times R^n,$$

Приведены два различных способа ее доказательства. Идея первого способа состоит в аппроксимации рассматриваемого гамильтониана последовательностью сходящихся к нему гамильтонианов, каждый из которых кроме условий (a)–(e) удовлетворяет условию Липшица по фазовым переменным. Получаем последовательность задач Коши для уравнения Гамильтона-Якоби, решениями которых являются непрерывные минимаксные решения. Доказывается, что эти решения аппроксимируют M-решение исходной задачи.

Прототипом второго способа доказательства теоремы существования M-решений является метод программных итераций, разработанный в теории дифференциальных игр [18, 21]. В отличие от первого способа, в этом доказательстве не используется факт существования минимаксных решений для случая, когда гамильтониан удовлетворяет условию Липшица по фазовым переменным.

Идея метода программных итераций основана на свойствах оператора A, который произвольному множеству $W \subset D$ ставит в соответствие некоторое множество $W' = A(W) \subset D$, определенное таким образом.

Точка (t_0, x_0, z_0) содержится в $A(W)$ тогда и только тогда, когда для любых $p \in R^n$ и $\tau \in [t_0, T]$ существует траектория $(x(\cdot), z(\cdot))$, являющаяся решением дифференциального включения (4) с начальным условием $x(t_0) = x_0$, $z(t_0) = z_0$, такая, что $(\tau, x(\tau), z(\tau)) \in W$.

В пятом параграфе дается другое определения M-решения задачи Коши (1), (2) и доказывается его эквивалентность определению 1.6.

Определение 1.7 *M-решением задачи* (1), (2) *называется максимальное замкнутое множество $Y \subset [0, \theta] \times R^n \times R$, которое слабо инвариантно относительно ДВ* (4) *и удовлетворяет условию $Y(T) = \operatorname{gr} \sigma$, где $Y(T) = \{(x, z) : (T, x, z) \in Y\}$.*

В работе [30] было показано, что эти два определения эквивалентны не для всех уравнений с частными производными первого порядка. В общем случае M-решения корректно определяются только первым способом. Так, например, подобные определения не будут эквивалентными при исследовании M-решений задач типа Дирихле.

В последнем параграфе первой главы приводятся примеры задач, для которых удается выписать M-решения. Здесь, в частности, демонстрируется, что M-решение иногда может содержать график непрерывной функции, которая могла бы называться минимаксным решением, поскольку она обладает свойствами u-стабильности и v-стабильности одновременно.

Вторая глава диссертации посвящена исследованию уравнений Гамильтона-Якоби более общего вида. Здесь гамильтониан системы $H(t, x, z, p)$ может не только не удовлетворять условию Липшица, как в первой главе, но и быть разрывным по x. В качестве обобщенных решений задачи Коши для таких уравнений также используются M-решения.

Для разрывных функций конструкция характеристических ДВ модифицируется следующим образом. Положим

$$H_*(t, x, z, p) = \lim_{\xi \to x, \eta \to z} \inf H(t, \xi, \eta, p)$$

$$H^*(t, x, z, p) = \lim_{\xi \to x, \eta \to z} \sup H(t, \xi, \eta, p) \tag{6}$$

$$\widetilde{H}(t, x, z, p) = \{h \in R : H_*(t, x, z, p) \leq h \leq H^*(t, x, z, p)\}$$

В данной главе роль характеристического ДВ (4) в определении эпи-решений, гипо-решений и M-решений играет характеристическое ДВ

$$(\dot{x}(t), \dot{z}(t)) \in E(t, x(t), z(t), p), \tag{7}$$

с многозначным отображением

$$E(t,x,z,p) = \{(f, \langle f,p\rangle - h) \in R^n \times R : \tag{8}$$
$$\|f\| \le \lambda(t,x,z), h \in \widetilde{H}(t,x,z,p)\}$$

В отличие от характеристического ДВ (4), использовавшегося в первой главе, здесь возникает неоднозначность не только в выборе $f \in R^n$, но и в выборе $g = (\langle f,p\rangle - h) \in R$.

Отличительной особенностью исследований второй главы является сравнение свойств получаемых M-решений с помощью методов, характерных для двух различных теорий: теории минимаксных решений и теории вязкостных решений. Так, доказана следующая теорема:

Теорема 2.1 *Пусть* $u : [0,T] \times R^n \mapsto R$ *(соответственно,* $v : [0,T] \times R^n \mapsto R$*) - некоторая полунепрерывная сверху (снизу) функция. Ее надграфик (подграфик) является эпи-решением (соответственно, гипо-решением) задачи* (1), (2) *тогда и только тогда, когда выполняется неравенство* (9) *(соответственно,* (10)*)*

$$H_*(t,x,u(t,x),p) \le 0 \tag{9}$$

для любых $(t,x) \in [0,T] \times R^n$ *и* $p \in D^-u(t,x)$,

$$H^*(t,x,v(t,x),p) \ge 0 \tag{10}$$

для любых $(t,x) \in [0,T] \times R^n$ *и* $p \in D^+v(t,x)$).

Здесь $D^-u(t,x)$ и $D^+u(t,x)$ – субдифференциал и супердифференциал функции $u(t,x)$.

Как и в первой главе, применяя метод программных итераций, рассматриваются последовательности множеств

$$U_0 = \Pi(\operatorname{epi}\sigma), \quad U_{k+1} = A(U_k), \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{11}$$

$$V_0 = \Pi(\operatorname{hypo}\sigma), \quad V_{k+1} = A(V_k), \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{12}$$

$$W_0 = \Pi(\operatorname{gr}\sigma), \quad W_{k+1} = A(W_k), \quad k = 0,1,2,\ldots \tag{13}$$

Доказана теорема о возможности применения метода программных итераций для получения M-решений разрывных уравнений Гамильтона-Якоби.

Теорема 2.2 *Максимальное эпи-решение задачи* (1), (2) *совпадает с множеством*

$$U_\infty = \lim_{k\to\infty} U_k = \cap_{k=0}^{\infty} U_k,$$

Максимальное гипо-решение задачи (1), (2) *совпадает с множеством*

$$V_\infty = \lim_{k-\infty} V_k = \cap_{k=0}^{\infty} V_k,$$

M-решение задачи (1), (2) *совпадает с множеством*

$$W_\infty = \lim_{k\to\infty} W_k = \cap_{k=0}^{\infty} W_k.$$

Доказана теорема существования M-решений для разрывных уравнений.

Теорема 2.3 *M-решение задачи Коши* (1), (2), *определенное равенством $W = U_* \cap V_*$, удовлетворяет условию*

$$W(t,x) = \{z \in R : (t,x,z) \in W\} \neq \emptyset \quad \forall (t,x) \in [0,T] \times R^n,$$

Показана совместимость полученных решений с классическими решениями, а также с непрерывными и разрывными минимаксными решениями. Кроме того, показано, что многозначные M-решения можно применять также в задачах управления, в которых динамика задана дифференциальными включениями. В этом случае, нижняя огибающая M-решения соответствующей задачи Коши для уравнения Гамильтона-Якоби совпадает с графиком функции гарантированного результата для задачи управления.

Третья глава диссертации посвящена разработке вычислительного метода, позволяющего находить функцию цены линейной дифференциальной игры с выпуклым функционалом платы. Алгоритм, описываемый в данной главе, позволяет для заданного разбиения по времени $\{\tau_i\}$ построить множества, зависящие от τ_i, которые при диаметре разбиения, стремящемся к нулю, сходятся к сечениям множеств уровня функции цены дифференциальной игры, отвечающим моментам времени τ_i.

С точки зрения вычислений, задача сводится к построению верхней огибающей заданного набора линейных функций.

$$f_i(x) = \langle l_i, x\rangle - c_i \tag{14}$$

где $x \in R^n$, $l \in R^n$, $c \in R$, $i = 1, \ldots, m_0$. Предполагается, что векторы l_i попарно различны, т.е.

$$\forall i \neq j \ \Rightarrow \ l_i \neq l_j.$$

Рассматривается верхняя огибающая этих функций

$$V(x) = max_{i \in 1,\ldots,m_0}(\langle l_i, x\rangle - c_i). \tag{15}$$

Отличительной особенностью предложенного алгоритма является то, что в действительности решается двойственная задача вычисления значений сопряженной функции. Для кусочно-линейных функций вида (15) достаточно иметь значения сопряженной функции $V^*(s) = sup_{x \in R^n}(\langle s, x\rangle - V(x))$, соответствующие векторам l_i. Таким образом, требуется для любого $i \in 1, .., m_0$ вычислить значение $V^*(l_i)$.

Несмотря на то, что в принципе, задачу построения верхней огибающей линейных функций можно решить методами линейного программирования, например, используя последовательно симплекс метод, в приложениях, где возникает данная задача, в частности, в построениях функции цены дифференциальной игры, число линейных функций оказывается слишком большим. Это является причиной того, что непосредственное применение традиционных методов приводит к чрезмерному объему вычислений.

Основной принцип решения поставленной задачи состоит в том, что имея верхнюю огибающую для m функций $V_m(x)$, добавляем очередную линейную функцию $f_{m+1}(x)$. Процесс будем повторять до тех пор, пока все линейные функции не окажутся рассмотренными. При этом, добавление очередной функции $f_{m+1}(x)$ производится согласно определенному порядку нумерации функций. Этот порядок задается таким образом, чтобы для любого $m < m_0$ выполнялось следующее условие:

$$l_i \notin \mathrm{co}\{l_j,\ j \leq m\} \qquad \forall i\ :\ m < i \leq m_0. \tag{16}$$

Доказывается, что задание такого порядка возможно и описан конструктивный метод его построения.

Рассуждения опираются на следующую лемму и ее следствие.

Лемма 3.2 *Для функции $V_m(x) = max_{i \in 1,\ldots,m}(\langle l_i, x\rangle - c_i)$ и сопряженной к ней функции $V_m^*(s) = max_{x \in R^n}(\langle s, x\rangle - V_m(x))$ условие $s \in \mathrm{co}\{l_i,\ i \leq m\}$ равносильно неравенству $V_m^*(s) < \infty$.*

Следствие 3.1 *Если линейные функции $f_i(x)$ упорядочены в соответствии с условием* (16), *то* $V_m \neq V_{m+1}$.

В настоящее время известны более эффективные алгоритмы решения указанной задачи, ориентированные на применение в дифференциальных играх и использующие в той или иной мере особенности этих приложений. Ряд алгоритмов построения множеств уровня функции цены дифференциальной игры описан в работах [2, 3]. Вместе с тем, полученные результаты не являются исчерпывающими. Предложенный новый алгоритм дополняет разработки в этой области.

В четвертой главе рассматривается оптимизационная задача, постановка которой, также как и ее приложения тесно связаны с такими разделами математики, как теория оптимального управления, теория дифференциальных игр, теория распознавания образов. Задача состоит в аппроксимации одного выпуклого многогранника $A \in R^n$ другим выпуклым многогранником $B \in R^n$. Близость многогранников расссматривается в хаусдорфовой метрике.

Обычно для решения подобной задачи оптимизации используются геометрические методы, непосредственно вытекающие из ее постановки. Отличительной особенностью исследований, представленных в этой главе является использование аппарата выпуклого и негладкого анализа, в частности, субградиентных методов.

В процессе решения задачи минимизации хаусдорфова расстояния между двумя многогранниками предполагается, что один из них неподижен, а другой перемещается с помощью параллельного переноса на вектор $x \in R^n$. Каждое значение x однозначно определяет расстояние между многогранниками, т.е. можно говорить о некоторой функции $F(x)$, минимум которой и требуется найти.

Основу решения составляют исследования субдифференциала этой функции $\partial F(x)$. Вводятся обозначения:

$$I(x) = I_A(x) \bigcup J_B(x),$$

$$I_A(x) = \{i \ : \ \mathrm{dist}\,(a_i, B + x) = F(x)\},$$

$$J_B(x) = \{j \ : \ \mathrm{dist}\,(b_j + x, A) = F(x)\}.$$

Множество $I_A(x)$ – это номера тех вершин многогранника A, расстояние от которых до многогранника $B + x$ равно хаусдорфову расстоянию между A и $B + x$. Аналогично определено $I_B(x)$ – множество номеров вершин многогранника $B + x$. Таким образом, субдифференциал функции $F(x)$ имеет вид

$$\partial F(x) = \mathrm{co}\left\{L_A(x) \bigcup L_B(x)\right\} \tag{17}$$

$$L_A(x) = \{-l : \exists i \in I_A(x) : \langle l, a_i - x\rangle - \rho_B(l) = F(x),\ \|l\| = 1\}$$
$$L_B(x) = \{l : \exists j \in J_B(x) : \langle l, b_j + x\rangle - \rho_A(l) = F(x),\ \|l\| = 1\}.$$

где $\rho_X(l)$ – опорная функция для множества $X \in R^n$, которая определяется равенством

$$\rho_X(l) = \max\{\langle x, l\rangle \quad x \in X\}.$$

На основе геометрических свойств субдифференциала $\partial F(x)$ в третьем параграфе этой главы удалось разработать метод, который позволяет находить решение в результате выполнения конечного числа действий, зависящем только от количества вершин и граней исходных многогранников.

На примере плоского случая, т.е. выпуклых многоугольников на плоскости показано, что основу решения составляют процедуры, позволяющие находить окружности минимального радиуса, проходящие через определеные точки и касающиеся определенных прямых. Полное решение задачи исчерпывается рассмотрением всех вариантов возможного состояния множества $I(x)$. Несомненным достоинством этого метода является получение точного решения.

Другая группа методов решения поставденной задачи оптимизации относится к численным итерационным субградиентным методам. Материал четвертой главы содержит обоснование применимости различных имеющихся суградиентных методов. Кроме того, разрабатываются новые подходы, ускоряющие поиск решения с учетом особенностей имеющейся постановки.

По результатам исследований были созданы программы, реализующие все расссматриваемые методы для плоского случая. В результате численных экспериментов на плоскости выяснилось, что лучшие результаты по скорости работы и точности получаются при использовании многошагового субградиентного метода. Именно многошаговый субградиентный метод и был выбран для реализации алгоритма в трехмерном случае, несмотря на то, что с точки зрения программирования он является наиболее сложным.

Идея этого метода состоит в том, что уточняется область возможного расположения точки минимума x^*. Пусть уже получены точки $x^0, \dots, x^k$. По свойствам субдифференциала можно утверждать, что точка минимума x^* лежит в области

$$Q_k = \{x: \langle h_i, x^* - x^i \rangle \leq 0, \ \forall h_i \in \partial f(x^i), \ i = 0, \dots, k\},$$

Таким образом, многократно приходится решать задачу отсечения в n-мерном пространстве.

Представленные в этой главе различные методы дополняют друг друга. Можно говорить о создании аппарата программной поддержки при решении широкого круга задач аппроксимации. В частности, при аппроксимации областей достижимости дифференциальных игр эталонными многогранниками.

Автор выражает глубокую благодарность доценту Субботиной Н.Н. и руководителю работы профессору Ушакову В.Н. за постоянное внимание и всестороннюю поддержку.

Список цитируемых работ

[1] Гусейнов Х.Г., Субботин А.И., Ушаков В.Н. Производные многозначных отображений и их применение в игровых задачах управления.// Проблемы управления и теории информации. 1985. Т. 14. № 3. С. 1-14.

[2] Зарх М.А., Пацко В.С. Численное решение дифференциальных игр третьего порядка.// Изв. АН СССР. Техн. кибернетика. 1987. № 6. стр.162-169.

[3] Исакова Е.А., Логунова Г.В., Пацко В.С. Построение стабильных мостов в линейных дифференциальных играх с фиксированным моментом окончания.// Алгоритмы и программы решения линейных дифференциальных игр. УНЦ АН СССР, Свердловск. 1984. С. 127-158.

[4] Красовский Н.Н. Игровые задачи о встрече движений. М.: Наука, 1970. 420 с.

[5] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Альтернатива для игровой задачи сближения.// Прикл. матем. и мех. 1970. Т. 34. С. 1005-1022.

[6] Красовский Н.Н., Субботин А.И. Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974. 456 с.

[7] Красовский Н.Н., Решетова Т.Н О программном синтезе гарантирующего управления.// Проблемы управления и теории информации. 1988. Т. 17. No. 6. С.1-11.

[8] Красовский Н.Н., Третьяков В.Е. Стохастический программный синтез для позиционной дифференциальной игры.// Докл. АН СССР. 1981. Т. 259 N. 1. С. 24-27.

[9] Кружков С.Н. Обобщенные решения уравнений Гамильтона-Якоби типа эйконала. I. // Мат. сб. 1975. Т. 98, №3. С. 450–493.

[10] Маслов В.П., Самборский С.Н. Существование и единственность решений стационарных уравнений Гамильтона-Якоби и Беллмана. Новый подход.// Доклады РАН. 1992. Т. 324. № 6. С. 1143-1148.

[11] Маслов В.П., Колокольцов В.Н. Идемпотентный анализ и его применение в оптимальном управлении. М.: Физ.-мат. литература. ВО Наука, 1994. 144 с.

[12] Субботин А.И. Обобщение основного уравнения теории дифференциальных игр. // Докл. АН СССР. 1980. Т. 254. No. 2. С. 293-297.

[13] Субботин А.И. Минимаксные неравенства и уравнения Гамильтона-Якоби. М.: Наука, 1991.

[14] Субботин А.И. Непрерывные и разрывные решения краевых задач для уравнений с частными производными первого порядка.// Доклады РАН. 1992. Т. 323. № 1. С. 30–34.

[15] Субботин А.И. М-решения уравнений с частными производными первого порядка и их применение в дифференциальной игре преследования.// Сборник научных трудов Век Радио. ИММ УрО РАН, 1996.

[16] Субботин А.И., Субботина Н.Н. Необходимые и достаточные условия для кусочно-гладкой цены дифференциальной игры. // Доклады АН СССР. 1978. Т. 243. No. 4. С. 829-865.

[17] Субботин А.И., Тарасьев А.М., Ушаков В.Н. Обобщенные характеристики уравнений Гамильтона–Якоби. // Изв. АН. Техн. кибернетика. 1993. No. 1. С. 190-197.

[18] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Оптимизация гарантии в задачах управления. М.: Наука, 1981.

[19] Субботин А.И., Ченцов А.Г. Итерационная процедура построения минимаксных и вязкостных решений уравнений Гамильтона-Якоби.// Доклады РАН. 1996. Т. 348.

[20] Тарасьев А.М., Успенский А.А., Ушаков В.Н. Конечно-разностный метод построения функции оптимального гарантированного результата.// Сборник избранных докладов. Гагаринские научные чтения. Москва. 1991. С. 166-172.

[21] Ченцов А.Г. Итерационная программная конструкция для дифференциальной игры с фиксированным временем окончания.// Доклады АН СССР. 1978. Т. 240. № 1. С. 796-800.

[22] Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 319 с.

[23] Crandall M.G., Lions P.L. Viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.// Trans.Amer.Math.Soc. 1983. V. 277. P. 1-42.

[24] Crandall M.G., Evans L.C., Lions P.-L. Some properties of viscosity solutions of Hamilton-Jacobi equations.// Trans.Amer.Math.Soc. 1984. V. 282. P. 487-502.

[25] Kurzhanski A.B., Valyi I. Ellipsoidal calculus for estimation and control.// Birkhauser, Boston. 1997.

[26] Subbotin A.I. Discontinuous solutions of a Dirichlet type boundary value problem for the first order partial differential equation.// Russian J. Numer. Anal. Math. Modelling. 1993. V. 8. № 2. P. 145-164.

[27] Subbotin A.I. Generalized Solutions of First Order PDEs: The Dynamical Optimization Perspective.// Birkhäuser. Boston, 1994.

Публикации основных результатов

[28] Лахтин А.С. Многозначные отображения и уравнения Гамильтона-Якоби.// Проблемы теоретической и прикладной математики: тезисы докладов 25 молодежной конференции. Екатеринбург, УрО РАН. 1995. С. 48.

[29] Лахтин А.С. Об одном алгоритме построения кусочно-линейной сопряженной функции.// Деп. в ВИНИТИ 23.03.95, № 787-В95. 12 с.

[30] Лахтин А.С., Субботин А.И. Многозначные решения уравнений с частными производными первого порядка// Математический сборник. 1998. Т. 189. № 6. С. 33-58.

[31] Лахтин А.С., Субботин А.И. Минимаксные и вязкостные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка.// Доклады РАН. 1998. Т. 359. № 4. С. 452-455.

[32] Лахтин А.С., Субботин А.И. Обобщенные решения разрывных уравнений с частными производными первого порядка.// Деп. в ВИНИТИ 30.01.98. № 267-В98. 18 с.

[33] Лахтин А.С. Задача минимизации хаусдорфова расстояния.// Четвертая Всероссийская научно-техническая конференция Информационные технологии и электроника: тезисы докладов. Екатеринбург. 1999. С. 5.

[34] Lakhtin A.S. Constructing M-solutions for discontinuous Hamilton-Jacobi equations by sequensive algorithm.// Workshop on nonlinear analysis and control theory. Porto, Portugal. 1999. P. 16-17.