УДК 681.511.22

АНАЛИЗ ТОЧНОСТИ ОБЩЕГО АЛГЕБРАИЧЕСКОГО МЕТОДА ПОСТРОЕНИЯ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕАРИЗОВАННЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

ACCURACY ANALYSIS OF REACHEBLE SETS COMPUTATION GENERALIZED ALGEBRAIC APPROACH FOR LINEARIZED DISCRET-TIME SYSTEMS

Горанов Александр Юрьевич, аспирант каф. «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: goranovayu@mail.ru, Тел.: +7(902)509-45-04
Шориков Андрей Федорович, д-р. ф.-м. наук, профессор каф. «Прикладная математика», Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина, Россия, 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19. E-mail: afshorikov@mail.ru. Тел.: +7(922)205-57-57

Alexandr Y. Goranov, Postgraduate student, Department «Applied mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, 620002, Mira street, 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: goranovayu@mail.ru. Ph.: +7(902)509-45-04
Andrey F. Shorikov, Doctor of Physics and Mathematics Sc., Prof., Department «Applied mathematics», Ural Federal University named after the first President of Russia B.N. Yeltsin, 620002, Mira str., 19, Ekaterinburg, Russia. E-mail: afshorikov@mail.ru. Ph.: +7(922)205-57-57

Аннотация: Рассматривается задача сравнения областей достижимости непрерывной нелинейной и линеаризованной дискретной управляемых динамических систем. В качестве объекта управления используется модель летательного аппарата, движение которого описывается системой нелинейных динамических уравнений. Производится преобразование исходной модели объекта к дискретному линейному виду. Приводятся описание общего алгебраического метода построения области достижимости и сравнение областей достижимости исходной нелинейной непрерывной и линейной дискретной динамических систем.

Abstract: In this paper, problem of reachable set comparison of the nonlinear continuous controlled system and linearized discrete-time system is considered. As the controlled plant we use the model of aircraft in which the motion is described by nonlinear differential equation system. The initial plant model is reduced to linear discrete-time form. The description of generalized recurrent method of the linear system reachable sets computation is provided and the comparative analysis of the received results with an initial reachable set of the nonlinear controlled system is made.

***Ключевые слова*:** области достижимости; летательный аппарат; линейные системы; дискретные системы.
***Key words*:** reachable sets; aircraft; linear systems; discrete-time systems.

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время в теории управления динамическими системами большое внимание уделяется проблеме определения или оценивания множества возможных фазовых состояний системы в различные моменты времени. Эти множества, называемые множествами достижимости, играют важную роль при решении задач управления, наблюдения и прогнозирования. Так, точное или приближенное значение множеств достижимости управляемой системы позволяет оценить предельные возможности системы управления и существенно упростить решение задачи оптимального управления. Применительно к системам, подверженным возмущениям, множества достижимости дают оценку разброса траекторий под влиянием этих возмущений.

Все указанные задачи сводятся к построению или оцениванию множеств достижимости, в которых может лежать фазовый вектор системы, и к операциям с этими множествами, что в дальнейшем служит основой для разработки различных численных алгоритмов поиска решения. Однако практическое построение множеств достижимости, особенно в нелинейных

системах большой размерности, представляет собой весьма сложную задачу, поэтому заслуживают внимания эффективные методы аппроксимации этих множеств.
В данной работе рассматривается метод аппроксимации областей достижимости исходной нелинейной модели движения летательного аппарата с помощью построения точных областей достижимости фазовых состояний линеаризованной вдоль опорной траектории дискретной динамической системы на момент времени $t \in \overline{1,T}$, основывающийся на общем рекуррентном алгебраическом методе, описанном в работах [7, 9].

НЕЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ

В качестве объекта управления рассматривается летательный аппарат, уравнения движения которого основываются на общих законах механики твердого тела, а динамика описывается с помощью динамических уравнений поступательного движения центра масс и вращательного движения вокруг центра масс:

$$\begin{cases} m\dfrac{d\vec{V}}{dt} + m\left(\vec{\omega}\times\vec{V}\right) = \vec{G} + \vec{P} + \vec{R}_A + \vec{F}_K + \vec{F}_{\text{упр}}, \\ \dfrac{d\vec{L}}{dt} + \vec{\omega}\times\vec{L} = \vec{M}_P + \vec{M}_A + \vec{M}_K + \vec{M}_{\text{упр}}, \end{cases} \qquad (1)$$

где m – масса ЛА; $\vec{V}$ – вектор скорости центра масс ЛА; $\vec{\omega}$ – вектор угловой скорости вращения вокруг центра масс; $\vec{L}$ – вектор кинетического момента ЛА как твердого тела; $\vec{G}$ – сила тяжести; $\vec{P}$ и $\vec{M}_P$ – вектор полной тяги и момент тяги двигателей относительно центра масс; $\vec{R}_A$ и $\vec{M}_A$ – векторы полной аэродинамической силы и полного аэродинамического момента; $\vec{F}_K$ и $\vec{M}_K$ – главный вектор и главный момент кориолисовых сил; $\vec{F}_{\text{упр}}$ и $\vec{M}_{\text{упр}}$ – главный вектор и главный момент управляющих сил.

Однако использование данных нелинейных уравнения вызывает трудности для построения областей достижимости и оценки возможности управления. Вследствие этого появляется необходимость в проведении дополнительных упрощений исходных нелинейных уравнений. Одним из подобных упрощений является линеаризация динамических уравнений относительно малых отклонений параметров движения от их программных значений.

В работах [1, 6] показано, что с помощью формулы Тейлора, ограничившись первыми членами разложения, исходная нелинейная функция нескольких переменных раскладывается в ряд по степеням приращений параметров движения в окрестности ее опорных значений.

В итоге формируется система линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами, описывающая динамику возмущенного движения летательного аппарата как твердого тела и представляющая собой модель объекта в векторно-матричной форме Коши

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) + G(t)\omega(t), \qquad (2)$$

где $x(t)$ – вектор состояния, $x(t)\in\mathbf{R}^7$; $u(t)$ – вектор управляющего воздействия, $u(t)\in\mathbf{R}^4$; $\omega(t)$ – вектор возмущающих воздействий, $\omega(t)\in\mathbf{R}^6$; $A(t)$ – матрица состояния системы, $A(t)\in\mathbf{R}^{7\times7}$; $B(t)$ – матрица управления, $B(t)\in\mathbf{R}^{7\times4}$;
$G(t)$ – матрица возмущений, $G(t)\in\mathbf{R}^{7\times6}$.

Полученная система линейных дифференциальных уравнений, подобно системе уравнений (1), описывает тот же динамический процесс, однако является приближенной (в процессе ее вывода отбрасываются переменные второго и выше порядков малости) и линейной относительно отклонений с переменными от времени коэффициентами.

В этом виде в качестве параметров состояния системы выступают отклонения кинематических параметров движения исходной динамической модели от значений опорной траектории объекта. Сам процесс формирования математической модели возмущенного движения летательного аппарата в виде (2) достаточно полно раскрыт в работах [1, 4, 6].

Примем ряд предположений: все компоненты фазового вектора системы (1) измеряются с заданной точностью и известны субъекту управления; для рассматриваемой в работе задачи построения области достижимости не учитываются оказываемые на систему возмущения.

ПОСТРОЕНИЕ ОБЛАСТЕЙ ДОСТИЖИМОСТИ ЛИНЕЙНОЙ ДИСКРЕТНОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Поскольку все современные системы управления ЛА являются цифровыми, то целесообразно в качестве допустимых управлений рассматривать класс кусочно-постоянных функций. В связи с этим полученной системе уравнений (2) ставится в соответствие дискретная динамическая система, процедура получения которой подробно изложена в [2, 3], и базируется на основных положениях теории дифференциальных уравнений.

Тогда на заданном целочисленном отрезке времени $k \in \overline{0,T}$, $T > 0$, $T \in \mathbf{N}$ рассматривается класс линейных управляемых систем, динамика которых описывается дискретным векторно-матричным
рекуррентным соотношением вида:

$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k). \qquad (3)$$

Здесь связь между шагом k и временем t однозначно определяется соотношением $t_k = T_0 k$, где T_0 – период дискретизации системы.

Считается, что на всем промежутке движения летательного аппарата к его динамическим параметрам предъявляются определенные требования, что, в свою очередь, приводит к формированию фазовых ограничений на начальные и допустимые для текущих условий полета области фазового пространства. Также к указанным ограничениям на фазовые состояния летательного аппарата добавляются требования к управляющим воздействиям, которые формулируются исходя из ограниченности физических возможностей рулевого привода.

Вследствие этого считается, что вектора начального и текущего состояния и вектор допустимых управлений удовлетворяют заданным ограничениям:

$$x(0) = x_0 \in \mathbf{X}(0) \subset \mathbf{R}^7,$$
$$x(k) \in \mathbf{M}(k) \subset \mathbf{R}^n,\ \forall k \in \overline{1,T},$$
$$u(k) \in \mathbf{P}(k) \subset \mathbf{R}^4, \forall k \in \overline{0,T-1}.$$

где $\mathbf{X}(0)$, $\mathbf{M}(k)$ и $\mathbf{P}(k)$ – выпуклые, замкнутые и ограниченные многогранники с конечным числом вершин соответственно в пространствах $\square^7$, $\square^4$.

Ставится задача: при заданных ограничениях определить множество всех возможных фазовых состояний $\mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0), T\right)$, в которое на момент времени T может быть переведена управляемая система (3)

$$\mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0), T\right) = \Big\{ x(T) : x(T) \in \mathbf{R}^7,$$
$$x(k+1) = A(k)x(k) + B(k)u(k),\ k \in \overline{1,T-1},$$
$$x(0) \in \mathbf{X}(0), x(t) \in \mathbf{M}(k), u(k) \in P(k) \Big\}.$$

Для решения поставленной задачи в работах [9] на основе полугруппового свойства областей достижимости [8] был разработан эффективный общий рекуррентный алгебраический метод построения точных областей достижимости для линейных дискретных управляемых систем.

Построение области достижимости в данном методе сводится к реализации построения последовательности одношаговых областей достижимости:

$$\mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0), T\right) = \mathbf{G}\left(k, \mathbf{G}_{+}(k), T\right),\ k \in \overline{1,T-1}, \quad (4)$$

где $\mathbf{G}_{+}(k) = \mathbf{G}\left(0, \mathbf{X}(0), k\right)$ – область достижимости на момент времени $T_0 k$, соответствующая паре $\left(\mathbf{X}(0), 0\right)$, которая является выпуклым, замкнутым и ограниченным многогранником с конечным числом вершин в $\square^7$.

Таким образом, реализуя построение областей достижимости только на один шаг вперед, можно получить финальную область достижимости, зависящую только от области достижимости на предыдущем шаге.

В работах [7, 9] приведено описание общего рекуррентного алгебраического метода для построения последовательности (4), где за основу взято описание области достижимости как множества всех вершин каждой из одношаговых областей достижимости, так и их опорных гиперплоскостей. Данный метод сводит решение задачи нахождения всех вершин области достижимости к алгебраическим операциям и решению конечного числа задач линейного математического программирования с использованием модифицированного симплекс-метода.

При поиске вершин выпуклой оболочки множества достижимости требуется рассмотреть только первый этап симплекс-метода, суть которого состоит в поиске опорного базисного допустимого решения, если таковое существует. Если базисное допустимое решение существует, то точка, соответствующая вектору, не является вершиной многогранника, поскольку ее можно представить как выпуклую комбинацию других точек. В противном случае, рассматриваемая точка является вершиной области достижимости.

ПРИМЕР РАБОТЫ АЛГОРИТМА АППРОКСИМАЦИИ

Произведем сравнение областей достижимости исходной нелинейной модели летательного аппарата, описываемого системой уравнений (1), и области достижимости линеаризованной системы, динамику которой характеризует система рекуррентных уравнений (3).

Результаты моделирования областей достижимости исходной нелинейной и линеаризованной систем представлены на рисунке 1. По произведенному моделированию видно, что области достижимости линеаризованной модели и исходной нелинейной модели совпадают с приемлемым качеством.

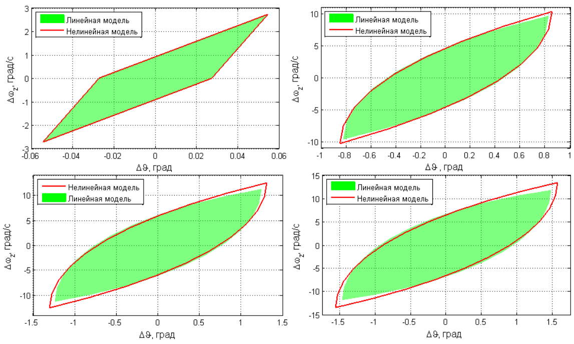

Рис. 1. Пример аппроксимации нелинейной ОД в □^{2}

Моделирование предложенного алгоритма аппроксимации областей достижимости нелинейной модели летательного аппарата проводилось в программной среде MATLAB R2014a.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В рамках данной работы описано преобразование исходной непрерывной нелинейной модели летательного аппарата к дискретному линейному виду. Произведено описание общего алгебраического метода построения областей достижимости.

Было проведено сравнение областей достижимости исходной и преобразованной систем, где предложенный способ аппроксимации, реализованный в программной среде MATLAB R2014a, показал достаточно хорошие результаты.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Абгарян К.А., Калязин Э.Л., Мишин В.П. Динамика ракет. 2-е изд., перераб. и доп. М.: Машиностроение, 1990. 464 с.

2. Булаев В.В., Шориков А.Ф. Методика дискретизации линейных динамических систем // Вестник Пермского университета. Серия: Математика. Механика. Информатика. 2016. № 2. С. 67–73.

3. Булаев, В.В., Горанов А.Ю. Формулировка задачи оптимального управления и моделирование динамики упругого механического объекта в фазовом пространстве // Вестник ЮУрГУ. 2015. Т. 15, № 4. С. 90–100.

4. Горанов А.Ю., Шориков А.Ф. Методика линеаризации динамической модели летательного аппарата вдоль опорной траектории // Наука и технологии. Материалы XXXVI Всероссийской конференции МСНТ. М. : РАН, 2016. С. 106–118.

5. Красовский Н.Н. Теория управления движением (линейные системы). М.: Наука, 1968. 476 с.

6. Лебедев А.А. Динамика полета беспилотных летательных аппаратов. М. : Машиностроение, 1973. 616 с.

7. Тюлюкин В.А., Шориков А.Ф. Алгоритм решения задачи терминального управления для линейной дискретной динамической системы // Автоматика и телемеханика. 1993. № 4. С. 115–127.

8. Черноусько Ф.Л. Оценивание фазового состояния динамических систем. Метод эллипсоидов. М.: Наука, 1988. 320 с.

9. Шориков А.Ф. Минимаксное оценивание и управление в дискретных динамических системах. Екатеринбург: Издательство Уральского государственного университета, 1997. 242 с.