В.Д. Матвеенко, д-р физ.-мат. наук, проф.,[1]
г. Москва

СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ПОЛЕЗНОСТИ, ЗАВИСЯЩИХ ОТ ХАРАКТЕРИСТИК БЛАГ[2]

В статье анализируется роль линейно однородных функций полезности от характеристик благ, изучаются свойства таких функций. Аргументируется, что всякая такая функция представляется как решение задачи оптимального выбора весов характеристик из множества весов. Последнее интерпретируется как множество способов поведения индивида или способов его отношения к жизни. Таким образом построена теория потребительского поведения, в которой потребитель осуществляет выбор, прежде всего, «отношения к жизни», лежащего в основе потребительского выбора, а уже затем – собственно потребляемого набора благ.

Ключевые слова: характеристики благ, функция полезности от характеристик, гедонические цены, теория потребительского поведения Ланкастера, способы поведения индивида

Введение

Исследования взаимосвязи цен разновидностей (моделей) товаров некоторой группы и *характеристик* этих товаров составляют так называемый *гедонический подход* (от гр. гедоне – наслаждение). Идея гедонического подхода состоит в том, чтобы соотнести количество продукта или, иными словами, его «потенциальный вклад… в благосостояние и счастье его покупателей и сообщества» [3] с характеристиками продукта.

Гедоническая гипотеза – это предположение о том, что рыночная цена определяется релевантными характеристиками объекта. Функция, соотносящая вектор характеристик с ценой изделия, обладающего этими характеристиками, называется *гедонической функцией.* Специальная область исследований посвящена построению гедонических функций с использованием регрессионных уравнений. Этот подход позволяет, в частности, оценивать цену нового продукта, запускаемого на рынок. Другое применение этого подхода связано с учетом изменений качества продуктов в индексах цен.

История применения гедонического подхода раскрыта в статье Грилихеса [8]. Начиная с 1920-х гг. гедонический подход стал применяться при анализе отдельных рынков (овощей [27], удобрений [26], автомобилей [3], алкогольных напитков [25]), а в 1950-х гг. возникла теория гедонических индексов [10, 11, 2].

В 1950–60-х гг. гедонический подход был использован для построения новой теории потребительского поведения. Ряд экономистов неоднократно выражал неудовлетворенность концепцией потребительской полезности, завися-

---

[1] *Матвеенко Владимир Дмитриевич* – доктор экономических наук, профессор, заведующий лабораторией Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики»; e-mail: vmatveenko@hse.ru.

[2] Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант 11-01-00878а).

щей от потребляемых количеств отдельных продуктов. Как писал Мас [21], «теория потребительского поведения имеет обескураживающе мало следствий для эмпирических исследований». Среди ряда теорий, составивших альтернативу традиционной теории потребления, лидирующее положение заняла теория Ланкастера [13, 14]. В ее основе лежит гипотеза, согласно которой потребительская полезность определяется свойствами – *характеристиками* (или *атрибутами*) – потребляемых товаров, а не количествами самих товаров. Потребитель, в рамках имеющегося бюджетного ограничения, выбирает количества товаров (отдельных или комбинаций), чтобы «извлечь» их характеристики и получить полезность от использования характеристик. По выражению Розена [24], в моделях такого рода «потребители тоже являются производителями. Товары не обладают финальными атрибутами для потребления, но покупаются, скорее, как затраты для функций самостоятельного производства окончательных характеристик. Потребители действуют, так сказать, как свои собственные «посредники»». Имеются и модели, в которых процесс преобразования товаров при их использовании домохозяйствами явно трактуется как *home production* (например, [20]). Розен [24] распространил подход Ланкастера на неделимые и редко покупаемые товары.

Как пишут Лоувьер и другие ученые [16], «стандартный подход Ланкастера постулирует, что товары (X) трансформируются в целевые характеристики, z, через отношение

$$z = BX \, , \tag{1}$$

где B – это матрица размера N на J, которая преобразует *J* товаров, т.е. альтернатив во множестве выбора в N объективных характеристик (т.е. атрибутов альтернатив).

Следовательно, B определяет технологию потребления, которая предполагается объективной, поскольку она одна и та же для всех потребителей (например, число цилиндров в двигателе конкретной марки и модели автомобиля одно и то же для всех). Может существовать множество отображений, так что несколько товаров могут производить одну характеристику и несколько характеристик могут производиться одним товаром. Ланкастер утверждает, что релевантные характеристики должны быть определены не в терминах реакции индивида на товар (которую мы будем называть потребительской услугой), а в терминах объективных мер, т.е. в терминах самого товара. Ланкастер не говорит, что не может быть различий между потребителями в способе, которым они получают какую-либо объективную характеристику. Однако, если такие различия существуют, они относятся к формированию функции предпочтений для z, т.е лежат вне сферы его теории».

Модель Ланкастера широко применяется в практике маркетинга при позиционировании, т.е. формировании мнения покупателей об уже присутствующих на рынке или новых запускаемых брендах. Как отмечается в [9], «модель Ланкастера позволяет маркетерам лучше понять осознаваемую потребителем ценность атрибутов в свете цены бренда. С позиций стратегии маркетинга, это понимание имеет конкретные следствия для формирования/переформирования продукта и выбора его цены».

Что может быть характеристиками товаров? Ряд авторов подчеркивал, что характеристики – это наблюдаемые свойства. Ланкастер [15] пишет, что «на характеристики смотрят, так сказать, со стороны товара, а не со стороны потребителя; они состоят потенциально из всех физических, химических, биологических и других объективных свойств товаров. Как пишет Розен [24], компоненты вектора характеристик, которым описывается товар, «объективно измеряются в том смысле, что восприятие или прочтение всеми потребителями количеств характеристик, воплощенных в каждом товаре, идентично, хотя, конечно, потребители могут отличаться в своих субъективных оценках альтернативных пакетов». Примеры характеристик, которые встречаются в прикладных исследованиях: легкость доступа, время доставки, специфические свойства объектов, например, число мест, расход топлива, мощность автомобиля.

Однако во многих случаях свойства товара не вполне объективны, поскольку непосредственно связаны с реакцией потребителя. Например, физические свойства книг одинаковы, но разные книги оказывают на потребителя разное действие. Постлвейт [22] в целом трактует характеристики с позиции удовлетворения базовых потребностей индивида, таких как питаться, иметь потомство, быть в безопасности и иметь защиту в физической и общественной среде, видеть удовлетворенными те же потребности у собственных детей; по его мнению, с точки зрения Ланкастера, «еда из продуктовых магазинов и ресторанные блюда преобразуются в удовлетворение голода, одежда – в защиту от стихий и т.д.» Однако к числу базовых потребностей Постлвейт относит и общественный престиж, достигаемый при потреблении определенных товаров – статусных символов. Он предлагает считать одной из характеристик товара мнение членов сообщества о потребителе данного товара.

В принципе, хотя это делается редко, в число характеристик могут включаться и отрицательные характеристики, например пресыщенность (товар надоедает, является в больших количествах вредным для здоровья, производится с ущербом для окружающей среды или в странах-политических противниках и т.п.).

Гедонические цены и теория потребительского поведения Ланкастера

В маркетинге активно используется концепция гедонических цен как оценок («теневых цен») характеристик, определяющих рыночные цены объектов. Товар ценой $\tilde{P}$ мыслится как корзина, состоящая из характеристик $z = (z_1, ..., z_N)$, имеющих гедонические цены $p_i, i = 1, ..., N$

$$\tilde{P} = p_1 z_1 + ... + p_N z_N \quad (2)$$

В таком случае

$$p_i = \frac{\partial \tilde{P}}{\partial z_i}, i = 1, ..., N. \quad (3)$$

Например, на рынке жилья коэффициенты гедонических цен интерпретируются как «теневые цены», отражающие потоки отдачи от данных атрибутов дома [7].

Экономическая теория гедонических цен построена Розеном [24]. Как отмечает Эдлефсен [6], «когда товары имеют измерение “качества” или обладают “характеристиками” в дополнение к количеству, цена, уплаченная за единицу количества, будет зависеть от выбранного уровня качества или характеристик. Таким образом, даже на конкурентных рынках традиционная концепция потребителей или производителей, встречающих экзогенно определенные цены, теряет во многом свой смысл. Вместо этого лица, принимающие решение, сталкиваются с экзогенно определенными функциями “гедонических” цен, которые специфицируют расходы, требуемые для достижения любого заданного уровня количества и качества. Когда “цены”, таким образом, становятся функциями, бюджетные ограничения становятся нелинейными. Поскольку почти все товары имеют измерение качества, следует признать, что бюджетные ограничения “реального мира”, как правило, нелинейные. Однако почти все результаты анализа сравнительной статики в экономической теории связаны с линейными ограничениями».

Упрощенная модель построена Дивертом [4]. Рассматривается группа товаров, каждый из которых обладает N характеристиками: 1,…,N. Товару данной группы (точнее, разновидности или модели) соответствуют вектор характеристик $z = (z_1, ..., z_N)$ и значение функции суб-полезности $Z = f(z)$. Функция полезности в период времени *t* имеет вид $U^t(X, Z)$, где X – переменная, описывающая другие товары (не входящие в рассматриваемую товарную группу). Функция полезности предполагается гладкой.

Рассмотрим кривую безразличия

$$U^t(X, Z) = u^t \tag{4}$$

или, в явной форме,

$$X = g^t(u^t, Z) \cdot \tag{5}$$

Здесь $\dfrac{\partial g^t(u^t, Z)}{\partial Z} < 0$. Пусть p^t – цена единицы X, P^t – цена единицы Z. Условие равенства предельной полезности относительной цене имеет вид

$$\frac{P^t}{p^t} = -\frac{\dfrac{\partial U}{\partial Z}}{\dfrac{\partial U}{\partial X}} = -\frac{dX}{dZ} = \frac{\partial g^t(u^t, Z)}{\partial Z}. \tag{6}$$

Отсюда

$$P^t = -p^t \frac{\partial g^t(u^t, Z)}{\partial Z}. \tag{7}$$

В [4] это равенство интерпретируется как равенство цены готовности платить за единицу Z, чтобы остаться на той же кривой безразличия. Соответственно функция-значение готовности платить имеет вид

$$v^t(Z, u^t, p^t) = -Zp^t \frac{\partial g^t(u^t, Z)}{\partial Z}. \tag{8}$$

Столько денег готов платить потребитель, чтобы получить Z единиц субполезности. Можно переписать эту функцию-значение как функцию вектора характеристик z:

$$v^t(f(z), u^t, p^t) = -f(z)p^t \frac{\partial g^t(u^t, f(z))}{\partial Z}. \tag{9}$$

Пусть теперь потребителю в период t доступны K^t моделей продукта: k = 1, ..., K^t. Если потребитель покупает модель k, то готовность платить приравнивается цене:

$$P_k^t = -f(z_k^t)p^t \frac{\partial g^t(u^t, f(z_k^t))}{\partial Z}. \tag{10}$$

В частности, если потребители $i = 1, ..., I$ имеют линейные функции полезности,

$$X = g_i^t(u_i^t, Z) = -a^t Z + b_i^t u_i^t, \quad t = 1, ..., T,$$

то уравнение (10) принимает вид

$$P_k^t = \rho_t f(z_k^t), \quad k = 1, ..., K^t; t = 1, ..., T, \tag{11}$$

где $\rho_t = p^t a^t$ – «агрегатная цена» единицы субполезности Z. Уравнение (11) совпадает с гедонической моделью в [20].

Индуцируемые свойства «традиционной» функции полезности

Исходя из функции полезности от характеристик можно поставить вопрос: чем определяется вид «традиционной» функции полезности, зависящей от потребляемых количеств продуктов? Какие свойства естественно на нее накладывать? Этот вопрос важен, поскольку стало актуальным рассмотрение «традиционных» функций полезности весьма общего вида [28], что требует введения более-менее естественных ограничений на их вид.

Рассмотрим функцию полезности, зависящую от характеристик:

$$U = U(z_1, z_2, ..., z_N), \tag{12}$$

где z_i – мера характеристики $i \in (1, ..., N\}$. Пусть группа состоит из разновидностей товаров $j \in \{1, 2, ..., J\}$, которые имеют единственную характеристику. Например, этими разновидностями могут быть экспонаты музея или экскурсионные объекты города; их потребителем является посетитель, издержки которого – это затраты времени или стоимость расходных материалов при фотографировании), а характеристика – это информация, получаемая при осмотре объекта). Обозначим через $z_j(x_j)$ меру характеристики потребляемого количества x_j разновидности j (например, информация, получаемая при осмотре j-го объекта в течение времени x_j). Будем предполагать, что все разновидности имеют одну и ту же технологию потребления, т.е. генерируют характеристику в соответствии с одной и той же функцией $z(.)$:

$$z_j(x_j) = z(x_j), j \in \{1, 2, ..., J\}. \tag{13}$$

Предположим, что характеристика обладает свойством аддитивности (например, информация, полученная при осмотре различных экспонатов музея, суммируется). Разумеется, свойством аддитивности обладают далеко не все характеристики. Как замечает Розен [24], «в терминах одной характеристики две 6-футовые машины не эквивалентны одной 12-футовой по длине, поскольку ими невозможно управлять одновременно». Тогда, если разновидности данной группы потребляются в количествах $x_j, j \in \{1, 2, ..., J\}$, то суммарная характеристика равна

$$z = \sum_{j \in \{1,2,...,J\}} z(x_j). \tag{14}$$

Функция полезности потребителя, когда она зависит от единственной характеристики, приобретает вид

$$U = U(z) = U(\sum_{j \in \{1,2,...,J\}} z(x_j)). \tag{15}$$

Так записанная полезность является функцией потребляемых количеств товаров.

Можно предположить дополнительно, что характеристика <<Eqn038.eps>> имеет убывающую отдачу (например, информация, полученная при осмотре экспоната в музее, в каждую следующую единицу времени меньше, чем полученная в предыдущую единицу времени). Пусть, например,

$$z(x_j) = x_j^{\alpha}, \ j \in \{1, 2, ..., J\}, \tag{16}$$

где 0 < α < 1 Тогда

$$U = U\left(\sum_{j \in \{1,2,...,J\}} x_j^{\alpha}\right). \tag{17}$$

Пусть зависящая от характеристики функция полезности $U = U(.)$ возрастающая. Если важно не числовое значение полезности, а порядковые предпочтения, то в качестве функции полезности можно рассматривать любое монотонное преобразование имеющейся функции полезности.

В частности, функция полезности (17) становится однородной, если преобразовать ее к CES-функции

$$\tilde{U} = \left(\sum_{j \in \{1,2,...,J\}} x_j^{\alpha}\right)^{\frac{1}{c}}. \tag{18}$$

Такую форму имеет функция полезности в современных моделях монополистической конкуренции, ведущих начало от модели Диксита-Стиглица [5].

Пусть теперь товары группы обладают N характеристиками, для каждой из которых выполняется свойство аддитивности, а технология потребления генерирует эти характеристики i для разновидностей j независимо друг от друга:

$$z_i(x_j), \ j \in \{1, 2, ..., J\}, i \in \{1, 2, ..., N\}.$$

Пусть при потреблении разновидностей данной группы в количествах $x_j, j \in \{1, 2, ..., J\}$ технология потребления такова, что каждая характеристика z_i является возрастающей функцией суммы соответствующих характеристик отдельных продуктов:

$$z_i = \varphi_i\left(\sum_{j \in \{1,2,...,J\}} z_i(x_j)\right), i \in \{1, 2, ..., N\}. \tag{19}$$

Тогда функция полезности, зависящая от потребляемых количеств товаров, имеет вид

$$U = U\left(\phi_1\left(\sum_{j\in\{1,\dots,J\}} z_1(x_j)\right),\dots,\phi_N\left(\sum_{j\in\{1,\dots,J\}} z_N(x_j)\right)\right). \quad (20)$$

Частным случаем является линейная функция U:

$$U = U(x_1,\dots,x_J) = \mu_1\phi_1\left(\sum_{j\in\{1,\dots,J\}} z_1(x_j)\right)+\dots$$

$$+\mu_R\phi_R\left(\sum_{j\in\{1,\dots,J\}} z_N(x_j)\right). \quad (21)$$

В другом частном случае, если функции $\phi_i(.)$, так и U являются CES-функциями, то функция полезности специфицируется следующим образом:

$$U = \left((x_1^{\alpha_1}+\dots+x_J^{\alpha_1})^{\frac{\beta}{\alpha_1}}+\dots+(x_1^{\alpha_R}+\dots+x_J^{\alpha_R})^{\frac{\beta}{\alpha_R}}\right)^{\frac{1}{\beta}}. \quad (22)$$

Эта функция однородна.

Пусть теперь имеется континуум $[0,M]$ разновидностей, которые потребляются в количествах $x(j), j\in[0,M]$. Причем эти разновидности имеют единственную характеристику, и она аддитивна. Рассмотрим простейшую функцию полезности от характеристики:

$U(z) = z$.

Тогда полезность при потреблении разновидностей в количествах $x(j),\ j\in[0,M]$ равна

$$U = \int_0^M z(j)dj. \quad (23)$$

Если технология потребления такова, что $z(j) = x(j)^\alpha, 0<\alpha<1$, то

$$U = \int_0^M x(j)^\alpha dj, \quad (24)$$

и мы приходим к стандартному виду функции полезности модели Диксита-Стиглица [5].

Пусть теперь каждая из разновидностей $j\in[0,M]$ имеет N характеристик $i\in\{1,2,\dots,N\}$ и технология потребления такова, что

$$z(i) = \int_0^M a_i x(j)^{\alpha_i} dj, i=\{1,2,\dots,N\}. \quad (25)$$

Тогда

$$U = \sum_{i=1}^N \int_0^M a_k x(j)^{\alpha_i} dj = \int_0^M \left(\sum_{i=1}^N a_i x(j)^{\alpha_i}\right) dj \quad .(26)$$

Приведем для этого случая оценки величин $r_f(x), r_{f'}(x), r_{f'}(x)$, которые играют важную роль при анализе моделей монополистической конкуренции (см. [28]). В рассматриваемом случае:

$$f'(x) = \sum_{i=1}^N a_i\alpha_i x^{\alpha_i-1}, \quad (27)$$

$$f''(x) = \sum_{i=1}^N a_i\alpha_i(1-\alpha_i)x^{\alpha_i-2}, \quad (28)$$

$$r_f(x) = -\frac{f''(x)x}{f'(x)} = \frac{\sum_{i=1}^N a_i\alpha_i(1-\alpha_i)x^{\alpha_i-1}}{\sum_{i=1}^N a_i\alpha_i x^{\alpha_i-1}}. \quad (29)$$

При $a_i\alpha_i>0$ величина $r_f(x)$ является выпуклой комбинацией величин $1-\alpha_i,\ k=1,\dots,K$. Следовательно, величина $r_f(x)$ расположена между наименьшим и наибольшим из этих чисел. При $0<\alpha_i<1$ следует, что $0<r_f(x)<1$.

Производная величины $r_f(x)$:

$$r_f'(x) = \frac{-\sum_{i,k\in\{1,\dots,N\},i\neq k} a_i a_k\alpha_i\alpha_k x^{\alpha_i+\alpha_k-3}(\alpha_i-\alpha_k)^2}{\left(\sum_{i=1}^N a_i\alpha_i x^{\alpha_i-1}\right)^2}<0. \quad (30)$$

Далее

$$r_{f'}(x) = -\frac{f'''(x)x}{f''(x)} = \frac{\sum_{i=1}^N a_i\alpha_i(1-\alpha_i)(2-\alpha_i)x^{\alpha_i-2}}{\sum_{i=1}^N a_i\alpha_i(1-\alpha_i)x^{\alpha_i-2}}.$$

При $0<\alpha_i<1$ величина $r_{f'}(x)$ расположена между наименьшим и наибольшим из чисел $2-\alpha_i,\ i=1,\dots,N$. Отсюда следует, что $1<r_{f'}(x)<2$.

Однородные функции полезности от характеристик

Важным свойством, которым часто наделяются функции полезности, зависящие от характеристик, является положительная однородность первой степени. Это свойство, как правило, включается в регрессионные модели.

Чтобы получить регрессионное уравнение из (2), остается задать функциональную форму гедонической функции субполезности $f(z)$ и добавить случайный член.

Наиболее распространенными в литературе по гедоническим регрессиям (см. [4]) являются функции log-log, semi-log и линейная.

В модели log-log

$$\ln f(z_1,\dots,z_N)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \ln z_n, \quad (31)$$

т.е.

$$f(z_1,\dots,z_N)=Az_1^{\alpha_1}\dots z_n^{\alpha_n}, \quad (32)$$

где $A=e^{\alpha_0}$.

При этом гедоническая регрессия имеет вид

$$\ln P_k^t=\ln\rho_t+\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \ln z_{nk}^t+$$
$$+\varepsilon_k^t; t=1,\dots,T; k=1,\dots,K^t. \quad (33)$$

Обычно предполагают, что функция суб-полезности $f(z_1,\dots z_N)$ имеет постоянную отдачу от масштаба, т.е. что

$$\sum_{n=1}^{N}\alpha_n=1.$$

В линейной модели

$$f(z_1,\dots,z_N)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_n, \quad (34)$$

$$P_k^t=\rho_t(\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_{nk}^t)+\varepsilon_k^t, \quad (35)$$

$t=1,\dots,T, k=1,\dots,K^t$.

Постоянную отдачу от масштаба функции $f(z_1,\dots z_N)$ можно получить, предполагая, что $\alpha_0=0$.

Обобщением модели log-log является модель translog:

$$\ln f(z_1,\dots,z_N)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \ln z_n+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}\ln z_i \ln z_j, \quad (36)$$

$$\ln P_k^t=\ln\rho_t+\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n \ln z_{nk}^t+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}\ln z_{ik}^t \ln z_{jk}^t+$$
$$+\varepsilon_k^t; t=1,\dots,T; k=1,\dots,K^t. \quad (37)$$

Постоянная отдача от масштаба функции $f(z_1,\dots z_N)$ достигается наложением ограничений $\sum_{n=1}^{N}\alpha_n=1$ и $\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}=0$, $i=1,\dots,N$.

В модели semilog

$$\ln f(z_1,\dots,z_N)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n z_n. \quad (38)$$

Обобщением модели semilog является модель квадратичного semilog. Невозможность получить в этих моделях постоянную отдачу от масштаба функции $f(z_1,\dots z_N)$ рассматривается как их недостаток.

Еще одна модель – обобщенная линейная модель:

$$f(z_1,\dots,z_N)=\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n (z_n)^{\frac{1}{2}}+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}(z_i)^{\frac{1}{2}}(z_j)^{\frac{1}{2}}, \quad (39)$$

$$P_k^t=\rho_t\begin{bmatrix}\alpha_0+\sum_{n=1}^{N}\alpha_n\left(z_{nk}^t\right)^{\frac{1}{2}}++\\ \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_{ij}\left(z_{ik}^t\right)^{\frac{1}{2}}\left(z_{ik}^t\right)^{\frac{1}{2}}\end{bmatrix}+\varepsilon_k^t, \quad (40)$$

$t=1,\dots,T, k=1,\dots,K^t$.

Постоянная отдача от масштаба функции $f(z_1,\dots z_N)$ достигается при $\alpha_n=0,1,\dots,N$.

Обзор эконометрических исследований, связанных с выявлением гедонических цен, дается в [1].

Анализ однородной функции полезности от характеристик

Далее используется подход к анализу однородных функций, который ранее применялся в теории производства [17, 12, 18] и в теории торга [19].

Функция полезности $U(z)$ от вектора $z = (z_1, z_2,..., z_N)$ характеристик $i = 1,...,N$ предполагается неотрицательной, непрерывной, возрастающей и обладающей линейной однородностью (постоянной отдачей от масштаба, *CRS*). Будем рассматривать функции полезности, определенные в пространстве R^N_{++}, состоящем из положительных N-мерных векторов и начала координат. Таким образом, мы исключаем из рассмотрения те точки, где хотя бы одна из характеристик у продукта отсутствует. Это не сужает сам класс функций полезности.

Будем рассматривать некоторое семейство функций $\varphi_\lambda(z)$, которые будем называть *локальными функциями полезности*; каждая из них является функцией вектора характеристик z при фиксированных весовых коэффициентах λ_i, $i = 1,...,N$, присвоенных характеристикам. Основной случай – это локальные функции полезности Леонтьева:

$$\varphi_\lambda(z) = f_\lambda(z) = \min_{i=1,...,N} \lambda_i z_i \,. \qquad (41)$$

Если $\Lambda = \{\lambda = (\lambda_1,...,\lambda_n)\}$ – это такое множество векторов весов, что

$$U(z) = \max_{\lambda\in\Lambda} \varphi_\lambda(z), \qquad (42)$$

то будем говорить, что the set Λ – это *поведенческое* меню, порождающее функцию полезности $U(z)$.

Экономический смысл этих понятий следующий. Векторы λ весов характеристик, входящие в поведенческое меню Λ, отражают всевозможные способы *отношения к жизни* или *жизненные позиции*, доступные для индивида. Принимая ту или иную позицию, индивид присваивает определенную комбинацию весов характеристикам благ. Ключевая идея здесь состоит в том, что индивид, вообще говоря, обладает не единственной жизненной позицией, а множеством таких позиций, из которого производит выбор жизненной позиции, и имеет возможность этот выбор изменять при различных условиях. Например, один и тот же индивид может есть мясо или нет, быть верующим или нет, следовать моде или нет.

Локальная функция полезности $\varphi_\lambda(z)$ показывает (максимальную) полезность, которая будет получена индивидом при векторе характеристик z и данной жизненной позиции λ. Эта же функция показывает и полезность, которую может достичь индивид, располагающий моделью товара (вектором характеристик) и подбирающий подходящую жизненную позицию, дающую ему наибольшую полезность. Иными словами, располагая вектором характеристик zб, индивид выбирает жизненную позицию $\lambda(z)$, которая максимизирует локальную функцию полезности согласно (42). Функция полезности в левой части (42) – это максимальное значение локальной полезности. Таким образом, функция полезности $U(z)$ формируется на основе семейства локальных функций полезности.

Оптимизационная задача (4) представляет собой подзадачу в более широкой задаче, в которой индивид, будучи ограничен экономически, выбирает как жизненную позицию λ, так и вектор характеристик z:

$$\max_{z\in Z} \max_{\lambda\in\Lambda} \varphi(\lambda, z)\,, \qquad (43)$$

где Z – множество доступных векторов характеристик. В случае локальной функции полезности Леонтьева задача (5) принимает вид

$$\max_{z \in Z} \max_{\lambda \in \Lambda} \min_{i=1,\dots,N} \left\{ \lambda_i z_i \right\}. \qquad (44)$$

Возникает несколько естественных вопросов. Всякая ли функция полезности порождается каким-либо поведенческим меню? Является ли поведенческое меню, порождающее конкретную функцию полезности, единственным? Если да, то какова структура этого поведенческого меню? Следующая теорема 1 (которая приводится здесь без доказательства) дает исчерпывающий ответ на эти вопросы в случае локальных функций полезности Леонтьева.

Пусть $U(z)$ – функция полезности от характеристик, M – ее поверхность единичного уровня:

$$M = \{z : U(z) = 1\}, \qquad (45)$$

т.е. множество всех векторов характеристик, которые дают единичную полезность. Каждому вектору характеристик $z \in M$ соответствует вектор обратных элементов:

$$z^- = (z_1^{-1}, z_2^{-1}, \dots, z_N^{-1}). \qquad (46)$$

Его экономический смысл тот, что элемент x_i^{-1} – это средняя полезность i-й характеристики: $z_i^{-1} = U(z)/z_i$. (Это так, поскольку $U(z) = 1$ при $z \in M$).

Оказывается, что множество

$$\Lambda = \left\{ \lambda : \lambda = z^-, z \in M_1 \right\}, \qquad (47)$$

Которое можно назвать *опорным множеством,* – это единственное поведенческое меню, порождающее функцию полезности $U(z)$ в случае локальных функций полезности Леонтьева.

Имеется эквивалентный способ описать поведенческое меню. Для функции полезности $U(z)$ определим *сопряженную функцию:*

$$U^{\circ}(\lambda) = \frac{1}{U\left(\dfrac{1}{\lambda_1}, \dots, \dfrac{1}{\lambda_n}\right)}. \qquad (48)$$

Она легко вычислима. Поведенческое меню (6) представляет собой множество единичного уровня сопряженной функции:

$$\Lambda_1 = \left\{ \lambda : F^{\circ}(\lambda) = 1 \right\}. \qquad (49)$$

ТЕОРЕМА 1. Множество Λ_1 – это единственное поведенческое меню, порождающее функцию полезности $U(z)$.

Для функции полезности Кобба-Дугласа

$$U(z_1, z_2, \bar{N}) = \bar{N} z_1^{\bar{\beta}} z_2^{\bar{\alpha}} \text{ (where } \bar{\alpha} + \bar{\beta} = 1, 0 < \bar{\alpha} < 1), \qquad (50)$$

сопряженной функцией является

$$U^{\circ}(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{1}{\bar{N} \lambda_1^{-\bar{\beta}} \lambda_2^{-\bar{\alpha}}}, \qquad (51)$$

следовательно, поведенческое меню имеет вид:

$$\Lambda = \left\{ \lambda : \bar{N} \lambda_1^{-\bar{\beta}} \lambda_2^{-\bar{\alpha}} = 1 \right\} = \left\{ \lambda : \lambda_1^{\bar{\beta}} \lambda_2^{\bar{\alpha}} = \bar{N} \right\}. \qquad (52)$$

Для функции полезности CES,

$$F(z_1, z_2, N) = N\left[A z_2^{-r} + B z_1^{-r} \right]^{-1/r} \qquad (53)$$

при $A, B > 0, -1 \le r, r \ne 0$, сопряженной функцией является

$$F^{\circ}(\lambda_1, \lambda_2) = N^{-1}\left[A\lambda_2^{r} + B\lambda_1^{r} \right]^{1/r}, \qquad (54)$$

И поведенческое меню имеет вид:

$$\Lambda = \left\{ \lambda : \left(A\lambda_2^{r} + B\lambda_1^{r} \right)^{1/r} = N \right\}. \qquad (55)$$

Еще один вопрос: возможно ли, зная форму поведенческого меню, предсказать свойства функции полезности, порожденной этим меню? Частичный ответ для случая 2 характеристик дает следующая теорема 2.

Определим множество $\tilde{\Lambda}$, которое состоит из поведенческого меню Λ и всех векторов весов, лежащих ниже Λ:

$$\tilde{\Lambda} = \left\{ \lambda : \lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0, U^{\circ}(\lambda) \le 1 \right\}. \qquad (56)$$

ТЕОРЕМА 2. Если множество Λ выпукло, то эластичность замещения σ функции полезности $U(z_1, z_2)$ в каждой точке $z(z_1, z_2)$ меньше, чем ½. Заметим, что здесь функция полезности может обладать различными эластичностями замещения в разных точках, тем не менее все они меньше, чем ½. На интуитивном уровне связь между формой поведенческого меню и величиной эластичности замещения функции полезности может быть объяснена так. Низкая эластичность замещения функции полезности означает ограниченные возможности изменения поведения индивида. Выпуклость множества $\tilde{\Lambda}$ как раз и ограничивает возможности изменения поведения: отношение к жизни $l \in \Lambda$ может быть заменено на отношение к жизни $\tilde{l} \in \Lambda$ тогда и только тогда, когда существует хорда, соединяющая точки l и $\tilde{l}$ и расположенная во внутренности множества $\tilde{\Lambda}$.

Пусть множество выбора потребителя в пространстве характеристик имеет вид $G = \{z{:}g(z) = b\}$, а функции $g(z)$ и $U(z)$ являются возрастающими и линейно однородными (CRS). В задаче потребителя обычно разделяются множество выбора и функция полезности. Так, записанная задача состоит в выборе «модели» продукта (вектора характеристик). В то же время задача потребителя может быть сведена к эквивалентной задаче о выборе вектора весов характеристик, т.е. оптимального способа поведения. В такой задаче разделяются множество векторов весов (способов поведения) и функция полезности, зависящая от способа поведения. Эта функция учитывает возможности индивида, тогда как множество способов поведения отражает общественные институты.

Действительно, задача потребителя

$$\max_{z\in G} U(z) = \max_{z\in G}\max_{\lambda\in\Lambda}\min_i \lambda_i z_i \qquad (57)$$

может быть преобразована следующим образом:

$$\max_{\lambda\in\Lambda}\max_{z\in G}\min_i \lambda_i z_i. \qquad (58)$$

Максимум $\max_{z\in G}\min_i \lambda_i z_i$ функции Леонтьева достигается в той точке $z^* \in G$, которая пропорциональна $\lambda^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n}\right)$. Тогда $z^* = k\lambda^{-1}$, $g(z^*) = kg(\lambda^{-1}) = b$, и максимум функции Леонтьева равен $k = \frac{b}{g(\lambda^{-1})}$. Следовательно, в терминах весов полезностей, полезность потребителя равна

$$\max_{\lambda\in\Lambda} \frac{b}{g\left(\frac{1}{\lambda_1},\dots,\frac{1}{\lambda_n}\right)} \qquad (59)$$

и задача потребителя может быть записана в виде

$$\max_{\lambda\in\Lambda} g^{\circ}(\lambda) \qquad (60)$$

Гедонические цены μ_1, μ_2, которые представляют собой предельные полезности, и веса λ_1, λ_2 представляют разные интересы потребителя: гедонические цены характеризуют готовность платить за характеристики, тогда как веса характеризуют меру относительной важности характеристик каждого конкретного товара. Однако эти две системы мер тесно связаны.

Примером связи между вектором гедонических цен и вектором весов может служить равенство:

$$p_i = b_i\lambda_i, i = 1,\dots,N, \qquad (61)$$

где b_i – положительные коэффициенты. Будем считать эту связь «идеальной» или желаемой. В случае двух характеристик можно показать, что при некотором условии существует итерационный процесс, в котором индивид, пытающийся координировать эти две меры своего интереса, постепенно приходит к гедоническим ценам и весам, удовлетворяющим равенству (61).

Пусть множество выбора, т.е. множество S пар характеристик, доступных потребителю, ограничено координатными осями и кривой $g(z_1, z_2)=C$, где функция $g(.,.)$ дифференцируема. Каждому возможному исходу $z \in S$ соответствует вектор гедонических цен, аналогично вектору цен товаров в модели торговли; если индивид заинтересован в достижении некоторой точки $\bar{z}$, то будут установлены такие (гедонические) цены $\bar{p}_1, \bar{p}_2$, что предельная норма замещения равна относительной цене

$$-\frac{dz_2}{dz_1}(\bar{z}) = \frac{\dfrac{\partial g(\bar{z})}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial g(\bar{z})}{\partial z_2}} = \frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2}. \qquad (62)$$

Таким образом, относительная цена $\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2}$ является функцией отношения характеристик $\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$:

$$\frac{\bar{p}_1}{\bar{p}_2} = \psi\left(\frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}\right). \qquad (63)$$

С другой стороны, при существующих гедонических ценах p_1, p_2, соответствующих текущему исходу-кандидату (z_1, z_2), индивид пытается сдвинуться к исходу, дающему равномерное распределение характеристик с учетом их весов. Если бы индивид мог перераспределять характеристики в рамках их гедонической «стоимости», он выбрал бы исход $(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$, удовлетворяющий системе уравнений:

$$\begin{cases} \lambda_1 z_1 = \lambda_2 z_2 \\ p_1\hat{z}_1 + p_2\hat{z}_2 = p_1 z_1 + p_2 z_2 \end{cases}. \qquad (64)$$

где $p_i = b_i\lambda_i, i = 1,...,N$. Однако, ввиду нетрансферабельности характеристик, фактически будет выбран исход $(\hat{z}_1, \hat{z}_2)$, удовлетворяюший системе:

$$\begin{cases} \lambda_1\hat{z}_1 = \lambda_2\hat{z}_2 \\ g(\hat{z}_1, \hat{z}_2) = C \end{cases}. \qquad (65)$$

Следовательно,

$$\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{b_1}{b_2}\frac{p_2}{p_1}. \qquad (66)$$

Точка (z_1, z_2) используется на следующей итерации для определения новых гедонических цен $\hat{p}_1, \hat{p}_2$ таких, что

$$\frac{\hat{p}_1}{\hat{p}_2} = \frac{\dfrac{\partial g(\hat{z})}{\partial z_1}}{\dfrac{\partial g(\hat{z})}{\partial z_2}} = \psi\left(\frac{\hat{z}_1}{\hat{z}_2}\right) = \psi\left(\frac{b_1 p_2}{b_2 p_1}\right). \qquad (67)$$

Таким образом, имеет место итерационный процесс:

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_{t+1} = \varphi\left(\frac{p_1}{p_2}\right)_t, \qquad (68)$$

где $\varphi(k) = \psi\left(\frac{b_1}{b_2}\frac{1}{k}\right)$.

Список использованных источников

1. Ackerberg D., Benkard L., Berry S., Pakes A. Econometric tools for analyzing market outcomes / In J.J.Heckman and E.E.Leamer, ed. Handbook of econometrics. Elsevier, 2007. Ed. 1. Vol. 6, ch. 63.
2. Adelman I., Griliches Z. On an Index of Quality Change // Journal of the American Statistical Association. 1961. № 56. P. 535–548.
3. Court A.T. Hedonic Price Indexes with Automotive Examples / In The Dynamics of Automotive Demand. New York: General Motors, 1939. P. 99–107.
4. Diewert W.E. Hedonic regressions: a consumer theory approach / In: Feenstra C., Shapiro D., eds. Scanned data and price indexes. Cambridge: NBER, 2003. P. 317–348.
5. Dixit A.K. and Stiglitz J.E. Monopolistic competition and optimum price diversity // American Economic Review. 1977. № 67. P. 297–308.

6. Edlefsen L.E. The comparative statics of hedonic price functions and other nonlinear constraints // Econometrica. 1981. № 49(6). P. 1501–1520.
7. Goodman A. Hedonic prices, price indices and housing markets // Journal of Urban Economics. 1978. № 5. P. 471–484.
8. Griliches Z. Hedonic price indexes and the measurement of capital and productivity: some historical reflections // NBER Working Paper № 2634. Cambridge: NBER, 1988.
9. Gwin C.F., Gwin C.R. Product attributes model: a tool for evaluating brand positioning // Journal of Marketing Theory and Practice. 2003. №11. P. 16–30.
10. Hofsten E., von. Price Indexes and Quality Changes. Stockholm: Boklorlaget Forum AB, 1952.
11. Houthakker H.H. Compensated Changes in Quantities and Qualities Consumed // Review of Economic Studies. 1951. № 19. P. 155–164.
12. Jones C.I. The shape of production function and the direction of technical change // Quarterly Journal of Economics. 2005. № 120. P. 517–549.
13. Lancaster K. A new approach to consumer theory // Journal of Political Economy. 1966. № 74. P. 132–157.
14. Lancaster K. Consumer demand: a new approach. New York: Columbia University Press, 1971.
15. Lancaster K. Hierarchies in goods-characteristics analysis // Advances in Consumer Research. 1976. V. 3. P. 348–352.
16. Louviere J.J., Hensher D.A., Swait J.D. Stated choice methods: analysis and applications. Cambridge, Cambridge University Press, 2000.
17. Matveenko V.D. On a dual representation of CRS functions by use of Leontief functions / in Proceedings of the First International Conference on Mathematical Economics, Non-Smooth Analysis, and Informatics. Institute of Mathematics and Mechanics Azerbaijan National Academy of Sciences: Baku, 1997. P. 160–165.
18. Matveenko V.D. Anatomy of production function // Economics Bulletin. 2010. № 30(3). P. 1906–1913.
19. Matveenko V.D. Bargaining powers and a surface of weights, and implementation of the Nash bargaining solution / In: L.A. Petrosyan and N.A. Zenkevich, Eds. Contributions to Game Theory and Management, v. 4, St. Petersburg, School of Management St. Petersburg State University, 2011. P. 274–293.
20. Muellbauer J. Household production theory, quality, and the ‘hedonic technique’ // American Economic Review. 1974. № 64(6). P. 977–994.
21. Muth R.F. Household production and consumer demand functions // Econometrica. 1966. № 34(3). P. 699–708.
22. Postlewait A. Social arrangements and economic behavior // Annales d’Economie et de Statistique. 2001. № 63–64. P. 67–87.
23. Ratchford B. The new economic theory of consumer behavior: an interpretive essay // Journal of Consumer Research. 1975. № 2. P. 65–75.
24. Rosen S. Hedonic prices and implicit markets: product differentiation in pure competition // Journal of Political Economy. 1974. № 92. P. 34–55.
25. Stone R. Quantity and Price Indexes in National Accounts. Paris: Organization for European Economic Cooperation, 1956.
26. Vail E.E. Retail Prices of Fertilizer Materials and Mixed Fertilizers. AES Bulletin 545. Ithaca, N.Y.: Cornell University, 1932.
27. Waugh F.V. Quality Factors Influencing Vegetable Prices // Journal of Farm Economics. 1928. № 10. P. 185–196.
28. Zhelobodko E., Kokovin S., Parenti M., Thisse J.-F. Monopolistic competition in general equilibrium: Beyond the CES // Econometrica. 2012.