На правах рукописи

Хенди Ахмед

Хенди Ахмед Саид Абделазиз

Численные алгоритмы решения дробных дифференциальных уравнений с запаздыванием

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2017

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики и компьютерных наук Института естественных наук и математики ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Пименов Владимир Германович.
Официальные оппоненты:	Шхануков-Лафишев Мухамед Хабалович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Кабардино-Балкарский государственный университет им. Х.М. Бербекова», профессор кафедры вычислительной математики.
	Плеханова Марина Васильевна, кандидат физико-математических наук, доцент ФГБОУ ВПО «Южно-Уральский государственный университет», доцент кафедры вычислительной механики.
Ведущая организация:	Институт прикладной математики и автоматизации – филиал ФГБУН «Кабардино-Балкарский научный центр РАН».

Защита состоится 31 мая 2017 г. в 15.00 на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 на базе ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН» по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН», http://wwwrus.imm.uran.ru/C16/Diss/.

Автореферат разослан «__» ________ 2017 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Скарин В. Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности. Хотя дробные производные и дробные дифференциальные уравнения известны давно как большая и красивая теория [1,2,3], в настоящее время наблюдается всплеск их приложений в математическом моделировании. Причинами такого интереса является ряд факторов. Во-первых, определение дробной производной, в отличие от целой, дается нелокально, как интеграл от предыстории, поэтому может быть применено для математического моделирования сред с памятью (в приложениях применяется термин активные среды). Во-вторых, во многих моделях физики, биологии и т.д. дробные производные и уравнения дробных порядков точнее описывают рассматриваемые явления. В-третьих, дробными уравнениями можно описывать немарковские процессы, что дает мощный инструмент статистике. Качественная теория дробных дифференциальных уравнений, как с одной независимой переменной, так и с дробными частными производными, достаточно хорошо развита[4,5,6,7]. Однако, в силу сложности объектов и невозможности применения аналитических методов отыскания решений, на первый план выходят численные методы. Возможно, первыми работами в этом направлении стали статьи М.Х. Шханукова-Лафишева[8]. Затем появилось много других работ, в которых конструируются численные методы решения разных классов таких уравнений, среди них отметим[9,10,11,12]. Созданы эффективные численные алгоритмы, в том числе и высоких порядков. Но присутствие нелинейностей может разрушать схо-

[1] С.Г. Самко, А.А. Килбас, О.И. Маричев. Интегралы и производные дробного порядка и их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

[2] K. Miller, B. Ross. An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations. New York, Wiley, 1993.

[3] А.М. Нахушев. Уравнения математической биологии. Москва: Высшая школа, 1995.

[4] I. Podlubny. Fractional differential equations. San Diego: Acad. Press, 1999.

[5] А.В. Псху. Уравнения в частных производных дробного порядка. Москва: Наука, 2005.

[6] A. Kilbas, H. Srivastava, J. Trujillo. Theory and applications of fractional differential equations. Amsterdam: Elsevier, 2006.

[7] K. Diethelm. The Analysis of Fractional differential equations. Berlin: Springer, 2010.

[8] М.Х. Шхануков. О сходимости разностных схем для дифференциальных уравнений с дробной производной // Доклады АН. 1996. Т. 348, № 6. С. 746–748.

[9] M.M. Meerschaert and C. Tadjeran. Finite difference approximations for fractional advection–dispersion flow equations // J. Comput. Appl. Math. 2004. Vol. 172, no. 1. P. 65-77.

[10] Z.Z. Sun and X. Wu. A fully discrete difference scheme for a diffusion-wave system // Appl. Numer. Math. 2006. Vol. 56, no. 2. P. 193-209.

[11] F. Liu, P. Zhuang, K. Burrage. Numerical methods and analysis for a class of fractional advection–dispersion models // Computers and Mathematics with Applications. 2012. Vol. 64. P. 2990–3007.

[12] A.A. Alikhanov. A new difference scheme for the time fractional diffusion equation // J. Comput. Phys. 2015. Vol. 280. P. 424–438.

димость этих алгоритмов, в частности, присутствие нелинейного запаздывания по времени для уравнений с дробной по времени производной.

Уравнения в частных производных с эффектами запаздывания, постоянным или переменным, а также общего функционального вида, включающего и распределенное запаздывание, также широко распространены в моделировании[13]. Среди исследований по численным методам решения уравнений в частных производных с эффектом запаздывания отметим следующие подходы.

В первых работах предлагалось проводить дискретизацию с помощью непрерывных методов, чтобы избежать интерполяции между узлами сетки. Варианты метода прямых, в которых проводится дискретизация только по переменным состояния, сводят задачи к численному решению систем функционально-дифференциальных уравнений. В ряде работ разрабатывались сеточные методы решения эволюционных уравнений с функциональной зависимостью искомой функции от предыстории по времени и от сдвигов по пространству, в этих работах основное внимание уделялось исследованию общих неявных схем и условиям устойчивости.

В работах В.Г. Пименова и его учеников[14,15,16,17]основным моментом в построении сеточных методов является идея разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей в предыстории искомой функции (разделение настоящего и прошлого). По конечномерной составляющей, входящей в линейную дифференциальную часть уравнения, строятся аналоги известных для объектов без наследственности сеточных методов, а для учета эффекта наследственности применяется интерполяция дискретной предыстории с заданными свойствами. Другая идея состоит в применении экстраполяции продолжением интерполяции дискретной предыстории, такая экстраполяция необходима для реализации неявных методов, а кроме того, это позволяет избегать решения многомерных нелинейных систем при реализации сеточных алгоритмов на каждом временном слое. В совокупности эти идеи позволили создать простые и в то же время эф-

[13]J. Wu, Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

[14]В.Г. Пименов, А.Б. Ложников. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178–189.

[15]В.Г. Пименов, Е.Е. Таширова. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды ИММ УрО РАН, 2012. Т. 18, № 2, С. 222–231.

[16]В.Г. Пименов. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2014.

[17]A. Lekomtsev, V. Pimenov, Convergence of the scheme with weights for the numerical solution of a heat conduction equation with delay for the case of variable coefficient of heat conductivity, Appl. Math. Comput. 2015. Vol. 256. P. 83–93.

фективные алгоритмы, которые могут быть положены в основу комплекса программ, предназначенного для численного решения рассматриваемых уравнений в частных производных. В этих работах рассматривались уравнения параболического типа и гиперболического типа с эффектом наследственности, а также уравнения в частных производных первого порядка (уравнения адвекции) с эффектом наследственности.

Влияние функционального запаздывания для дробных уравнений в частных производных в плане численных методов, насколько нам известно, систематически не проводилось. Имеются лишь первые попытки применения аналога метода шагов для дробных уравнений с постоянным сосредоточенным запаздыванием. В исследованиях данной работы предполагается восполнить этот пробел.

Цели и задачи диссертационной работы. Цель работы состоит в разработке сеточных методов решения обыкновенных уравнений с дробной производной и уравнений в частных производных с дробными производными по времени и пространству с эффектами сосредоточенного и функционального запаздывания. К главным задачам работы относятся обоснования устойчивости и сходимости разработанных алгоритмов и изучение факторов, оказывающих влияние на порядки сходимости.

Научная новизна. В диссертационной работе приведены конструкции неявного метода для приближения решения дробного дифференциального уравнения с нелинейным переменным запаздыванием. Для одностороннего и двухстороннего дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыванием сконструированы дробные аналоги метода Кранка-Никольсон. Построены разностные схемы для решения классов уравнений диффузии с дробной производной по времени, сосредоточенного и распределенного порядков, с нелинейным запаздыванием. Сконструирована линеаризированная разностная схема для решения класса диффузионно-волновых уравнений распределенного дробного порядка с запаздыванием. Для уравнения адвекции-диффузии с дробными производными по времени и по пространству и с эффектом функционального запаздывания построены и исследованы разностные схемы.

Теоретическая и практическая значимость работы. Уравнения в дробных производных, в том числе с одной независимой переменной, а также в частных производных, с дополнительным эффектом наследственности, играют важную роль при описании различных явлений в науке и технике. Теоретическая значимость работы состоит в создании с единых позиций сеточных методов решения различных типов уравнений в дробных производных как по времени, так и по пространству, с эффектом запаздывания как сосредоточенного, так и общего вида, в получении условий однозначной разрешимости, устойчивости и порядков сходимости методов. Создание эффективных и обоснованных с точки зрения сходимости численных методов послужит большему распространению таких уравнений в математическом моделировании, в этом состоит практическая значимость работы.

Методология и методы исследования. В основе исследования лежат понятия и методы общей теории численных методов для решения обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений в частных производных. Так как объектом численного решения являются различные типы дифференциальных уравнений дробного порядка, то в исследованиях используются понятия теории дробного исчисления и дробных уравнений. Кроме того, исследуемые эффекты наследственности потребовали для построения и исследования разрабатываемых численных методов использовать также понятия и методологию численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений, особенно теоремы сходимости в общей схеме систем с наследственностью, в форме, приспособленной для уравнений с частными производными.

Достоверность результатов. Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами и проведенными компьютерными экспериментами на тестовых примерах.

Апробация работы. Основные результаты докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях: семинарах кафедры вычислительной математики Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета; международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященной памяти В.К. Иванова (Челябинск, 2014); международных (46-я, 47-я) молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2015, 2016); всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015); 15th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering (Rota, Spain, 2015); международной конференции «Колмогоровские чтения - VII. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2015); семинарах департамента математического анализа Гентского университета (Гент, Бельгия, 2016); международной конференции «Экспериментальная и компьютерная биомедицина» памяти члена-корреспондента РАН В.С. Мархасина (Екатеринбург, 2016); Sixth Conference on Numerical Analysis and Applications (Lozenetz, Bulgaria, 2016); международной конференции «Системный анализ: моделирование и управление», посвященной памяти академика А.В. Кряжимского (Екатеринбург, 2016); международной научной конференции «Актуальные проблемы прикладной математики и информатики», приуроченной к 25-летию Института прикладной математики и автоматизации (Нальчик, 2016).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–13]. Работы [1–4] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, пяти глав, заключения и списка литературы. Библиография содержит 191 наименование. Общий объем работы составляет 124 страницы машинописного текста.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор литературы по изучаемой проблеме, ставятся цели и задачи работы, изложена ее научная и практическая значимость.

В **главе 1** конструируются и исследуются численные алгоритмы решения дробного дифференциального уравнения

$$D^{(\beta)}y(t) = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t \in [0, L], \quad 0 < \beta \leq 1, \tag{1}$$

с начальным условием

$$y(t) = \phi(t), \quad t \in [-\tau, 0], \tag{2}$$

где запаздывание $\tau > 0$ может быть постоянным или переменным относительно t, дробный дифференциальный оператор Капуто $D^{(\beta)}$ порядка β определяется формулой

$$D^{(\beta)}y(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\beta)} \int_0^t \frac{y\prime(\xi)}{(t-\xi)^\beta} d\xi.$$

Численный метод основан на аппроксимации функции $y(t)$ и её дробной производной разложениями по сдвинутым полиномам Чебышева, определенным на отрезке $[0, L] : T_n^*(x) = T_n(\frac{2x}{L} - 1)$, где $T_n(x)$ — полиномы Чебышева, определенные на отрезке $[-1, 1]$.

Во вводном разделе 1.1 приводится обзор некоторых работ, в которых изучаются модели с дробными дифференциальными уравнениями и с дробными дифференциальными уравнениями с наличием запаздывания, а также работ, где изучались математические вопросы существования и единственности решений таких уравнений. Кроме того, дается краткий обзор работ, посвященных разработке численных методов решения уравнений с дробными производными.

В разделе 1.2 выводится разностный алгоритм, относящийся к BDF-типу. В формулах этого типа (BDF - формулы дифференцирования назад) на каждом отрезке разбиения $[t_s, t_{s+1}]$ производится аппроксимация левой части уравнения (1), при этом шаг $h = t_{s+1} - t_s$ может быть переменным. Отрезок $[t_s, t_{s+1}]$ путем замены переменных $t = t_s + \frac{h\alpha}{L}, \quad \alpha \in [0, L]$, сводится к отрезку $[0, L] : y(t) = y\Big(t_s + \frac{h\alpha}{L}\Big) = \bar{y}(\alpha)$. Используем аппроксимацию

$$\bar{y}(\alpha) \approx \sum_{n=0}^{N}{}'' a_n T_n^*(\alpha), \quad a_n = \frac{2}{N}\sum_{r=0}^{N}{}'' y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r),$$

где $\zeta_r = \frac{\alpha_r}{L}, \quad \alpha_r = \frac{L}{2} - \frac{L}{2}\cos(\frac{\pi r}{N})$,

$$D^{(\beta)}\bar{y}(\alpha) \approx \frac{2}{N}\sum_{n=0}^{N}{}''\sum_{r=0}^{N}{}'' y(t_s + \zeta_r h) T_n^*(\alpha_r) D^{(\beta)} T_n^*(\alpha(t)),$$

символ суммы с двумя штрихами означает сумму с первым и последним членом, разделенными на 2. Используя аналитическую форму сдвинутых полиномов Чебышева и свойства дробных производных Капуто, выводится формула для неявного метода

$$f(t_s + \zeta_\ell h, y(t_s + \zeta_\ell h), y(t_s + \zeta_\ell h - \tau)) = \tag{3}$$

$$= \frac{4}{Nh^\beta}\sum_{n=\lceil\beta\rceil}^{N}{}''\sum_{r=0}^{N}{}''\sum_{j=0}^{N}\sum_{k=\lceil\beta\rceil}^{n} \frac{(-1)^{(n-k)} n(n+k-1)!\Gamma(k-\beta+\frac{1}{2})}{b_j\Gamma(k+\frac{1}{2})(n-k)!\Gamma(k-\beta+j+1)}\times$$
$$\times\frac{y(t_s+\zeta_r h)T_n^*(\alpha_r)}{\Gamma(k-\beta-j+1)}T_j^*(\alpha_\ell).$$

Заметим, что так как запаздывание τ произвольно, в том числе и переменно, величина $(t_s + \zeta_\ell h - \tau)$ может оказаться не в узлах сетки t_ℓ, поэтому мы устанавливаем приближение для функции с запаздывающим аргументом $y(t - \tau)$ следующим образом: определим величину δ_ℓ, связанную с запаздыванием τ: $\tau = (m_s + \delta_\ell)h$ таким образом, что $0 \le \delta_\ell < 1$, где m_s — положительное целое, тогда $y(t_\ell - \tau(t_\ell)) \approx y(t_0 + (s - m_s)h + (\zeta_\ell - \delta_\ell)h)$.

В разделе 1.3 проводится анализ построенного метода при $N = 4$. Метод записывается в виде векторной одношаговой формулы и показывается, что он сводится к некоторому методу типа Рунге-Кутта, для которого выписывается таблица Бутчера. В двух утверждениях проводится анализ локальной и глобальной погрешности метода. В частности, при соответствующих условиях справедлива

Теорема 2. *Для глобальной погрешности E выполняется оценка $\| E \| \leq Ch^{4\beta}$, если $\delta_\ell = 0$, и $\| E \| \leq C(h^{4\beta} + h^2)$, если $0 < \delta_\ell < 1$, C — постоянная, независящая от h .*

В разделе 1.4 приводятся результаты численных экспериментов на тестовых моделях: первая модель основана на эффекте зашумления света лазера, который отражает зеркало, вторая модель — дробный вариант модели Хатчинсона, которая описывает скорость роста популяций. Показано, что теоретические результаты о порядке сходимости совпадают с результатами, полученными в результате численного экспериментирования.

В **главе 2** конструируются сеточные численные методы для дробного по состоянию уравнения диффузии с эффектом функционального запаздывания по времени.

В разделе 2.1 проводится обзор работ, посвященных исследованию численных методов решения уравнений диффузии с запаздыванием, а также уравнений диффузии дробного порядка по состоянию, в следующем разделе 2.2 приведены вспомогательные результаты.

В разделе 2.3 строится и исследуется аналог метода Кранка-Никольсон для одностороннего дробного по состоянию уравнения диффузии с функциональным запаздыванием. Рассматривается задача

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + f(x, t, u(x,t), u_t(x,\cdot)), \quad x \in [x_0, X], \quad t \in [t_0, T], \quad d > 0, \tag{4}$$

$u_t(x,\cdot) = \{u(x, t+s), t_0 - \tau \leqslant s < t_0\}$ — функция предыстории, $\tau > 0$ — величина запаздывания. Дробная производная (левосторонняя) Римана порядка $1 < \alpha \leqslant 2$ определяется формулой

$$\frac{d^\alpha f(x)}{dx^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)}\frac{d^n}{dx^n}\int_{x_0}^{x} \frac{f(\zeta)}{(x-\zeta)^{\alpha+1-n}}d\zeta,$$

где $n = [\alpha] + 1 = 2$ — целое.

Заданы начальные и граничные условия

$$u(x,t) = \varphi(x,t), \; x \in [x_0, X], \quad t \in [t_0 - \tau, t_0], \tag{5}$$

$$u(x_0,t)\equiv 0,\quad u(X,t)=b(t),\ t\in[t_0,T]. \tag{6}$$

Пусть $h=(X-x_0)/N$, обозначим $x_i=x_0+ih$, $i=0,\dots,N$, и $\Delta=(T-t_0)/M$, $t_j=t_0+j\Delta$, $j=0,\dots,M$. Пусть $\tau/\Delta=m$ — положительное целое. Обозначим через u_j^i приближения функции $u(x_i,t_j)$ в узлах. Для каждого фиксированного $i=0,\dots,N$ введем дискретную предысторию по времени в точках t_j, $j=0,\dots,M$: $\{u_k^i\}_j=\{u_k^i, j-m\leqslant k\leqslant j\}$. Отображение $I:\{u_k^i\}_j\to v^i(t)$, $t\in[t_j-\tau,t_j+\Delta/2]$, назовем оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории. В данной главе используется кусочно-линейная интерполяция с экстраполяцией продолжением. Для приближения дробной производной мы будем использовать сдвинутую вправо формулу Грюнвальда, тогда

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{j+1/2})}{\partial x^\alpha}\approx\frac{1}{2}(\delta_{\alpha,x}u_{j+1}^i+\delta_{\alpha,x}u_j^i),\ \delta_{\alpha,x}u_j^i=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{k=0}^{i+1}g_{\alpha,k}u_j^{i-k+1}. \tag{7}$$

Здесь и в дальнейшем $g_{k,\alpha}=\frac{\Gamma(k-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(k+1)}$.

Применяя обычную аппроксимацию для производной по времени, аппроксимацию (7) для дробной производной по пространству и используя интерполяцию с экстраполяцией для предыстории функции, получаем аналог метода Кранка-Никольсон

$$\frac{u_{j+1}^i-u_j^i}{\Delta}=\frac{d}{2}(\delta_{\alpha,x}u_{j+1}^i+\delta_{\alpha,x}u_j^i)+f_{j+\frac{1}{2}}^i, \tag{8}$$

$$f_{j+\frac{1}{2}}^i=f(x_i,t_j+\frac{\Delta}{2},v^i(t_j+\frac{\Delta}{2}),v_{t_j+\frac{\Delta}{2}}^i(\cdot)),\ i=1,\dots,N-1, j=0,\dots,M-1,$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В разделе 2.4 проводится исследование устойчивости и сходимости схемы (8).

Вводится понятие невязки без интерполяции метода (8). Доказывается, что при определенных условиях гладкости точного решения невязка без интерполяции имеет порядок Δ^2+h. Аналогичным образом вводится понятие невязки с интерполяцией точного решения и исследуется её порядок.

Проводится сведение схемы (8) к общей разностной схеме систем с наследственностью[14,16].

Вводится вектор $y_j=(u_j^1,u_j^2,\cdots,u_j^{N-1})\in Y$, с нормой

$$\| y_j \|_Y=\max_{1\le i\le N-1}|u_j^i|.$$

Тогда схема (8) может быть переписана в виде

$$(E-A)y_{j+1}=(E+A)y_j+\Delta F_{j+\frac{1}{2}}, \tag{9}$$

где элементы матрицы A размера $(N-1)\times(N-1)$ имеют вид

$$A_{ij} = \begin{cases} \sigma g_{\alpha,i-j+1}, & j \le i-1, \\ \sigma g_{\alpha,1}, & j = i, \\ \sigma g_{\alpha,0}, & j = i+1, \\ 0, & j > i+1, \end{cases}$$

$\sigma = \frac{d\Delta}{2h^\alpha}$, E — единичная матрица, $F_{j+\frac{1}{2}} = (f^1_{j+\frac{1}{2}}, f^2_{j+\frac{1}{2}}, \cdots, f^{N-1}_{j+\frac{1}{2}})$.

Так как матрица $E-A$ обратима, (9) может быть переписано в виде

$$y_{j+1} = Sy_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)), \tag{10}$$

где $S = (E-A)^{-1}(E+A)$, $\Phi(t_j, I(\{y_k\}_j)) = (E-A)^{-1}F_{j+\frac{1}{2}}$, I — оператор кусочно-линейной интерполяции с экстраполяцией продолжением.

Приводятся доказательства теорем устойчивости и сходимости схемы (8), представленной в виде (10).

Лемма 7. *Если $1 < \alpha < 2$, тогда все собственные числа λ матрицы $S = (E-A)^{-1}(E+A)$ удовлетворяют условию $|\lambda| < 1$.*

Отсюда следует теорема

Теорема 4. *Дробный метод Кранка-Никольсон, с использованием сдвинутой аппроксимации Грюнвальда, примененный к дробному по пространству уравнению диффузии с функциональным запаздыванием* (8) (*или переписанный в виде* (10)), *является безусловно устойчивым при $1 < \alpha < 2$.*

Далее в этом подразделе излагается теорема о порядке сходимости общей разностной схемы для систем с наследственностью, модифицированной для рассматриваемого случая. Как следствие, получаем при определенной гладкости точного решения утверждение.

Замечание 1. *Разностная схема* (8) *с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением сходится с порядком $\Delta^2 + h$.*

В разделе 2.5 строится и исследуется аналог метода Кранка-Никольсон для двухстороннего дробного по состоянию уравнения диффузии с функциональным запаздыванием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c_+(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha} + c_-(x)\frac{\partial^\alpha u}{\partial_- x^\alpha} + f(x, t, u(x,t), u_t(x,\cdot)), \tag{11}$$

где $x \in [0, X]$, $t \in [t_0, T]$, $c_+(x) > 0$, $c_-(x) > 0$, $u_t(x,\cdot) = \{u(x, t+s), -\tau \leqslant s < 0\}$ — функция предыстории, $\tau > 0$ — величина запаздывания, с начальными условиями

$$u(x,t) = \varphi(x,t),\ x \in [0, X],\ t \in [t_0 - \tau, t_0],$$

и граничными условиями

$$u(0,t) = 0,\ u(X,t) = 0,\ t \in [t_0, T].$$

Здесь левосторонняя $\frac{\partial^\alpha u}{\partial_- x^\alpha}$ и правосторонняя $\frac{\partial^\alpha u}{\partial_+ x^\alpha}$ дробные производные определяются в смысле дробных производных Римана-Лиувилля.

В подразделе 2.5.1 проводится вывод разностной схемы, при этом используются обозначения как в подразделе 2.3.2. Используя сдвинутые формулы Грюнвальда для левой и правой производной по пространству, применяя обычную аппроксимацию для производной по времени и используя кусочно-линейную интерполяцию с экстраполяцией продолжением предыстории дискретной функции, проводится дискретизация (11) в узлах $(x_i, t_{j+1/2})$ и получается аналог схемы Кранка-Никольсон

$$\frac{u^i_{j+1} - u^i_j}{\Delta} = \frac{1}{h^\alpha}\Big(c^i_+ \sum_{s=0}^{i+1} g_{\alpha,s} u^{i-s+1}_{j+1/2} + c^i_- \sum_{s=0}^{N-i+1} g_{\alpha,s} u^{i+s-1}_{j+1/2}\Big) + f^i_{j+\frac{1}{2}}, \tag{12}$$

$$f^i_{j+\frac{1}{2}} = f(x_i, t_j + \frac{\Delta}{2}, v^i(t_j + \frac{\Delta}{2}), v^i_{t_j+\frac{\Delta}{2}}(\cdot)),\ i = 1, \dots, N-1,\ j = 0, \dots, M-1,$$

$$c^i_+ = c_+(x_i), \quad c^i_- = c_-(x_i), \quad u^i_{j+1/2} = \frac{1}{2}(u^i_j + u^i_{j+1}),$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В разделе 2.6 проводится исследование устойчивости и сходимости схемы (12) по плану раздела 2.4. А именно, вводятся определения невязки без интерполяции и невязки с интерполяцией метода (12), изучается их порядок, который при определенных предположениях о гладкости решения оказывается равным $\Delta^2 + h$.

Доказывается обратимость матрицы $E + A$ и метод сводится к виду (10). При $1 < \alpha < 2$ доказывается безусловная устойчивость метода. При этом условии, а также при определенных условиях гладкости точного решения справедливо утверждение.

Теорема 7. *Метод* (12) *с кусочно-линейной интерполяцией и экстраполяцией продолжением имеет порядок сходимости* $\Delta^2 + h$.

В разделе 2.7 приведены результаты численных экспериментов для уравнений диффузии с односторонней и двухсторонней дробной производной по пространству и с эффектом переменного запаздывания по времени. В каждом из этих тестовых примеров имеется точное решение, поэтому сравнивая приближенные решения с точным, можно отследить изменение погрешностей при изменении пространственных и временных шагов. Численные эксперименты показали хорошее соответствие с теоретическими результатами.

В главе **3** рассматриваются дробные по времени уравнения диффузии с нелинейным эффектом постоянного сосредоточенного запаздывания

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = K\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x,t,u(x,t),u(x,t-s)), \tag{13}$$

со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x,t) = \psi(x,t),\ 0 \le x \le L,\ t \in [-s,0],\ u(0,t) = \phi_0(t),\ u(L,t) = \phi_L(t),\ t > 0,$$

где $s > 0$ — величина запаздывания, K — положительная постоянная. Дробная производная понимается в смысле Капуто, то есть

$$\frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)}\int_0^t (t-\zeta)^{-\alpha}\frac{\partial u(x,\zeta)}{\partial \zeta}d\zeta, \quad 0 < \alpha < 1.$$

В разделе 3.1 делается обзор смежных результатов и применений в математическом моделировании, проводится постановка задачи и делаются основные предположения.

В разделе 3.2 проводится вывод разностной схемы. Возьмем два положительных целых числа M и n, пусть $h = \frac{L}{M}$, $\tau = \frac{s}{n}$, обозначим $x_i = i\,h$, $t_k = k\,\tau$ и $t_{k+1/2} = \left(k+\frac{1}{2}\right)\tau = \frac{1}{2}(t_k + t_{k+1})$. Определим $v_i^{k+1/2} = \frac{1}{2}\left(v_i^k + v_i^{k+1}\right)$ и $\delta_x^2 v_i^k = \frac{1}{h^2}\left(v_{i+1}^k - 2v_i^k + v_{i-1}^k\right)$.

Определим сеточную функцию $U(i,k) = u(x_i,t_k)$. Используем аппроксимацию для дробной производной Капуто в $t_{k+1/2}$ с $0 < \alpha < 1$:

$$\frac{\partial^\alpha u(x_i,t_{k+1/2})}{\partial t^\alpha} = \omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1}(\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m})u_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}}\left(U_i^{k+1} - U_i^k\right) + \\ + O\left(\tau^{2-\alpha}\right), \tag{14}$$

где

$$\omega_i = \sigma\left((i+\frac{1}{2})^{1-\alpha} - (i-\frac{1}{2})^{1-\alpha}\right),$$

$$\sigma = \frac{1}{\tau^\alpha\,\Gamma(2-\alpha)}, \quad 0 \le i \le M, \quad 0 \le k \le N-1.$$

Применим (14) к уравнению (13) в точках $(x_i, t_{k+1/2})$, получим

$$\omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1}(\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m})U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}}\left(U_i^{k+1} - U_i^k\right) + O\left(\tau^{2-\alpha}\right) \\ = K\frac{\partial^2 u(x_i,t_{k+1/2})}{\partial x^2} + f(x_i,t_{k+1/2},u(x_i,t_{k+1/2}),u(x_i,t_{k+1/2}-s)). \tag{15}$$

Лемма 14. *Пусть для* $g = (g_0, g_1, \dots, g_M)$ *определен оператор* $\mathfrak{A}$ *следующим образом*

$$\mathfrak{A} g_i = \frac{1}{12}(g_{i-1} + 10g_i + g_{i+1}), \quad 1 \le i \le M-1.$$

Тогда

$$\mathfrak{A}[\omega_1 U_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) U_i^m - \omega_k U_i^0 + \frac{\sigma}{2^{1-\alpha}}(U_i^{k+1} - U_i^k)] =$$

$$= K\delta_x^2 U_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}U_i^k - \frac{1}{2}U_i^{k-1}, \frac{1}{2}U_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}U_i^{k-n}) + R_i^k,$$

где

$$|R_i^k| = O\left(h^4 + \tau^{2-\alpha}\right), \quad 1 \le i \le M-1, \quad 0 \le k \le N-1.$$

Применяя $\mathfrak{A}$ к (15), пренебрегая R_i^k и заменяя U_i^k на u_i^k, получаем вид разностной схемы

$$\mathfrak{A}\left[\omega_1 u_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1} - \omega_{k-m}) u_i^m - \omega_k u_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}}\left(u_i^{k+1} - u_i^k\right)\right] =$$

$$= K\delta_x^2 u_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f\left(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}u_i^k - \frac{1}{2}u_i^{k-1}, \frac{1}{2}u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}u_i^{k-n}\right), \qquad (16)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В разделе 3.3 проводится анализ этой разностной схемы. Доказываются утверждения:

Теорема 8. *Разностная схема* (16) *имеет единственное решение.*

Теорема 9. *Метод* (16) *сходится с порядком* $\tau^{2-\alpha} + h^4$.

Теорема 10. *Разностная схема* (16) *безусловно устойчива.*

В разделе 3.4 рассматриваются уравнения диффузии, распределенного по времени порядка, с нелинейным эффектом постоянного сосредоточенного запаздывания

$$\int_0^1 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x,t), u(x, t-s)), \qquad (17)$$

где $t > 0$, $0 \le x \le L$, $s > 0$ — величина запаздывания, K — положительная постоянная и $\omega(\alpha) > 0$ — весовая функция, с начальными и граничными условиями как для уравнения (13). Дробная производная понимается в смысле Капуто. Делается обзор работ, посвященных моделированию с помощью уравнений распределенного дробного порядка, а также изучению численных методов их решения. Приводятся основные предположения.

В разделе 3.5 проводится вывод разностной схемы для уравнения (17). Для аппроксимации интеграла в (17) используется составная формула Симпсона с шагом разбиения $\Delta\alpha = \frac{1}{2J}$. Используя ту же методику, что и в разделе 3.2, а также обозначения раздела 3.2, получаем разностную схему

$$\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l\, \omega(\alpha_l)\, \mathfrak{A} \left[\omega_1^l u_i^k + \sum_{m=1}^{k-1} (\omega_{k-m+1}^l - \omega_{k-m}^l) u_i^m - \omega_k^l u_i^0 + \frac{\sigma^l}{2^{1-\alpha_l}} \left(u_i^{k+1} - u_i^k \right) \right] =$$

$$= K\delta_x^2 u_i^{k+1/2} + \mathfrak{A} f\left(x_i, t_{k+1/2}, \frac{3}{2}u_i^k - \frac{1}{2}u_i^{k-1}, \frac{1}{2}u_i^{k+1-n} + \frac{1}{2}u_i^{k-n} \right), \qquad (18)$$

где $\alpha_l = l\Delta\alpha$,

$$\gamma_l = \begin{cases} \frac{1}{3}, & l = 0, 2J, \\ \frac{2}{3}, & l = 2, 4, \ldots, 2J-4, 2J-2, \\ \frac{4}{3}, & l = 1, 3, \ldots, 2J-3, 2J-1. \end{cases}$$

В разделе 3.6 проводится анализ этой разностной схемы. Доказываются утверждения об однозначной разрешимости метода (18), его безусловной устойчивости, а также теорема сходимости:

Теорема 12. *Метод* (18) *сходится с порядком* $\tau + (\Delta\alpha)^4 + h^4$.

В разделах 3.7 и 3.8 приводятся результаты численных экспериментов по решению тестовых дробных уравнений диффузии с запаздыванием и тестового уравнения диффузии, распределенного по времени порядка, также с запаздыванием.

В **главе 4** рассматриваются диффузионно-волновые уравнения с распределенной дробной производной по времени порядка от единицы до двух и производной по пространству второго порядка с наличием постоянного сосредоточенного запаздывания вида

$$\int_1^2 \omega(\alpha) \frac{\partial^\alpha u(x,t)}{\partial t^\alpha} d\alpha = K \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + f(x, t, u(x,t), u(x, t-s)), \qquad (19)$$

$t > 0$, $0 \le x \le L$, со следующими начальными и граничными условиями

$$u(x,t) = \tilde{r}(x,t), \quad 0 \le x \le L, \quad t \in [-s, 0), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \tilde{\psi}(x),$$

$$u(0,t) = \phi_0(t), \quad u(L,t) = \phi_L(t), \quad t > 0,$$

где $s > 0$, $K > 0$, $\omega(\alpha) > 0$. Дробная производная определена в смысле Капуто.

В разделе 4.1, кроме постановки задачи, проводится обзор работ, посвященных моделированию с помощью диффузионно-волновых уравнений дробного порядка, а также изучению численных методов их решения. Приводятся основные предположения.

В разделе 4.2 проводится вывод разностной схемы для уравнения (19). Для аппроксимации интеграла в (19) используется составная формула Симпсона с шагом разбиения $\Delta\alpha = \frac{1}{2J}$. Используя ту же методику, что и в разделе 3.5, а также обозначения главы 3, получаем для $1 \le i \le M-1, \quad 1 \le k \le N$, разностную схему

$$\Delta\alpha \sum_{l=0}^{2J} \gamma_l\, \omega(\alpha_l) \mathfrak{A} \left[\frac{1}{\tau\Gamma(2-\alpha_l)} (b_0^{\alpha_l} \delta_t v_i^{k-1/2} - \sum_{j=1}^{k-1} (b_{k-j-1}^{\alpha_l} - b_{k-j}^{\alpha_l}) \delta_t v_i^{j-1/2} - b_{k-1}^{\alpha_l} \psi(x_i)) \right]$$

$$= K\delta_x^2 v_i^{k-1/2} + \mathfrak{A} f\left(x_i, t_{k-1/2}, \frac{3}{2} v_i^{k-1} - \frac{1}{2} v_i^{k-2}, \frac{1}{2} v_i^{k-n-1} + \frac{1}{2} v_i^{k-n}\right), \qquad (20)$$

с соответствующими начальными и граничными условиями.

В разделе 4.3 проводится анализ этой разностной схемы. Доказываются утверждения об однозначной разрешимости, порядке сходимости и устойчивости схемы (20).

В **главе 5** рассматриваются численные методы решения уравнений адвекции-диффузии с дробными производными как по времени, так и по пространству, с эффектом наследственности:

$$\beta_1 \frac{\partial u}{\partial t} + \beta_2 \frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = -V \frac{\partial u}{\partial x} + D(\frac{1}{2} + \frac{q}{2}) \frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha} + D(\frac{1}{2} - \frac{q}{2}) \frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha} +$$

$$+ f(x, t, u(x,t), u_t(x,\cdot)), \qquad (21)$$

где $x \in [a,b]$, $t \in [t_0, T]$, $u_t(x,\cdot) = \{u(x, t+s), -\tau \le s < 0\}$ — предыстория функции, $\tau > 0$ — величина запаздывания, с начальными условиями $u(x,t) = \varphi(x\,t)$, $x \in [a,b]$, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$, граничными условиями $u(a,t) = \varphi_1(t)$, $u(b,t) = \varphi_2(t)$, $t \in [t_0, T]$. Предположим, что $\beta_1 = 1$, $\beta_2 = \beta \ge 0$, $-1 \le q \le 1$, $V > 0$, $D > 0$, $1 < \alpha \le 2$, $0 < \gamma \le 1$.

Дробная производная по времени $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ определяется в смысле Капуто, левосторонняя $\frac{\partial^\alpha u}{\partial x^\alpha}$ и правосторонняя $\frac{\partial^\alpha u}{\partial(-x)^\alpha}$ дробные производные определяются в смысле Римана-Лиувилля.

В разделе 5.1 проводится вывод разностной схемы. Используем обозначения главы 2. Так как конструируется неявный метод первого порядка по времени, то используется кусочно-постоянная интерполяция с экстраполяцией продолжением. Дискретизируем пространственные дробные производные Римана-Лиувилля с помощью сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}u(x_i,t_{k+1})=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i+1-j},t_{k+1})+O(h^p),$$

$$\frac{\partial^\alpha}{\partial(-x)^\alpha}u(x_i,t_{k+1})=\frac{1}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u(x_{i-1+j},t_{k+1})+O(h^p).$$

Коэффициенты ω_j^α определяются неоднозначно, положим

$$\omega_j^\alpha=(-1)^j\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-j+1)}{j!},\ j=0,1,\ldots,$$

тогда аппроксимации будут иметь порядок $p=1$.

Дискретизируем дробную производную по времени используя $L1$-алгоритм

$$\frac{\partial^\gamma}{\partial t^\gamma}u(x,t_{k+1})=\frac{1}{\Delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^\gamma[u(x,t_{k+1-j}-u(x,t_{k-j})]+O(\Delta^{2-\gamma}),$$

где $b_j^\gamma=(j+1)^{1-\gamma}-j^{1-\gamma}$, $j=0,1,\ldots,M$.

Используя также обычные формулы численного дифференцирования, получаем следующую неявную разностную схему

$$\frac{u_{k+1}^i-u_k^i}{\Delta}+\frac{\beta}{\Delta^\gamma\Gamma(2-\gamma)}\sum_{j=0}^{k}b_j^\gamma[u_{k+1-j}^i-u_{k-j}^i]=-V\frac{u_{k+1}^i-u_{k+1}^{i-1}}{h}+$$

$$+(\frac{1}{2}+\frac{q}{2})\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{i+1}\omega_j^\alpha u_{k+1}^{i+1-j}+(\frac{1}{2}-\frac{q}{2})\frac{D}{h^\alpha}\sum_{j=0}^{N-i+1}\omega_j^\alpha u_{k+1}^{i-1+j}+f_{j+1}^i, \tag{22}$$

$f_{j+1}^i=f(x_i,t_{j+1},v^i(t_j+\Delta),v_{t_j+\Delta}^i(\cdot))$, $v^i(t)$ — результат интерполяции с экстраполяцией. Схема дополняется начальными и граничными условиями. Доказывается, что эта система однозначно разрешима.

В разделе 5.2 проводится анализ погрешности аппроксимации (невязки) метода. Доказывается, что при определенных условиях гладкости решения невязка без интерполяции и невязка с кусочно-постоянной интерполяцией имеют порядок $\Delta+h$. В разделе 5.3 доказывается сходимость метода.

Пусть $\varepsilon_j^i=u(x_i,t_j)-u_j^i$ погрешность метода в узлах. Определим для каждого временного слоя с номером $j=0,1,\cdots,M$ послойную погрешность — вектор

$\varepsilon_j = (\varepsilon_j^1, \varepsilon_j^2, \cdots, \varepsilon_j^{N-1})$ с нормой $\|\varepsilon_j\| = \max_{1\le i\le N-1} |\varepsilon_j^i|$. Кроме того, определим накопившуюся предысторию послойной погрешности к моменту t_j, $j = 0, 1, \cdots, M$: $\{\varepsilon_k\}_j = \{\varepsilon_k, 0 \le k \le j\}$ с нормой $\|\{\varepsilon_k\}_j\| = \max_{0\le k\le j} \|\varepsilon_k\|$.

В двух леммах проводится оценка послойной погрешности и накопившейся предыстории послойной погрешности. Отсюда, при определенных условиях гладкости решения, получается теорема о том, что метод (22) сходится с порядком $h + \Delta$.

В **заключении** излагаются основные результаты работы, указываются возможные направления дальнейших исследований.

Основные результаты работы

1. Для дробного дифференциального уравнения с сосредоточенным запаздыванием приведены конструкции неявного метода, основанного на аппроксимации точного решения на соответствующем отрезке сдвинутыми полиномами Чебышева, выведены оценки для локальной и глобальной погрешности численного решения.

2. Для одностороннего и двухстороннего дробного по пространству уравнения диффузии с функциональным запаздыванием сконструированы дробные аналоги метода Кранка-Никольсон с кусочно-линейной интерполяцией дискретной предыстории и её экстраполяцией продолжением, доказаны теоремы о порядках сходимости методов.

3. Построена разностная схема для решения класса уравнений диффузии с дробной производной по времени и с нелинейным запаздыванием, проведен анализ её устойчивости и сходимости, конструкции перенесены на случай дробной производной по времени распределенного порядка.

4. Сконструирована разностная схема для решения класса диффузионно-волновых уравнений распределенного дробного порядка с запаздыванием, проведен анализ её однозначной разрешимости, устойчивости и сходимости.

5. Для уравнения адвекции-диффузии с дробными производными по времени и по пространству и с эффектом функционального запаздывания построены разносные схемы, основанные на использовании сдвинутых формул Грюнвальда-Летникова для аппроксимации дробных производных по

пространству, L1-алгоритма для аппроксимации дробных производных по времени и кусочно-постоянной интерполяции с экстраполяцией продолжением для учета предыстории модели по времени; доказана разрешимость и устойчивость схем, исследован порядок сходимости.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК

1. V.G. Pimenov, A.S. Hendy. Numerical methods for the equation with fractional derivative on state and with functional delay on time // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2015. Т. 20, вып. 5. С. 1358–1361.

2. V. Pimenov and A. Hendy. Numerical studies for fractional functional differential equations with delay based on BDF-type shifted Chebyshev approximations // Abstract and Applied Analysis. 2015. Article ID 510875. P. 1–12.

3. V.G. Pimenov, A.S. Hendy, R.H. De Staelen. On a class of non-linear delay distributed order fractional diffusion equations // Journal of Computational and Applied Mathematics. 2017. Vol. 318. P. 433–443.

4. В.Г. Пименов, А.С. Хенди. Неявный численный метод решения дробного уравнения адвекции-диффузии с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. 2016. Т. 22, № 2. С. 218–227.

Другие публикации

5. A.S. Hendy, V.G. Pimenov. Numerical method for solving delayed fractional differential equations based on BDF-type Chebyshev approximations // Алгоритмический анализ неустойчивых задач. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В.К. Иванова. Челябинск, Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С. 138.

6. V.G. Pimenov, A.S. Hendy. A linearized difference scheme for a class of fractional partial differential equations with delay // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с между-

народным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск, УдГУ, 2015. С. 19–20.

7. A.S. Hendy. A linearized difference scheme for a class of fractional partial differential equations with delay // Известия Института математики и информатики УдГУ. 2015. Т. 2 (46). С. 236–243.

8. V.G. Pimenov, A.S. Hendy. Numerical approximation of solutions for distributed order fractional diffusion equations with delay // Proceedings of the 15th International Conference on Computational and Mathematical Methods in Science and Engineering. Rota, Cadiz – Spain. 2015. P. 921–924.

9. V.G. Pimenov, A.S. Hendy. A fractional analog of Crank-Nicholson method for the two sided space fractional partial equation with functional delay // Ural Mathematical Journal. 2016. Vol 2, no 1. P. 48–57.

10. V.G. Pimenov, A.S. Hendy. Numerical methods for the fractional diffusion equation with heredity // Proceedings of the 47th International Youth School-conference "Modern Problems in Mathematics and its Applications". 2016. Yekaterinburg. P. 276–283.

11. V.G. Pimenov, A.S. Hendy. Adaptivity of the alternating direction method for fractional reaction diffusion equation with delay effects in electrocardiology // Experimental and Computational Biomedicine: Russian Conference with International Participation in memory of Professor Vladimir S. Marchasin, Book of Abstracts. Ekaterinburg. 2016. P. 24.

12. V. Pimenov, A. Hendy. Numerical methods for the control fractional advection-diffusion models with heredity // International Conference in memory of Academician Arkady Kryazhimskiy "Systems Analysis: Modeling and Control". Book of Abstracts. Ekaterinburg. 2016. P. 93–95.

13. Pimenov V.G., Hendy A.S. Numerical solution for a class of semi-linear delayed diffusion-wave system with time fractional order // Материалы тезисов Международной конференции "Актуальные проблемы прикладной математики и автоматизации". Терскол. 2016. С. 252–254.