

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина»

На правах рукописи

Таширова Екатерина Евгеньевна

Численные алгоритмы решения уравнений гиперболического типа с запаздыванием

Специальность 01.01.07 —Вычислительная математика

ДИССЕРТАЦИЯ

на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Научный руководитель:  
доктор физико-математических наук, профессор  
Пименов В.Г.

Екатеринбург – 2016

# Содержание

<b>Введение</b>	<b>3</b>
<b>1 Уравнения гиперболического типа с запаздыванием с одной пространственной переменной</b>	<b>20</b>
1.1 Постановка задачи . . . . .	20
1.2 Разностный метод . . . . .	21
1.3 Исследование сходимости . . . . .	24
1.4 Примеры численных расчетов . . . . .	32
<b>2 Уравнения гиперболического типа с запаздыванием с двумя пространственными переменными</b>	<b>38</b>
2.1 Постановка задачи . . . . .	38
2.2 Разностный метод . . . . .	39
2.3 Факторизованная схема . . . . .	40
2.4 Исследование невязки . . . . .	43
2.5 Исследование сходимости . . . . .	46
2.6 Примеры численных расчетов . . . . .	55
<b>3 Системы уравнений акустики с последствием</b>	<b>66</b>
3.1 Постановка задачи . . . . .	66
3.2 Разностный метод . . . . .	67
3.3 Порядок невязки . . . . .	70
3.4 Исследование сходимости . . . . .	73
3.5 Примеры численных расчетов . . . . .	77
<b>Заключение</b>	<b>85</b>
<b>Литература</b>	<b>87</b>

# Введение

**Актуальность темы и степень ее разработанности.** Уравнения гиперболического типа с эффектом запаздывания, как и другие эволюционные уравнения с наследственностью, широко применяются в приложениях математического моделирования. Имеется большое количество работ по исследованию качественных свойств таких объектов [28, 50, 59, 70, 90]. Однако, в силу сложности объектов и невозможности применения аналитических методов отыскания решений, на первый план выходят численные методы, и в этой области конструктивных результатов недостаточно.

Среди исследований по численным методам решения уравнений в частных производных с эффектом запаздывания отметим следующие подходы.

В работе L. Tavernini [83] предлагалось проводить дискретизацию с помощью непрерывных методов, чтобы избежать интерполяции между узлами сетки.

Варианты метода прямых, в которых проводится дискретизация только по переменным состояния, сводят задачи к численному решению систем функционально-дифференциальных уравнений (см. работы P.J. Van Der Houwen, B.P. Sommeijer, C.T.H. Baker [84] и B. Zubik-Kowal [94, 95]).

Z. Kamont, W. Czernous и K. Kropielnicka разрабатывали сеточные методы решения эволюционных уравнений с функциональной зависимостью искомой функции от предыстории по времени и от сдвигов по пространству [8, 64, 69], в этих работах основное внимание уделялось исследованию общих неявных схем и условиям устойчивости.

В работах В.Г. Пименова и его сотрудников Л.С. Волканина, А.Б. Лекомцева, А.Б. Ложникова, С.В. Свиридова и С.И. Солодушкина [3, 12, 18, 20–22, 25, 32, 75, 76, 81] основным моментом в построении сеточных методов является идея разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей в предыстории искомой функции (разделение настоящего и прошлого). По конечномерной составляющей, входящей в линейную дифференциальную часть уравнения, строятся аналоги известных для объектов без наследственности сеточных методов, а для учета эффекта наследственности применяется интерполяция дискретной предыстории с заданными свойствами. Другая идея состоит в применении экстраполяции продолжением

интерполяции дискретной предыстории. Такая экстраполяция необходима для реализации неявных методов, а кроме того, это позволяет избегать решения многомерных нелинейных систем при реализации сеточных алгоритмов на каждом временном слое. В совокупности эти идеи позволили создать простые и в то же время эффективные алгоритмы, которые могут быть положены в основу комплекса программ, предназначенного для численного решения уравнений в частных производных. Во всех этих работах рассматривались уравнения параболического типа с эффектом наследственности, а также уравнения в частных производных первого порядка (уравнения переноса) с эффектом наследственности.

Для уравнений гиперболического типа этот подход ранее не разрабатывался.

При этом следует отметить, что вообще работ по исследованию численных методов решения уравнений гиперболического типа с эффектом запаздывания крайне мало, в отличие от уравнений параболического типа с таким эффектом [8, 12, 18, 20–22, 66, 69, 75, 76, 84, 94, 95], от уравнений в частных производных первого порядка с запаздыванием [3, 8, 25, 31, 32, 64, 81, 82] и, особенно, от обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздыванием: см обзоры литературы в [10, 42, 44, 51, 52, 56–58].

**Цели и задачи диссертационной работы.** Цель работы состоит в разработке сеточных методов решения одномерных и многомерных уравнений гиперболического типа с эффектом функционального запаздывания, а также связанной с ними системы уравнений акустики с запаздыванием. К задачам работы относятся обоснование сходимости разработанных алгоритмов и изучение факторов, оказывающих влияние на порядки сходимости.

**Научная новизна.** В диссертационной работе для уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной и с наличием нелинейно входящего эффекта функционального запаздывания по времени сконструировано семейство сеточных схем с весами, при этом эффект запаздывания учитывается в схеме с помощью интерполяции с заданными свойствами, а возможная неявность по этому эффекту преодолевается за счет экстраполяции. Исследованы локальные порядки схем этого семейства без учета интерполяции и с учетом интерполяции и экстраполяции. Получены условия на вес, гарантирующие устойчивость предложенных конструкций по начальным данным. С помощью конструкций общей теории разностных схем систем с наследственностью доказана теорема о сходимости и о порядках сходимости разработанных численных методов.

Для начально-краевой задачи гиперболического типа с двумя пространственными переменными и с наличием эффекта функционального запаздывания по времени разработано семейство разностных схем, допускающих факторизацию по пространственным переменным. Так же как в одномерном случае, эффект запаздывания учитывается с помощью соответствующих интерполяционных и экстраполяционных конструкций. Факторизация позволяет

свести расчеты по предложенному алгоритму к последовательному применению трехдиагональной прогонки. Исследованы порядки невязки без интерполяции и с интерполяцией относительно пространственных и временных шагов разбиения. Получены условия устойчивости и доказана теорема о порядках сходимости.

Для системы уравнений акустики с наличием эффекта запаздывания разработаны неявные сеточные схемы с учетом интерполяции дискретной предыстории модели. При этом неявность за счет экстраполяции возникает только в виде систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Изучены свойства локальной погрешности без учета интерполяции и с учетом интерполяции. С помощью вложения в общую разностную схему численного решения систем с наследственностью получена теорема о порядках сходимости.

Все теоретические результаты подтверждены тестовыми примерами, содержащими постоянное сосредоточенное, переменное и распределенное запаздывание.

**Теоретическая и практическая значимость работы.** Уравнения в частных производных, в том числе и гиперболического типа, с эффектом наследственности играют важную роль при описании различных явлений в науке и технике. Теоретическая значимость работы состоит в создании с единых позиций сеточных методов решения для одномерных и многомерных уравнений гиперболического типа с эффектом запаздывания общего вида, а также для систем уравнений акустики с подобным эффектом, в получении условий устойчивости и порядков сходимости методов. Создание эффективных и обоснованных с точки зрения сходимости численных методов послужит большему распространению таких уравнений в математическом моделировании, в этом состоит практическая значимость работы.

**Методология и методы исследования.** В основе исследования лежат понятия и методы теории разностных схем для решения уравнений в частных производных, см., например, книгу А.А.Самарского [29]. Так, следуя этой теории выводятся условия устойчивости однородных разностных схем, трехслойные схемы сводятся к двухслойным, используются методы факторизации многомерных алгоритмов [7]. Однако, исследуемые эффекты наследственности потребовали для построения и исследования разрабатываемых численных методов использовать также понятия и методологию численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений [10, 17], особенно теоремы сходимости в общей схеме систем с наследственностью, в форме, приспособленной для уравнений с частными производными [19, 22].

**Положения, выносимые на защиту.** Основные результаты работы являются новыми и состоят в следующем:

- для уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной и наличием эффекта функционального запаздывания по времени построено семейство разностных

схем с весами, получены условия устойчивости и доказана теорема о порядках сходимости;

- для уравнения гиперболического типа с двумя пространственными переменными с эффектом наследственности сконструированы численные алгоритмы, допускающие факторизацию, доказана теорема сходимости;
- для системы уравнений акустики с наличием эффектов запаздывания различных видов созданы численные алгоритмы и обоснована их сходимость.

**Достоверность результатов.** Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами и проведенными компьютерными экспериментами на тестовых примерах.

**Структура и объем работы.** Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Главы разбиты на параграфы. Параграфы нумеруются двойными индексами, первый индекс — номер главы, второй индекс — номер параграфа. Формулы нумеруются тройными индексами: первый индекс — номер главы, второй индекс — номер параграфа, третий индекс — номер формулы в параграфе. Нумерация формул введения одинарная. Нумерация утверждений сквозная по всему тексту, нумерация утверждений введения повторяет нумерацию соответствующих утверждений основного текста. Библиография содержит 96 наименований. Общий объем работы составляет 94 страницы машинописного текста.

### Краткое содержание работы.

В главе 1 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения волнового уравнения с эффектом наследственности.

В разделе 1.1 рассматривается начально-краевая задача для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)): t_0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X, \quad (1)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = g_1(t), u(X, t) = g_2(t): t_0 \leq t \leq T \quad (2)$$

и начальными условиями

$$u(x, t) = \varphi(x, t): 0 \leq x \leq X, t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \quad (3)$$

Здесь  $x, t$  — независимые переменные;  $u(x, t)$  — искомая функция;  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$  — функция предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  — величина запаздывания;  $f(x, t, u, u_t(x, \cdot))$  — функционал, определенный на  $[0, X] \times [t_0, T] \times \mathbb{R} \times Q$ ;  $Q = Q[-\tau, 0]$  —

множество функций  $u(\xi)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0)$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа,  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0)} |u(\xi)|$ .

В разделе 1.2 проводится дискретизация этой задачи и описывается семейство численных методов.

Отрезок  $[0, X]$  разбивается на части с шагом  $h = X/N$ , где  $N$  — некоторое целое число. Вводятся точки  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Отрезок  $[t_0, T]$  разбивается на части с шагом  $\Delta$  так, чтобы  $m = \tau/\Delta$  было целым числом. Вводятся точки  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = -m, \dots, M$ , где  $M = \lfloor T/\Delta \rfloor$ . Приближение точного решения  $u(x_i, t_j)$  обозначается через  $u_j^i$ . Вводится дискретная предыстория к моменту  $t_j$  при каждом фиксированном  $i$ :

$$\{u_l^i\}_j = \{u_l^i: j - m \leq l \leq j\}.$$

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории называется отображение:

$$I: \{u_l^i\}_j \rightarrow v_j^i(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta],$$

где  $Q[-\tau, \Delta]$  — множество функций  $v(\xi)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, \Delta]$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа,  $\|v(\cdot)\|_{Q[-\tau, \Delta]} = \sup_{\xi \in [-\tau, \Delta]} |v(\xi)|$ .

Вводится определение порядка погрешности оператора интерполяции-экстраполяции.

Рассматривается семейство методов с весами ( $0 \leq s \leq 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{\Delta^2} &= sa^2 \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + sa^2 \frac{u_{j-1}^{i-1} - 2u_{j-1}^i + u_{j-1}^{i+1}}{h^2} + \\ &+ (1 - 2s)a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} + F_j^i(v_j^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 0, \dots, M - 1 \end{aligned} \quad (4)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Здесь  $F_j^i(v(\cdot))$  — некоторый функционал, определенный на функциях  $v(\cdot) = v_j^i(\cdot) = I(\{u_l^i\}_j) \in Q[-\tau, \Delta]$  и связанный с функционалом  $f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^i(\cdot))$ .

При  $s = 0$  получается явная схема, при других  $s$  ( $0 < s \leq 1$ ), при каждом фиксированном  $j$  система является линейной трехдиагональной относительно  $u_{j+1}^i$  с диагональным преобладанием, она эффективно решается методом прогонки.

В этом же разделе вводится и исследуется величина, характеризующая погрешность аппроксимации метода (невязка). Невязка (без интерполяции) метода определяется следующим образом:

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta^2} - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}))}{h^2} - \\ &- sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, t_{j-1}))}{h^2} - \end{aligned}$$

$$- (1 - 2s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \quad (5)$$

Вводится порядок невязки: будем говорить, что невязка имеет порядок  $h^{p_1} + \Delta^{p_2}$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h$ , что  $|\psi_j^i| \leq C(h^{p_1} + \Delta^{p_2})$  для всех  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $j = 0, \dots, M-1$ .

Рассматривается семейство методов (4), в которых функционал  $F_j^i$  определяется следующим образом:

$$F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_j^i, \widehat{v}_j^i(\cdot)), \quad (6)$$

где  $\widehat{v}_j^i(\cdot) \in Q[-\tau, 0]$ ;  $\widehat{v}_j^i(\xi) = v_j^i(\xi)$ ,  $-\tau \leq \xi < 0$ .

Доказывается следующая теорема.

**Теорема 1.** *Если для точного решения задачи (1)–(3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_j^i$  определяется соотношением (6), то для любого  $0 \leq s \leq 1$  невязка имеет порядок  $h^2 + \Delta^2$ .*

В разделе 1.3 проводится исследование порядков сходимости методов из описанного выше семейства.

Обозначим величину погрешности метода в узлах через  $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$ . Будем говорить, что метод сходится с порядком  $h^p + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h$ , что выполняется неравенство  $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

Схемы семейства (4) исследуются на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему решения уравнений с наследственностью, следуя методике работ [10, 17, 19, 22]. Предварительно описывается эта схема. Главным ее элементом является пошаговая формула

$$\gamma_{n+1} = S\gamma_n + \Delta\Phi(t_n, I(\{\gamma_l\}_n)), \quad (7)$$

где  $\gamma_n$  — элемент банахова пространства моделей,  $S$  — линейный оператор,  $I(\{\gamma_l\}_n)$  — оператор интерполяции дискретной предыстории модели к моменту  $t_n$ ,  $\Phi$  — функция, липшицева по второму аргументу.

Основным результатом является теорема 2 о порядке сходимости, которая приводится в диссертации.

Далее в разделе 1.3 приводятся конструкции, сводящие метод (4) к пошаговой формуле (7). В этом разделе рассматриваются задачи с однородными краевыми условиями:

$$u(0, t) = u(X, t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

При каждом  $t_j$  определим значения дискретной модели вектором  $\widetilde{\gamma}_j = (u_j^0, u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1}, u_j^N)' \in \widetilde{\Gamma}$ , где  $'$  — знак транспонирования,  $\widetilde{\Gamma}$  — векторное пространство размерности

$N + 1$  со скалярным произведением:

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\omega}) = \sum_{i=0}^N \tilde{\gamma}^i \tilde{\omega}^i h, \tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}^0, \tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^N)' \in \tilde{\Gamma}, \tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^0, \tilde{\mu}^1, \dots, \tilde{\mu}^N)' \in \tilde{\Gamma}. \quad (8)$$

В пространстве  $\tilde{\Gamma}$  вводятся операторы  $A$  и  $R$ :

$$A\tilde{\gamma}_j = \tilde{\mu}_j, \tilde{\mu}_j = (\tilde{\mu}_j^0, \tilde{\mu}_j^1, \dots, \tilde{\mu}_j^N)',$$

$$\tilde{\mu}_j^i = -a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} : 1 \leq i \leq N - 1, \tilde{\mu}_j^0 = 0, \tilde{\mu}_j^N = 0, \quad (9)$$

$$R = \frac{1}{\Delta^2} E + sA. \quad (10)$$

Оператор  $A$  (9) самосопряженный и положительный в смысле скалярного произведения векторов (8). Тогда оператор  $R$  (10) также самосопряженный и положительный. Предположим, что выполнено условие

$$R > \frac{1}{4}A. \quad (11)$$

В пространстве  $\tilde{\Gamma}$  вводится норма:

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}} = \sqrt{\frac{1}{4}(A(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}), \tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}), \tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1})}. \quad (12)$$

Тогда систему (4) можно привести к виду

$$\tilde{\gamma}_{j+1} = 2\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_{j-1} - R^{-1}A\tilde{\gamma}_j + R^{-1}F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j)), \quad (13)$$

где  $F_j(v(\cdot)) = (F_j^0(v_j^0(\cdot)), F_j^1(v_j^1(\cdot)), \dots, F_j^N(v_j^N(\cdot)))'$ ,  $v(\cdot) = I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j) \in Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$ ,  $Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$  — пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит  $Q[-\tau, \Delta]$ .

Вводится вектор  $\gamma_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)' = (\tilde{\gamma}_{j-1}, \tilde{\gamma}_j)' \in \Gamma$ , где  $\Gamma$  — векторное пространство размерности  $q = 2(N + 1)$ . Считаем, что если в пространстве  $\tilde{\Gamma}$  определена норма, то в пространстве  $\Gamma$  она определяется следующим образом:

$$\|\gamma\|_{\Gamma}^2 = \|\gamma^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2. \quad (14)$$

В результате получаем разностную схему:

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)), \quad (15)$$

$$\text{где } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - R^{-1}A \end{pmatrix}, \Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)) = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}F_j(I(\{\gamma_l^2\}_j))/\Delta \end{pmatrix}.$$

Таким образом, получили пошаговую формулу (7).

Определяются также другие конструкции общей разностной схемы решения уравнений с наследственностью: функция точных значений, стартовые значения модели.

Понятие погрешности аппроксимации (невязки с интерполяцией) в общей разностной схеме отличается от ранее введенного понятия невязки без интерполяции, однако имеет место утверждение.

**Теорема 3.** Пусть невязка в смысле (5) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , функции  $F_j^i$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении,  $\sigma = a^2 \Delta^2 / h^2$  зафиксировано, тогда невязка с интерполяцией имеет одинаковый порядок погрешности по  $\Delta$  и  $h$ , равный  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}}$ .

Далее исследуется устойчивость метода. Схема (7) называется устойчивой, если выполняется условие

$$\|S\|_{\Gamma} \leq 1.$$

Используя результаты общей теории разностных схем [29], доказывается, что схема (15) устойчива при выполнении условия (11), которое выполнено, если

$$s > \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right), \quad (16)$$

где  $\sigma = a^2 \Delta^2 / h^2$ .

Вложение в общую разностную схему с наследственностью проведено, отсюда получаем следующий результат.

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие устойчивости (16), невязка без интерполяции (5) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , функции  $F_j^i$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  липшицев и имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$ ,  $\sigma$  зафиксировано, тогда метод (4) сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}} + h^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_4\}}$ .

Опираясь на теорему 4, получаем следующее следствие

**Следствие 1.** Если для точного решения задачи (1)–(3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_j^{i,k}$  задается соотношением (6), применяется кусочно-линейная интерполяция, выполнено условие устойчивости (16),  $\sigma$  зафиксировано, тогда метод (4) сходится с порядком  $h^2 + \Delta^2$ .

В разделе 1.4 приводятся результаты компьютерного моделирования вычислений по описанным выше алгоритмам для тестовых примеров уравнений гиперболического типа с постоянным, переменным и распределенным запаздыванием. Все тесты подобраны так, чтобы задачи имели известные точные решения. Сравнивая результаты вычислений для разностных схем с различными шагами дискретизации по времени и по пространству, получаем, что при выполнении условий устойчивости приближенные решения сходятся к точным при уменьшении шагов дискретизации.

В главе 2 конструируются и исследуются численные алгоритмы решения волнового уравнения с эффектом наследственности с двумя пространственными переменными.

В разделе 2.1 рассматривается начально-краевая задача для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) + f(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)): t_0 \leq t \leq T, \\ 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y \quad (17)$$

с граничными условиями

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), u(X, y, t) = g_1(y, t), : 0 \leq y \leq Y, t_0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) = g_2(x, t), u(x, Y, t) = g_3(x, t) : 0 \leq x \leq X, t_0 \leq t \leq T \quad (18)$$

и начальными условиями

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t): 0 \leq x \leq X, 0 \leq y \leq Y, t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \quad (19)$$

Здесь  $x, y, t$  — независимые переменные;  $u(x, y, t)$  — искомая функция;  $u_t(x, y, \cdot) = \{u(x, y, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$  — функция предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  — величина запаздывания;  $f(x, y, t, u, u_t(x, y, \cdot))$  — функционал, определенный на  $[0, X] \times [0, Y] \times [t_0, T] \times \mathbb{R} \times Q[-\tau, 0)$ .

В разделе 2.2 проводится дискретизация задачи и строится семейство численных методов. Отрезок  $[0, X]$  разбивается на части с шагом  $h_1 = X/N_1$ , отрезок  $[0, Y]$  на части с шагом  $h_2 = Y/N_2$ , где  $N_1, N_2$  — некоторые целые числа. Вводятся точки  $x_i = ih_1, i = 0, 1, \dots, N_1$ ,  $y_k = kh_2, k = 0, 1, \dots, N_2$ . Отрезок  $[t_0, T]$  разбивается на части с шагом  $\Delta$  так, чтобы  $m = \tau/\Delta$  было целым числом. Вводятся точки  $t_j = t_0 + j\Delta, j = -m, \dots, M$ , где  $M = \lfloor T/\Delta \rfloor$ . Приближение точного решения  $u(x_i, y_k, t_j)$  обозначается через  $u_j^{i,k}$ . Вводится дискретная предыстория к моменту  $t_j$  при фиксированных  $i, k$ :

$$\{u_l^{i,k}\}_j = \{u_l^{i,k} : j - m \leq l \leq j\}.$$

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории называется отображение:

$$I : \{u_l^{i,k}\}_j \rightarrow v_j^{i,k}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta].$$

Вводится определение порядка погрешности оператора интерполяции-экстраполяции.

Рассматривается семейство методов с весами ( $0 \leq s \leq 1$ ):

$$\frac{u_{j+1}^{i,k} - 2u_j^{i,k} + u_{j-1}^{i,k}}{\Delta^2} = sa^2 \left( \frac{u_{j+1}^{i-1,k} - 2u_{j+1}^{i,k} + u_{j+1}^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{j+1}^{i,k-1} - 2u_{j+1}^{i,k} + u_{j+1}^{i,k+1}}{h_2^2} \right) + \\ + sa^2 \left( \frac{u_{j-1}^{i-1,k} - 2u_{j-1}^{i,k} + u_{j-1}^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{j-1}^{i,k-1} - 2u_{j-1}^{i,k} + u_{j-1}^{i,k+1}}{h_2^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + (1 - 2s)a^2 \left( \frac{u_j^{i-1,k} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_j^{i,k-1} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i,k+1}}{h_2^2} \right) + F_j^{i,k}(v_j^{i,k}(\cdot)), \\
& i = 1, \dots, N_1 - 1, k = 1, \dots, N_2 - 1, j = 0, \dots, M - 1,
\end{aligned} \tag{20}$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Здесь  $F_j^{i,k}(v(\cdot))$  — некоторый функционал, определенный на функциях  $v(\cdot) = v_j^{i,k}(\cdot) = I(\{u_l^{i,k}\}_j) \in Q[-\tau, \Delta]$  и связанный с функционалом  $f(x_i, y_k, t_j, u_j^{i,k}, v_j^{i,k}(\cdot))$ .

Схема (20) при  $s = 0$  является явной, при других  $s$  ( $0 < s \leq 1$ ), при каждом фиксированном  $j$  получается система уравнений. Для того чтобы привести систему к виду, при котором ее можно решить методом прогонки, производится переход к факторизованной схеме [7].

Раздел 2.3 посвящен сведению полученной схемы к факторизованной. В этом разделе и далее рассматриваются задачи с однородными граничными условиями.

При каждом  $t_j$  определим значения дискретной модели  $\tilde{\gamma}_j = (u_j^{0,0}, u_j^{0,1}, \dots, u_j^{0,N_2-1}, u_j^{0,N_2}, u_j^{1,0}, u_j^{1,1}, \dots, u_j^{1,N_2}, \dots, u_j^{N_1,0}, u_j^{N_1,1}, \dots, u_j^{N_1,N_2-1}, u_j^{N_1,N_2})' \in \tilde{\Gamma}$ , где  $\tilde{\Gamma}$  — векторное пространство размерности  $q = (N_1 + 1)(N_2 + 1)$  со скалярным произведением:

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\mu}) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} \tilde{\gamma}_{i,k} \tilde{\mu}_{i,k} h_1 h_2, \tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_{0,0}, \tilde{\gamma}_{0,1}, \dots, \tilde{\gamma}_{N_1,N_2})' \in \tilde{\Gamma}, \tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_{0,0}, \tilde{\mu}_{0,1}, \dots, \tilde{\mu}_{N_1,N_2})' \in \tilde{\Gamma}. \tag{21}$$

В пространстве  $\tilde{\Gamma}$  вводятся операторы  $A_1$ ,  $A_2$  и  $R$ :

$$\begin{aligned}
A_1 \tilde{\gamma}_j &= \tilde{\mu}_j, \tilde{\mu}_j = (\tilde{\mu}_j^{0,0}, \tilde{\mu}_j^{0,1}, \dots, \tilde{\mu}_j^{N_1,N_2})', \\
\tilde{\mu}_j^{i,k} &= -a^2 \frac{u_j^{i-1,k} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i+1,k}}{h_1^2} : 1 \leq i \leq N_1 - 1, \tilde{\mu}_j^{0,k} = 0, \tilde{\mu}_j^{N_1,k} = 0,
\end{aligned} \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
A_2 \tilde{\gamma}_j &= \tilde{\omega}_j, \tilde{\omega}_j = (\tilde{\omega}_j^{0,0}, \tilde{\omega}_j^{0,1}, \dots, \tilde{\omega}_j^{N_1,N_2})', \\
\tilde{\omega}_j^{i,k} &= -a^2 \frac{u_j^{i,k-1} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i,k+1}}{h_2^2} : 1 \leq k \leq N_2 - 1, \tilde{\omega}_j^{i,0} = 0, \tilde{\omega}_j^{i,N_2} = 0,
\end{aligned} \tag{23}$$

$$R = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2.$$

Тогда систему (20) можно привести к виду:

$$R(\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}) + \Delta^2 (A_1 + A_2) \tilde{\gamma}_j = \Delta^2 F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j)),$$

где  $F_j(v(\cdot)) = (F_j^{0,0}(v_j^{0,0}(\cdot)), F_j^{0,1}(v_j^{0,1}(\cdot)), \dots, F_j^{N_1,N_2}(v_j^{N_1,N_2}(\cdot)))'$ ,  $v(\cdot) = I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j) \in Q^q[-\tau, \Delta]$ .

Вводятся операторы  $R_1$  и  $R_2$ :

$$\begin{aligned}
R_1 &= E + \Delta^2 s A_1, \\
R_2 &= E + \Delta^2 s A_2.
\end{aligned} \tag{24}$$

С учетом соотношения  $(E + \Delta^2 s A_1)(E + \Delta^2 s A_2) = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2 + O(\Delta^4)$ , получается следующее равенство

$$R = R_1 R_2 + O(\Delta^4). \tag{25}$$

Операторы  $(A_1 + A_2)$  и  $R_1 R_2$  самосопряженные и положительные. Предполагается, что выполнено условие

$$\frac{1}{\Delta^2} R_1 R_2 > \frac{1}{4} (A_1 + A_2). \quad (26)$$

В пространстве  $\tilde{\Gamma}$  вводятся две нормы:

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_2 = \sqrt{(\tilde{\gamma}_n, \tilde{\gamma}_n)}, \quad (27)$$

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}} = \sqrt{\frac{1}{4} ((A_1 + A_2)\tilde{\gamma}_n^+, \tilde{\gamma}_n^+) + \left( \left( \frac{1}{\Delta^2} R_1 R_2 - \frac{1}{4} (A_1 + A_2) \right) \tilde{\gamma}_n^-, \tilde{\gamma}_n^- \right)}, \quad (28)$$

где  $\tilde{\gamma}_n^+ = \tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}$ ,  $\tilde{\gamma}_n^- = \tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}$ .

Используя соотношение (25), производится переход к факторизованной схеме:

$$R_1 R_2 (\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}) + \Delta^2 (A_1 + A_2) \tilde{\gamma}_j = \Delta^2 F_j(v(\cdot)). \quad (29)$$

Система эффективно решается с помощью двух прогонок по каждому из направлений  $x$  и  $y$ .

В разделе 2.4 вводится и исследуется величина  $\psi_j^{i,k}$ , характеризующая погрешность аппроксимации метода (невязка). Вводится порядок невязки: будем говорить, что невязка имеет порядок  $h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3}$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ , что  $|\psi_j^{i,k}| \leq C(h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3})$  для всех  $i = 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $k = 1, \dots, N_2 - 1$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ .

Рассматривается схема (29), в которой функционал  $F_j^{i,k}$  определяется следующим образом:

$$F_j^{i,k}(v_j^{i,k}(\cdot)) = f(x_i, y_k, t_j, u_j^{i,k}, \hat{v}_j^{i,k}(\cdot)), \quad (30)$$

где  $\hat{v}_j^{i,k}(\cdot) \in Q[-\tau, 0)$ ;  $\hat{v}_j^{i,k}(\xi) = v_j^{i,k}(\xi)$ ,  $-\tau \leq \xi < 0$ .

Доказывается теорема о порядке невязки построенного метода.

**Теорема 5.** *Если для точного решения задачи (17)–(19) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_j^{i,k}$  определяется соотношением (30), то для любого  $0 \leq s \leq 1$  невязка имеет порядок  $h_1^2 + h_2^2 + \Delta^2$ .*

В разделе 2.5 производится исследование порядков сходимости методов описанного выше семейства. Будем говорить, что метод сходится с порядком  $h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3}$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ , что выполняется неравенство  $|u(x_i, y_k, t_j) - u_j^{i,k}| \leq C(h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3})$  для всех  $i = 0, \dots, N_1$ ,  $k = 0, \dots, N_2$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

Для исследования сходимости схемы используется общая разностная схема численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений, модифицированная для случая двух пространственных переменных и, следовательно, двух параметров  $h_1$  и  $h_2$ . Излагаются основные понятия и утверждения модифицированной схемы, формулируется и доказывается основная теорема о сходимости.

Уравнение (29) приводится к явной форме

$$\tilde{\gamma}_{j+1} = 2\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_{j-1} - \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (A_1 + A_2) \tilde{\gamma}_j + \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (F_j(v(\cdot))). \quad (31)$$

Вводится вектор  $\gamma_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)' = (\tilde{\gamma}_{j-1}, \tilde{\gamma}_j)' \in \Gamma$ , где  $\Gamma$  — пространство размерности  $q = 2(N_1 + 1)(N_2 + 1)$ . Считаем, что если в пространстве  $\tilde{\Gamma}$  определена норма (28), то в пространстве  $\Gamma$  она определяется следующим образом:

$$\|\gamma\|_{\Gamma}^2 = \|\gamma^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2. \quad (32)$$

В результате получаем пошаговую формулу:

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)), \quad (33)$$

где  $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (A_1 + A_2) \end{pmatrix}$ ,  $\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta R_2^{-1} R_1^{-1} F_j(I(\{\gamma_l^2\}_j)) \end{pmatrix}$

Определяются функция точных значений и стартовые значения для схемы (29).

Определение невязки с интерполяцией в общей разностной схеме отличается от определения невязки без интерполяции. Однако справедливо следующее утверждение.

**Теорема 7.** Пусть невязка без интерполяции имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , функции  $F_j^{i,k}$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении,  $\sigma_1 = a^2 \Delta^2 / h_1^2$  и  $\sigma_2 = a^2 \Delta^2 / h_2^2$  зафиксированы, тогда невязка с интерполяцией имеет одинаковый порядок погрешности по  $\Delta$ ,  $h_1$  и  $h_2$ , равный  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}}$ .

Далее исследуется устойчивость схемы (33). С помощью результатов общей теории разностных схем доказывается, что схема устойчива при выполнении условия (26), которое справедливо, если

$$(1 - 4s)(\sigma_1 + \sigma_2) < 1. \quad (34)$$

Вложение в общую разностную схему проведено, получаем следующее утверждение.

**Теорема 8.** Пусть выполнено условие устойчивости (34), невязка без интерполяции имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , функционалы  $F_j^{i,k}$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_4} + h_1^{p_5} + h_2^{p_6}$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  зафиксированы, тогда метод (29) сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}} + h_1^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_5\}} + h_2^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_6\}}$ .

Опираясь на теорему 5, получаем следующее следствие.

**Следствие 2.** Если для точного решения задачи (17)–(19) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_j^{i,k}$  задается соотношением (30), применяется кусочно-линейная интерполяция, выполнено условие устойчивости (34),  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  зафиксированы, тогда метод (29) сходится с порядком  $\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2$ .

В разделе 2.6 приводятся результаты компьютерного моделирования вычислений по описанным выше алгоритмам для тестовых примеров уравнений гиперболического типа с двумя пространственными переменными.

В главе 3 конструируется и исследуется численный метод для систем уравнений акустики с последствием. Уравнение гиперболического типа без запаздывания можно заменить эквивалентной ему системой уравнений акустики [7]. Однако в случае уравнений с запаздыванием такая замена не будет эквивалентной. Поэтому в данной главе рассматривается система уравнений акустики как самостоятельный объект, без привязки к уравнениям гиперболического типа.

В разделе 3.1 рассматривается система уравнений акустики с эффектом наследственности

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial w}{\partial x}(x, t): t_0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot))\end{aligned}\quad (35)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = g_1(t), u(X, t) = g_2(t), w(0, t) = g_3(t), w(X, t) = g_4(t): t_0 \leq t \leq T$$

и начальными условиями

$$u(x, t) = \varphi_1(x, t): 0 \leq x \leq X, t_0 - \tau \leq t \leq t_0, w(x, t_0) = \varphi_2(x): 0 \leq x \leq X.$$

Здесь  $x, t$  – независимые переменные;  $u(x, t), w(x, t)$  – искомые функции;  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$  – функция-предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  – величина запаздывания;  $f(t, x, u, u_t(x, \cdot))$  – функционал, определенный на  $[t_0, T] \times [0, X] \times R \times Q[-\tau, 0]$ .

В разделе 3.2 проводится дискретизация задачи и описывается численный метод.

Отрезок  $[0, X]$  разбивается на части с шагом  $h = X/N$ , где  $N$  – некоторое целое число. Вводятся точки  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Отрезок  $[t_0, T]$  разбивается на части с шагом  $\Delta$ ,  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = -m, \dots, M$ . Приближение точного решения системы  $\tilde{u}(x_i, t_j) = (u(x_i, t_j), w(x_i + h/2, t_j))'$  обозначается через  $\tilde{u}_j^i = (u_j^i, w_j^i)'$ .

$$\|\tilde{u}_j^i\|_2 = \sqrt{(u_j^i)^2 + (w_j^i)^2}. \quad (36)$$

Для системы уравнений акустики без запаздывания можно построить метод, имеющий порядок  $h^2 + \Delta^2$  [7, с. 430]. Для построения аналогичного метода для систем уравнений акустики с последствием потребуется вычислять  $f$  в полужелтых узлах по переменной  $x$ . Это требование приводит к необходимости расширения понятия оператора интерполяции-экстраполяции.

Вводится оператор двойной интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории:

$I: (\{u_l^i\}_j, \{u_l^{i+1}\}_j) \rightarrow v_j^{i+1/2}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$ ; определение порядка оператора двойной интерполяции-экстраполяции.

Приводится способ построения оператора двойной интерполяции-экстраполяции.

Для двух дискретных предысторий

$$\{u_l^i\}_j = \{u_l^i: j - m \leq l \leq j\},$$

$$\{u_l^{i+1}\}_j = \{u_l^{i+1} : j - m \leq l \leq j\}$$

определим средние точки

$$\{u_l^{i+1/2}\}_j = \left\{ \frac{u_l^{i+1} + u_l^i}{2} : j - m \leq l \leq j \right\}.$$

Проведем через эти точки кусочно-линейную интерполяцию

$$v_j^{i+1/2}(\xi) = \frac{1}{\Delta}((t_l - t_j - \xi)u_{l-1}^{i+1/2} + (t_j + \xi - t_{l-1})u_l^{i+1/2}), \quad (37)$$

$$t_{l-1} \leq t_j + \xi \leq t_l, \quad -\tau \leq \xi \leq 0$$

с экстраполяцией продолжением

$$v_j^{i+1/2}(\xi) = \frac{1}{\Delta}((-\xi)u_{j-1}^{i+1/2} + (\Delta + \xi)u_l^{i+1/2}), \quad t_j \leq t_j + \xi \leq t_{j+1}, \quad \xi > 0. \quad (38)$$

Доказываются теоремы о порядке и липшицевости построенного оператора.

**Теорема 9.** *Предположим, что точное решение задачи (35) имеет непрерывные частные производные вплоть до второго порядка включительно, тогда оператор двойной интерполяции-экстраполяции  $I$  со значениями (37)–(38) имеет порядок  $h^2 + \Delta^2$ .*

**Теорема 10.** *Оператор двойной интерполяции-экстраполяции  $I$  со значениями (37)–(38) липшицев.*

Рассматривается метод:

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} = \frac{(w_{j+1}^i - w_{j+1}^{i-1}) + (w_j^i - w_j^{i-1})}{2h},$$

$$\frac{w_{j+1}^i - w_j^i}{\Delta} = \frac{(u_{j+1}^{i+1} - u_{j+1}^i) + (u_j^{i+1} - u_j^i)}{2h} + F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)),$$

$$i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 0, \dots, M - 1 \quad (39)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Здесь  $F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot))$  – некоторый функционал, определенный на функциях  $v_j^{i+1/2}(\cdot) = I(\{u_l^i\}_j, \{u_l^{i+1}\}_j) \in \mathcal{Q}[-\tau, \Delta]$  и связанный с функционалом  $f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^{i+1/2}(\cdot))$ .

Схема неявная, ее можно преобразовать к виду:

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} = \Delta \frac{(u_{j+1}^{i+1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i-1}) + (u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1})}{4h^2} +$$

$$+ \frac{w_j^i - w_j^{i-1}}{h} + \Delta \frac{F_j^i(v_j^i(\cdot)) - F_j^{i-1}(v_j^{i-1}(\cdot))}{2h}, \quad (40)$$

$$\frac{w_{j+1}^i - w_j^i}{\Delta} = \frac{(u_{j+1}^{i+1} - u_{j+1}^i) + (u_j^{i+1} - u_j^i)}{2h} + F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)), \quad (41)$$

$$i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 0, \dots, M - 1.$$

При каждом фиксированном  $j$  система (40) является линейной трехдиагональной относительно  $u_{j+1}^i$  с диагональным преобладанием, которая эффективно решается методом прогонки. После нахождения  $u_{j+1}^i, w_{j+1}^i$  вычисляется по явной формуле (41).

Раздел 3.3 посвящен исследованию погрешности аппроксимации построенного метода (невязке). Метод (39) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\Delta}(\tilde{u}_{j+1}^i - \tilde{u}_j^i) = \frac{1}{2h}\Lambda_1(\tilde{u}_{j+1}^{i-1} + \tilde{u}_j^{i-1}) - \frac{1}{2h}(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\tilde{u}_{j+1}^i + \tilde{u}_j^i) + \frac{1}{2h}\Lambda_2(\tilde{u}_{j+1}^{i+1} + \tilde{u}_j^{i+1}) + \tilde{F}_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)), \quad (42)$$

где

$$\tilde{u}_j^i = \begin{pmatrix} u_j^i \\ w_j^i \end{pmatrix}, \Lambda_1 \tilde{u}_j^i = \begin{pmatrix} -w_j^i \\ 0 \end{pmatrix}, \Lambda_2 \tilde{u}_j^i = \begin{pmatrix} 0 \\ u_j^i \end{pmatrix}, \tilde{F}_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)) = \begin{pmatrix} 0 \\ F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)) \end{pmatrix}.$$

Невязкой (без интерполяции) метода назовем:

$$\psi_j^i = \frac{1}{\Delta}(\tilde{u}(x_i, t_{j+1}) - \tilde{u}(x_i, t_j)) - \frac{1}{2h}\Lambda_1(\tilde{u}(x_{i-1}, t_{j+1}) + \tilde{u}(x_{i-1}, t_j)) + \frac{1}{2h}(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\tilde{u}(x_i, t_{j+1}) + \tilde{u}(x_i, t_j)) - \frac{1}{2h}\Lambda_2(\tilde{u}(x_{i+1}, t_{j+1}) + \tilde{u}(x_{i+1}, t_j)) - \tilde{F}_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \quad (43)$$

Вводится определение порядка невязки: невязка имеет порядок  $h^p + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h$ , что  $\|\psi_j^i\|_2 \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $j = 0, \dots, M-1$ .

Рассматривается метод (39), в котором функционал  $F_j^i$  определяется следующим образом:

$$F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)) = f(t_{j+1/2}, x_{i+1/2}, v_j^{i+1/2}(\Delta/2), \bar{v}_j^{i+1/2}(\cdot)), \quad (44)$$

где  $t_{j+1/2} = t_j + \Delta/2$ ,  $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ ;  $\bar{v}_j^{i+1/2}(\xi) = v_j^{i+1/2}(\xi + \Delta/2)$ ,  $-\tau \leq \xi < 0$ .

Доказывается теорема.

**Теорема 11.** *Если для точного решения задачи (35) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно,  $F_j^i$  определяется соотношением (44), то невязка имеет порядок  $h^2 + \Delta^2$ .*

В разделе 3.4 исследуется порядок сходимости описанного выше метода. Будем говорить, что метод (42) сходится с порядком  $h^p + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h$ , что выполняется неравенство  $\|\tilde{u}(x_i, t_j) - \tilde{u}_j^i\|_2 \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

Схема (39) исследуется на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему, которая изложена в разделе 1.3. Рассматриваются задачи с однородными граничными условиями.

При каждом  $t_j$  определим значения дискретной модели вектором  $\gamma_j = (\tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^1, \tilde{u}_j^2, \dots, \tilde{u}_j^{N-1}, \tilde{u}_j^N)' = (u_j^0, w_j^0, u_j^1, w_j^1, u_j^2, w_j^2, \dots, u_j^{N-1}, w_j^{N-1}, u_j^N, w_j^N)' \in \Gamma$ , где  $'$  — знак транспонирования,  $\Gamma$  — векторное пространство размерности  $2(N+1)$  со скалярным произведением

$$(\gamma, \mu) = \sum_{l=0}^{2N+1} \gamma^l \mu^l h, \gamma = (\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{2N+1})' \in \Gamma, \mu = (\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^{2N+1})' \in \Gamma \quad (45)$$

и нормой

$$\|\gamma_n\|_\Gamma = \sqrt{(\gamma_n, \gamma_n)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{N-1} \|\tilde{u}_n^i\|_2^2 h}. \quad (46)$$

В пространстве  $\Gamma$  вводятся операторы  $A$  и  $B$ :

$$A\tilde{\gamma}_j = \tilde{\mu}_j, \quad \tilde{\mu}_j = (\tilde{\mu}_j^0, \tilde{\mu}_j^1, \dots, \tilde{\mu}_j^N)',$$

$$\tilde{\mu}_j^i = \frac{1}{h}(-\Lambda_1 \tilde{u}_j^{i-1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2) \tilde{u}_j^i - \Lambda_2 \tilde{u}_j^{i+1}): 1 \leq i \leq N-1, \quad \tilde{\mu}_j^0 = (0, 0)', \quad \tilde{\mu}_j^N = (0, 0)', \quad (47)$$

$$B = E + \frac{1}{2}\Delta A, \quad (48)$$

Тогда систему (42) можно переписать в виде:

$$B \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{\Delta} + A\gamma_j = \tilde{F}_j(I(\{\gamma_l\}_j)). \quad (49)$$

где  $\tilde{F}_j(v(\cdot)) = (\tilde{F}_j^0(v_j^{1/2}(\cdot)), \tilde{F}_j^1(v_j^{3/2}(\cdot)), \dots, \tilde{F}_j^{N-1}(v_j^{N-1/2}(\cdot)), \tilde{F}_j^{N-1}(v_j^{N+1/2}(\cdot)))'$ ,  $v(\cdot) = I(\{\gamma_l\}_j) \in Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$ .

В результате получаем разностную схему

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)), \quad (50)$$

где  $S = E - \Delta B^{-1}A$ ,  $\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)) = B^{-1}\tilde{F}_j(I(\{\gamma_l\}_j))$ .

Вводятся функция точных значений и стартовые значения модели.

Определение невязки в общей разностной схеме отличается от введенного ранее определения невязки без интерполяции (43). Однако справедливо следующее утверждение.

**Теорема 12.** Пусть невязка в смысле (43) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , функции  $\tilde{F}_j^i$  липшицевы, оператор двойной интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$  на точном решении,  $\sigma = h/\Delta$  зафиксировано. Тогда невязка с интерполяцией имеет порядок  $\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}$ .

Используя результаты работ [29, 30], доказывается, что схема (50) устойчива.

Вложение в общую разностную схему проведено, получаем следующее утверждение.

**Теорема 13.** Пусть невязка без интерполяции (43) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , функции  $F_j^i$  липшицевы, оператор двойной интерполяции-экстраполяции  $I$  липшицев и имеет порядок погрешности  $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$  на точном решении, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_5} + h^{p_6}$ ,  $\sigma = h/\Delta$  зафиксировано, тогда метод (39) сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_1, p_3, p_5\}} + h^{\min\{p_2, p_4, p_6\}}$ .

Опираясь на теорему 11, получаем следующее следствие.

**Следствие 3.** Если для точного решения задачи (35) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно,  $F_j^i$  задается соотношением

(44), применяется оператор двойной интерполяции-экстраполяции со значениями (37) – (38),  $\sigma = h/\Delta$  зафиксировано, тогда метод (39) сходится с порядком  $h^2 + \Delta^2$ .

В разделе 3.5 приводятся результаты компьютерного моделирования вычислений по описанному выше алгоритму для тестовых примеров.

**Апробация работы.** Основные результаты докладывались и обсуждались на следующих научных мероприятиях:

- Семинары кафедры вычислительной математики Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета;
- Международная конференция «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященная памяти В.К. Иванова (Екатеринбург, 2011, Челябинск, 2014);
- VI Всероссийская конференция «Актуальные проблемы математики и механики», посвященная памяти А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 2012);
- Международные (44-я, 45-я, 46-я, 47-я) молодежные школы-конференции «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2013, 2014, 2015, 2016);
- Международная конференция «Колмогоровские чтения - VI. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2013);
- Всероссийская конференция с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященная памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015).

**Публикации.** Основные результаты диссертации опубликованы в работах [26, 27, 33–39], а также составили главу 5 в монографии [19]. Работы [26, 37, 39] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК. В совместных работах [26, 27] научному руководителю принадлежат постановки задач и общие методики исследования, а диссертанту — разработка численных методов, доказательства основных теорем и компьютерное тестирование алгоритмов на примерах.

# Глава 1

## Уравнения гиперболического типа с запаздыванием с одной пространственной переменной

### 1.1 Постановка задачи

Рассмотрим волновое уравнение с эффектом наследственности вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot)): t_0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X, \quad (1.1.1)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = g_1(t), \quad u(X, t) = g_2(t): t_0 \leq t \leq T \quad (1.1.2)$$

и начальными условиями

$$u(x, t) = \varphi(x, t): 0 \leq x \leq X, t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \quad (1.1.3)$$

Здесь  $x, t$  — независимые переменные;  $u(x, t)$  — искомая функция;  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$  — функция предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  — величина запаздывания;  $f(x, t, u, u_t(x, \cdot))$  — функционал, определенный на  $[0, X] \times [t_0, T] \times \mathbb{R} \times Q$ ,  $Q = Q[-\tau, 0]$  — множество функций  $u(\xi)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, 0]$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа,  $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi \in [-\tau, 0]} |u(\xi)|$ . Требуется найти функцию  $u(x, t)$ , определенную в области  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq X$ , удовлетворяющую уравнению (1.1.1), граничным (1.1.2) и начальным условиям (1.1.3). Будем предполагать, что функционал  $f$  и функции  $g_1, g_2, \varphi$  таковы, что задача имеет единственное решение  $u(x, t)$  [90].

## 1.2 Разностный метод

Разобьем отрезок  $[0, X]$  на части с шагом  $h = X/N$ , где  $N$  — некоторое целое число. Введем точки  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  на части с шагом  $\Delta$ . Будем считать, что  $m = \tau/\Delta$  — целое число. Введем точки  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = -m, \dots, M$ , где  $M = \lfloor T/\Delta \rfloor$ . Будем обозначать приближение точного решения  $u(x_i, t_j)$  через  $u_j^i$ .

Введем дискретную предысторию к моменту  $t_j$  при каждом фиксированном  $i$ :

$$\{u_l^i\}_j = \{u_l^i : j - m \leq l \leq j\}.$$

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение:

$$I : \{u_l^i\}_j \rightarrow v_j^i(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta],$$

где  $Q[-\tau, \Delta]$  — множество функций  $v(\xi)$ , кусочно-непрерывных на  $[-\tau, \Delta]$  с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа,  $\|v(\cdot)\|_{Q[-\tau, \Delta]} = \sup_{\xi \in [-\tau, \Delta]} |v(\xi)|$ .

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности  $p$  на точном решении, если существуют константы  $C_1$  и  $C_2$ , такие, что для всех  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$  и  $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$  выполняется равенство

$$|v_j^i(t - t_j) - u(x_i, t)| \leq C_1 \max_{j-m \leq l \leq j} |u_l^i - u(x_i, t_l)| + C_2 \Delta^p.$$

Например, кусочно-линейная интерполяция

$$v_j^i(\xi) = \frac{1}{\Delta}((t_l - t_j - \xi)u_{l-1}^i + (t_j + \xi - t_{l-1})u_l^i), \quad t_{l-1} \leq t_j + \xi \leq t_l, \quad -\tau \leq \xi \leq 0 \quad (1.2.4)$$

с экстраполяцией продолжением

$$v_j^i(\xi) = \frac{1}{\Delta}((-\xi)u_{j-1}^i + (\Delta + \xi)u_j^i), \quad t_j \leq t_j + \xi \leq t_{j+1}, \quad \xi > 0$$

имеет второй порядок [10].

Будем предполагать, что оператор интерполяции-экстраполяции липшицев, то есть найдется такая константа  $L_I$ , что для всех предысторий  $\{u_l^i\}_j$  и  $\{v_l^i\}_j$  выполнено

$$\sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v_j^i(t - t_j) - \eta_j^i(t - t_j)| \leq L_I \max_{j-m \leq l \leq j} |u_l^i - v_l^i|,$$

где  $v_j^i(\cdot) = I(\{u_l^i\}_j)$ ,  $\eta_j^i(\cdot) = I(\{v_l^i\}_j)$ .

Также будем предполагать, что оператор интерполяции-экстраполяции согласован

$$v_j^i(t_l - t_j) = u_l^i, \quad l = j - m, \dots, j.$$

Рассматривается семейство методов с весами ( $0 \leq s \leq 1$ ):

$$\begin{aligned} \frac{u_{j+1}^i - 2u_j^i + u_{j-1}^i}{\Delta^2} &= sa^2 \frac{u_{j+1}^{i-1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i+1}}{h^2} + sa^2 \frac{u_{j-1}^{i-1} - 2u_{j-1}^i + u_{j-1}^{i+1}}{h^2} + \\ &+ (1 - 2s)a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} + F_j^i(v_j^i(\cdot)), \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1, \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

с граничными условиями

$$u_j^0 = g_1(t_j), \quad u_j^N = g_2(t_j)$$

и начальными условиями

$$u_j^i = \varphi(x_i, t_j): \quad -m \leq j \leq 0,$$

где  $F_j^i(v(\cdot))$  — некоторый функционал, определенный на функциях  $v(\cdot) = v_j^i(\cdot) = I(\{u_l^i\}_j) \in Q[-\tau, \Delta]$ , связанный с функционалом  $f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^i(\cdot))$  и липшицевый по переменной  $v(\cdot)$  с константой  $L_F$ , т.е. для всех  $v_1(\cdot), v_2(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$  выполняется

$$|F_j^i(v^1(\cdot)) - F_j^i(v^2(\cdot))| \leq L_F \|v_1(\cdot) - v_2(\cdot)\|_Q.$$

При  $s = 0$  получается явная схема, при других  $s$  ( $0 < s \leq 1$ ), при каждом фиксированном  $j$  система является линейной трехдиагональной относительно  $u_{j+1}^i$  с диагональным преобладанием, которая эффективно решается методом прогонки.

Невязкой (без интерполяции) метода назовем:

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta^2} - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}))}{h^2} - \\ &- sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, t_{j-1}))}{h^2} - \\ &- (1 - 2s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \end{aligned} \quad (1.2.6)$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок  $h^{p_1} + \Delta^{p_2}$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta, h$ , что  $|\psi_j^i| \leq C(h^{p_1} + \Delta^{p_2})$  для всех  $i = 1, \dots, N-1, j = 0, \dots, M-1$ .

Рассмотрим семейство методов (1.2.5), в которых функционал  $F_j^i$  определяется следующим образом:

$$F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_j^i, \widehat{v}_j^i(\cdot)), \quad (1.2.7)$$

где  $\widehat{v}_j^i(\cdot) \in Q[-\tau, 0)$ ;  $\widehat{v}_j^i(\xi) = v_j^i(\xi)$ ,  $-\tau \leq \xi < 0$ . Заметим, что в этом случае экстраполяция не требуется, применяется только интерполяция.

**Теорема 1.** *Если для точного решения задачи (1.1.1)–(1.1.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_j^i$  определяется соотношением (1.2.7), то для любого  $0 \leq s \leq 1$  невязка имеет порядок  $h^2 + \Delta^2$ .*

*Доказательство.* Невязка определяется равенством

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_j) + u(x_i, t_{j-1}))}{\Delta^2} - sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_{j+1}))}{h^2} - \\ &- sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, t_{j-1}))}{h^2} - (1-2s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - \\ &- f(t_j, x_i, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)). \end{aligned}$$

Разложим функцию  $u(x, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точек  $(x_i, t_j)$ ,  $(x_i, t_{j+1})$ ,  $(x_i, t_{j-1})$ . Так как существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка, получаем следующие равенства для значений функции в точках:

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)\Delta^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j)\Delta^3 + O(\Delta^4),$$

здесь и далее  $g = O(\Delta^4)$ , если существует константа  $C$ , такая, что  $|g| \leq C\Delta^4$ ,

$$u(x_i, t_{j-1}) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)\Delta^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j)\Delta^3 + O(\Delta^4),$$

$$u(x_{i-1}, t_j) = u(x_i, t_j) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j)h^3 + O(h^4),$$

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_i, t_j) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_j)h^3 + O(h^4),$$

$$u(x_{i-1}, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j+1})h^3 + O(h^4),$$

$$u(x_{i+1}, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j+1})h^3 + O(h^4),$$

$$u(x_{i-1}, t_{j-1}) = u(x_i, t_{j-1}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j-1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1})h^2 - \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j-1})h^3 + O(h^4),$$

$$u(x_{i+1}, t_{j-1}) = u(x_i, t_{j-1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{j-1})h + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1})h^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, t_{j-1})h^3 + O(h^4).$$

Подставив эти соотношения в формулу для  $\psi_j^i$ , получим:

$$\begin{aligned} \psi_j^i &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) + O(\Delta^2) - sa^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) + O(h^2) \right) - sa^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1}) + O(h^2) \right) - \\ &- (1-2s)a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + O(h^2) \right) - f(t_j, x_i, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)). \end{aligned}$$

Разложим функцию  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $(x_i, t_j)$ . В результате получим следующие соотношения:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) + \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_j) \Delta + O(\Delta^2),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_{j-1}) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) - \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, t_j) \Delta + O(\Delta^2).$$

Тогда

$$\psi_j^i = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j) - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_j) \right) - f(t_j, x_i, u(x_i, t_j), u_{t_j}(x_i, \cdot)) + O(\Delta^2 + h^2).$$

В силу уравнения (1.1.1)

$$\psi_j^i = O(\Delta^2 + h^2).$$

□

### 1.3 Исследование сходимости

Обозначим величину погрешности метода в узлах через  $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$ . Будем говорить, что метод сходится с порядком  $h^p + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h$ , что выполняется неравенство  $|\varepsilon_j^i| \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

Будем исследовать полученную схему (1.2.5), используя общую дискретную схему с эффектом наследственности [10, 17, 19, 22]. Следуя монографии [19], изложим ее основные понятия и утверждения.

Пусть задан отрезок  $[t_0, \theta]$  и число  $\tau > 0$  – величина запаздывания.

Шагом сетки назовем число  $\Delta > 0$ , такое, что  $\tau/\Delta = m$  – целое,  $\{\Delta\}$  – множество шагов.

Сеткой (равномерной) назовем конечный набор чисел

$$\Sigma_\Delta = \{t_i = t_0 + i\Delta \in [t_0 - \tau, \theta], \quad i = -m, \dots, M\},$$

где  $M$  – номер последнего узла сетки при данном  $\Delta$ ,  $t_0, \theta$ .

Обозначим  $\Sigma_\Delta^- = \{t_i \in \Sigma_\Delta, i \leq 0\}$ ,  $\Sigma_\Delta^+ = \{t_i \in \Sigma_\Delta, i \geq 0\}$ .

Дискретной моделью назовем всякую сеточную функцию  $t_i \in \Sigma_\Delta \rightarrow \gamma(t_i) = \gamma_i \in \Gamma$ ,  $i = -m, \dots, M$ , где  $\Gamma$  –  $q$ -мерное нормированное пространство с нормой  $\|\cdot\|_\Gamma$ . Будем предполагать, что размерность  $q$  пространства  $\Gamma$  зависит от числа  $h > 0$ .

Для  $n \geq 0$  предысторией дискретной модели к моменту  $t_n$  назовем множество  $\{\gamma_i\}_n = \{\gamma_i \in \Gamma, \quad i = n - m, \dots, n\}$ .

Пусть  $V$  – линейное нормированное пространство с нормой  $\|\cdot\|_V$  (интерполяционное пространство).

Оператором интерполяции дискретной предыстории модели назовем отображение  $I$ :

$$I(\{\gamma_i\}_n) = v \in V. \quad (1.3.8)$$

Будем говорить, что оператор интерполяции удовлетворяет условию липшицевости, если найдется такая константа  $L_I$ , что для любых двух предысторий дискретной модели  $\{\gamma_i^1\}_n$  и  $\{\gamma_i^2\}_n$  выполняется

$$\|v^1 - v^2\|_V \leq L_I \max_{n-m \leq i \leq n} \|\gamma_i^1 - \gamma_i^2\|_\Gamma, \quad (1.3.9)$$

где  $v^1 = I(\{\gamma_i^1\}_n)$ ,  $v^2 = I(\{\gamma_i^2\}_n)$ .

Стартовыми значениями модели назовем функцию  $\gamma : \Sigma_\Delta^- \rightarrow \Gamma$ :

$$\gamma(t_i) = \gamma_i, \quad i = -m, \dots, 0. \quad (1.3.10)$$

Формулой продвижения модели на шаг назовем алгоритм

$$\gamma_{n+1} = S\gamma_n + \Delta\Phi(t_n, I(\{\gamma_i\}_n)), \quad (1.3.11)$$

где  $\Phi: \Sigma_\Delta^+ \times V \rightarrow \Gamma$  — функция продвижения на шаг,  $S: \Gamma \rightarrow \Gamma$  — линейный оператор перехода.

Таким образом, дискретная модель (численный метод, в дальнейшем просто метод) определяется стартовыми значениями (1.3.10), формулой продвижения на шаг (1.3.11) и оператором интерполяции.

Будем предполагать, что функция  $\Phi(t_n, v)$  в (1.3.11) липшицева по второму аргументу, т. е. найдется такая константа  $L_\Phi$ , что для всех  $t_n \in \Sigma_\Delta^+$ ,  $v^1, v^2 \in V$  выполняется

$$\|\Phi(t_n, v^1) - \Phi(t_n, v^2)\|_\Gamma \leq L_\Phi \|v^1 - v^2\|_V. \quad (1.3.12)$$

Функцией точных значений назовем отображение:

$$Z(t_i, \Delta) = z_i \in \Gamma, \quad i = -m, \dots, M. \quad (1.3.13)$$

Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , если найдется константа  $C$ , такая, что

$$\|z_i - \gamma_i\|_\Gamma \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2}), \quad i = -m, \dots, 0.$$

Будем говорить, что метод сходится с порядком  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , если существует константа  $C$ , такая, что

$$\|z_n - \gamma_n\|_\Gamma \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$$

для всех  $n = -m, \dots, M$ .

Назовем метод (1.3.11) устойчивым, если

$$\|S\|_\Gamma \leq 1. \quad (1.3.14)$$

Погрешностью аппроксимации (невязкой) с интерполяцией назовем сеточную функцию

$$d_n = (z_{n+1} - Sz_n)/\Delta - \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n)), \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (1.3.15)$$

Будем говорить, что метод (1.3.11) имеет порядок погрешности аппроксимации с интерполяцией  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , если существует константа  $C$ , такая, что

$$\|d_n\|_{\Gamma} \leq C(\Delta^{p_1} + h^{p_2})$$

для всех  $n = 0, \dots, M-1$ .

Справедлива следующая основная теорема [19].

**Теорема 2.** Пусть метод (1.3.11) устойчив, функция  $\Phi$  удовлетворяет условию липшицевости по второму аргументу, оператор интерполяции  $I$  удовлетворяет условию липшицевости, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , погрешность аппроксимации с интерполяцией имеет порядок  $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$ , где  $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0$ , тогда метод сходится, причем порядок сходимости по  $\Delta$  не меньше  $\Delta^{\min\{p_1, p_3\}}$ , по  $h$  не меньше  $h^{\min\{p_2, p_4\}}$ .

Исследуем схемы семейства (1.2.5) на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему, изложенную выше.

Будем рассматривать задачи с однородными краевыми условиями:

$$u(0, t) = u(X, t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Исходную задачу можно свести к данной с помощью замены:

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) - g_0(t) \frac{X-x}{X} - g_1(t) \frac{x}{X}.$$

При каждом  $t_j$  определим значения дискретной модели вектором  $\tilde{\gamma}_j = (u_j^0, u_j^1, u_j^2, \dots, u_j^{N-1}, u_j^N)' \in \tilde{\Gamma}$ , где  $'$  — знак транспонирования,  $\tilde{\Gamma}$  — векторное пространство размерности  $N+1$  со скалярным произведением:

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\mu}) = \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{\gamma}^i \tilde{\mu}^i h, \quad \tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}^0, \tilde{\gamma}^1, \dots, \tilde{\gamma}^N) \in \tilde{\Gamma}, \quad \tilde{\mu} = (\tilde{\mu}^0, \tilde{\mu}^1, \dots, \tilde{\mu}^N) \in \tilde{\Gamma}. \quad (1.3.16)$$

В пространстве  $\tilde{\Gamma}$  введем операторы  $A$  и  $\tilde{A}$ :

$$A\tilde{\gamma}_j = \tilde{\mu}_j, \quad \tilde{\mu}_j = (\tilde{\mu}_j^0, \tilde{\mu}_j^1, \dots, \tilde{\mu}_j^N)',$$

$$\tilde{\mu}_j^i = -a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} : 1 \leq i \leq N-1, \quad \tilde{\mu}_j^0 = 0, \quad \tilde{\mu}_j^N = 0, \quad (1.3.17)$$

$$\tilde{A} = \Delta^2 A. \quad (1.3.18)$$

Тогда систему (1.2.5) можно переписать в виде:

$$\frac{\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}}{\Delta^2} + sA\tilde{\gamma}_{j+1} + sA\tilde{\gamma}_{j-1} + (1 - 2s)A\tilde{\gamma}_j = F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j)), \quad (1.3.19)$$

где  $F_j(v(\cdot)) = (F_j^0(v_j^0(\cdot)), F_j^1(v_j^1(\cdot)), \dots, F_j^N(v_j^N(\cdot)))'$ ,  $v(\cdot) = I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j) \in Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$ ,

$Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$  — пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит  $Q[-\tau, \Delta]$ .

Воспользуемся тождеством

$$\tilde{\gamma}_{j+1} = 2\tilde{\gamma}_j + \Delta^2 \frac{\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}}{\Delta^2} - \tilde{\gamma}_{j-1}$$

и введем операторы:

$$R = \frac{1}{\Delta^2}E + sA, \quad (1.3.20)$$

$$\tilde{R} = \Delta^2 R = E + s\tilde{A}. \quad (1.3.21)$$

Оператор  $A$  (1.3.17) самосопряженный и положительный [29] в смысле скалярного произведения векторов (1.3.16). Тогда оператор  $R$  (1.3.20) также самосопряженный и положительный. Предположим, что выполнено условие

$$R > \frac{1}{4}A. \quad (1.3.22)$$

В пространстве  $\tilde{\Gamma}$  введем две нормы:

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_2 = \sqrt{(\tilde{\gamma}_n, \tilde{\gamma}_n)}, \quad (1.3.23)$$

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}} = \sqrt{\frac{1}{4}(A(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}), \tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}), \tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1})}. \quad (1.3.24)$$

Заметим, что нормы операторов  $\tilde{A}$  (1.3.18) и  $\tilde{R}$  (1.3.21), в отличие от операторов  $A$  (1.3.17) и  $R$  (1.3.20), не зависят от  $h$  и  $\Delta$ , а лишь от  $\sigma = a^2\Delta^2/h^2$ .

**Лемма 1.** *Справедлива следующая оценка:*

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \frac{D}{\Delta}(\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}}^2 &= \frac{1}{4}(A(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}), \tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}), \tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}) \leq \\ &\leq \frac{1}{4}\|A(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1})\|_2\|\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2 + \|(R - \frac{1}{4}A)(\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1})\|_2\|\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4\Delta^2}\|\tilde{A}(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1})\|_2\|\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2 + \frac{1}{\Delta^2}\|(\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A})(\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1})\|_2\|\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4\Delta^2}\|\tilde{A}\|_2\|\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2^2 + \frac{1}{\Delta^2}\|\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A}\|_2\|\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2^2 \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{1}{4\Delta^2} \|\tilde{A}\|_2 (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2)^2 + \frac{1}{\Delta^2} \|\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A}\|_2 (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2)^2 \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{4} \|\tilde{A}\|_2 + \|\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A}\|_2 \right) \frac{1}{\Delta^2} (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2)^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем необходимую оценку:

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \frac{D}{\Delta} (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2),$$

где  $D = \sqrt{\frac{1}{4}\|\tilde{A}\|_2 + \|\tilde{R} - \frac{1}{4}\tilde{A}\|_2}$ . □

Приведем уравнение (1.3.19) к виду:

$$R(\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}) + A\tilde{\gamma}_j = F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j)). \quad (1.3.25)$$

Так как при любом допустимом весе  $s$  уравнение (1.3.25) разрешимо относительно  $\tilde{\gamma}_{j+1}$  (существует  $R^{-1}$ ), то можно привести уравнение (1.3.25) к явной форме

$$\tilde{\gamma}_{j+1} = 2\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_{j-1} - R^{-1}A\tilde{\gamma}_j + R^{-1}(F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j))). \quad (1.3.26)$$

Введем вектор  $\gamma_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)' = (\tilde{\gamma}_{j-1}, \tilde{\gamma}_j)' \in \Gamma$ , где  $\Gamma$  — векторное пространство размерности  $q = 2(N+1)$ . Считаем, что если в пространстве  $\tilde{\Gamma}$  определена норма, то в пространстве  $\Gamma$  она определяется следующим образом:

$$\|\gamma\|_{\Gamma}^2 = \|\gamma^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2. \quad (1.3.27)$$

Соотношение (1.3.26) можно переписать в виде:

$$\gamma_{j+1}^1 = \gamma_j^2,$$

$$\gamma_{j+1}^2 = 2\gamma_j^2 - \gamma_j^1 - R^{-1}A\gamma_j^2 + R^{-1}(F_j(v(\cdot))).$$

В результате получаем разностную схему:

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)), \quad (1.3.28)$$

$$\text{где } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - R^{-1}A \end{pmatrix}, \quad \Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)) = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}F^j(I(\{\gamma_l^2\}_j))/\Delta \end{pmatrix}.$$

Определим функцию точных значений (1.3.13) для схемы (1.3.28) соотношениями

$$z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\tilde{z}_{j-1}, \tilde{z}_j)', \quad \tilde{z}_j = (u(x_0, t_j), u(x_1, t_j), \dots, u(x_{N-1}, t_j), u(x_N, t_j))'.$$

Стартовые значения (1.3.10) модели (1.3.28) можно определить следующим образом:

$$\gamma_j = z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\tilde{z}_{j-1}, \tilde{z}_j)', \quad \tilde{z}_j = (\varphi(x_0, t_j), \varphi(x_1, t_j), \dots, \varphi(x_N, t_j))', \quad j = -m, \dots, 0.$$

Определение невязки в общей разностной схеме (1.3.15) отличается от введенного ранее определения невязки без интерполяции (1.2.6). Однако справедливо следующее утверждение.

**Теорема 3.** Пусть невязка в смысле (1.2.6) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , функции  $F_j^i$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении,  $\sigma$  зафиксировано, тогда невязка с интерполяцией в смысле (1.3.15) имеет одинаковый порядок погрешности по  $\Delta$  и  $h$ , равный  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}}$ .

*Доказательство.* По определению нормы в  $\Gamma$  (1.3.27):

$$\begin{aligned} \|d_n\|_{\Gamma}^2 &= \|d_n^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 + \|d_n^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2. \\ \|d_n^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 &= \|(z_{n+1}^1 - z_n^2)/\Delta\|_{\tilde{\Gamma}}^2 = \left\| \frac{\tilde{z}_n - \tilde{z}_n}{\Delta} \right\|_{\tilde{\Gamma}}^2 = 0. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\|d_n\|_{\Gamma} = \|d_n^2\|_{\tilde{\Gamma}}.$$

Рассмотрим вторую компоненту невязки в норме (1.3.23)

$$\begin{aligned} \|d_n^2\|_2^2 &= \left\| (z_{n+1}^2 + z_n^1 - 2z_n^2 + R^{-1}Az_n^2)/\Delta - \frac{1}{\Delta}R^{-1}(F^n(I(\{z_l^2\}_n))) \right\|_2^2 = \\ &= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} + \tilde{z}_{n-1} - 2\tilde{z}_n}{\Delta} + \frac{1}{\Delta}R^{-1}A\tilde{z}_n - \frac{1}{\Delta}R^{-1}(F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n))) \right\|_2^2 = \\ &= \Delta^2 \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}R^{-1}A\tilde{z}_n - \frac{1}{\Delta^2}R^{-1}(F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n))) \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Отсюда по определению операторов  $\tilde{R}$  (1.3.21),  $\tilde{A}$  (1.3.18)

$$\begin{aligned} \|d_n^2\|_2^2 &= \Delta^2 \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{R}^{-1}\tilde{A}\tilde{z}_n - \tilde{R}^{-1}(F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n))) \right\|_2^2 \leq \\ &\leq \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|_2^2 \left\| \tilde{R} \left( \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{A}\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (1.3.29)$$

Тогда по определению оператора  $\tilde{R}$  (1.3.21) и нормы (1.3.24)

$$\begin{aligned} &\left\| \tilde{R} \left( \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{A}\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2 = \\ &= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + s\tilde{A} \left( \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + \frac{1}{\Delta^2}\tilde{A}\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2 = \\ &= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + \frac{1}{\Delta^2}(s\tilde{A}\tilde{z}_{n+1} + (1-2s)\tilde{A}\tilde{z}_n + s\tilde{A}\tilde{z}_{n-1}) - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N-1} \left| \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta^2} - \right. \\ &\quad \left. - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1}))}{h^2} - \right. \\ &\quad \left. - (1-2s)a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} - \right. \end{aligned}$$

$$- sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, t_{n-1}))}{h^2} - F_n^i(I(\{u_l^i\}_n)) \Big| h. \quad (1.3.30)$$

Оценим каждое слагаемое под знаком суммы в (1.3.30), используя предположения теоремы.

$$\begin{aligned} & \left| \frac{u(x_i, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_n) + u(x_i, t_{n-1}))}{\Delta^2} - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, t_{n+1}))}{h^2} - \right. \\ & \quad \left. - (1-2s)a^2 \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} - \right. \\ & \quad \left. - sa^2 \frac{u(x_{i+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, t_{n-1}))}{h^2} - F_n^i(I(\{u_l^i\}_n)) \pm F_n^i(u_{t_n}(x_i, \cdot)) \right| \leq \\ & \quad \leq |\psi_n^i| + |F_n^i(u_{t_n}(x_i, \cdot)) - F_n^i(I(\{u_l^i\}_n))| \leq \\ & \quad \leq C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F \|u_{t_n}(x_i, \cdot) - I(\{u_l^i\}_n)\|_Q \leq C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0}. \end{aligned} \quad (1.3.31)$$

В результате из (1.3.29), (1.3.30), (1.3.31) получаем

$$\begin{aligned} \|d_n^2\|_2^2 & \leq \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|_2^2 \sum_{i=1}^{N-1} (C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0})^2 h = \\ & = \Delta^2 \|\tilde{R}^{-1}\|_2^2 (N-1) (C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_F C_2 \Delta^{p_0})^2 h \leq \\ & \leq \Delta^2 (C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 h^{p_2})^2 = \\ & = \Delta^2 (C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 (a\Delta/\sqrt{\sigma})^{p_2})^2, \end{aligned}$$

где  $C_3 = \|\tilde{R}^{-1}\|_2 \sqrt{X} (C_1 + L_F C_2)$ ,  $C_4 = \|\tilde{R}^{-1}\|_2 \sqrt{X} C_1$ .

То есть справедлива оценка

$$\|d_n^2\|_2 \leq C_5 \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}+1},$$

где  $C_5 = C_3 + C_4 (a/\sqrt{\sigma})^{p_2}$ .

Рассмотрим вторую компоненту невязки в норме (1.3.24) и воспользуемся леммой 1

$$\|d_n^2\|_{\Gamma}^2 \leq \frac{D}{\Delta} (\|d_n\|_2 + \|d_{n-1}\|_2) \leq \frac{D}{\Delta} (2C_5 \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}+1}).$$

В результате получаем:

$$\|d_n\|_{\Gamma} \leq C \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2\}},$$

где  $C = 2C_5 D$ . □

Исследуем устойчивость схемы (1.3.28). По определению устойчивости в общей разностной схеме необходимо, чтобы выполнялось условие (1.3.14):

$$\|S\|_{\Gamma} \leq 1.$$

Для исследования устойчивости схемы применим результаты работ [29, 30]. Для этого рассмотрим однородную разностную схему, соответствующую (1.3.25):

$$R(\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}) + A\tilde{\gamma}_j = 0. \quad (1.3.32)$$

В [29, с. 353] доказано, что если для схемы (1.3.32) выполняется условие (1.3.22), то при любых начальных условиях для решения (1.3.32) для всех  $n$  справедливо неравенство

$$\|\tilde{\gamma}_{n+1}\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}}. \quad (1.3.33)$$

Теперь рассмотрим однородную схему, соответствующую (1.3.28)

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j. \quad (1.3.34)$$

Из неравенства (1.3.33) следует, что

$$\|\gamma_{n+1}^1\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \|\gamma_n^1\|_{\tilde{\Gamma}}, \quad \|\gamma_{n+1}^2\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \|\gamma_n^2\|_{\tilde{\Gamma}}.$$

Тогда по определению нормы (1.3.27) в пространстве  $\Gamma$ :

$$\|\gamma_{n+1}\|_{\Gamma}^2 = \|\gamma_{n+1}^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma_{n+1}^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2 \leq \|\gamma_n^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma_n^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2 = \|\gamma_n\|_{\Gamma}^2.$$

Отсюда

$$\|\gamma_{n+1}\|_{\Gamma} \leq \|\gamma_n\|_{\Gamma},$$

что означает выполнение следующей оценки для уравнения (1.3.34)

$$\|S\|_{\Gamma} \leq 1.$$

Следовательно, при выполнении условия (1.3.22) схема (1.3.28) устойчива.

Используя (1.3.20), операторное условие устойчивости для исследуемой схемы можно переписать в виде [30]:

$$\frac{1}{\Delta^2}E + \left(s - \frac{1}{4}\right)A > 0,$$

которое означает, что для любого отличного от нуля  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$  выполняется

$$\frac{1}{\Delta^2}(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) + \left(s - \frac{1}{4}\right)(A\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) > 0. \quad (1.3.35)$$

Так как наибольшее собственное значение оператора  $A$  (1.3.17) оценивается сверху величиной  $4a^2/h^2$  [30], то

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) > \frac{h^2}{4a^2}(A\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}).$$

Значит, неравенство (1.3.35) будет выполнено, если потребовать

$$\frac{h^2}{4a^2\Delta^2} + s - \frac{1}{4} > 0.$$

Таким образом, схема (1.3.28) устойчива, если

$$s > \frac{1}{4} \left(1 - \frac{1}{\sigma}\right), \quad (1.3.36)$$

где  $\sigma = a^2\Delta^2/h^2$ . Например, для явной схемы ( $s = 0$ ) получаем:

$$\frac{1}{4} \left( 1 - \frac{1}{\sigma} \right) < 0,$$

то есть схема устойчива, если выполнено условие

$$\sigma < 1.$$

Если

$$s \geq \frac{1}{4},$$

условие (1.3.36) выполнено для любого соотношения шагов, схема абсолютно устойчива.

Вложение в общую разностную схему с последствием проведено. Теперь, используя Теорему 2, получаем следующее утверждение.

**Теорема 4.** Пусть выполнено условие устойчивости (1.3.36), невязка без интерполяции (1.2.6) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , функции  $F_j^i$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  липшицев и имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$ ,  $\sigma$  зафиксировано, тогда метод (1.2.5) сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}} + h^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_4\}}$ .

Опираясь на теорему 1, получаем следующее следствие.

**Следствие 1.** Если для точного решения задачи (1.1.1)–(1.1.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_j^i$  определяется соотношением (1.2.7), применяется кусочно-линейная интерполяция (1.2.4), выполнено условие устойчивости (1.3.36),  $\sigma$  зафиксировано, тогда метод (1.2.5) сходится с порядком  $h^2 + \Delta^2$ .

## 1.4 Примеры численных расчетов

**Пример 1.** Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) + a^2 \pi^2 e^{-t} \sin \pi x + e^{\tau-2t} \sin^2 \pi x + \\ &+ u(x, t)(1 - u(x, t - \tau)): 0 \leq t \leq 3, 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (1.4.37)$$

при  $\tau = 2$ ,  $a = 1$  с начальными условиями

$$u(x, t) = e^{-t} \sin \pi x: -\tau \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = 0: 0 \leq t \leq 3.$$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, t) = e^{-t} \sin \pi x$ .

На рис. 1.1 приведено приближенное решение этого уравнения методом (1.2.5), для которого  $F_j^i(v_{i,j}(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_j^i, v_{i,j}(\cdot))$ , с кусочно-линейной интерполяцией (1.2.4) при  $s = 1$  с числом точек разбиения по  $x$  равным 10, по  $t$  равным 60, на рис. 1.2 при  $s = 0$  с числом точек разбиения по  $x$  равным 21, по  $t$  равным 60 (в этом случае не выполняется условие устойчивости).

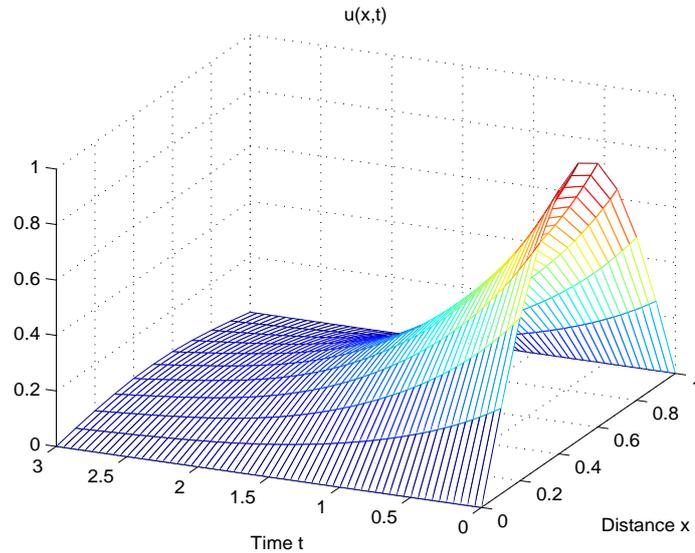


Рис. 1.1:  $s = 1$ ,  $N = 10$ ,  $M = 60$

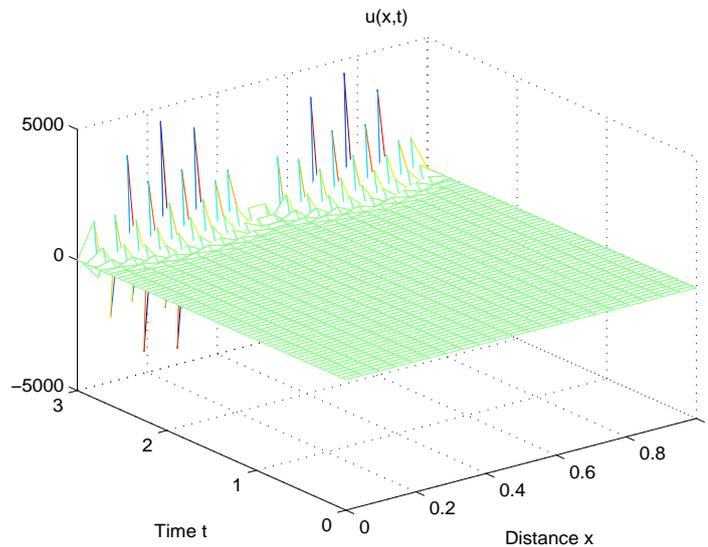


Рис. 1.2:  $s = 0$ ,  $N = 21$ ,  $M = 60$

В табл. 1 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (1.4.37), полученные при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах. Нормы

разностей во всех примерах этой главы вычислены по формуле:

$$\|U\|_1 = \max_{0 \leq j \leq M} \sum_{i=0}^N |u(t_j, x_i) - u_j^i| h. \quad (1.4.38)$$

Т а б л и ц а 1

**Нормы разностей точного и приближенного решений уравнения (1.4.37) для метода сеток при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги	$\sigma = 0.2500$			$\sigma = 0.1565$			$\sigma = 1.1565$		
	N=10	N=15	N=20	N=15	N=24	N=30	N=15	N=25	N=50
метода									
сеток	M=60	M=90	M=120	M=60	M=96	M=120	M=36	M=60	M=120
s=0	0.2691	0.1758	0.1316	0.1185	0.0732	0.0182	$9.8 \cdot 10^{11}$	$6.2 \cdot 10^{23}$	$4.7 \cdot 10^{80}$
s=0.5	0.2280	0.1490	0.1115	0.0778	0.0480	0.0383	0.0013	0.0016	0.0008
s=1	0.1869	0.1222	0.0915	0.0371	0.0229	0.0182	0.0726	0.0391	0.0192

**Пример 2.** Рассмотрим уравнение с переменным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \cos(\pi t)(\pi^2(x^2 + x - 1) + 2) - \cos(\pi t - \pi |\cos(\pi t)|)(x^2 + x - 1) + \\ + u(t - |\cos(\pi t)|): 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 1 \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

при  $a = 1$  с начальными условиями

$$u(x, t) = \cos(\pi t)(x^2 + x - 1): -1 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = -\cos(\pi t), u(1, t) = \cos(\pi t): 0 \leq t \leq 1.$$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, t) = \cos(\pi t)(x^2 + x - 1)$ .

На рис. 1.3 приведено приближенное решение этого уравнения методом (1.2.5), для которого  $F_j^i(v_{i,j}(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_j^i, v_{i,j}(\cdot))$ , с кусочно-линейной интерполяцией (1.2.4) при  $s = 1/2$  с числом точек разбиения по  $x$  равным 30, по  $t$  равным 60.

В табл. 2 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (1.4.39), полученные при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах.

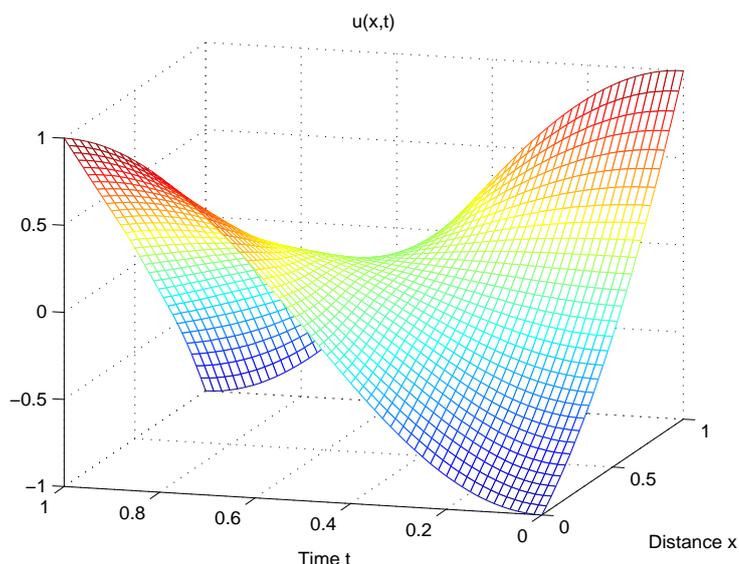


Рис. 1.3:  $s = 1/2$ ,  $N = 40$ ,  $M = 40$

Т а б л и ц а 2

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (1.4.39) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma = 0.2500$			$\sigma = 0.1565$			$\sigma = 1.1565$		
	N=10 M=20	N=20 M=40	N=30 M=60	N=15 M=20	N=30 M=40	N=60 M=80	N=15 M=12	N=25 M=20	N=50 M=40
s=0	0.0109	0.0050	0.0033	0.0112	0.0050	0.0024	24.4750	$1.2 \cdot 10^5$	$4.1 \cdot 10^{15}$
s=0.5	0.0311	0.0149	0.0097	0.0313	0.0149	0.0072	0.0534	0.0312	0.0149
s=1	0.0670	0.0319	0.0208	0.0669	0.0319	0.0155	0.1158	0.0670	0.0319

**Пример 3.** Рассмотрим уравнение с распределенным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - (\pi^2 x^2 + 2) \cos \pi t - \frac{x^2}{\pi} \left( \sin \pi t + \sin \frac{\pi t}{2} \right) + \\ + \int_{-3t/2}^0 u(x, t+s) ds: 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq 3 \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

при  $a = 1$  с начальными условиями

$$u(x, t) = x^2 \cos \pi t: -1, 5 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = \cos \pi t: 0 \leq t \leq 3.$$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, t) = x^2 \cos \pi t$ .

На Рис. 1.4 приведено приближенное решение этого уравнения методом (1.2.5) для которого  $F_j^i(v_{i,j}(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_j^i, v_{i,j}(\cdot))$ , с кусочно-линейной интерполяцией при  $s = 1/2$  с числом точек разбиения по  $x$  равным 10, по  $t$  равным 90, на Рис. 1.5 при  $s = 0$  с числом точек разбиения по  $x$  равным 21, по  $t$  равным 60 (в этом случае не выполняется условие устойчивости).

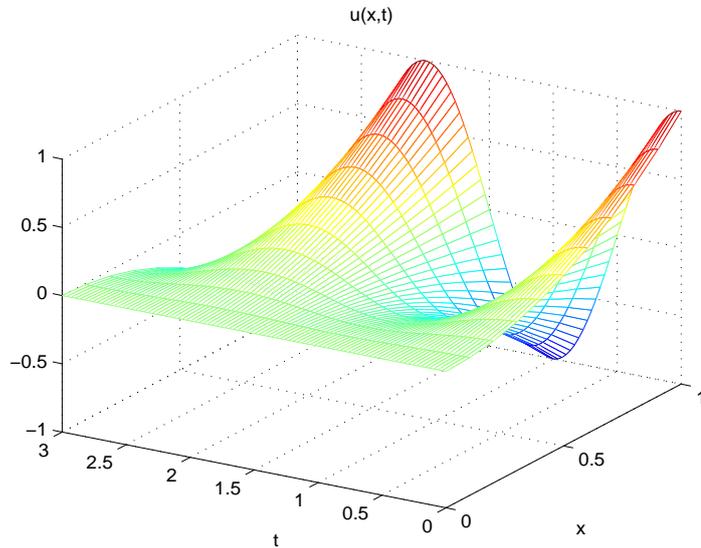


Рис. 1.4:  $s = 1/2$ ,  $N = 10$ ,  $M = 90$

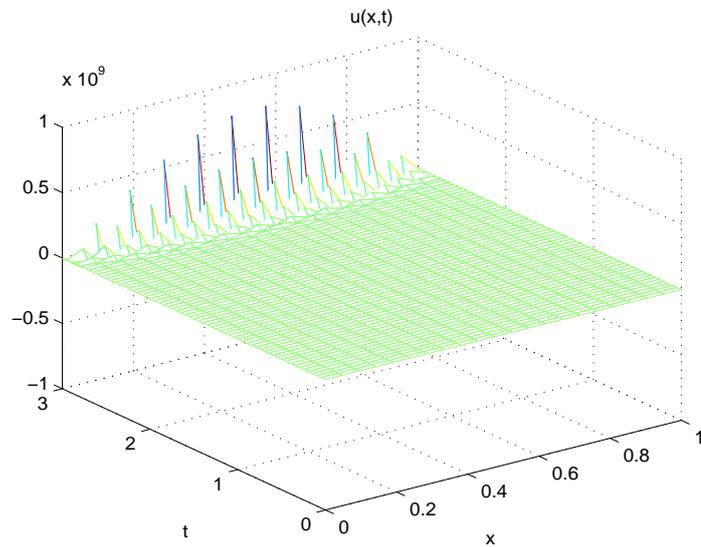


Рис. 1.5:  $s = 0$ ,  $N = 21$ ,  $M = 60$

В табл. 3 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (1.4.39), полученные при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах.

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (1.4.40) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma = 0.2500$			$\sigma = 0.1565$			$\sigma = 1.1565$		
	N=10 M=60	N=15 M=90	N=20 M=120	N=15 M=60	N=24 M=96	N=30 M=120	N=15 M=36	N=25 M=60	N=50 M=120
s=0	0.0624	0.0409	0.0304	0.0624	0.0387	0.0305	$2.2 \cdot 10^{15}$	$4.7 \cdot 10^{28}$	$1.9 \cdot 10^{63}$
s=0.5	0.3430	0.2254	0.1687	0.3417	0.2123	0.1688	0.5820	0.3428	0.1688
s=1	0.6235	0.4108	0.3077	0.6217	0.3869	0.3077	1.0455	0.6244	0.3077

В каждом из рассмотренных примеров при фиксированном  $\sigma$  приближенные решения сходятся к точным. Исключения составляют лишь случаи, в которых условие устойчивости (1.3.36) не выполняется, тогда погрешности резко возрастают. Это подтверждает выводы теоремы 4 и следствия 1.

## Глава 2

# Уравнения гиперболического типа с запаздыванием с двумя пространственными переменными

### 2.1 Постановка задачи

Рассмотрим волновое уравнение с эффектом наследственности вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) + f(x, y, t, u(x, y, t), u_t(x, y, \cdot)): \\ t_0 \leq t \leq T, \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y \quad (2.1.1)$$

с граничными условиями

$$u(0, y, t) = g_0(y, t), \quad u(X, y, t) = g_1(y, t): \quad 0 \leq y \leq Y, \quad t_0 \leq t \leq T, \\ u(x, 0, t) = g_2(x, t), \quad u(x, Y, t) = g_3(x, t): \quad 0 \leq x \leq X, \quad t_0 \leq t \leq T, \quad (2.1.2)$$

и начальными условиями

$$u(x, y, t) = \varphi(x, y, t): \quad 0 \leq x \leq X, \quad 0 \leq y \leq Y, \quad t_0 - \tau \leq t \leq t_0. \quad (2.1.3)$$

Здесь  $x, y, t$  — независимые переменные;  $u(x, y, t)$  — искомая функция;  $u_t(x, y, \cdot) = \{u(x, y, t + \xi), -\tau \leq \xi < 0\}$  — функция предыстория искомой функции к моменту  $t$ ;  $\tau$  — величина запаздывания;  $f(x, y, t, u, u_t(x, y, \cdot))$  — функционал, определенный на  $[0, X] \times [0, Y] \times [t_0, T] \times \mathbb{R} \times Q[-\tau, 0)$ . Требуется найти функцию  $u(x, y, t)$ , определенную в области  $t_0 \leq t \leq T$ ,  $0 \leq x \leq X$ ,  $0 \leq y \leq Y$ , удовлетворяющую уравнению (2.1.1), граничным (2.1.2) и начальным условиям (2.1.3). Будем предполагать, что задача имеет единственное решение.

## 2.2 Разностный метод

Разобьем отрезок  $[0, X]$  на части с шагом  $h_1 = X/N_1$ , отрезок  $[0, Y]$  на части с шагом  $h_2 = Y/N_2$ , где  $N_1, N_2$  — некоторые целые числа. Введем точки  $x_i = ih_1$ ,  $i = 0, 1, \dots, N_1$ ,  $y_k = kh_2$ ,  $k = 0, 1, \dots, N_2$ . Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  на части с шагом  $\Delta$ . Будем считать, что  $m = \tau/\Delta$  — целое число. Введем точки  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = -m, \dots, M$ , где  $M = \lfloor T/\Delta \rfloor$ . Будем обозначать приближение точного решения  $u(x_i, y_k, t_j)$  через  $u_j^{i,k}$ . Введем дискретную предысторию к моменту  $t_j$  при фиксированных  $i, k$ :

$$\{u_l^{i,k}\}_j = \{u_l^{i,k} : j - m \leq l \leq j\}.$$

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение:

$$I : \{u_l^{i,k}\}_j \rightarrow v_j^{i,k}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta].$$

Будем говорить, что оператор интерполяции-экстраполяции имеет порядок погрешности  $p$  на точном решении, если существуют константы  $C_1$  и  $C_2$ , такие, что для всех  $i = 0, \dots, N_1$ ,  $k = 0, \dots, N_2$ ,  $j = 0, \dots, M$  и  $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$  выполняется неравенство

$$|v_j^{i,k}(t - t_j) - u(x_i, y_k, t)| \leq C_1 \max_{j-m \leq l \leq j} |u_l^{i,k} - u(x_i, y_k, t_l)| + C_2 \Delta^p.$$

Например, кусочно-линейная интерполяция

$$v_j^{i,k}(\xi) = \frac{1}{\Delta} ((t_l - t_j - \xi)u_{l-1}^{i,k} + (t_j + \xi - t_{l-1})u_l^{i,k}), \quad t_{l-1} \leq t_j + \xi \leq t_l, \quad -\tau \leq \xi \leq 0 \quad (2.2.4)$$

с экстраполяцией продолжением

$$v_j^{i,k}(\xi) = \frac{1}{\Delta} ((-\xi)u_{j-1}^{i,k} + (\Delta + \xi)u_l^{i,k}), \quad t_j \leq t_j + \xi \leq t_j + 1, \quad \xi > 0$$

имеет второй порядок [10].

Будем предполагать, что оператор интерполяции-экстраполяции липшицев, то есть найдется такая константа  $L_I$ , что для всех предысторий  $\{u_l^{i,k}\}_j$  и  $\{v_l^{i,k}\}_j$  выполнено

$$\sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_{j+1}} |v_j^{i,k}(t - t_j) - \eta_j^{i,k}(t - t_j)| \leq L_I \max_{j-m \leq l \leq j} |u_l^{i,k} - v_l^{i,k}|,$$

где  $v_j^{i,k}(\cdot) = I(\{u_l^{i,k}\}_j)$ ,  $\eta_j^{i,k}(\cdot) = I(\{v_l^{i,k}\}_j)$ .

Также будем предполагать, что оператор интерполяции-экстраполяции согласован

$$v_j^{i,k}(t_l - t_j) = u_l^{i,k}, \quad l = j - m, \dots, j.$$

Рассматривается семейство методов с весами ( $0 \leq s \leq 1$ ):

$$\frac{u_{j+1}^{i,k} - 2u_j^{i,k} + u_{j-1}^{i,k}}{\Delta^2} = sa^2 \left( \frac{u_{j+1}^{i-1,k} - 2u_{j+1}^{i,k} + u_{j+1}^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{j+1}^{i,k-1} - 2u_{j+1}^{i,k} + u_{j+1}^{i,k+1}}{h_2^2} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& + sa^2 \left( \frac{u_{j-1}^{i-1,k} - 2u_{j-1}^{i,k} + u_{j-1}^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{j-1}^{i,k-1} - 2u_{j-1}^{i,k} + u_{j-1}^{i,k+1}}{h_2^2} \right) + \\
& + (1-2s)a^2 \left( \frac{u_j^{i-1,k} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_j^{i,k-1} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i,k+1}}{h_2^2} \right) + F_j^{i,k}(v_j^{i,k}(\cdot)), \\
& i = 1, \dots, N_1 - 1, k = 1, \dots, N_2 - 1, j = 0, \dots, M - 1,
\end{aligned} \tag{2.2.5}$$

с граничными условиями

$$u_j^{0,k} = g_0(y_k, t_j), u_j^{N_1,k} = g_1(y_k, t_j), u_j^{i,0} = g_2(x_i, t_j), u_j^{i,N_2} = g_3(x_i, t_j)$$

и начальными условиями

$$u_j^{i,k} = \varphi(x_i, y_k, t_j): -m \leq j \leq 0,$$

где  $F_j^{i,k}(v(\cdot))$  — некоторый функционал, определенный на функциях  $v(\cdot) = v_j^{i,k}(\cdot) = I(\{u_l^{i,k}\}_j) \in Q[-\tau, \Delta]$ , связанный с функционалом  $f(x_i, y_k, t_j, u_j^{i,k}, v_j^{i,k}(\cdot))$  и липшицевый по переменной  $v(\cdot)$  с константой  $L_F$ .

Схема (2.2.5) при  $s = 0$  является явной, при других  $s$  ( $0 < s \leq 1$ ), при каждом фиксированном  $j$  получаем систему уравнений. Для того чтобы привести систему к виду, при котором ее можно решить методом прогонки, перейдем к факторизованной схеме [7].

## 2.3 Факторизованная схема

В этом разделе и далее будем предполагать, что рассматриваются однородные граничные условия:

$$g_0(y, t) = g_1(y, t) = 0: 0 \leq y \leq Y, t_0 \leq t \leq T, g_2(x, t) = g_3(x, t) = 0: 0 \leq x \leq X, t_0 \leq t \leq T.$$

Исходную задачу можно свести к данной с помощью замены:

$$\begin{aligned}
\bar{u}(x, y, t) &= u(x, y, t) - (g_0(y, t) + \frac{g_1(y, t) - g_0(y, t)}{X}x) - (g_2(x, t) + \frac{g_3(x, t) - g_2(x, t)}{Y}y) + \\
&+ \frac{X-x}{X} \frac{Y-y}{Y} g_0(0, t) + \frac{X-x}{X} \frac{y}{Y} g_0(Y, t) + \frac{x}{X} \frac{y}{Y} g_1(Y, t) + \frac{x}{X} \frac{Y-y}{Y} g_1(0, t).
\end{aligned}$$

При каждом  $t_j$  определим значения дискретной модели  $\tilde{\gamma}_j = (u_j^{0,0}, u_j^{0,1}, \dots, u_j^{0,N_2-1}, u_j^{0,N_2}, u_j^{1,0}, u_j^{1,1}, \dots, u_j^{1,N_2}, \dots, u_j^{N_1,0}, u_j^{N_1,1}, \dots, u_j^{N_1,N_2-1}, u_j^{N_1,N_2})' \in \tilde{\Gamma}$ , где  $'$  — знак транспонирования,  $\tilde{\Gamma}$  — векторное пространство размерности  $q = (N_1 + 1)(N_2 + 1)$  со скалярным произведением:

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\mu}) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} \tilde{\gamma}_{i,k} \tilde{\mu}_{i,k} h_1 h_2, \tilde{\gamma} = (\tilde{\gamma}_{0,0}, \tilde{\gamma}_{0,1}, \dots, \tilde{\gamma}_{N_1, N_2})' \in \tilde{\Gamma}, \tilde{\mu} = (\tilde{\mu}_{0,0}, \tilde{\mu}_{0,1}, \dots, \tilde{\mu}_{N_1, N_2})' \in \tilde{\Gamma} \tag{2.3.6}$$

В пространстве  $\tilde{\Gamma}$  введем операторы  $A_1, A_2, \tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$ :

$$A_1 \tilde{\gamma}_j = \tilde{\mu}_j, \tilde{\mu}_j = (\tilde{\mu}_j^{0,0}, \tilde{\mu}_j^{0,1}, \dots, \tilde{\mu}_j^{N_1, N_2})'$$

$$\tilde{\mu}_j^{i,k} = -a^2 \frac{u_j^{i-1,k} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i+1,k}}{h_1^2} : 1 \leq i \leq N_1 - 1, \tilde{\mu}_j^{0,k} = 0, \tilde{\mu}_j^{N_1,k} = 0, \quad (2.3.7)$$

$$A_2 \tilde{\gamma}_j = \tilde{\omega}_j, \quad \tilde{\omega}_j = (\tilde{\omega}_j^{0,0}, \tilde{\omega}_j^{0,1}, \dots, \tilde{\omega}_j^{N_1, N_2})',$$

$$\tilde{\omega}_j^{i,k} = -a^2 \frac{u_j^{i,k-1} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i,k+1}}{h_2^2} : 1 \leq k \leq N_2 - 1, \tilde{\omega}_j^{i,0} = 0, \tilde{\omega}_j^{i, N_2} = 0, \quad (2.3.8)$$

$$\tilde{A}_1 = \Delta^2 A_1, \quad (2.3.9)$$

$$\tilde{A}_2 = \Delta^2 A_2. \quad (2.3.10)$$

Тогда систему (2.2.5) можно переписать в виде:

$$\frac{\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}}{\Delta^2} + s(A_1 + A_2)\tilde{\gamma}_{j+1} + s(A_1 + A_2)\tilde{\gamma}_{j-1} + (1 - 2s)(A_1 + A_2)\tilde{\gamma}_j = F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j)), \quad (2.3.11)$$

где  $F_j(v(\cdot)) = (F_j^{0,0}(v_j^{0,0}(\cdot)), F_j^{0,1}(v_j^{0,1}(\cdot)), \dots, F_j^{N_1, N_2}(v_j^{N_1, N_2}(\cdot)))'$ ,  $v(\cdot) = I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j) \in Q^q[-\tau, \Delta]$ .

Введем оператор:

$$R = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2.$$

Приведем уравнение (2.3.11) к виду:

$$R(\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}) + \Delta^2(A_1 + A_2)\tilde{\gamma}_j = \Delta^2 F_j(v(\cdot)).$$

Введем операторы  $R_1$  и  $R_2$ :

$$R_1 = E + \Delta^2 s A_1,$$

$$R_2 = E + \Delta^2 s A_2. \quad (2.3.12)$$

С учетом соотношения  $(E + \Delta^2 s A_1)(E + \Delta^2 s A_2) = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2 + O(\Delta^4)$ , получаем

$$R = R_1 R_2 + O(\Delta^4). \quad (2.3.13)$$

Операторы  $A_1$  (2.3.7) и  $A_2$  (2.3.8) самосопряженные и положительные в смысле скалярного произведения векторов (2.3.6), тогда операторы  $(A_1 + A_2)$ ,  $R_1$ ,  $R_2$  самосопряженные и положительные. Кроме того, так как операторы  $A_1$  и  $A_2$  перестановочны, то операторы  $A_1 A_2$  и  $R_1 R_2$  также самосопряженные и положительные. Предположим, что выполнено условие

$$\frac{1}{\Delta^2} R_1 R_2 > \frac{1}{4}(A_1 + A_2) \quad (2.3.14)$$

и введем в пространстве  $\tilde{\Gamma}$  две нормы:

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_2 = \sqrt{(\tilde{\gamma}_n, \tilde{\gamma}_n)}, \quad (2.3.15)$$

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}} = \sqrt{\frac{1}{4}((A_1 + A_2)\tilde{\gamma}_n^+, \tilde{\gamma}_n^+) + \left( \left( \frac{1}{\Delta^2} R_1 R_2 - \frac{1}{4}(A_1 + A_2) \right) \tilde{\gamma}_n^-, \tilde{\gamma}_n^- \right)}, \quad (2.3.16)$$

где  $\tilde{\gamma}_n^+ = \tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}$ ,  $\tilde{\gamma}_n^- = \tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}$ .

Заметим, что нормы операторов  $R_1$  и  $R_2$ , не зависят от  $\Delta$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ , а зависят только от  $\sigma_1 = a^2 \Delta^2 / h_1^2$  и  $\sigma_2 = a^2 \Delta^2 / h_2^2$  соответственно. Это свойство справедливо также для операторов  $\tilde{A}_1$  и  $\tilde{A}_2$ .

**Лемма 2.** *Справедлива следующая оценка:*

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \frac{D}{\Delta} (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2).$$

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}}^2 &= \frac{1}{4} ((A_1 + A_2)(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}), \tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}) + \left( \left( \frac{1}{\Delta^2} R_1 R_2 - \frac{1}{4} (A_1 + A_2) \right) (\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}), \tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1} \right) \leq \\ &\leq \frac{1}{4} \|(A_1 + A_2)(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1})\|_2 \|\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2 + \left\| \left( \frac{1}{\Delta^2} R_1 R_2 - \frac{1}{4} (A_1 + A_2) \right) (\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}) \right\|_2 \|\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4\Delta^2} \|(\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)(\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1})\|_2 \|\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2 + \frac{1}{\Delta^2} \left\| \left( R_1 R_2 - \frac{1}{4} (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2) \right) (\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}) \right\|_2 \|\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4\Delta^2} \|\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\|_2 \|\tilde{\gamma}_n + \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2^2 + \frac{1}{\Delta^2} \|R_1 R_2 - \frac{1}{4} (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)\|_2 \|\tilde{\gamma}_n - \tilde{\gamma}_{n-1}\|_2^2 \leq \\ &\leq \frac{1}{4\Delta^2} \|\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\|_2 (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2)^2 + \frac{1}{\Delta^2} \|R_1 R_2 - \frac{1}{4} (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)\|_2 (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2)^2 \leq \\ &\leq \left( \frac{1}{4} \|\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\|_2 + \|R_1 R_2 - \frac{1}{4} (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)\|_2 \right) \frac{1}{\Delta^2} (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2)^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем необходимую оценку:

$$\|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \frac{D}{\Delta} (\|\tilde{\gamma}_n\|_2 + \|\tilde{\gamma}_{n-1}\|_2),$$

где  $D = \sqrt{\frac{1}{4} \|\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2\|_2 + \|R_1 R_2 - \frac{1}{4} (\tilde{A}_1 + \tilde{A}_2)\|_2}$ . □

Используя соотношение (2.3.13), перейдем к факторизованной схеме:

$$R_1 R_2 (\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}) + \Delta^2 (A_1 + A_2) \tilde{\gamma}_j = \Delta^2 F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j)). \quad (2.3.17)$$

Система эффективно решается с помощью двух прогонок по каждому из направлений  $x$  и  $y$ .

Запишем схему (2.3.17) в координатной форме:

$$\begin{aligned} &u_{i,k}^{j+1} - 2u_j^{i,k} + u_{i,k}^{j-1} - \Delta^2 s a^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i+1,k}^{j+1}}{h_1^2} + \frac{u_{i,k-1}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i,k+1}^{j+1}}{h_2^2} \right) - \\ &\quad - \Delta^2 s a^2 \left( \frac{u_{i-1,k}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i+1,k}^{j-1}}{h_1^2} + \frac{u_{i,k-1}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i,k+1}^{j-1}}{h_2^2} \right) - \\ &\quad - \Delta^2 (1 - 2s) a^2 \left( \frac{u_j^{i-1,k} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_j^{i,k-1} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i,k+1}}{h_2^2} \right) + \\ &\quad + \frac{\Delta^4 s^2 a^4}{h_1^2 h_2^2} \left( \left( u_{i+1,k+1}^{j+1} - 2u_{i+1,k}^{j+1} + u_{i+1,k-1}^{j+1} \right) - 2 \left( u_{i,k+1}^{j+1} - 2u_{i,k}^{j+1} + u_{i,k-1}^{j+1} \right) + \right. \\ &\quad + \left( u_{i-1,k+1}^{j+1} - 2u_{i-1,k}^{j+1} + u_{i-1,k-1}^{j+1} \right) - 2 \left( u_{i+1,k+1}^j - 2u_{i+1,k}^j + u_{i+1,k-1}^j \right) + 4 \left( u_{i,k+1}^{j+1} - 2u_{i,k}^j + u_{i,k-1}^j \right) - \\ &\quad - 2 \left( u_{i-1,k+1}^{j+1} - 2u_{i-1,k}^j + u_{i-1,k-1}^j \right) + \left( u_{i+1,k+1}^{j-1} - 2u_{i+1,k}^{j-1} + u_{i+1,k-1}^{j-1} \right) - 2 \left( u_{i,k+1}^{j-1} - 2u_{i,k}^{j-1} + u_{i,k-1}^{j-1} \right) + \\ &\quad \left. + \left( u_{i-1,k+1}^{j-1} - 2u_{i-1,k}^{j-1} + u_{i-1,k-1}^{j-1} \right) \right) = \Delta^2 F_j^{i,k}(v_j^{i,k}(\cdot)). \quad (2.3.18) \end{aligned}$$

## 2.4 Исследование невязки

Невязкой (без интерполяции) метода назовем:

$$\begin{aligned}
\psi_j^{i,k} &= \frac{u(x_i, y_k, t_{j+1}) - 2u(x_i, y_k, t_j) + u(x_i, y_k, t_{j-1}))}{\Delta^2} - \\
&- sa^2 \left( \frac{u(x_{i-1}, y_k, t_{j+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, y_k, t_{j+1})}{h_1^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{u(x_i, y_{k-1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{j+1}) + u(x_i, y_{k+1}, t_{j+1})}{h_2^2} \right) - \\
&- sa^2 \left( \frac{u(x_{i-1}, y_k, t_{j-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_k, t_{j-1})}{h_1^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{u(x_i, y_{k-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{j-1}) + u(x_i, y_{k+1}, t_{j-1})}{h_2^2} \right) - \\
&- (1 - 2s)a^2 \left( \frac{u(x_{i-1}, y_k, t_j) - 2u(x_i, y_k, t_j) + u(x_{i+1}, y_k, t_j)}{h_1^2} + \right. \\
&+ \left. \frac{u(x_i, y_{k-1}, t_j) - 2u(x_i, y_k, t_j) + u(x_i, y_{k+1}, t_j)}{h_2^2} \right) + \\
&+ \frac{\Delta^2 s^2 a^4}{h_1^2 h_2^2} \left( \left( u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_{j+1}) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_{j+1}) \right) - \right. \\
&- 2 \left( u(x_i, y_{k+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{j+1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{j+1}) \right) + \left( u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{j+1}) - 2u(x_{i-1}, y_k, t_{j+1}) + \right. \\
&+ \left. u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{j+1}) \right) - 2 \left( u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_j) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_j) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_j) \right) + \\
&+ 4 \left( u(x_i, y_{k+1}, t_{j+1}) - 2u(x_i, y_k, t_j) + u(x_i, y_{k-1}, t_j) \right) - 2 \left( u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{j+1}) - 2u(x_{i-1}, y_k, t_j) + \right. \\
&+ \left. u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_j) \right) + \left( u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_{j-1}) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_{j-1}) \right) - \\
&- 2 \left( u(x_i, y_{k+1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{j-1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{j-1}) \right) + \left( u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{j-1}) - \right. \\
&- \left. 2u(x_{i-1}, y_k, t_{j-1}) + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{j-1}) \right) \Big) - F_j^{i,k}(u_{t_j}(x_i, y_k, \cdot)). \tag{2.4.19}
\end{aligned}$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок  $h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3}$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ , что  $|\psi_j^{i,k}| \leq C(h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3})$  для всех  $i = 1, \dots, N_1 - 1$ ,  $k = 1, \dots, N_2 - 1$ ,  $j = 0, \dots, M - 1$ .

Рассмотрим схему (2.3.17), в которой функционал  $F_j^{i,k}$  определяется следующим образом:

$$F_j^{i,k}(v_j^{i,k}(\cdot)) = f(x_i, y_k, t_j, u_j^{i,k}, \widehat{v}_j^{i,k}(\cdot)), \tag{2.4.20}$$

где  $\widehat{v}_j^{i,k}(\cdot) \in Q[-\tau, 0]$ ;  $\widehat{v}_j^{i,k}(\xi) = v_j^{i,k}(\xi)$ ,  $-\tau \leq \xi < 0$ .

Заметим, что в этом случае экстраполяция не требуется, применяется только интерполяция.

**Теорема 5.** Если для точного решения задачи (2.1.1)–(2.1.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_j^{i,k}$  задается соотношением (2.4.20), то для любого  $0 \leq s \leq 1$  невязка имеет порядок  $h_1^2 + h_2^2 + \Delta^2$ .

*Доказательство.* Разложим функцию  $u(x, y, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точек  $(x_i, y_k, t_j)$ ,  $(x_i, y_k, t_{j+1})$ ,  $(x_i, y_k, t_{j-1})$ ,  $(x_{i-1}, y_k, t_j)$ ,  $(x_{i-1}, y_k, t_{j+1})$ ,  $(x_{i-1}, y_k, t_{j-1})$ ,  $(x_{i+1}, y_k, t_j)$ ,  $(x_{i+1}, y_k, t_{j+1})$ ,  $(x_{i+1}, y_k, t_{j-1})$ . Так как существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно, получаем следующие равенства для значений функции в точках:

$$u(x_i, y_k, t_{j\pm 1}) = u(x_i, y_k, t_j) \pm \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, y_k, t_j)\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_k, t_j)\Delta^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, y_k, t_j)\Delta^3 + O(\Delta^4),$$

здесь и далее  $g = O(\Delta^4)$ , если существует константа  $C$ , такая что  $|g| \leq C\Delta^4$ ,

$$u(x_{i\pm 1}, y_k, t_j) = u(x_i, y_k, t_j) \pm \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_k, t_j)h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_j)h_1^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_k, t_j)h_1^3 + O(h_1^4),$$

$$u(x_i, y_{k\pm 1}, t_j) = u(x_i, y_k, t_j) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_k, t_j)h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_j)h_2^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_k, t_j)h_2^3 + O(h_2^4),$$

$$\begin{aligned} u(x_{i\pm 1}, y_k, t_{j+1}) &= u(x_i, y_k, t_{j+1}) \pm \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_k, t_{j+1})h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_{j+1})h_1^2 \pm \\ &\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_k, t_{j+1})h_1^3 + O(h_1^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_{i\pm 1}, y_k, t_{j-1}) &= u(x_i, y_k, t_{j-1}) \pm \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, y_k, t_{j-1})h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_{j-1})h_1^2 \pm \\ &\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}(x_i, y_k, t_{j-1})h_1^3 + O(h_1^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_i, y_{k\pm 1}, t_{j+1}) &= u(x_i, y_k, t_{j+1}) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_k, t_{j+1})h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j+1})h_2^2 \pm \\ &\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_k, t_{j+1})h_2^3 + O(h_2^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_i, y_{k\pm 1}, t_{j-1}) &= u(x_i, y_k, t_{j-1}) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_i, y_k, t_{j-1})h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j-1})h_2^2 \pm \\ &\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_i, y_k, t_{j-1})h_2^3 + O(h_2^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_{i-1}, y_{k\pm 1}, t_{j+1}) &= u(x_{i-1}, y_k, t_{j+1}) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i-1}, y_k, t_{j+1})h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_k, t_{j+1})h_2^2 \pm \\ &\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i-1}, y_k, t_{j+1})h_2^3 + O(h_2^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, y_{k\pm 1}, t_{j+1}) &= u(x_{i+1}, y_k, t_{j+1}) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1}, y_k, t_{j+1})h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1}, y_k, t_{j+1})h_2^2 \pm \\ &\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i+1}, y_k, t_{j+1})h_2^3 + O(h_2^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u(x_{i-1}, y_{k\pm 1}, t_j) &= u(x_{i-1}, y_k, t_j) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i-1}, y_k, t_j)h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_k, t_j)h_2^2 \pm \\
&\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i-1}, y_k, t_j)h_2^3 + O(h_2^4), \\
u(x_{i+1}, y_{k\pm 1}, t_j) &= u(x_{i+1}, y_k, t_j) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1}, y_k, t_j)h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1}, y_k, t_j)h_2^2 \pm \\
&\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i+1}, y_k, t_j)h_2^3 + O(h_2^4), \\
u(x_{i-1}, y_{k\pm 1}, t_{j-1}) &= u(x_{i-1}, y_k, t_{j-1}) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i-1}, y_k, t_{j-1})h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_k, t_{j-1})h_2^2 \pm \\
&\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i-1}, y_k, t_{j-1})h_2^3 + O(h_2^4), \\
u(x_{i+1}, y_{k\pm 1}, t_{j-1}) &= u(x_{i+1}, y_k, t_{j-1}) \pm \frac{\partial u}{\partial y}(x_{i+1}, y_k, t_{j-1})h_2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1}, y_k, t_{j-1})h_2^2 \pm \\
&\pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial y^3}(x_{i+1}, y_k, t_{j-1})h_2^3 + O(h_2^4).
\end{aligned}$$

Подставив эти соотношения в формулу определения невязки (2.4.19), получим:

$$\begin{aligned}
\psi_j^{i,k} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_k, t_j) + O(\Delta^2) - sa^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_{j+1}) + O(h_1^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j+1}) + O(h_2^2) \right) - \\
&- sa^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_{j-1}) + O(h_1^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j-1}) + O(h_2^2) \right) - \\
&- (1 - 2s)a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_j) + O(h_1^2) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_j) + O(h_2^2) \right) + \\
&+ \frac{\Delta^2 s^2 a^4}{h_1^2} \left( \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1}, y_k, t_{j+1}) + O(h_2^2) \right) - 2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j+1}) + O(h_2^2) \right) + \right. \\
&+ \left. \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_k, t_{j+1}) + O(h_2^2) \right) - 2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1}, y_k, t_j) + O(h_2^2) \right) + 4 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_j) + O(h_2^2) \right) - \right. \\
&- \left. 2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_k, t_j) + O(h_2^2) \right) + \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i+1}, y_k, t_{j-1}) + O(h_2^2) \right) - 2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j-1}) + O(h_2^2) \right) + \right. \\
&+ \left. \left. \left( \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i-1}, y_k, t_{j-1}) + O(h_2^2) \right) \right) - f(t_j, x_i, y_k, u(x_i, y_k, t_j), u_{t_j}(x_i, y_k, \cdot)).
\end{aligned}$$

Разложим функции  $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t)$  и  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точки  $(x_i, y_k, t_j)$ ,  $(x_i, y_k, t_{j+1})$ ,  $(x_i, y_k, t_{j-1})$ . В результате получим следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_{j\pm 1}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_j) \pm \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2}(x_i, y_k, t_j)\Delta + O(\Delta^2), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j\pm 1}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_j) \pm \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial y^2}(x_i, y_k, t_j)\Delta + O(\Delta^2), \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i\pm 1}, y_k, t_{j+1}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j+1}) \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(x_i, y_k, t_{j+1})h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_k, t_{j+1})h_1^2 \pm
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y^2}(x_i, y_k, t_{j+1}) h_1^3 + O(h_1^4). \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i\pm 1}, y_k, t_j) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_j) \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(x_i, y_k, t_j) h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_k, t_j) h_1^2 \pm \\
& \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y^2}(x_i, y_k, t_j) h_1^3 + O(h_1^4). \\
\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_{i\pm 1}, y_k, t_{j-1}) &= \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_{j-1}) \pm \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2}(x_i, y_k, t_{j-1}) h_1 + \frac{1}{2} \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_k, t_{j-1}) h_1^2 \pm \\
& \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^4 u}{\partial x^3 \partial y^2}(x_i, y_k, t_{j-1}) h_1^3 + O(h_1^4).
\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}
\psi_j^{i,k} &= \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_k, t_j) - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_j) \right) - f(x_i, y_k, t_j, u(x_i, y_k, t_j), u_{t_j}(x_i, y_k, \cdot)) + \\
& + \Delta^2 s^2 a^2 \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_k, t_{j+1}) - 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_k, t_j) + \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2}(x_i, y_k, t_{j-1}) \right) + O(h_1^2 + h_2^2 + \Delta^2) = \\
& = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, y_k, t_j) - a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, y_k, t_j) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x_i, y_k, t_j) \right) - f(x_i, y_k, t_j, u(x_i, y_k, t_j), u_{t_j}(x_i, y_k, \cdot)) + \\
& \quad + O(h_1^2 + h_2^2 + \Delta^2).
\end{aligned}$$

В силу уравнения (2.1.1)

$$\psi_j^{i,k} = O(h_1^2 + h_2^2 + \Delta^2).$$

□

## 2.5 Исследование сходимости

Будем говорить, что метод сходится с порядком  $h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3}$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ , что выполняется неравенство  $|u(x_i, y_k, t_j) - u_j^{i,k}| \leq C(h_1^{p_1} + h_2^{p_2} + \Delta^{p_3})$  для всех  $i = 0, \dots, N_1$ ,  $k = 0, \dots, N_2$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

Для исследования сходимости схемы будем использовать общую разностную схему численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений, модифицированную для случая двух пространственных переменных, и следовательно, двух параметров  $h_1$  и  $h_2$ . Изложим ее основные понятия и утверждения.

Пусть задан отрезок  $[t_0, \theta]$  и число  $\tau > 0$  – величина запаздывания.

Шаг сетки  $\Delta > 0$ , множество шагов сетки  $\{\Delta\}$ , сетка  $\Sigma_\Delta, \Sigma_\Delta^-, \Sigma_\Delta^+$  вводятся также, как в разделе 1.3.

Дискретной моделью назовем всякую сеточную функцию  $t_i \in \Sigma_\Delta \rightarrow \gamma(t_i) = \gamma_i \in \Gamma$ ,  $i = -m, \dots, M$ , где  $\Gamma$  –  $q$ -мерное нормированное пространство с нормой  $\|\cdot\|_\Gamma$ . Будем предполагать, что размерность  $q$  пространства  $\Gamma$  зависит от вектора  $h = (h_1, h_2)$ .

**Замечание 1.** Теорию можно обобщить на случай  $l$ -мерного вектора  $h = (h_1, h_2, \dots, h_l)$ .

Введем оператор интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории (1.3.8), удовлетворяющий условию липшицевости (1.3.9), функцию точных значений (1.3.13), стартовые значения  $\gamma_i$  (1.3.10). Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , если найдется константа  $C$ , такая, что

$$\|z_i - \gamma_i\|_{\Gamma} \leq C(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}), \quad i = -m, \dots, 0.$$

Формулой продвижения модели на шаг назовем алгоритм

$$\gamma_{n+1} = S\gamma_n + \Delta\Phi(t_n, I(\{\gamma_i\}_n)), \quad (2.5.21)$$

где  $\Phi: \Sigma_{\Delta}^+ \times V \times \rightarrow \Gamma$  — функция продвижения на шаг,  $S: \Gamma \rightarrow \Gamma$  — линейный оператор перехода.

Таким образом, дискретная модель (численный метод, в дальнейшем просто метод) определяется стартовыми значениями (1.3.10), формулой продвижения на шаг (2.5.21) и оператором интерполяции.

Будем предполагать, что функция  $\Phi(t_n, v)$  в (2.5.21) липшицева по второму аргументу.

Будем говорить, что метод сходится с порядком  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , если существует константа  $C$ , такая, что

$$\|z_n - \gamma_n\|_{\Gamma} \leq C(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3})$$

для всех  $n = -m, \dots, M$ .

Метод (2.5.21) называется устойчивым, если

$$\|S\|_{\Gamma} \leq 1. \quad (2.5.22)$$

Погрешностью аппроксимации (невязкой) с интерполяцией назовем сеточную функцию

$$d_n = (z_{n+1} - Sz_n)/\Delta - \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n)), \quad n = 0, \dots, M-1. \quad (2.5.23)$$

Будем говорить, что метод (2.5.21) имеет порядок погрешности аппроксимации с интерполяцией  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , если существует константа  $C$ , такая, что

$$\|d_n\|_{\Gamma} \leq C(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3})$$

для всех  $n = 0, \dots, M-1$ .

Справедлива следующая основная теорема.

**Теорема 6.** Пусть метод (2.5.21) устойчив, функция  $\Phi$  удовлетворяет условию липшицевости по второму аргументу, оператор интерполяции  $I$  удовлетворяет условию липшицевости, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , погрешность аппроксимации с

интерполяцией имеет порядок  $\Delta^{p_4} + h_1^{p_5} + h_2^{p_6}$ , где  $p_1 > 0, p_2 > 0, p_3 > 0, p_4 > 0, p_5 > 0, p_6 > 0$ , тогда метод сходится, причем порядок сходимости по  $\Delta$  не меньше  $\Delta^{\min\{p_1, p_4\}}$ , по  $h_1$  не меньше  $h_1^{\min\{p_2, p_5\}}$ , по  $h_2$  не меньше  $h_2^{\min\{p_3, p_6\}}$ .

Доказательство повторяет доказательство теоремы 2, приведенное в монографии [19, с. 12], за исключением последней строки. Приведем его для полноты изложения.

*Доказательство.* Обозначим  $\delta_n = z_n - \gamma_n$ ,  $n = -m, \dots, M$ , тогда для  $n = 0, \dots, M - 1$  имеем

$$\delta_{n+1} = S\delta_n + \Delta\hat{\delta}_n + \Delta d_n, \quad (2.5.24)$$

где

$$\hat{\delta}_n = \Phi(t_n, I(\{z_i\}_n)) - \Phi(t_n, I(\{\gamma_i\}_n)).$$

Из предположений о липшицевости отображений  $\Phi$  и  $I$  следует

$$\|\hat{\delta}_n\|_\Gamma \leq K \max_{n-m \leq i \leq n} \{\|\delta_i\|_\Gamma\}, \quad (2.5.25)$$

где  $K = L_\Phi L_I$ .

Из (2.5.24) вытекает

$$\delta_{n+1} = S^{n+1}\delta_0 + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}\hat{\delta}_j + \Delta \sum_{j=0}^n S^{n-j}d_j. \quad (2.5.26)$$

Из (2.5.26), (2.5.25) и определения устойчивости оператора  $S$  следует

$$\|\delta_{n+1}\|_\Gamma \leq K\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|_\Gamma\} + \|\delta_0\|_\Gamma + (\theta - t_0) \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|d_i\|_\Gamma\}. \quad (2.5.27)$$

Обозначим

$$R_0 = \max_{-m \leq i \leq 0} \{\|\delta_i\|_\Gamma\}, \quad R = \max_{0 \leq i \leq N-1} \{\|d_i\|_\Gamma\}, \quad D = R_0 + (\theta - t_0)R, \quad (2.5.28)$$

тогда оценку (2.5.27) можно переписать как

$$\|\delta_{n+1}\|_\Gamma \leq K\Delta \sum_{j=0}^n \max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|_\Gamma\} + D. \quad (2.5.29)$$

Индукцией по  $n = 1, \dots, M$  докажем оценку

$$\|\delta_n\|_\Gamma \leq D(1 + K\Delta)^n. \quad (2.5.30)$$

*База индукции.* Если в (2.5.29) положить  $n = 0$ , то

$$\|\delta_1\|_\Gamma \leq K\|\delta_0\|_\Gamma + D \leq (1 + K\Delta)D.$$

*Шаг индукции.* Пусть оценка (2.5.30) верна для всех индексов от 1 до  $n$ . Покажем, что оценка справедлива и для  $n + 1$ . Зафиксируем  $j \leq n$ . Пусть  $i_0 = i_0(j)$  — тот индекс, на котором достигается

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|_\Gamma\}.$$

Возможны две ситуации:

а)  $i_0 \leq 0$ , тогда

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|_\Gamma\} = \|\delta_{i_0}\|_\Gamma \leq R_0 \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

б)  $1 \leq i_0 \leq j$ , тогда по индуктивному предположению

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|_\Gamma\} = \|\delta_{i_0}\|_\Gamma \leq D(1 + K\Delta)^{i_0} \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

Таким образом, в любом случае выполняется оценка

$$\max_{j-m \leq i \leq j} \{\|\delta_i\|_\Gamma\} \leq D(1 + K\Delta)^j.$$

Из полученной оценки и (2.5.29) вытекает

$$\|\delta_{n+1}\|_\Gamma \leq K\Delta \sum_{j=0}^n D(1 + K\Delta)^j + D = D(1 + K\Delta)^{n+1}.$$

Таким образом, оценка (2.5.30) доказана и из нее получаем оценку

$$\|\delta_n\|_\Gamma \leq D \exp(K(\theta - t_0)). \quad (2.5.31)$$

Так как по определению (2.5.28) величины  $D$  выполняется

$$D \leq C(\Delta^{\min\{p_1, p_4\}} + h_1^{\min\{p_2, p_5\}} + h_2^{\min\{p_2, p_6\}}),$$

то из (2.5.31) вытекает заключение теоремы.  $\square$

Исследуем полученную схему (2.3.17)–(2.3.18) на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему для случая двух пространственных переменных, изложенную выше.

Так как при любом допустимом весе  $s$  уравнение (2.3.17) разрешимо относительно  $\tilde{\gamma}_{j+1}$ , то можно привести уравнение (2.3.17) к явной форме

$$\tilde{\gamma}_{j+1} = 2\tilde{\gamma}_j - \tilde{\gamma}_{j-1} - \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (A_1 + A_2) \tilde{\gamma}_j + \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j))). \quad (2.5.32)$$

Введем вектор  $\gamma_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)' = (\tilde{\gamma}_{j-1}, \tilde{\gamma}_j)' \in \Gamma$ , где  $\Gamma$  — пространство размерности  $q = 2(N_1 + 1)(N_2 + 1)$ . Будем считать, что если в пространстве  $\tilde{\Gamma}$  определена норма (2.3.16), то в пространстве  $\Gamma$  она определяется следующим образом:

$$\|\gamma\|_\Gamma^2 = \|\gamma^1\|_\Gamma^2 + \|\gamma^2\|_\Gamma^2. \quad (2.5.33)$$

Соотношение (2.5.32) можно переписать в виде:

$$\gamma_{j+1}^1 = \gamma_j^2,$$

$$\gamma_{j+1}^2 = 2\gamma_j^2 - \gamma_j^1 - \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (A_1 + A_2) \gamma_j^2 + \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (F_j(v(\cdot))).$$

В результате получаем разностную схему:

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)), \quad (2.5.34)$$

$$\text{где } S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (A_1 + A_2) \end{pmatrix}, \Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta R_2^{-1} R_1^{-1} F_j(I(\{\gamma_l^2\}_j)) \end{pmatrix}.$$

Определим функцию точных значений для схемы (2.5.34) соотношениями

$$z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\tilde{z}_{j-1}, \tilde{z}_j)',$$

$$\tilde{z}_j = (u(x_0, y_0, t_j), u(x_0, y_1, t_j), \dots, u(x_0, y_{N_2-1}, t_j), u(x_0, y_{N_2}, t_j), u(x_1, y_0, t_j), u(x_1, y_1, t_j), \dots, u(x_1, y_{N_2-1}, t_j), u(x_1, y_{N_2}, t_j), \dots, u(x_{N_1}, y_0, t_j), u(x_{N_1}, y_1, t_j), \dots, u(x_{N_1}, y_{N_2-1}, t_j), u(x_{N_1}, y_{N_2}, t_j))'.$$

Стартовые значения модели (2.5.34) можно определить следующим образом:

$$\gamma_j = z_j = (z_j^1, z_j^2)' = (\tilde{z}_{j-1}, \tilde{z}_j)',$$

$$\tilde{z}_j = (\varphi(x_0, y_0, t_j), \varphi(x_0, y_1, t_j), \dots, \varphi(x_0, y_{N_2-1}, t_j), \varphi(x_0, y_{N_2}, t_j), \varphi(x_1, y_0, t_j), \varphi(x_1, y_1, t_j), \dots, \varphi(x_1, y_{N_2}, t_j), \dots, \varphi(x_{N_1}, y_0, t_j), \varphi(x_{N_1}, y_1, t_j), \dots, \varphi(x_{N_1}, y_{N_2}, t_j))', j = -m, \dots, 0.$$

Определение невязки в общей разностной схеме (2.5.23) отличается от введенного ранее определения невязки без интерполяции (2.4.19). Однако справедливо следующее утверждение.

**Теорема 7.** Пусть невязка в смысле (2.4.19) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , функции  $F_j^{i,k}$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  зафиксированы, тогда невязка с интерполяцией в смысле (2.5.23) имеет одинаковый порядок погрешности по  $\Delta$ ,  $h_1$  и  $h_2$ , равный  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}}$ .

*Доказательство.* По определению нормы в  $\Gamma$  (2.5.33):

$$\|d_n\|_{\Gamma}^2 = \|d_n^1\|_{\Gamma}^2 + \|d_n^2\|_{\Gamma}^2$$

$$\|d_n^1\|_{\Gamma}^2 = \|(z_{n+1}^1 - z_n^2)/\Delta\|_{\Gamma}^2 = \left\| \frac{\tilde{z}_n - \tilde{z}_n}{\Delta} \right\|_{\Gamma}^2 = 0.$$

Следовательно,

$$\|d_n\|_{\Gamma} = \|d_n^2\|_{\Gamma}$$

Рассмотрим вторую компоненту невязки в норме (2.3.15)

$$\begin{aligned} \|d_n^2\|_2^2 &= \|(z_{n+1}^2 + z_n^1 - 2z_n^2 + \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1} (A_1 + A_2) z_n^2)/\Delta - \Delta R_2^{-1} R_1^{-1} (F^n(I(\{z_l^2\}_n)))\|_2^2 = \\ &= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} + \tilde{z}_{n-1} - 2\tilde{z}_n}{\Delta} + \Delta R_2^{-1} R_1^{-1} (A_1 + A_2) \tilde{z}_n - \Delta R_2^{-1} R_1^{-1} (F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n))) \right\|_2^2 = \\ &= \Delta^2 \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + R_2^{-1} R_1^{-1} (A_1 + A_2) \tilde{z}_n - R_2^{-1} R_1^{-1} (F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n))) \right\|_2^2. \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \|d_n^2\|_2^2 &= \Delta^2 \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + R_2^{-1}R_1^{-1}(A_1 + A_2)\tilde{z}_n - R_2^{-1}R_1^{-1}(F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n))) \right\|_2^2 = \\ &= \Delta^2 \|R_2^{-1}R_1^{-1}\|_2^2 \left\| R_1R_2 \left( \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + (A_1 + A_2)\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2. \end{aligned} \quad (2.5.35)$$

С учетом определения операторов  $R_1$  и  $R_2$  (2.3.12)

$$\begin{aligned} &\left\| R_1R_2 \left( \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + (A_1 + A_2)\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2 = \\ &= \left\| (E + \Delta^2 s A_1)(E + \Delta^2 s A_2) \left( \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} \right) + (A_1 + A_2)\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2 = \\ &= \left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + s(A_1 + A_2)(\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}) + \right. \\ &\quad \left. + \Delta^2 s^2 A_1 A_2 (\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}) + (A_1 + A_2)\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2 \end{aligned}$$

Тогда по определению нормы (2.3.15)

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}}{\Delta^2} + s(A_1 + A_2)(\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}) + \Delta^2 s^2 A_1 A_2 (\tilde{z}_{n+1} - 2\tilde{z}_n + \tilde{z}_{n-1}) + \right. \\ &\quad \left. + (A_1 + A_2)\tilde{z}_n - F^n(I(\{\tilde{z}_l\}_n)) \right\|_2^2 = \\ &= \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{k=1}^{N_2-1} \left| \frac{u(x_i, y_k, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_n) + u(x_i, y_k, t_{n-1})}{\Delta^2} - \right. \\ &\quad - sa^2 \left( \frac{u(x_{i+1}, y_k, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, y_k, t_{n+1})}{h_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u(x_i, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{n+1})}{h_2^2} \right) - \\ &\quad - (1 - 2s)a^2 \left( \frac{u(x_{i+1}, y_k, t_n) - 2u(x_i, y_k, t_n) + u(x_{i-1}, y_k, t_n)}{h_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u(x_i, y_{k+1}, t_n) - 2u(x_i, y_k, t_n) + u(x_i, y_{k-1}, t_n)}{h_2^2} \right) - \\ &\quad - sa^2 \left( \frac{u(x_{i+1}, y_k, t_{n-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, y_k, t_{n-1})}{h_1^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{u(x_i, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n-1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{n-1})}{h_2^2} \right) + \\ &\quad + \frac{\Delta^2 s^2 a^4}{h_1^2 h_2^2} \left( \left( u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_{n+1}) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_{n+1}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - 2 \left( u(x_i, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n+1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{n+1}) \right) + \left( u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_{i-1}, y_k, t_{n+1}) + \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{n+1})) - 2(u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_n) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_n) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_n)) + \\
& + 4(u(x_i, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_n) + u(x_i, y_{k-1}, t_n)) - 2(u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_{i-1}, y_k, t_n) + \\
& + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_n)) + (u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_{n-1}) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_{n-1})) - \\
& - 2(u(x_i, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n-1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{n-1})) + \\
& + (u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_{i-1}, y_k, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{n-1}))) - F_{i,k}^n(I(\{u_l^{i,k}\}^n)) \Big| h_1 h_2. \quad (2.5.36)
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое под знаком суммы в (2.5.36), используя предположения теоремы

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{u(x_i, y_k, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_n) + u(x_i, y_k, t_{n-1})}{\Delta^2} - \right. \\
& - sa^2 \left( \frac{u(x_{i+1}, y_k, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, y_k, t_{n+1})}{h_1^2} + \right. \\
& + \left. \frac{u(x_i, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n+1}) + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{n+1})}{h_2^2} \right) - \\
& - (1-2s)a^2 \left( \frac{u(x_{i+1}, y_k, t_n) - 2u(x_i, y_k, t_n) + u(x_{i-1}, y_k, t_n)}{h_1^2} + \right. \\
& + \left. \frac{u(x_i, y_{k+1}, t_n) - 2u(x_i, y_k, t_n) + u(x_i, y_{k-1}, t_n)}{h_2^2} \right) - \\
& - sa^2 \left( \frac{u(x_{i+1}, y_k, t_{n-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, y_k, t_{n-1})}{h_1^2} + \right. \\
& + \left. \frac{u(x_i, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n-1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{n-1})}{h_2^2} \right) + \\
& + \frac{\Delta^2 s^2 a^4}{h_1^2 h_2^2} \left( (u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_{n+1}) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_{n+1})) - \right. \\
& - 2(u(x_i, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n+1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{n+1})) + (u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_{i-1}, y_k, t_{n+1}) + \\
& + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{n+1})) - 2(u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_n) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_n) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_n)) + \\
& + 4(u(x_i, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_i, y_k, t_n) + u(x_i, y_{k-1}, t_n)) - 2(u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{n+1}) - 2u(x_{i-1}, y_k, t_n) + \\
& + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_n)) + (u(x_{i+1}, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_{i+1}, y_k, t_{n-1}) + u(x_{i+1}, y_{k-1}, t_{n-1})) - \\
& - 2(u(x_i, y_{k+1}, t_{n-1}) - 2u(x_i, y_k, t_{n-1}) + u(x_i, y_{k-1}, t_{n-1})) + (u(x_{i-1}, y_{k+1}, t_{n-1}) - \\
& - 2u(x_{i-1}, y_k, t_{n-1}) + u(x_{i-1}, y_{k-1}, t_{n-1}))) - F_{i,k}^n(I(\{u_l^{i,k}\}^n)) \pm F_{i,k}^n(u_{t_n}(x_i, y_k, \cdot)) \Big| \leq \\
& \leq |\psi_{i,k}^n| + |F_{i,k}^n(u_{t_n}(x_i, y_k, \cdot)) - F_{i,k}^n(I(\{u_l^{i,k}\}^n))| \leq \\
& \leq C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + L_F \|u_{t_n}(x_i, \cdot) - I(\{u_l^{i,k}\}^n)\|_Q \leq C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + L_F C_2 \Delta^{p_0}. \quad (2.5.37)
\end{aligned}$$

В результате из (2.5.35), (2.5.36), (2.5.37) получаем

$$\begin{aligned} \|d_n^2\|_2^2 &\leq \Delta^2 \|R_2^{-1} R_1^{-1}\|_2^2 \left( \sum_{i=1}^{N_1-1} \sum_{k=1}^{N_2-1} (C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + L_F C_2 \Delta^{p_0})^2 \right) h_1 h_2 = \\ &= \Delta^2 \|R_2^{-1} R_1^{-1}\|_2^2 (N_1 - 1)(N_2 - 1) h_1 h_2 (C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}) + L_F C_2 \Delta^{p_0})^2 \leq \\ &\leq \Delta^2 (C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 h_1^{p_2} + C_4 h_2^{p_3})^2 = \\ &= \Delta^2 (C_3 \Delta^{\min\{p_1, p_0\}} + C_4 (a\Delta/\sqrt{\sigma_1})^{p_2} + C_4 (a\Delta/\sqrt{\sigma_2})^{p_3})^2, \end{aligned}$$

где  $C_3 = \|R_2^{-1} R_1^{-1}\|_2 (\sqrt{XY} (C_1 + L_F C_2))$ ,  $C_4 = \|R_2^{-1} R_1^{-1}\|_2 \sqrt{XY} C_1$ .

То есть справедлива оценка

$$\|d_n^2\|_2 \leq C_5 \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}+1},$$

где  $C_5 = C_3 + C_4 (a/\sqrt{\sigma_1})^{p_2} + C_4 (a/\sqrt{\sigma_2})^{p_3}$ .

Рассмотрим вторую компоненту невязки в норме (2.3.16) и воспользуемся леммой 2

$$\|d_n^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2 \leq \frac{D}{\Delta} (\|d_n\|_2 + \|d_{n-1}\|_2) \leq \frac{D}{\Delta} (2C_5 \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}+1}).$$

В результате получаем:

$$\|d_n\|_{\tilde{\Gamma}} \leq C \Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3\}},$$

где  $C = 2C_5 D$ . □

Исследуем устойчивость схемы (2.5.34). Рассмотрим однородную разностную схему, соответствующую (2.3.17):

$$R_1 R_2 (\tilde{\gamma}_{j+1} - 2\tilde{\gamma}_j + \tilde{\gamma}_{j-1}) + \Delta^2 (A_1 + A_2) \tilde{\gamma}_j = 0. \quad (2.5.38)$$

В [29, с. 353] доказано, что если для схемы выполняется условие (2.3.14), то при любых начальных условиях для решения (2.5.38) для всех  $n$  справедливо неравенство

$$\|\tilde{\gamma}_{n+1}\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \|\tilde{\gamma}_n\|_{\tilde{\Gamma}}. \quad (2.5.39)$$

Теперь рассмотрим однородную схему, соответствующую (2.5.34):

$$\gamma_{j+1} = S \gamma_j. \quad (2.5.40)$$

Из неравенства (2.5.39) следует, что

$$\|\gamma_{n+1}^1\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \|\gamma_n^1\|_{\tilde{\Gamma}},$$

$$\|\gamma_{n+1}^2\|_{\tilde{\Gamma}} \leq \|\gamma_n^2\|_{\tilde{\Gamma}}.$$

Тогда по определению нормы (2.5.33) в пространстве:

$$\|\gamma_{n+1}\|_{\tilde{\Gamma}}^2 = \|\gamma_{n+1}^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma_{n+1}^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2 \leq \|\gamma_n^1\|_{\tilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma_n^2\|_{\tilde{\Gamma}}^2 = \|\gamma_n\|_{\tilde{\Gamma}}^2.$$

Отсюда

$$\|\gamma_{n+1}\|_{\Gamma} \leq \|\gamma_n\|_{\Gamma},$$

что означает выполнение следующей оценки для уравнения (2.5.40):

$$\|S\|_{\Gamma} \leq 1.$$

Следовательно, схема (2.5.34) устойчива, если выполнено условие (2.3.14).

Перепишем операторное условие устойчивости (2.3.14) в виде

$$E + \Delta^2 \left( s - \frac{1}{4} \right) (A_1 + A_2) + \Delta^4 s^2 A_1 A_2 > 0.$$

Это условие означает, что для любого ненулевого  $\tilde{\gamma} \in \tilde{\Gamma}$

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) + \Delta^2 \left( s - \frac{1}{4} \right) ((A_1 + A_2)\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) + \Delta^4 s^2 (A_1 A_2 \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) > 0.$$

В силу положительной определенности оператора  $A_1 A_2$  неравенство будет выполнено, если потребовать

$$(\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) + \Delta^2 \left( s - \frac{1}{4} \right) ((A_1 + A_2)\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) > 0. \quad (2.5.41)$$

Наибольшие собственные значения операторов  $A_1$  (2.3.7) и  $A_2$  (2.3.8) оцениваются сверху величинами  $4a^2/h_1^2$  и  $4a^2/h_2^2$  соответственно [29]. Следовательно

$$\begin{aligned} (A_1 \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) &< \frac{4a^2}{h_1^2} (\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}), \\ (A_2 \tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) &< \frac{4a^2}{h_2^2} (\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}), \\ (\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}) &> \frac{h_1^2 h_2^2}{4a^2(h_1^2 + h_2^2)} ((A_1 + A_2)\tilde{\gamma}, \tilde{\gamma}). \end{aligned}$$

Значит, неравенство (2.5.41) будет выполнено, если

$$\frac{h_1^2 h_2^2}{4a^2(h_1^2 + h_2^2)} + \Delta^2 \left( s - \frac{1}{4} \right) > 0.$$

Таким образом, схема устойчива, если

$$(1 - 4s)(\sigma_1 + \sigma_2) < 1, \quad (2.5.42)$$

где  $\sigma_1 = a^2 \Delta^2 / h_1^2$ ,  $\sigma_2 = a^2 \Delta^2 / h_2^2$ .

Например, если  $s = 0$  схема устойчива, если

$$(\sigma_1 + \sigma_2) < 1,$$

а при  $s \geq 1/4$  условие устойчивости выполняется при любом соотношении шагов.

Используя теорему 2, получаем следующее утверждение.

**Теорема 8.** Пусть выполнено условие устойчивости (2.5.42), невязка без интерполяции (2.4.19) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$ , функционалы  $F_j^{i,k}$  липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $p_0$  на точном решении, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_4} + h_1^{p_5} + h_2^{p_6}$ ,  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  зафиксированы, тогда метод (2.3.17) сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_4\}} + h_1^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_5\}} + h_2^{\min\{p_0, p_1, p_2, p_3, p_6\}}$ .

С учетом теоремы 5 получаем следующее следствие.

**Следствие 2.** Если для точного решения задачи (2.1.1)–(2.1.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,  $F_j^{i,k}$  задается соотношением (2.4.20), применяется кусочно-линейная интерполяция (2.2.4), выполнено условие устойчивости (2.5.42),  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  зафиксированы, тогда метод (2.3.17) сходится с порядком  $\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2$ .

## 2.6 Примеры численных расчетов

**Пример 4.** Рассмотрим уравнение с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) - (\cos t + \cos(t - \tau))(e^x + y^2) - \\ - \cos t(e^x + 2) - u(x, y, t - \tau): 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \quad (2.6.43)$$

при  $\tau = 1/2$  с начальными условиями

$$u(x, y, t) = (e^x + y^2) \cos t: -1/2 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, y, t) = (1 + y^2) \cos t, u(1, y, t) = (e + y^2) \cos t: 0 \leq t \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$u(x, 0, t) = e^x \cos t, u(x, 1, t) = (e^x + 1) \cos t: 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, y, t) = (e^x + y^2) \cos t$ .

На рисунке 2.1 изображено приближенное решение этого уравнения, полученное методом (2.3.17), для которого  $F_j^{i,k}(v(\cdot)) = f(t_j, x_i, y_k, u_j^{i,k}, v_j^{i,k}(\cdot))$ , с кусочно-линейной интерполяцией при  $s = 1$ ,  $t = 3/4$  с числом точек разбиения по  $x$  и  $y$  равным 20, по  $t$  равным 80. На рисунках 2.2, 2.3 и 2.4 приведена разность между точным и приближенным решением при разных соотношениях шагов.

В табл. 4 – 6 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (2.6.43), полученные при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах. Нормы

разностей во всех примерах этой главы вычислены по формуле:

$$\|U\|_1 = \max_{0 \leq j \leq M} \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} |u(t_j, x_i, y_k) - u_j^{i,k}| h_1 h_2. \quad (2.6.44)$$

Т а б л и ц а 4

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.43) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0625$		
	$N_1 = 10$	$N_1 = 20$	$N_1 = 40$
	$N_2 = 10$	$N_2 = 20$	$N_2 = 40$
	$M=40$	$M=80$	$M=160$
$s=0$	$8.5621 \cdot 10^{-5}$	$2.1939 \cdot 10^{-5}$	$5.5220 \cdot 10^{-6}$
$s=0.5$	$1.7938 \cdot 10^{-4}$	$4.7798 \cdot 10^{-5}$	$1.2340 \cdot 10^{-5}$
$s=1$	$5.8888 \cdot 10^{-5}$	$1.4816 \cdot 10^{-5}$	$3.7174 \cdot 10^{-6}$

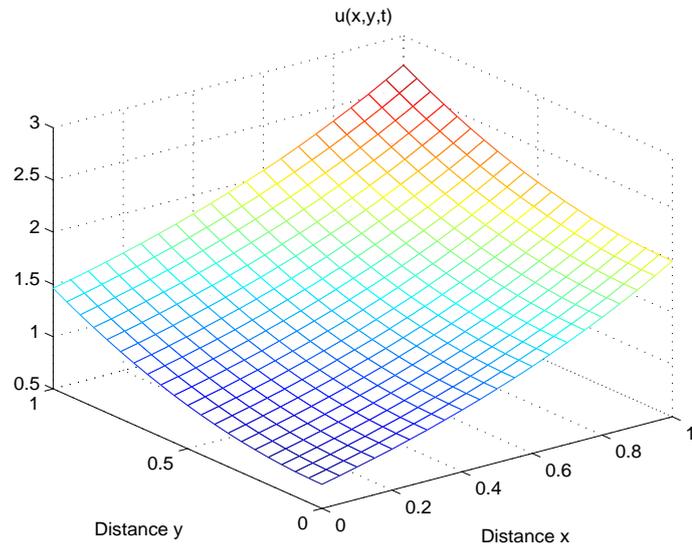
Т а б л и ц а 5

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.43) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2500$		
	$N_1 = 10$	$N_1 = 20$	$N_1 = 40$
	$N_2 = 10$	$N_2 = 20$	$N_2 = 40$
	$M=20$	$M=40$	$M=80$
$s=0$	$9.6232 \cdot 10^{-5}$	$3.2808 \cdot 10^{-5}$	$8.2368 \cdot 10^{-6}$
$s=0.5$	$9.8328 \cdot 10^{-4}$	$2.5571 \cdot 10^{-4}$	$6.5643 \cdot 10^{-5}$
$s=1$	$5.0136 \cdot 10^{-4}$	$1.2446 \cdot 10^{-4}$	$3.1165 \cdot 10^{-5}$

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.43) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 1.21$		
	$N_1 = 22$	$N_1 = 44$	$N_1 = 88$
	$N_2 = 22$	$N_2 = 44$	$N_2 = 88$
	$M=20$	$M=40$	$M=80$
$s=0$	$9.5419 \cdot 10^5$	$2.6419 \cdot 10^{21}$	$2.7090 \cdot 10^{54}$
$s=0.5$	$1.1753 \cdot 10^{-3}$	$2.8981 \cdot 10^{-4}$	$7.0819 \cdot 10^{-5}$
$s=1$	$5.8232 \cdot 10^{-4}$	$1.4236 \cdot 10^{-4}$	$3.5531 \cdot 10^{-5}$

Рис. 2.1:  $s = 1/2$ ,  $N_1 = 20$ ,  $N_2 = 20$ ,  $M = 80$ 

**Пример 5.** Рассмотрим уравнение с переменным запаздыванием:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) - a^2 t^2 (e^x - \cos y) + 2(e^x + \cos y) - (t - \tau(t))^2 (e^x + \cos y) + u(x, y, t - \tau(t)): 0 \leq t \leq 2, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \quad (2.6.45)$$

при  $\tau(t) = t^2$ ,  $a = 1$  с начальными условиями

$$u(x, y, t) = (e^x + \cos y)t^2: -2 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, y, t) = (1 + \cos y)t^2, u(1, y, t) = (e + \cos y)t^2: 0 \leq t \leq 2, 0 \leq y \leq 1;$$

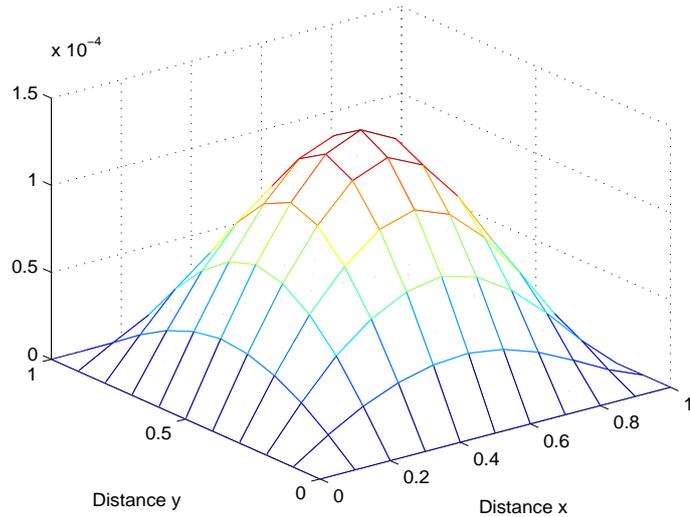


Рис. 2.2:  $s = 1/2$ ,  $N_1 = 10$ ,  $N_2 = 10$ ,  $M = 40$

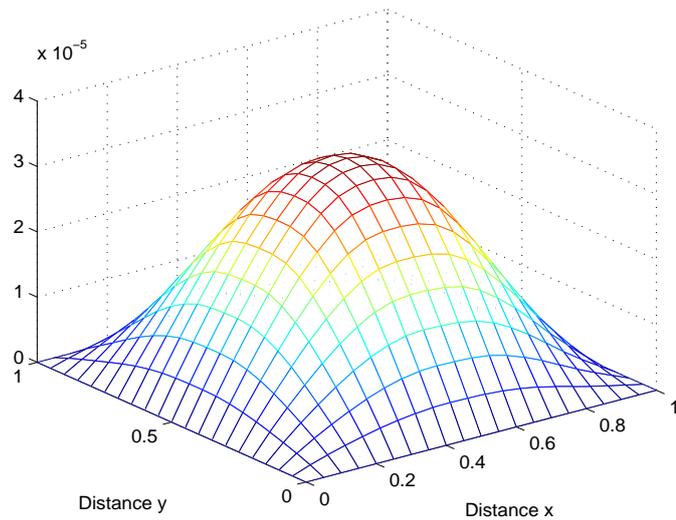


Рис. 2.3:  $s = 1/2$ ,  $N_1 = 20$ ,  $N_2 = 20$ ,  $M = 80$

$$u(x, 0, t) = (e^x + 1)t^2, \quad u(x, 1, t) = (e^x + \cos(1))t^2: \quad 0 \leq t \leq 2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, y, t) = (e^x + \cos y)t^2$ .

На рисунке 2.5 изображено приближенное решение этого уравнения, полученное методом (2.3.17), для которого  $F_j^{i,k}(v(\cdot)) = f(t_j, x_i, y_k, u_j^{i,k}, v_j^{i,k}(\cdot))$ , с кусочно-линейной интерполяцией при  $s = 1/2$ ,  $t = 3/2$  с числом точек разбиения по  $x$  и  $y$  равным 20, по  $t$  равным 160. На рисунках 2.6 и 2.7 приведена разность между точным и приближенным решением при разных соотношениях шагов.

В табл. 7 – 9 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (2.6.45), полученные при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах.

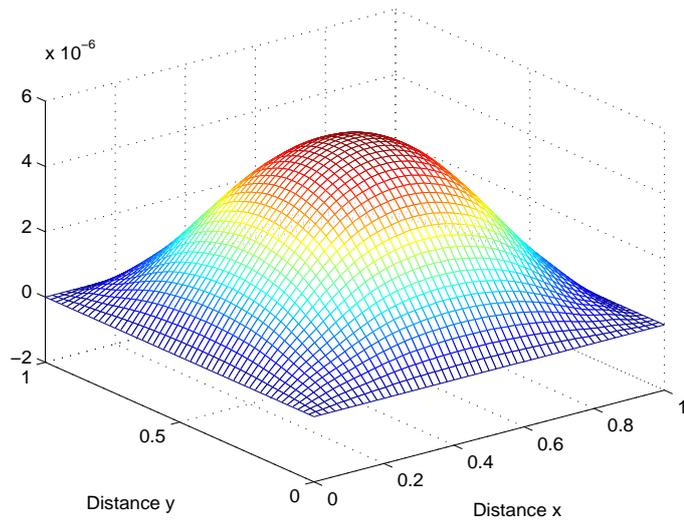


Рис. 2.4:  $s = 1/2$ ,  $N_1 = 50$ ,  $N_2 = 50$ ,  $M = 200$

Т а б л и ц а 7

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.45) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0625$		
	$N_1 = 10$	$N_1 = 20$	$N_1 = 40$
	$N_2 = 10$	$N_2 = 20$	$N_2 = 40$
	$M=80$	$M=160$	$M=320$
$s=0$	$8.3202 \cdot 10^{-5}$	$2.3052 \cdot 10^{-5}$	$5.6631 \cdot 10^{-6}$
$s=0.5$	$4.8059 \cdot 10^{-5}$	$1.5310 \cdot 10^{-5}$	$4.3556 \cdot 10^{-6}$
$s=1$	$2.0008 \cdot 10^{-5}$	$7.3293 \cdot 10^{-6}$	$2.2353 \cdot 10^{-6}$

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.45) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2500$		
	$N_1 = 10$	$N_1 = 20$	$N_1 = 40$
	$N_2 = 10$	$N_2 = 20$	$N_2 = 40$
	$M=40$	$M=80$	$M=160$
$s=0$	$3.9016 \cdot 10^{-4}$	$1.0838 \cdot 10^{-4}$	$2.7385 \cdot 10^{-5}$
$s=0.5$	$1.7364 \cdot 10^{-4}$	$5.6175 \cdot 10^{-5}$	$1.4895 \cdot 10^{-5}$
$s=1$	$1.2984 \cdot 10^{-4}$	$4.0202 \cdot 10^{-5}$	$9.5316 \cdot 10^{-6}$

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.45) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 1.21$		
	$N_1 = 22$	$N_1 = 44$	$N_1 = 88$
	$N_2 = 22$	$N_2 = 44$	$N_2 = 88$
	$M=40$	$M=80$	$M=160$
$s=0$	$9.6643 \cdot 10^4$	$3.6337 \cdot 10^{20}$	$4.1829 \cdot 10^{53}$
$s=0.5$	$2.1391 \cdot 10^{-4}$	$6.2654 \cdot 10^{-5}$	$1.6108 \cdot 10^{-5}$
$s=1$	$1.6780 \cdot 10^{-4}$	$4.8492 \cdot 10^{-5}$	$1.0944 \cdot 10^{-5}$

**Пример 6.** Рассмотрим уравнение с распределенным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, y, t) = a^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, y, t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x, y, t) \right) - a^2(\pi^2(x^2 + y^2) + 4) \sin \pi t + \\ + \frac{1}{\pi}(x^2 + y^2)(\cos \pi t - 1) + \int_{-2t}^0 u(x, y, t + s) ds: 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1 \end{aligned} \quad (2.6.46)$$

при  $a = 1$  с начальными условиями

$$u(x, y, t) = (x^2 + y^2) \cos \pi t: -1 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, y, t) = y^2 \cos \pi t, u(1, y, t) = (1 + y^2) \cos \pi t: 0 \leq t \leq 1, 0 \leq y \leq 1;$$

$$u(x, 0, t) = x^2 \cos \pi t, u(x, 1, t) = (x^2 + 1) \cos \pi t: 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1.$$

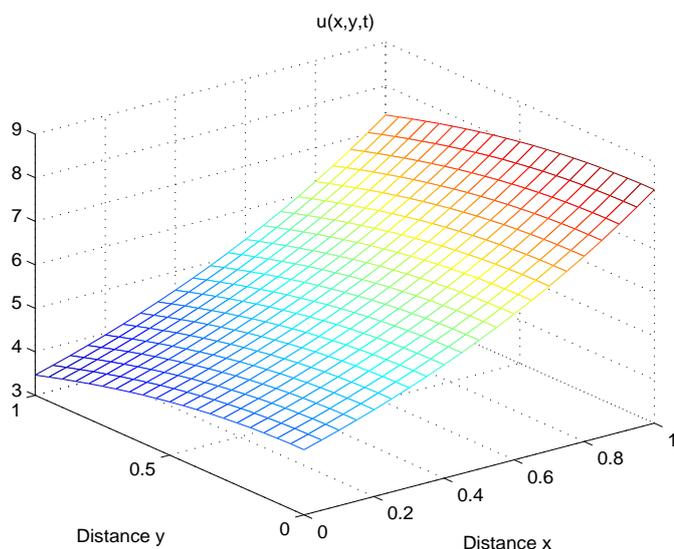


Рис. 2.5:  $s = 1/2$ ,  $N_1 = 20$ ,  $N_2 = 20$ ,  $M = 160$

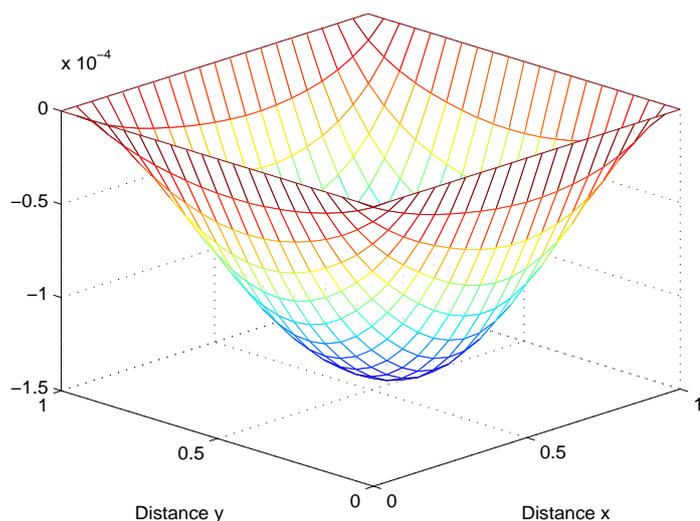


Рис. 2.6:  $s = 1/2$ ,  $N_1 = 20$ ,  $N_2 = 20$ ,  $M = 160$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, y, t) = (x^2 + y^2) \cos \pi t$ .

На рисунке 2.8 изображено приближенное решение этого уравнения, полученное методом (2.3.17), для которого  $F_j^{i,k}(v(\cdot)) = f(t_j, x_i, y_k, u_j^{i,k}, v_j^{i,k}(\cdot))$ , с кусочно-линейной интерполяцией при  $s = 1$ ,  $t = 0.9$  с числом точек разбиения по  $x$  и  $y$  равным 20, по  $t$  равным 40. На рисунках 2.9 и 2.10 приведена разность между точным и приближенным решением при разных соотношениях шагов.

В табл. 10 – 12 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (2.6.46), полученные при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах.

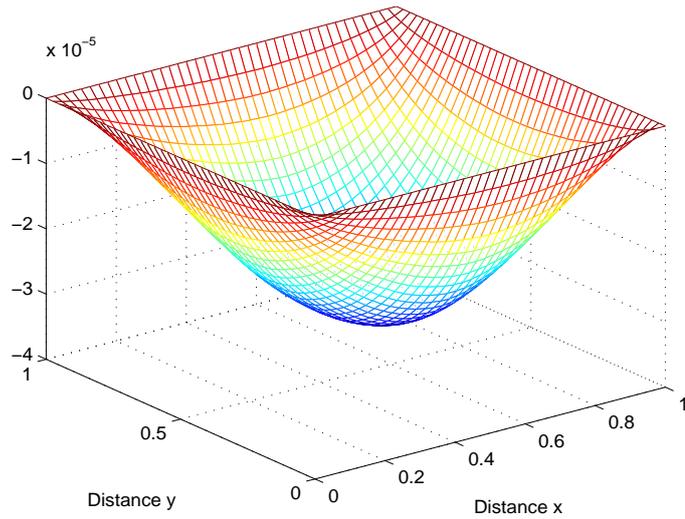


Рис. 2.7:  $s = 1/2$ ,  $N_1 = 40$ ,  $N_2 = 40$ ,  $M = 320$

Т а б л и ц а 10

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.46) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.0625$		
	$N_1 = 10$	$N_1 = 20$	$N_1 = 40$
	$N_2 = 10$	$N_2 = 20$	$N_2 = 40$
	$M=40$	$M=80$	$M=160$
$s=0$	$1.4740 \cdot 10^{-4}$	$3.7536 \cdot 10^{-5}$	$9.4095 \cdot 10^{-6}$
$s=0.5$	$1.0419 \cdot 10^{-3}$	$2.6767 \cdot 10^{-4}$	$6.7498 \cdot 10^{-5}$
$s=1$	$1.6325 \cdot 10^{-3}$	$4.0080 \cdot 10^{-4}$	$1.0071 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 11

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.46) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 0.2500$		
	$N_1 = 10$	$N_1 = 20$	$N_1 = 40$
	$N_2 = 10$	$N_2 = 20$	$N_2 = 40$
	$M=20$	$M=40$	$M=80$
$s=0$	$5.9720 \cdot 10^{-4}$	$1.5108 \cdot 10^{-4}$	$3.7765 \cdot 10^{-5}$
$s=0.5$	$4.2043 \cdot 10^{-3}$	$1.1603 \cdot 10^{-3}$	$2.6995 \cdot 10^{-4}$
$s=1$	$6.3268 \cdot 10^{-3}$	$1.6394 \cdot 10^{-3}$	$4.0290 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 12

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (2.6.46) для метода сеток  
при разных значениях параметра  $s$  при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma_1 = \sigma_2 = 1.21$		
	$N_1 = 22$	$N_1 = 44$	$N_1 = 88$
	$N_2 = 22$	$N_2 = 44$	$N_2 = 88$
	$M=20$	$M=40$	$M=80$
$s=0$	$2.1697 \cdot 10^6$	$2.9373 \cdot 10^{21}$	$1.4579 \cdot 10^{54}$
$s=0.5$	$4.3368 \cdot 10^{-3}$	$1.1004 \cdot 10^{-3}$	$2.7085 \cdot 10^{-4}$
$s=1$	$6.4326 \cdot 10^{-3}$	$1.6456 \cdot 10^{-3}$	$4.0345 \cdot 10^{-4}$

В каждом из рассмотренных примеров при фиксированных  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  приближенные решения сходятся к точным. Исключения составляют лишь случаи, в которых условие устойчивости (2.5.42) не выполняется, тогда погрешности резко возрастают. Это подтверждает выводы теоремы 8 и следствия 2.

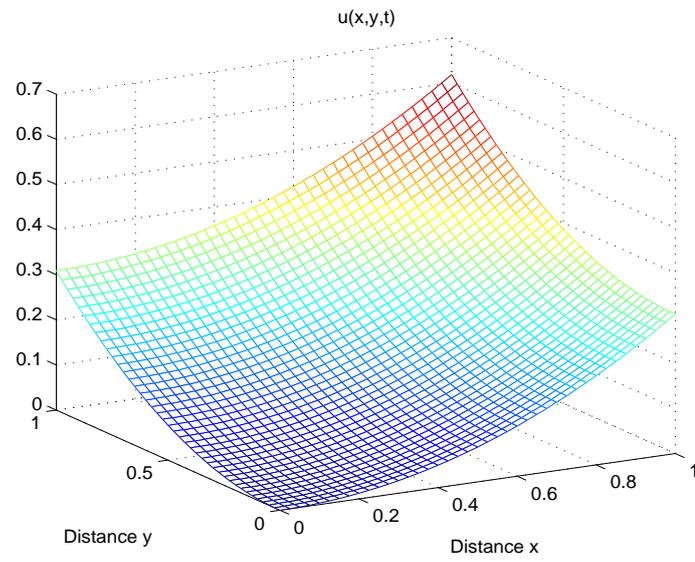


Рис. 2.8:  $s = 1$ ,  $N_1 = 20$ ,  $N_2 = 20$ ,  $M = 40$

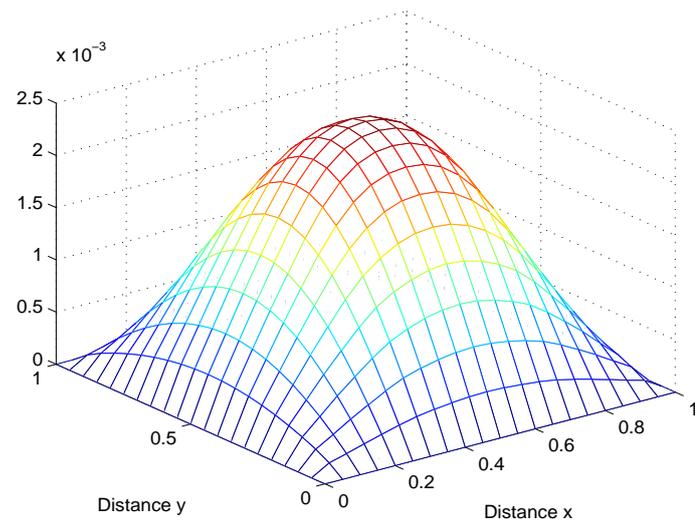


Рис. 2.9:  $s = 1$ ,  $N_1 = 20$ ,  $N_2 = 20$ ,  $M = 40$

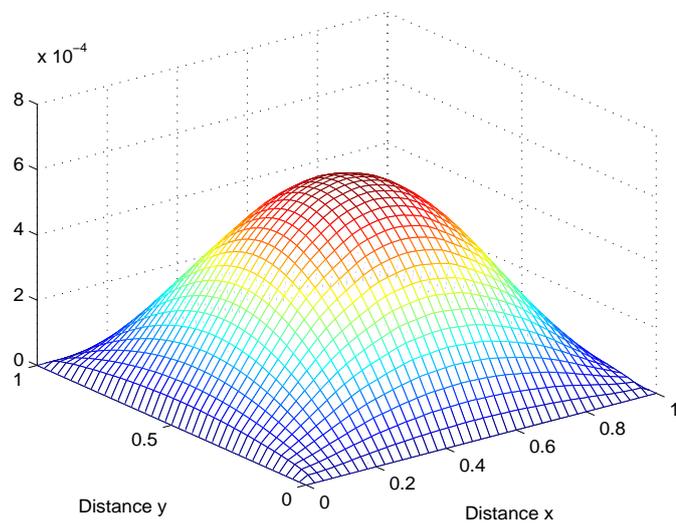


Рис. 2.10:  $s = 1$ ,  $N_1 = 40$ ,  $N_2 = 40$ ,  $M = 80$

## Глава 3

# Системы уравнений акустики с последствием

### 3.1 Постановка задачи

Уравнение гиперболического без запаздывания типа можно заменить эквивалентной ему системой уравнений акустики [7]. Однако в случае уравнений с запаздыванием такая замена не будет эквивалентной. Поэтому в данной главе рассматривается система уравнений акустики как самостоятельный объект, без привязки к уравнениям гиперболического типа.

Рассмотрим систему уравнений акустики с эффектом наследственности

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial w}{\partial x}(x, t): t_0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X, \\ \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + f(x, t, u(x, t), u_t(x, \cdot))\end{aligned}\quad (3.1.1)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = g_1(t), u(X, t) = g_2(t), w(0, t) = g_3(t), w(X, t) = g_4(t): t_0 \leq t \leq T \quad (3.1.2)$$

и начальными условиями

$$u(x, t) = \varphi_1(x, t): 0 \leq x \leq X, t_0 - \tau \leq t \leq t_0; w(x, t_0) = \varphi_2(x): 0 \leq x \leq X. \quad (3.1.3)$$

Здесь  $x, t$  — независимые переменные;  $u(x, t), w(x, t)$  — искомые функции;  $u_t(x, \cdot) = \{u(x, t + s), -\tau \leq s < 0\}$  — функция-предыстория искомой функции  $u$  к моменту  $t$ ;  $\tau$  — величина запаздывания;  $f(t, x, u, u_t(x, \cdot))$  — функционал, определенный на  $[t_0, T] \times [0, X] \times R \times Q[-\tau, 0)$ . Требуется найти функции  $u(x, t), w(x, t)$ , определенные в области  $t_0 \leq t \leq T, 0 \leq x \leq X$ , удовлетворяющие системе (3.1.1), граничным (3.1.2) и начальным условиям (3.1.3). Будем предполагать, что задача имеет единственное решение.

## 3.2 Разностный метод

Разобьем отрезок  $[0, X]$  на части с шагом  $h = X/N$ , где  $N$  – некоторое целое число. Введем точки  $x_i = ih$ ,  $i = 0, 1, \dots, N$ . Разобьем отрезок  $[t_0, T]$  на части с шагом  $\Delta$ ,  $t_j = t_0 + j\Delta$ ,  $j = -m, \dots, M$ . Обозначим приближение точного решения системы

$$\tilde{u}(x_i, t_j) = (u(x_i, t_j), w(x_i + h/2, t_j))' \text{ через } \tilde{u}_j^i = (u_j^i, w_j^i)'. \quad (3.2.1)$$

$$\|\tilde{u}_j^i\|_2 = \sqrt{(u_j^i)^2 + (w_j^i)^2}. \quad (3.2.1)$$

Для системы уравнений акустики без запаздывания можно построить метод, имеющий порядок  $h^2 + \Delta^2$  [7, с. 430]. Для построения аналогичного метода для систем уравнений акустики с последствием потребуется вычислять  $f$  в полущелых узлах по переменной  $x$ . Это требование приводит к необходимости расширения понятия оператора интерполяции-экстраполяции.

Оператором двойной интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории назовем отображение:  $I: (\{u_l^i\}_j, \{u_l^{i+1}\}_j) \rightarrow v_j^{i+1/2}(\cdot) \in Q[-\tau, \Delta]$ .

Будем говорить, что оператор двойной интерполяции-экстраполяции имеет порядок  $h^{p_1} + \Delta^{p_2}$  на точном решении, если существуют константы  $C_1$  и  $C_2$ , такие, что для всех  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$  и  $t \in [t_j - \tau, t_{j+1}]$  выполняется неравенство

$$|v_j^{i+1/2}(t) - u(x_i + h/2, t)| \leq C_1 \left( \max_{j-m \leq l \leq j} |u_l^{i+1} - u(x_{i+1}, t_l)| + \right. \\ \left. + \max_{j-m \leq l \leq j} |u_l^i - u(x_i, t_l)| \right) + C_2(h^{p_1} + \Delta^{p_2}).$$

Для двух дискретных предысторий

$$\{u_l^i\}_j = \{u_l^i: j - m \leq l \leq j\}, \\ \{u_l^{i+1}\}_j = \{u_l^{i+1}: j - m \leq l \leq j\}$$

определим средние точки

$$\{u_l^{i+1/2}\}_j = \left\{ \frac{u_l^{i+1} + u_l^i}{2}: j - m \leq l \leq j \right\}. \quad (3.2.2)$$

Проведем через эти точки кусочно-линейную интерполяцию

$$v_j^{i+1/2}(\xi) = \frac{1}{\Delta}((t_l - t_j - \xi)u_{l-1}^{i+1/2} + (t_j + \xi - t_{l-1})u_l^{i+1/2}), \quad (3.2.3)$$

$$t_{l-1} \leq t_j + \xi \leq t_l, \quad -\tau \leq \xi \leq 0$$

с экстраполяцией продолжением

$$v_j^{i+1/2}(\xi) = \frac{1}{\Delta}((-\xi)u_{j-1}^{i+1/2} + (\Delta + \xi)u_j^{i+1/2}), \quad t_j \leq t_j + \xi \leq t_{j+1}, \quad \xi > 0. \quad (3.2.4)$$

**Теорема 9.** *Предположим, что точное решение задачи (3.1.1) имеет непрерывные производные вплоть до второго порядка включительно, тогда оператор двойной интерполяции-экстраполяции  $I$  со значениями (3.2.3)–(3.2.4) имеет порядок  $h^2 + \Delta^2$ .*

*Доказательство.* Зафиксируем момент времени  $t \in [t_{l-1}, t_l]$ ,  $j - m + 1 \leq l \leq j$ . Тогда

$$|v_j^{i+1/2}(t) - u(x_i + h/2, t)| \leq |v_j^{i+1/2}(t) - \eta_j^{i+1/2}(t)| + |\eta_j^{i+1/2}(t) - u(x_i + h/2, t)|, \quad (3.2.5)$$

где

$$\begin{aligned} \eta_j^{i+1/2}(t) &= \frac{1}{\Delta}(t_l - t)\nu_{l-1}^{i+1/2} + \frac{1}{\Delta}(t - t_l)(\nu_l^{i+1/2}), \\ \nu_l^{i+1/2} &= \frac{u(x_{i+1}, t_l) + u(x_i, t_l)}{2}, \nu_{l-1}^{i+1/2} = \frac{u(x_{i+1}, t_{l-1}) + u(x_i, t_{l-1})}{2} \end{aligned} \quad (3.2.6)$$

Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (3.2.5), используя (3.2.3) и (3.2.6)

$$\begin{aligned} |v_j^{i+1/2}(t) - \eta_j^{i+1/2}(t)| &\leq \left| \frac{1}{\Delta}(t_l - t)(u_{l-1}^{i+1/2} - \nu_{l-1}^{i+1/2}) + \frac{1}{\Delta}(t - t_{l-1})(u_l^{i+1/2} - \nu_l^{i+1/2}) \right| \leq \\ &\leq |u_{l-1}^{i+1/2} - \nu_{l-1}^{i+1/2}| + |u_l^{i+1/2} - \nu_l^{i+1/2}| = \\ &= \left| \frac{u_{l-1}^{i+1} + u_{l-1}^i}{2} - \frac{u(x_{i+1}, t_{l-1}) + u(x_i, t_{l-1})}{2} \right| + \left| \frac{u_l^{i+1} + u_l^i}{2} - \frac{u(x_{i+1}, t_l) + u(x_i, t_l)}{2} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (|u_{l-1}^{i+1} - u(x_{i+1}, t_{l-1})| + |u_{l-1}^i - u(x_i, t_{l-1})| + |u_l^{i+1} - u(x_{i+1}, t_l)| + |u_l^i - u(x_i, t_l)|) \leq \\ &\leq \max\{|u_{l-1}^{i+1} - u(x_{i+1}, t_{l-1})|, |u_l^{i+1} - u(x_{i+1}, t_l)|\} + \max\{|u_{l-1}^i - u(x_i, t_{l-1})|, |u_l^i - u(x_i, t_l)|\}. \end{aligned}$$

Оценим второе слагаемое в правой части неравенства (3.2.5)

$$|\eta_j^{i+1/2}(t) - u(x_i + h/2, t)| \leq |\eta_j^{i+1/2}(t) - \zeta(x_i + h/2, t)| + |\zeta(x_i + h/2, t) - u(x_i + h/2, t)|, \quad (3.2.7)$$

где

$$\zeta(x_i + h/2, t) = \frac{1}{\Delta}(t_l - t)u(x_i + h/2, t_{l-1}) + \frac{1}{\Delta}(t - t_l)u(x_i + h/2, t_l). \quad (3.2.8)$$

С учетом (3.2.6) и (3.2.8) получаем следующую оценку

$$\begin{aligned} |\eta_j^{i+1/2}(t) - \zeta(x_i + h/2, t)| &\leq \frac{1}{\Delta}(t_l - t)|\nu_{l-1}^{i+1/2} - u(x_i + h/2, t_{l-1})| + \frac{1}{\Delta}(t - t_{l-1})|\nu_l^{i+1/2} - u(x_i + h/2, t_l)| \leq \\ &\leq |\nu_{l-1}^{i+1/2} - u(x_i + h/2, t_{l-1})| + |\nu_l^{i+1/2} - u(x_i + h/2, t_l)| \leq \\ &\leq \left| \frac{u(x_{i+1}, t_{l-1}) + u(x_i, t_{l-1})}{2} - u(x_i + h/2, t_{l-1}) \right| + \\ &+ \left| \frac{u(x_{i+1}, t_l) + u(x_i, t_l)}{2} - u(x_i + h/2, t_l) \right| = O(h^2), \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

так как по формуле Тейлора

$$\begin{aligned} u(x_{i+1}, t_l) &= u(x_i + h/2, t_l) + \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + h/2, t_l) + O(h^2) \\ u(x_i, t_l) &= u(x_i + h/2, t_l) - \frac{h}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_i + h/2, t_l) + O(h^2). \end{aligned}$$

Для второго слагаемого в правой части неравенства (3.2.7) справедливо

$$|\zeta(x_i + h/2, t) - u(x_i + h/2, t)| = O(\Delta^2).$$

В результате получаем

$$|\eta_j^{i+1/2}(t) - u(x_i + h/2, t)| \leq C_2(h^2 + \Delta^2). \quad (3.2.10)$$

Из (3.2.9) и (3.2.10) следует, что для  $t \in [t_j - \tau, t_j]$  справедлива оценка

$$\begin{aligned} |v_j^{i+1/2}(t) - u(x_i + h/2, t)| &\leq C_1 \left( \max_{j-m \leq l \leq j} |u_l^{i+1} - u(x_{i+1}, t_l)| + \right. \\ &\quad \left. + \max_{j-m \leq l \leq j} |u_l^i - u(x_i, t_l)| \right) + C_2(h^{p_1} + \Delta^{p_2}). \end{aligned}$$

Случай  $t \in [t_j, t_j + \Delta]$  рассматривается аналогично.  $\square$

**Теорема 10.** *Оператор двойной интерполяции-экстраполяции  $I$  со значениями (3.2.3)–(3.2.4) липшицев.*

*Доказательство.* Пусть заданы две предыстории  $\{u_l^{i+1/2}\}_j$  и  $\{\nu_l^{i+1/2}\}_j$ . Докажем, что

$$\sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v_j^{i+1/2}(t) - \eta_j^{i+1/2}(t)| \leq L \max_{j-m \leq l \leq j} \sqrt{|u_l^i - \nu_l^i|^2 + |u_l^{i+1} - \nu_l^{i+1}|^2},$$

где  $v_j^{i+1/2}(\cdot) = I(\{u_l^{i+1/2}\}_j)$ ,  $\eta_j^{i+1/2}(\cdot) = I(\{\nu_l^{i+1/2}\}_j)$ . Зафиксируем  $t \in [t_{l-1}, t_l]$ ,  $j - m + 1 \leq l \leq j$ .

Тогда, используя (3.2.3) и (3.2.2), получаем

$$\begin{aligned} |v_j^{i+1/2}(t) - \eta_j^{i+1/2}(t)| &= \left| \frac{1}{\Delta}(t_l - t)(u_{l-1}^{i+1/2} - \nu_{l-1}^{i+1/2}) + \frac{1}{\Delta}(t - t_{l-1})(u_l^{i+1/2} - \nu_l^{i+1/2}) \right| \leq \\ &\leq |u_{l-1}^{i+1/2} - \nu_{l-1}^{i+1/2}| + |u_l^{i+1/2} - \nu_l^{i+1/2}| = \left| \frac{u_{l-1}^{i+1} + u_{l-1}^i}{2} - \frac{\nu_{l-1}^{i+1} + \nu_{l-1}^i}{2} \right| + \left| \frac{u_l^{i+1} + u_l^i}{2} - \frac{\nu_l^{i+1} + \nu_l^i}{2} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2} (|u_{l-1}^{i+1} - \nu_{l-1}^{i+1}| + |u_{l-1}^i - \nu_{l-1}^i| + |u_l^{i+1} - \nu_l^{i+1}| + |u_l^i - \nu_l^i|) \leq \\ &\leq \max\{|u_{l-1}^{i+1} - \nu_{l-1}^{i+1}| + |u_{l-1}^i - \nu_{l-1}^i|, |u_l^{i+1} - \nu_l^{i+1}| + |u_l^i - \nu_l^i|\}. \end{aligned}$$

Для случая  $t \in [t_j, t_j + \Delta]$  аналогично получаем

$$\begin{aligned} |v_j^{i+1/2}(t) - \eta_j^{i+1/2}(t)| &= \left| \frac{1}{\Delta}(t_j - t)(u_{j-1}^{i+1/2} - \nu_{j-1}^{i+1/2}) + \frac{1}{\Delta}(\Delta + t - t_j)(u_j^{i+1/2} - \nu_j^{i+1/2}) \right| \leq \\ &\leq |u_{j-1}^{i+1/2} - \nu_{j-1}^{i+1/2}| + 2|u_j^{i+1/2} - \nu_j^{i+1/2}| \leq \frac{1}{2} (|u_{j-1}^{i+1} - \nu_{j-1}^{i+1}| + |u_{j-1}^i - \nu_{j-1}^i|) + |u_j^{i+1} - \nu_j^{i+1}| + |u_j^i - \nu_j^i| \leq \\ &\leq \frac{3}{2} \max\{|u_{j-1}^{i+1} - \nu_{j-1}^{i+1}| + |u_{j-1}^i - \nu_{j-1}^i|, |u_j^{i+1} - \nu_j^{i+1}| + |u_j^i - \nu_j^i|\}. \end{aligned}$$

В результате

$$\begin{aligned} \sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v_j^{i+1/2}(t) - \eta_j^{i+1/2}(t)| &\leq \frac{3}{2} \max_{j-m \leq l \leq j} (|u_l^i - \nu_l^i| + |u_l^{i+1} - \nu_l^{i+1}|) \leq \\ &\leq 3 \max_{j-m \leq l \leq j} \sqrt{|u_l^i - \nu_l^i|^2 + |u_l^{i+1} - \nu_l^{i+1}|^2}. \end{aligned}$$

$\square$

Рассмотрим метод:

$$\begin{aligned}\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} &= \frac{(w_{j+1}^i - w_{j+1}^{i-1}) + (w_j^i - w_j^{i-1})}{2h}, \\ \frac{w_{j+1}^i - w_j^i}{\Delta} &= \frac{(u_{j+1}^{i+1} - u_{j+1}^i) + (u_j^{i+1} - u_j^i)}{2h} + F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)), \\ i &= 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1,\end{aligned}\tag{3.2.11}$$

с граничными условиями

$$u_j^0 = g_1(t_j), u_j^N = g_2(t_j), w_j^0 = g_3(t_j), w_j^N = g_4(t_j)$$

и начальными условиями

$$u_j^i = \varphi_1(x_i, t_j): \quad -m \leq j \leq 0, \quad w_0^i = \varphi_2(x_{i+1/2}),$$

где  $F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot))$  — некоторый функционал, определенный на функциях  $v_j^{i+1/2}(\cdot) = I(\{u_i^i\}_j, \{u_i^{i+1}\}_j) \in Q[-\tau, \Delta]$  и связанный с функционалом  $f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^{i+1/2}(\cdot))$ .

Схема неявна. Преобразуем ее к следующему виду

$$\begin{aligned}\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} &= \Delta \frac{(u_{j+1}^{i+1} - 2u_{j+1}^i + u_{j+1}^{i-1}) + (u_j^{i+1} - 2u_j^i + u_j^{i-1})}{4h^2} + \\ &+ \frac{w_j^i - w_j^{i-1}}{h} + \Delta \frac{F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)) - F_j^{i-1}(v_j^{i-1/2}(\cdot))}{2h},\end{aligned}\tag{3.2.12}$$

$$\frac{w_{j+1}^i - w_j^i}{\Delta} = \frac{(u_{j+1}^{i+1} - u_{j+1}^i) + (u_j^{i+1} - u_j^i)}{2h} + F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)),\tag{3.2.13}$$

$$i = 1, \dots, N-1, \quad j = 0, \dots, M-1.$$

При каждом фиксированном  $j$  система (3.2.12) является линейной трехдиагональной относительно  $u_{j+1}^i$  с диагональным преобладанием, которая эффективно решается методом прогонки. После нахождения  $u_{j+1}^i, w_{j+1}^i$  вычисляется по явной формуле (3.2.13).

### 3.3 Порядок невязки

Перепишем метод (3.2.11) в виде

$$\begin{aligned}\frac{1}{\Delta}(\tilde{u}_{j+1}^i - \tilde{u}_j^i) &= \frac{1}{2h}\Lambda_1(\tilde{u}_{j+1}^{i-1} + \tilde{u}_j^{i-1}) - \frac{1}{2h}(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\tilde{u}_{j+1}^i + \tilde{u}_j^i) + \frac{1}{2h}\Lambda_2(\tilde{u}_{j+1}^{i+1} + \tilde{u}_j^{i+1}) + \\ &+ \tilde{F}_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)),\end{aligned}\tag{3.3.1}$$

где

$$\tilde{u}_j^i = \begin{pmatrix} u_j^i \\ w_j^i \end{pmatrix}, \quad \Lambda_1 \tilde{u}_j^i = \begin{pmatrix} -w_j^i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \Lambda_2 \tilde{u}_j^i = \begin{pmatrix} 0 \\ u_j^i \end{pmatrix}, \quad \tilde{F}_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)) = \begin{pmatrix} 0 \\ F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)) \end{pmatrix}.$$

Невязкой (без интерполяции) метода назовем:

$$\begin{aligned} \psi_j^i = & \frac{1}{\Delta}(\tilde{u}(x_i, t_{j+1}) - \tilde{u}(x_i, t_j)) - \frac{1}{2h}\Lambda_1(\tilde{u}(x_{i-1}, t_{j+1}) + \tilde{u}(x_{i-1}, t_j)) + \frac{1}{2h}(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\tilde{u}(x_i, t_{j+1}) + \tilde{u}(x_i, t_j)) \\ & - \frac{1}{2h}\Lambda_2(\tilde{u}(x_{i+1}, t_{j+1}) + \tilde{u}(x_{i+1}, t_j)) - \tilde{F}_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок  $h^p + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h$ , что  $\|\psi_j^i\|_2 \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 1, \dots, N-1$ ,  $j = 0, \dots, M-1$ .

Рассмотрим метод (3.2.11), в котором функционал  $F_j^i$  определяется следующим образом:

$$F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)) = f(t_{j+1/2}, x_{i+1/2}, v_j^{i+1/2}(\Delta/2), \bar{v}_j^{i+1/2}(\cdot)), \quad (3.3.3)$$

где  $t_{j+1/2} = t_j + \Delta/2$ ,  $x_{i+1/2} = x_i + h/2$ ;  $\bar{v}_j^{i+1/2}(\xi) = v_j^{i+1/2}(\xi + \Delta/2)$ ,  $-\tau \leq \xi < 0$ .

**Теорема 11.** Если для точного решения задачи (3.1.1)–(3.1.3) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно,  $F_j^i$  определяется соотношением (3.3.3), то невязка имеет порядок  $h^2 + \Delta^2$ .

*Доказательство.* По определению невязки

$$\begin{aligned} \psi_j^{i1} = & \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \\ & - \frac{1}{2h} (w(x_{i+1/2}, t_{j+1}) - w(x_{i-1/2}, t_{j+1}) + w(x_{i+1/2}, t_j) - w(x_{i-1/2}, t_j)), \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

$$\begin{aligned} \psi_j^{i2} = & \frac{w(x_{i+1/2}, t_{j+1}) - w(x_{i+1/2}, t_j)}{\Delta} - \frac{1}{2h} (u(x_{i+1}, t_{j+1}) - u(x_i, t_{j+1}) + u(x_{i+1}, t_j) - u(x_i, t_j)) \\ & - f(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}, u(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}), u_{t_{j+1/2}}(x_{i+1/2}, \cdot)). \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Разложим функцию  $u(x, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точек  $(x_{i+1/2}, t_j)$ ,  $(x_{i+1/2}, t_{j+1})$ ;  $w(x, t)$  в окрестности точек  $(x_i, t_j)$ ,  $(x_i, t_{j+1})$ . Так как существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, получаем следующие равенства для значений функции в точках:

$$u(x_i, t_{j\pm 1}) = u(x_i, t_j) \pm \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j)\Delta + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_j)\Delta^2 \pm \frac{1}{6} \frac{\partial^3 u}{\partial t^3}(x_i, t_j)\Delta^3 + O(\Delta^4),$$

здесь и далее  $g = O(\Delta^4)$ , если существует константа  $C$ , такая что  $|g| \leq C\Delta^4$ ,

$$u(x_{i+1}, t_j) = u(x_{i+1/2}, t_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_j)h + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i+1/2}, t_j)h^2 + O(h^3),$$

$$u(x_{i+1}, t_{j+1}) = u(x_{i+1/2}, t_{j+1}) + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_{j+1})h + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i+1/2}, t_{j+1})h^2 + O(h^3),$$

$$u(x_i, t_j) = u(x_{i+1/2}, t_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_j)h + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i+1/2}, t_j)h^2 + O(h^3),$$

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_{i+1/2}, t_{j+1}) - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_{j+1})h + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_{i+1/2}, t_{j+1})h^2 + O(h^3),$$

$$w(x_{i+1/2}, t_j) = w(x_i, t_j) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 + O(h^3),$$

$$w(x_{i+1/2}, t_{j+1}) = w(x_i, t_{j+1}) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 + O(h^3),$$

$$w(x_{i-1/2}, t_j) = w(x_i, t_j) - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j)h + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_j)h^2 + O(h^3),$$

$$w(x_{i-1/2}, t_{j+1}) = w(x_i, t_{j+1}) - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_{j+1})h + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}(x_i, t_{j+1})h^2 + O(h^3),$$

Подставив эти соотношения в (3.3.4),(3.3.5), получим:

$$\begin{aligned} \psi_j^{i1} &= \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) + \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j) + O(h^2) \right) \\ \psi_j^{i2} &= \frac{w(x_{i+1/2}, t_{j+1}) - w(x_{i+1/2}, t_j)}{\Delta} - \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_{j+1}) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_j) + O(h^2) \right) \\ &\quad - f(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}, u(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}), u_{t_{j+1/2}}(x_{i+1/2}, \cdot)) \end{aligned}$$

Разложим функции  $u(x, t)$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(x, t)$  по формуле Тейлора в окрестности точек  $(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})$ ,  $(x_i, t_{j+1/2})$ ,  $w(x, t)$ ,  $\frac{\partial w}{\partial x}(x, t)$  в окрестности точек  $(x_i, t_{j+1/2})$ ,  $(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})$ . В результате получим следующие соотношения:

$$u(x_i, t_{j+1}) = u(x_i, t_{j+1/2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2})\Delta + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+1/2})\Delta^2 + O(\Delta^3),$$

$$u(x_i, t_j) = u(x_i, t_{j+1/2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2})\Delta + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_{j+1/2})\Delta^2 + O(\Delta^3),$$

$$w(x_{i+1/2}, t_{j+1}) = w(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})\Delta + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})\Delta^2 + O(\Delta^3),$$

$$w(x_{i+1/2}, t_j) = w(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial w}{\partial t}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})\Delta + \frac{1}{8} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})\Delta^2 + O(\Delta^3),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_{j+1}) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})\Delta + O(\Delta^2),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_j) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2})\Delta + O(\Delta^2),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_{j+1}) = \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_{j+1/2}) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(x_i, t_{j+1/2}) \Delta + O(\Delta^2),$$

$$\frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_j) = \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_{j+1/2}) - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial t}(x_i, t_{j+1/2}) \Delta + O(\Delta^2),$$

Тогда

$$\begin{aligned} \psi_j^{i1} &= \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_{j+1/2}) - \frac{\partial w}{\partial x}(x_i, t_{j+1/2}) + O(h^2 + \Delta^2) \\ \psi_j^{i2} &= \frac{\partial w}{\partial t}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}) \\ &\quad - f(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}, u(x_{i+1/2}, t_{j+1/2}), u_{t_{j+1/2}}(x_{i+1/2}, \cdot)) + O(h^2 + \Delta^2) \end{aligned}$$

В силу системы (3.1.1)

$$\psi_j^{i1} = O(h^2 + \Delta^2).$$

$$\psi_j^{i2} = O(h^2 + \Delta^2).$$

Откуда получаем

$$\psi_j^i = O(h^2 + \Delta^2).$$

□

### 3.4 Исследование сходимости

Будем говорить, что метод (3.3.1) сходится с порядком  $h^p + \Delta^q$ , если существует такая константа  $C$ , не зависящая от  $\Delta$ ,  $h$ , что выполняется неравенство  $\|\tilde{u}(x_i, t_j) - \tilde{u}_j^i\|_2 \leq C(h^p + \Delta^q)$  для всех  $i = 0, \dots, N$ ,  $j = 0, \dots, M$ .

Исследуем схемы семейства (3.2.11) на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему, изложенную в разделе 1.3. Будем рассматривать задачи с однородными граничными условиями:

$$u(0, t) = u(X, t) = w(0, t) = w(X, t) = 0, \quad t_0 \leq t \leq T.$$

Исходную задачу можно свести к данной с помощью замены:

$$\bar{u}(x, t) = u(x, t) - g_1(t) \frac{X-x}{X} - g_2(t) \frac{x}{X}.$$

$$\bar{w}(x, t) = w(x, t) - g_3(t) \frac{X-x}{X} - g_4(t) \frac{x}{X}.$$

При каждом  $t_j$  определим значения дискретной модели вектором  $\gamma_j = (\tilde{u}_j^0, \tilde{u}_j^1, \tilde{u}_j^2, \dots, \tilde{u}_j^{N-1}, \tilde{u}_j^N)' = (u_j^0, w_j^0, u_j^1, w_j^1, u_j^2, w_j^2, \dots, u_j^{N-1}, w_j^{N-1}, u_j^N, w_j^N)' \in \Gamma$ , где  $'$  — знак транспонирования,  $\Gamma$  — векторное пространство размерности  $2(N+1)$  со скалярным произведением:

$$(\gamma, \mu) = \sum_{l=0}^{2N+1} \gamma^l \mu^l h, \quad \gamma = (\gamma^0, \gamma^1, \dots, \gamma^{2N+1})' \in \Gamma, \quad \mu = (\mu^0, \mu^1, \dots, \mu^{2N+1})' \in \Gamma. \quad (3.4.1)$$

и нормой:

$$\|\gamma_n\|_\Gamma = \sqrt{(\gamma_n, \gamma_n)} = \sqrt{\sum_{i=0}^N \|\tilde{u}_n^i\|_2^2 h}. \quad (3.4.2)$$

В пространстве  $\Gamma$  введем оператор  $A$ :

$$A\tilde{\gamma}_j = \tilde{\mu}_j, \quad \tilde{\mu}_j = (\tilde{\mu}_j^0, \tilde{\mu}_j^1, \dots, \tilde{\mu}_j^N)',$$

$$\tilde{\mu}_j^i = \frac{1}{h}(-\Lambda_1 \tilde{u}_j^{i-1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2) \tilde{u}_j^i - \Lambda_2 \tilde{u}_j^{i+1}), \quad 1 \leq i \leq N-1, \quad \tilde{\mu}_j^0 = (0, 0)', \quad \tilde{\mu}_j^N = (0, 0)', \quad (3.4.3)$$

Тогда систему (3.3.1) можно переписать в виде:

$$\frac{1}{\Delta}(\gamma_{j+1} - \gamma_j) + \frac{1}{2}(A\gamma_{j+1} + A\gamma_j) = F_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j)), \quad (3.4.4)$$

где  $\tilde{F}_j(v(\cdot)) = (\tilde{F}_j^0(v_j^{1/2}(\cdot)), \tilde{F}_j^1(v_j^{3/2}(\cdot)), \dots, \tilde{F}_j^{N-1}(v_j^{N-1/2}(\cdot)), \tilde{F}_j^{N-1}(v_j^{N+1/2}(\cdot)))'$ ,  $v(\cdot) = I(\{\gamma_l\}_j) \in Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$ .

Введем оператор:

$$B = E + \frac{1}{2}\Delta A, \quad (3.4.5)$$

Приведем уравнение (3.4.4) к виду:

$$B \frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{\Delta} + A\gamma_j = \tilde{F}_j(I(\{\tilde{\gamma}_l\}_j)). \quad (3.4.6)$$

Приведем уравнение (3.4.6) к явной форме

$$\gamma_{j+1} = S\gamma_j + \Delta\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)), \quad (3.4.7)$$

где  $S = E - \Delta B^{-1}A$ ,  $\Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_j)) = B^{-1}\tilde{F}_j(I(\{\gamma_l\}_j))$ .

Определим функцию точных значений (1.3.13) для схемы (3.4.7) соотношениями

$$z_j = (\tilde{u}(x_0, t_j), \tilde{u}(x_1, t_j), \tilde{u}(x_2, t_j), \dots, \tilde{u}(x_N, t_j))'.$$

Оператор интерполяции-экстраполяции (3.2.3) – (3.2.4) липшицев в смысле определения (1.3.9), так как в силу теоремы 10

$$\sup_{t_j - \tau \leq t \leq t_j + \Delta} |v^1(t) - v^2(t)| \leq L_I \max_{j-m \leq l \leq j} \sqrt{|u_l^i - v_l^i|^2 + |u_l^{i+1} - v_l^{i+1}|^2} \leq \max_{j-m \leq l \leq j} \|\gamma_l^1 - \gamma_l^2\|_\Gamma,$$

где  $v^1(\cdot) = I(\{\gamma_l^1\}_j)$ ,  $v^2(\cdot) = I(\{\gamma_l^2\}_j)$ .

Определение невязки в общей разностной схеме (1.3.15) отличается от введенного ранее определения невязки без интерполяции (3.3.2). Однако справедливо следующее утверждение.

**Теорема 12.** Пусть невязка в смысле (3.3.2) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , функции  $\tilde{F}_j^i$  липшицевы, оператор двойной интерполяции-экстраполяции  $I$  имеет порядок погрешности  $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$  на точном решении,  $\sigma = h/\Delta$  зафиксировано. Тогда невязка с интерполяцией в смысле (1.3.15) имеет порядок  $\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}$ .

*Доказательство.* Рассмотрим норму невязки (1.3.15):

$$\begin{aligned}
\|d_n\|_\Gamma^2 &= \|(z_{n+1} - Sz_n)/\Delta - \Phi(t_n, I(\{z_l\}_n^m))\|_\Gamma^2 = \\
&= \left\| z_{n+1} - (z_n - \Delta B^{-1}Az_n)/\Delta - B^{-1}\tilde{F}_j(I(\{z_l\}_n)) \right\|_\Gamma^2 = \\
&= \left\| \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta} + B^{-1}Az_n - B^{-1}\tilde{F}_j(I(\{z_l\}_n)) \right\|_\Gamma^2 \leq \\
&\leq \|B^{-1}\|_\Gamma^2 \left\| B \left( \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta} \right) + Az_n - \tilde{F}_j(I(\{z_l\}_n)) \right\|_\Gamma^2
\end{aligned}$$

По определению оператора  $B$  (3.4.5)

$$\begin{aligned}
\|d_n\|_\Gamma^2 &= \|B^{-1}\|_\Gamma^2 \left\| B \left( \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta} \right) + Az_n - \tilde{F}_j(I(\{z_l\}_n)) \right\|_\Gamma^2 = \\
&= \|B^{-1}\|_\Gamma^2 \left\| \left( \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta} \right) + \frac{1}{2}A(z_{n+1} - z_n) + Az_n - \tilde{F}_j(I(\{z_l\}_n)) \right\|_\Gamma^2 = \\
&= \|B^{-1}\|_\Gamma^2 \left\| \left( \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta} \right) + \frac{1}{2}A(z_{n+1} + z_n) - \tilde{F}_j(I(\{z_l\}_n)) \right\|_\Gamma^2
\end{aligned}$$

Тогда по определению нормы в  $\Gamma$  (3.4.2)

$$\begin{aligned}
&\left\| \left( \frac{z_{n+1} - z_n}{\Delta} \right) + \frac{1}{2}A(z_{n+1} + z_n) - \tilde{F}_j(I(\{z_l\}_n)) \right\|_\Gamma^2 = \\
&= \sum_{i=1}^{N-1} \left\| \frac{\tilde{u}(x_i, t_{n+1}) - \tilde{u}(x_i, t_n)}{\Delta^2} + \frac{1}{2h}(-\Lambda_1\tilde{u}(x_{i-1}, t_{n+1}) + \Lambda_1\Lambda_2\tilde{u}(x_i, t_{n+1}) - \Lambda_2\tilde{u}(x_{i+1}, t_{n+1}) - \right. \\
&\quad \left. - \Lambda_1\tilde{u}(x_{i-1}, t_n) + \Lambda_1\Lambda_2\tilde{u}(x_i, t_n) - \Lambda_2\tilde{u}(x_{i+1}, t_n)) - \tilde{F}_n^i(v_n^{i+1/2}(\cdot)) \right\|_2^2 h.
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое под знаком суммы, используя предположения теоремы

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{\tilde{u}(x_i, t_{n+1}) - \tilde{u}(x_i, t_n)}{\Delta^2} + \frac{1}{2h}(-\Lambda_1\tilde{u}(x_{i-1}, t_{n+1}) + \Lambda_1\Lambda_2\tilde{u}(x_i, t_{n+1}) - \Lambda_2\tilde{u}(x_{i+1}, t_{n+1}) - \right. \\
&\quad \left. - \Lambda_1\tilde{u}(x_{i-1}, t_n) + \Lambda_1\Lambda_2\tilde{u}(x_i, t_n) - \Lambda_2\tilde{u}(x_{i+1}, t_n)) - \tilde{F}_n^i(v_n^{i+1/2}(\cdot)) \pm \tilde{F}_n^i(u_{t_n}(x_i, \cdot)) \right\|_2 \leq \\
&\leq \|\psi_n^i\|_2 + |F_n^i(u_{t_n}(x_i, \cdot)) - F_n^i(v_n^{i+1/2}(\cdot))| \leq \\
&\leq C_1(\Delta^{p_1} + h_1^{p_2}) + L_F\|u_{t_n}(x_i, \cdot) - v_n^{i+1/2}(\cdot)\|_Q \leq C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_FC_2(\Delta^{p_3} + h^{p_4}). \quad (3.4.8)
\end{aligned}$$

В результате получаем

$$\begin{aligned}
\|d_n\|_\Gamma^2 &\leq \|B^{-1}\|_\Gamma^2 \left( \sum_{i=1}^{N-1} (C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_FC_2(\Delta^{p_3} + h^{p_4}))^2 \right) h = \\
&= \|B^{-1}\|_\Gamma^2 (N-1)h(C_1(\Delta^{p_1} + h^{p_2}) + L_FC_2(\Delta^{p_3} + h^{p_4}))^2 \leq \\
&\leq (C(\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}))^2,
\end{aligned}$$

где  $C = \|B^{-1}\|_\Gamma(\sqrt{X})(C_1 + L_FC_2)$ .

Таким образом, справедлива оценка

$$\|d_n\|_{\Gamma} \leq C(\Delta^{\min\{p_1, p_3\}} + h^{\min\{p_2, p_4\}}).$$

□

Исследуем устойчивость схемы (3.4.7). По определению устойчивости в общей разностной схеме необходимо, чтобы выполнялось условие (1.3.14):

$$\|S\|_{\Gamma} \leq 1.$$

Для исследования устойчивости схемы применим результаты работ [29, 30]. Для этого рассмотрим однородные разностные схемы, соответствующие (3.4.4) и (3.4.6):

$$B \frac{\gamma_{j+1} - y_j}{\Delta} + A \gamma_j = 0. \quad (3.4.9)$$

$$\gamma_{j+1} = S \gamma_j. \quad (3.4.10)$$

Оператор  $A^*$ , сопряженный к оператору  $A$ , имеет вид

$$A^* \tilde{\gamma}_j = \tilde{\mu}_j, \quad \tilde{\mu}_j = (\tilde{\mu}_j^0, \tilde{\mu}_j^1, \dots, \tilde{\mu}_j^N)',$$

$$\tilde{\mu}_j^i = \frac{1}{h} (\Lambda_1 \tilde{u}_j^{i-1} - (\Lambda_1 + \Lambda_2) \tilde{u}_j^i + \Lambda_2 \tilde{u}_j^{i+1}): 1 \leq i \leq N-1, \quad \tilde{\mu}_j^0 = (0, 0)', \quad \tilde{\mu}_j^N = (0, 0)', \quad (3.4.11)$$

Оператор  $A$  кососимметричный, то есть  $A^* = -A$ .

В [29, с. 351] доказано, что если  $A$  - кососимметричный оператор, то для решения уравнения (3.4.9) выполнена оценка

$$\|\gamma_{n+1}\|_{\Gamma} \leq \|\gamma_n\|_{\Gamma}. \quad (3.4.12)$$

Следовательно, для (3.4.10) выполняется

$$\|S\|_{\Gamma} \leq 1.$$

Вложение в общую разностную схему с последствием проведено. Теперь, используя Теорему 2, получаем следующее утверждение.

**Теорема 13.** Пусть невязка без интерполяции (3.3.2) имеет порядок  $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$ , функции  $F_j^i$  липшицевы, оператор двойной интерполяции-экстраполяции  $I$  липшицев и имеет порядок погрешности  $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$  на точном решении, стартовые значения имеют порядок  $\Delta^{p_5} + h^{p_6}$ ,  $\sigma = h/\Delta$  зафиксировано, тогда метод (3.2.11) сходится с порядком  $\Delta^{\min\{p_1, p_3, p_5\}} + h^{\min\{p_2, p_4, p_6\}}$ .

Опираясь на теорему 11, получаем следующее следствие.

**Следствие 3.** Если для точного решения задачи (3.1.1) существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно,  $F_j^i$  определяется соотношением (3.3.3), применяется оператор двойной интерполяции-экстраполяции со значениями (3.2.3) – (3.2.4),  $\sigma = h/\Delta$  зафиксировано, тогда метод (3.2.11) сходится с порядком  $h^2 + \Delta^2$ .

### 3.5 Примеры численных расчетов

**Пример 7.** Рассмотрим систему уравнений с постоянным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{u(x, t - \tau)}{\sqrt{e}} - e^{-t} \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial w}{\partial x}(x, t): 0 \leq t \leq 2, 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

при  $\tau = 0.5$  с начальными условиями

$$\begin{aligned} u(x, t) &= e^{x-t}: -\tau \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1 \\ w(x, 0) &= -e^x + 1: 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = e^{-t}, u(1, t) = e^{1-t}; w(0, t) = 0, w(1, t) = -e^{1-t} + e^{-t}: 0 \leq t \leq 2.$$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, t) = e^{x-t}; w(x, t) = -e^{x-t} + e^{-t}$ .

На рисунке 3.1 изображено приближенное решение этого уравнения, полученное методом (1.3.25), для которого  $F_j^i$  определяется соотношением (3.3.3), применяется оператор двойной интерполяции-экстраполяции со значениями (3.2.3) – (3.2.4), число точек разбиения по  $x$  равно 40, по  $t$  равно 160. На рисунках 3.2 и 3.3 приведена разность между точным и приближенным решением при разных соотношениях шагов.

В табл. 13–15 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (3.5.13), полученные при разных шагах. Нормы разностей во всех примерах этой главы вычислены по формулам:

$$\|U\|_1 = \max_{0 \leq j \leq M} \sum_{i=0}^N |u(t_j, x_i) - u_j^i| h, \quad (3.5.14)$$

$$\|W\|_{1*} = \max_{0 \leq j \leq M} \sum_{i=0}^N |w(t_j, x_i + h/2) - w_j^i| h. \quad (3.5.15)$$

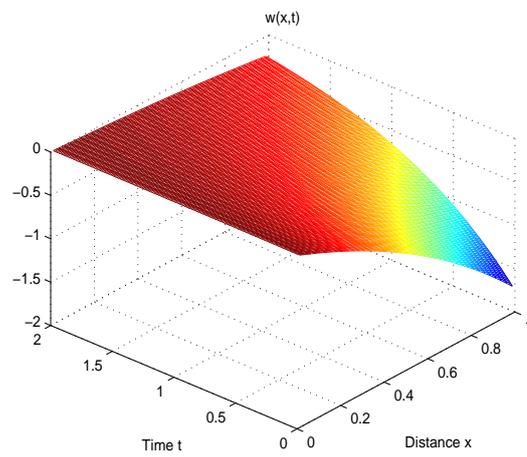
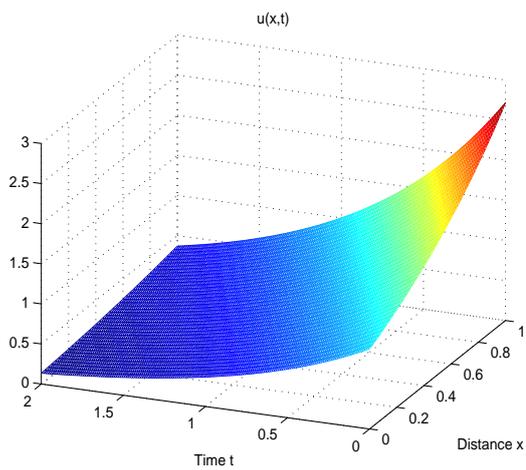


Рис. 3.1:  $N = 40$ ,  $M = 160$

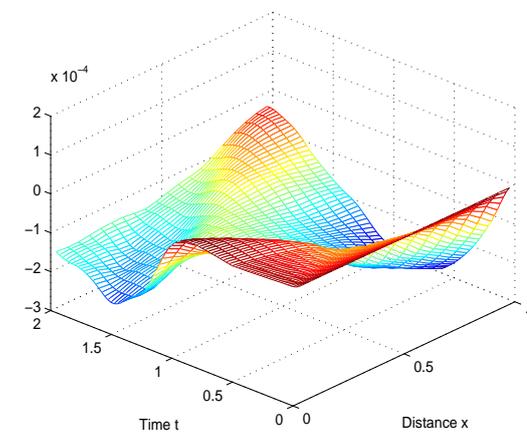
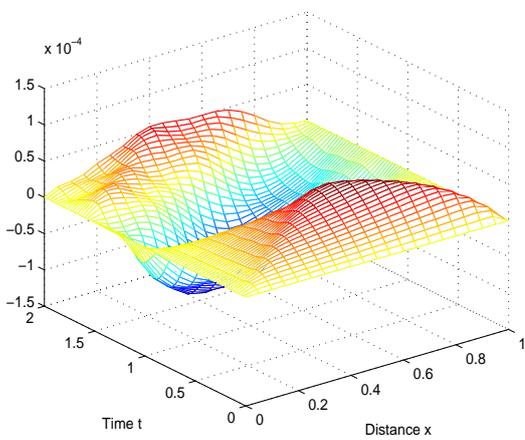


Рис. 3.2:  $N = 20$ ,  $M = 80$

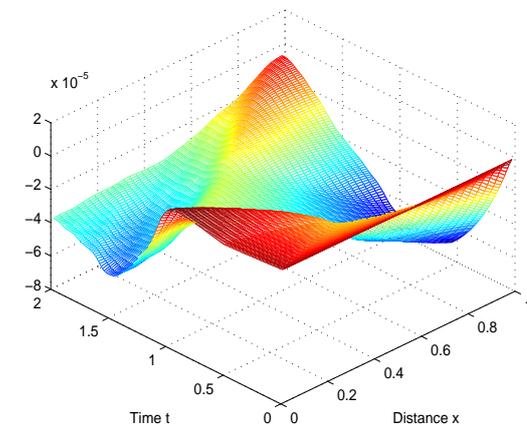
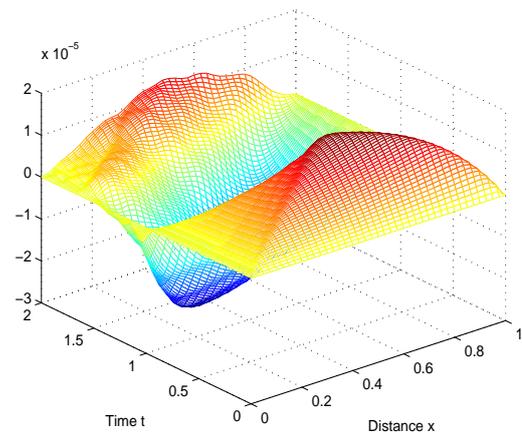


Рис. 3.3:  $N = 40$ ,  $M = 160$

Т а б л и ц а 13

Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.13) для метода сеток  
при разных шагах

Шаги метода сеток	$\sigma = 0.5000$		
	N=10 M=40	N=20 M=80	N=40 M=160
$\ U\ _1$	$6.8943 \cdot 10^{-4}$	$1.7673 \cdot 10^{-4}$	$4.3560 \cdot 10^{-5}$
$\ W\ _{1*}$	0.0110	0.0027	$6.6890 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 14

Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.13) для метода сеток  
при разных шагах

Шаги метода сеток	$\sigma = 0.3750$		
	N=15 M=40	N=30 M=80	N=60 M=160
$\ U\ _1$	$2.5980 \cdot 10^{-4}$	$6.6880 \cdot 10^{-5}$	$1.6939 \cdot 10^{-5}$
$\ W\ _{1*}$	0.0065	0.0016	$4.0753 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 15

Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.13) для метода сеток  
при разных шагах

Шаги метода сеток	$\sigma = 1.1000$		
	N=22 M=40	N=44 M=80	N=88 M=160
$\ U\ _1$	$1.2870 \cdot 10^{-4}$	$3.4747 \cdot 10^{-5}$	$9.0604 \cdot 10^{-4}$
$\ W\ _{1*}$	0.0042	0.0011	$2.6661 \cdot 10^{-4}$

**Пример 8.** Рассмотрим систему уравнений с переменным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) + \frac{e^{-t}}{\pi} - \frac{\pi^2 + \pi}{\pi} e^{-t} \cos \pi x - e^{-t+\tau} \sin \pi x + u(x, t - \tau(t)) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= \frac{\partial w}{\partial x}(x, t): 0 \leq t \leq 2, 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (3.5.16)$$

при  $\tau(t) = t^2$  с начальными условиями

$$u(x, t) = e^{-t} \sin \pi x: -2 \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1$$

$$w(x, 0) = \frac{\cos \pi x - 1}{\pi} : 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0; \quad w(0, t) = 0, \quad w(1, t) = \frac{-2e^{-t}}{\pi} : 0 \leq t \leq 2.$$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, t) = e^{-t} \sin \pi x$ ;  $w(x, t) = e^{-t} \cdot \frac{\cos \pi x - 1}{\pi}$ .

На рисунке 3.4 изображено приближенное решение этого уравнения, полученное методом (1.3.25), для которого  $F_j^i$  определяется соотношением (3.3.3), применяется оператор двойной интерполяции-экстраполяции со значениями (3.2.3) – (3.2.4), число точек разбиения по  $x$  равно 40, по  $t$  равно 160. На рисунках 3.5 и 3.6 приведена разность между точным и приближенным решением при разных соотношениях шагов.

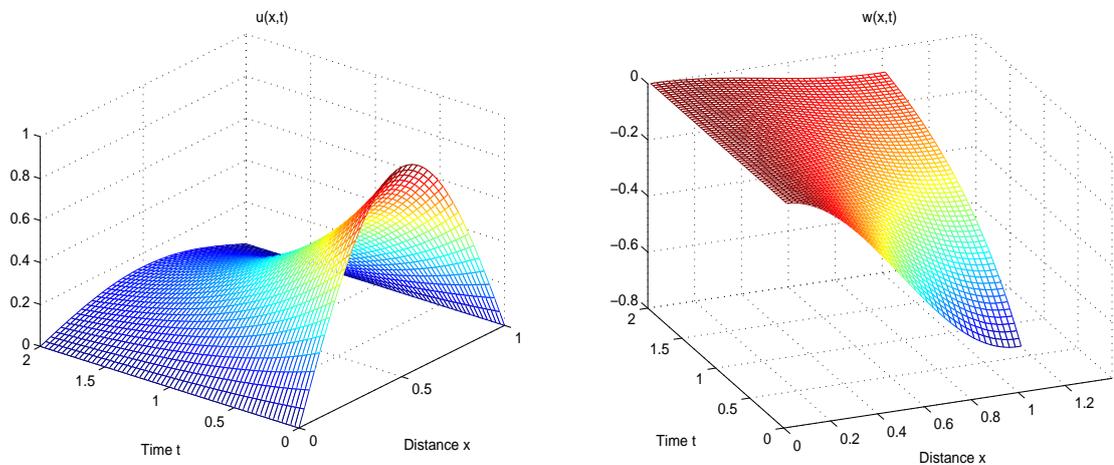


Рис. 3.4:  $N = 40, M = 160$

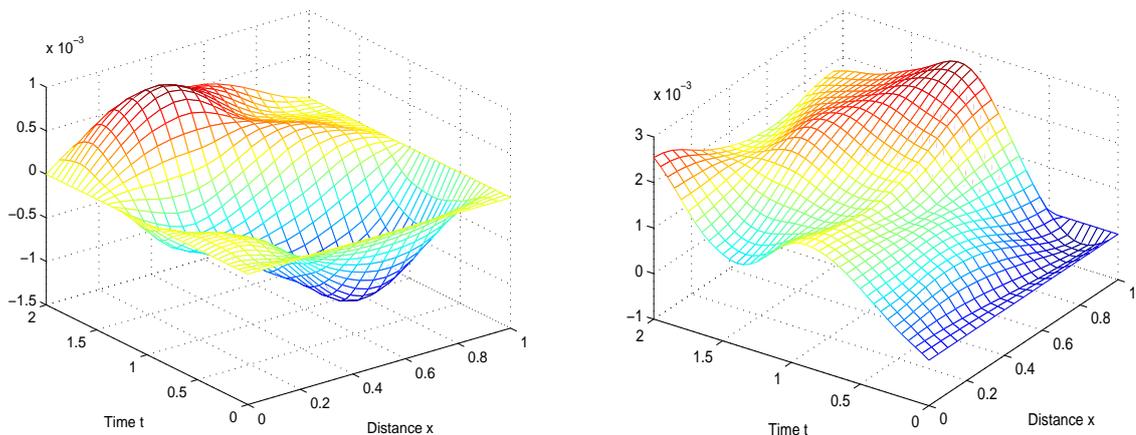


Рис. 3.5:  $N = 20, M = 80$

В табл. 16-18 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (3.5.16), полученные при разных шагах.

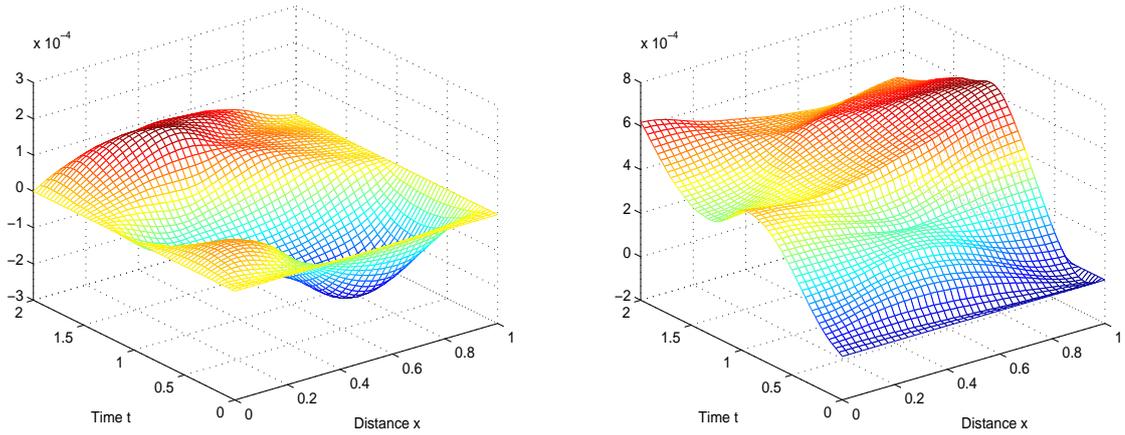


Рис. 3.6:  $N = 40$ ,  $M = 160$

Т а б л и ц а 16

Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.16) для метода сеток  
при разных шагах

Шаги метода сеток	$\sigma = 0.5000$		
	N=10 M=40	N=20 M=80	N=40 M=160
$\ U\ _1$	0.0117	0.0030	$7.6577 \cdot 10^{-4}$
$\ W\ _{1*}$	0.0216	0.0058	0.0015

Т а б л и ц а 17

Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.16) для метода сеток  
при разных шагах

Шаги метода сеток	$\sigma = 0.3750$		
	N=15 M=40	N=30 M=80	N=60 M=160
$\ U\ _1$	0.0031	$8.1255 \cdot 10^{-4}$	$2.0730 \cdot 10^{-4}$
$\ W\ _{1*}$	0.0070	0.0019	$4.7642 \cdot 10^{-4}$

**Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.16) для метода сеток  
при разных шагах**

Шаги метода сеток	$\sigma = 1.1000$		
	N=22 M=40	N=44 M=80	N=88 M=160
$\ U\ _1$	$7.7642 \cdot 10^{-4}$	$2.0515 \cdot 10^{-4}$	$5.3056 \cdot 10^{-5}$
$\ W\ _{1*}$	0.0026	$6.8278 \cdot 10^{-4}$	$1.7407 \cdot 10^{-4}$

**Пример 9.** Рассмотрим систему уравнений с распределенным запаздыванием:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) - \pi^2 x^2 \cos 2\pi t - \cos^2 \pi t - \frac{1}{4\pi} \cdot (x \sin \pi t + \sin 2\pi t) - \\ - \frac{3xt}{4} + \int_{-3t/2}^0 u(x, t+s) ds \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x, t): 0 \leq t \leq 1, 0 \leq x \leq 1 \end{aligned} \quad (3.5.17)$$

с начальными условиями

$$u(x, t) = x \cos^2 \pi t: -\frac{1}{2} \leq t \leq 0, 0 \leq x \leq 1$$

$$w(x, 0) = 0: 0 \leq x \leq 1$$

и граничными условиями

$$u(0, t) = 0, u(1, t) = \cos^2 \pi t; w(0, t) = 0, w(1, t) = -\frac{\pi}{2} \cdot \sin 2\pi t: 0 \leq t \leq 1.$$

Уравнение имеет точное решение  $u(x, t) = x \cos^2 \pi t; w(x, t) = -\pi \cdot \frac{x^2}{2} \cdot \sin 2\pi t$ .

На рисунке 3.7 изображено приближенное решение этого уравнения, полученное методом (1.3.25), для которого  $F_j^i$  определяется соотношением (3.3.3), применяется оператор двойной интерполяции-экстраполяции со значениями (3.2.3) – (3.2.4), число точек разбиения по  $x$  равно 40, по  $t$  равно 80. На рисунках 3.8 и 3.9 приведена разность между точным и приближенным решением при разных соотношениях шагов.

В табл. 19-21 представлены нормы разностей матриц точного и приближенного решений уравнения (3.5.17), полученные при разных шагах.

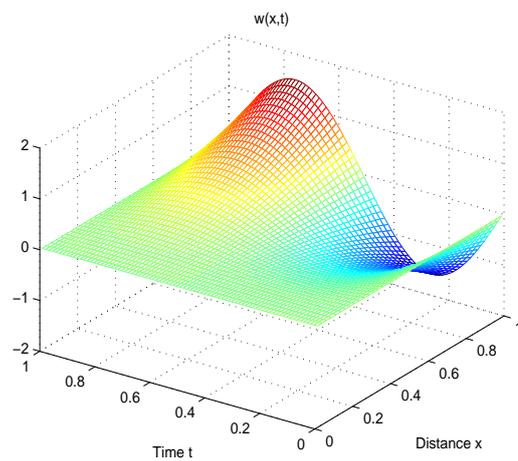
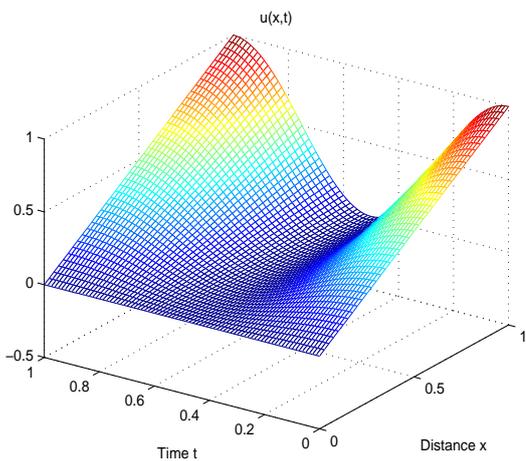


Рис. 3.7:  $N = 40, M = 80$

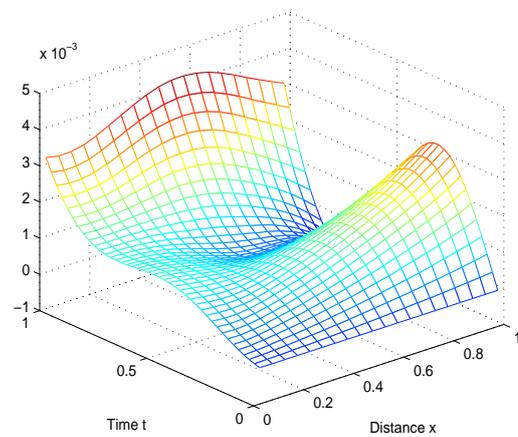
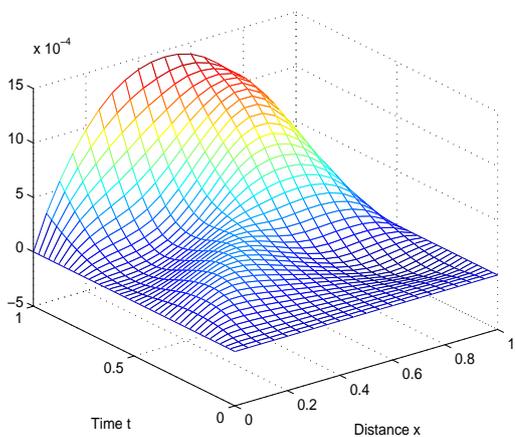


Рис. 3.8:  $N = 20, M = 40$

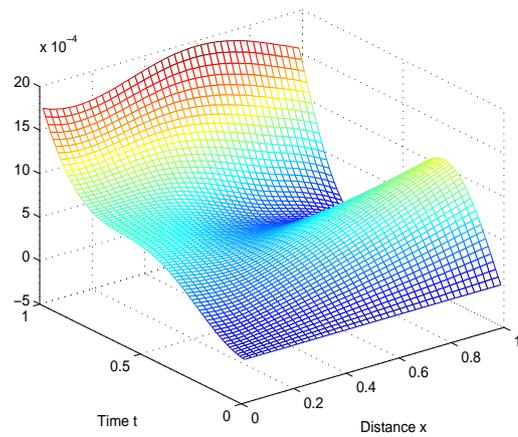
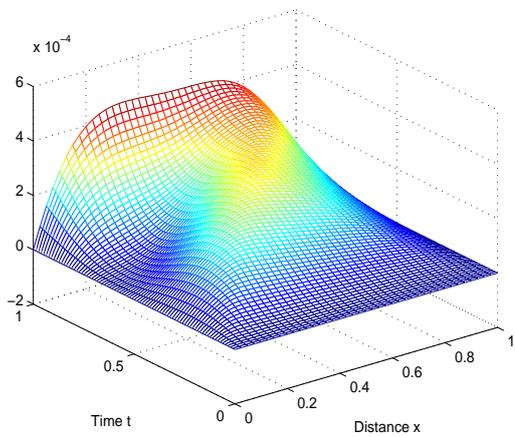


Рис. 3.9:  $N = 40, M = 80$

Т а б л и ц а 19

Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.17) для метода сеток  
при разных шагах

Шаги метода сеток	$\sigma = 0.5000$		
	N=10 M=20	N=20 M=40	N=40 M=80
$\ U\ _1$	0.0035	$9.1392 \cdot 10^{-4}$	$4.0268 \cdot 10^{-4}$
$\ W\ _{1*}$	0.0101	0.0032	0.0013

Т а б л и ц а 20

Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.17) для метода сеток  
при разных шагах

Шаги метода сеток	$\sigma = 0.3750$		
	N=15 M=20	N=30 M=40	N=60 M=80
$\ U\ _1$	0.0024	$6.1160 \cdot 10^{-4}$	$2.6837 \cdot 10^{-4}$
$\ W\ _{1*}$	0.0070	0.0021	$7.3339 \cdot 10^{-4}$

Т а б л и ц а 21

Нормы разностей точного и приближенного решений  
уравнения (3.5.17) для метода сеток  
при разных шагах

Шаги метода сеток	$\sigma = 1.1000$		
	N=22 M=20	N=44 M=40	N=88 M=80
$\ U\ _1$	0.0016	$4.1734 \cdot 10^{-4}$	$1.8293 \cdot 10^{-4}$
$\ W\ _{1*}$	0.0049	0.0014	$4.6096 \cdot 10^{-4}$

В каждом из рассмотренных примеров при фиксированном  $\sigma$  приближенные решения сходятся к точным. Это подтверждает выводы теоремы 13 и следствия 3.

# Заключение

Диссертация посвящена разработке и исследованию сеточных методов решения уравнений гиперболического типа с нелинейным эффектом запаздывания общего вида. Такого рода эффекты могут возникать, в частности, при моделировании задач управления по принципу обратной связи при наличии задержек в канале обратной связи. Получены следующие основные результаты:

1. Для уравнений гиперболического типа с одной пространственной переменной и с наличием функционального запаздывания по времени сконструировано семейство сеточных методов с весом для численного решения. Учет функционального запаздывания осуществляется с помощью подходящих интерполяционных и экстраполяционных процедур. Получены условия на вес, гарантирующие устойчивость методов. Доказана теорема о порядках сходимости разработанных методов.
2. Для уравнения с двумя пространственными переменными с наличием запаздывания по времени сконструировано семейство сеточных численных методов, допускающее факторизацию по пространственным переменным. Получены условия устойчивости методов. С помощью вложения в общую схему сеточных методов с наследственностью доказана теорема о сходимости разработанных методов.
3. Для системы уравнений акустики с эффектом наследственности построен численный метод, в котором наследственность учитывается с помощью новых методик интерполяции дискретной предыстории сеточной модели. Исследована устойчивость метода и получено утверждение о порядке сходимости метода.

Все полученные теоретические результаты подтверждаются тестовыми примерами, содержащими сосредоточенные (постоянные или переменные) и распределенные запаздывания.

Возможными приложениями данных результатов может послужить разработка программных комплексов для численного моделирования различных задач, описываемых уравнениями гиперболического типа с эффектом наследственности по времени. В связи с этим, возможным направлением дальнейших исследований в части разработки алгоритмов может по-

служить рассмотрение задач с другими краевыми условиями, с непрямоугольной областью, задач с переменными коэффициентами, задач размерности три и выше и т.д.

Другим возможным направлением дальнейших исследований по тематике диссертации может стать разработка и исследование численных алгоритмов решения уравнений гиперболического типа, которые содержат запаздывания в производных. Такие системы активно изучаются в связи с интересными свойствами изменения устойчивости и наличия колебаний. Управление по принципу обратной связи такими системами неизбежно приводит к возникновению в них также функционального эффекта запаздывания в неоднородности.

# Литература

- [1] Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. М.: Мир. 1967. 254 с.
- [2] Вабищевич П.Н. Вычислительные методы математической физики. Нестационарные задачи. М.: Вузовская книга, 2008. 228 с.
- [3] Волканин Л.С. Численное решение уравнения переноса с эффектом наследственности // Теория управления и математическое моделирование. Ижевск : Изд. ИжГТУ, 2012. С. 12–13.
- [4] Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977. 440 с.
- [5] Гурли С.А., Соу Д.В., Ву Д.Х. Нелокальные уравнения реакции-диффузии с запаздыванием: биологические модели и нелинейная динамика // Современная математика. Фундаментальные направления. 2003. Т. 1. С. 84–120.
- [6] Денисов А.М. Обратная задача для гиперболического уравнения с нелокальным краевым условием, содержащим запаздывающий аргумент // Тр. ИММ УрО РАН. 2012. Т. 18. N. 1. С. 139–146.
- [7] Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978. 512 с.
- [8] Камонт Э., Кропельницка К. Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычис. математики. 2011. Т. 14, N. 4. С. 361–379.
- [9] Камонт Э., Черноус В. Неявные разностные методы для функциональных дифференциальных уравнений Гамильтона-Якоби // Сиб. журн. вычис. математики. 2009. Т. 12, N. 1. С. 57–70.
- [10] Ким А.В., Пименов В.Г.  $i$ -Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004. 256 с.

- [11] Красовский Н.Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехидат. 1959. 211 с.
- [12] Лекомцев А.В. Схема с весами для численного решения одномерного уравнения теплопроводности с запаздыванием для случая переменного коэффициента теплопроводности // Вестник Тамбовского университета. Сер. Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5–2. С. 2574–2575.
- [13] Марчук Г.И. Математические модели в иммунологии. 2-е изд. М.: Наука. 1985. 240 с.
- [14] Марчук Г.И. Методы вычислительной математики. М.: Наука. 1977. 456 с.
- [15] Мышкис А.Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука. 1972. 352 с.
- [16] Петров И.Б., Лобанов А.И. Лекции по вычислительной математике. М.: Бином, 2006. 524 с.
- [17] Пименов В.Г. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.
- [18] Пименов В.Г. Численные методы решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2008. Вып. 2. С. 111–116.
- [19] Пименов В.Г. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2014. 134 с.
- [20] Пименов В.Г., Лекомцев А.В. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1, С. 102–118.
- [21] Пименов В.Г., Ложников А.Б. Алгоритмы численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Сб. научных трудов «Проблемы динамического управления». Вып. 3. М. : ВМК МГУ, 2008. С. 161–169.
- [22] Пименов В.Г., Ложников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последствием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1, С. 178–189.
- [23] Пименов В.Г., Паначев М.А.. Одношаговые численные методы для решения смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Труды ИММ УрО РАН. 2015. Т. 21, № 2, С. 187–197.

- [24] Пименов В.Г., Паначев М.А. Решение уравнения переноса с запаздыванием путем использования численных методов для смешанных функционально-дифференциальных уравнений // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5-2. С. 2637–2638.
- [25] Пименов В.Г., Свиридов С.В. Сеточные методы решения уравнения переноса с запаздыванием // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки. 2014. Вып. 3. С. 59–74.
- [26] Пименов В.Г., Таширова Е.Е. Численные методы для уравнения гиперболического типа с запаздыванием // Алгоритмический анализ неустойчивых задач, Тезисы докладов Международной конференции, посвященной памяти В.К. Иванова. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 266–267.
- [27] Пименов В. Г., Таширова Е.Е. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды ИММ УрО РАН, Т. 18, № 2, 2012, С. 222–231.
- [28] Полянин А.Д., Сорокин В.Г. Точные решения нелинейных реакционно-диффузионных уравнений гиперболического типа с запаздыванием // Вестник национально-исследовательского университета «МИФИ». 2014. Т. 3, N. 2. С. 1–20.
- [29] Самарский А.А. Теория разностных схем. 3-е изд. М.: Наука, 1989. 656 с.
- [30] Самарский А.А., Гулин А.В. Численные методы. М.: Наука, 1989. 432 с.
- [31] Свиридов С.В. Исследование схемы с симметризованными производными для численного решения уравнения переноса с запаздыванием // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. Т. 20, вып. 5, 2015. С. 1420–1421.
- [32] Солодушкин С.И. Разностная схема для численного решения уравнения переноса с последствием // Известия высших учебных заведений. Математика. 2013. №. 10. С. 77–82.
- [33] Таширова Е.Е. Алгоритмы решения волнового уравнения с запаздыванием. // Современные проблемы математики, Тезисы международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2013. С. 412–415.
- [34] Таширова Е.Е. Разностные методы решения системы уравнений акустики с наследственностью. // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015. С. 134–135.

- [35] Таширова Е.Е. Сеточные схемы для решения двумерного уравнения гиперболического типа с последствием. // Актуальные проблемы прикладной математики и механики, Тезисы докладов VI Всероссийской конференции, посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 10-16 сентября 2012 г.). Екатеринбург: УрО РАН, 2012. С. 73–74.
- [36] Таширова Е.Е. Сеточные схемы для решения двумерного волнового уравнения с последствием. // Современные проблемы математики и ее приложений, Труды 45-й Международной молодежной школы-конференции, посвященной 75-летию В.И. Бердышева. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, УрФУ им. первого Президента России Б.Н. Ельцина 2014. С. 281–283.
- [37] Таширова Е.Е. Сходимость разностного метода для решения двумерного волнового уравнения с наследственностью. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2015, т. 25, № 1, с. 78–92.
- [38] Таширова Е.Е. Численный метод для решения системы уравнений акустики с последствием. // Алгоритмический анализ неустойчивых задач, Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В.К. Иванова. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С.156–157.
- [39] Таширова Е.Е. Численные методы решения двумерного волнового уравнения с последствием. // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5-2. С. 2704–2706.
- [40] Хаделер К.П. Перенос, реакция и запаздывание в математической биологии и обратная задача для бегущих фронтов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2006. Т. 17. С. 57–77.
- [41] Хайрер Э., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Жесткие и дифференциально-алгебраические задачи. М.: Мир, 1999. 685 с.
- [42] Хайер Э., Нерсетт С., Ваннер Г. Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М.: Мир. 1990. 512 с.
- [43] Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. М.: Мир. 1984. 421 с.
- [44] Холл Д., Уатт Д. Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1979. 312 с.
- [45] Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука. 1971. 296 с.

- [46] Adimy M. and Crauste F. Global Stability of a Partial Differential Equation with Distributed Delay due to Cellular Replication // *Nonlinear Analysis*. 2003. Vol. 54, 8. P. 1469–1491.
- [47] Agirseven D. Approximate solutions of delay parabolic equations with Dirichlet condition // *Abstr. Appl. Anal.* 2012. Vol. 2012. Art. ID 682752. 31 p.
- [48] Ansari A.R., Bakr S.A., Shishkin G.I. A parameter-robust finite difference method for singularly perturbed delay parabolic partial differential equations // *J. of Comput and Appl. Math.* 2007. Vol. 205. P. 552–556.
- [49] Arino O., Hbid L.M., Dads E.A. (Eds.) *Delay Differential Equations and Applications*. Springer. 2006.
- [50] Bainov D., Cui B.T, Minchev E. Oscillation properties of the solutions of hyperbolic equations with deviating arguments // *Demon Math.* 1996. V. 29. N. 1. P. 61–69.
- [51] Baker C.T.H., Paul C.A.H. and Wille D.R. Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // *Advances in Comput. Math.* 1995. V. 3. P. 171–196.
- [52] Baker C.T.H., Paul C.A.H. and Wille D.R. A bibliography on the numerical solution of delay differential equations // *MCCM tech. rep. N. 269*, University of Manchester. 1995. 52 p.
- [53] Banks H.T., Sutton K.L., Thompson W.C., Bocharov G., Roose D., Schenkel T., Meyerhans A. Estimation of Cell Proliferation Dynamics Using CFSE Data // *Bull. Math. Biol.* 2011. Vol. 73. P. 116–150.
- [54] Balachandran B., Kalmar-Nagy T., Gulsinn D.E. *Delay Differential Equations: Recent Advances and New Directions*. Springer. 2009.
- [55] Baranowska A. Numerical methods for nonlinear first-order partial differential equations with deviated variables // *Numer. Methods Partial Diff. Equat.* 2006. N. 22. P. 708–729.
- [56] Bellen A. *Constrained mesh methods for functional differential equations* // *International Series of Numerical Mathematics*, Verlag, Basel. 1985. P. 52–70.
- [57] Bellen A., Zennaro M. *Numerical methods for delay differential equations, numerical mathematics and scientific computation*, New York: The Clarendon Press, Oxford University Press, 2003. 395 p.
- [58] Cryer C.W. Numerical methods for functional differential equations // *In Delay and functional differential equations and their application*. Schmitt K. ed. 1972. Acad. Press. New York. P. 17–101.

- [59] Cui B.T, Yu Y.H., Lin S.Z. Oscillation of solutions of delay hyperbolic differential equations // *Acta Math. Appl. Sinica*. 1996. V. 19. N. 1. P. 80–88.
- [60] Cui B.T, Han M., Yang H. Some sufficient conditions for oscillation of impulsive delay hyperbolic systems with Robin boundary conditions // *Journal of Computational and Applied Mathematics*, vol. 180 (2005). P. 365–375.
- [61] Garcia P., Castro M.A., Martin J.A., Sirvent A. Numerical solutions of diffusion mathematical models with delay // *Mathematical and Computer Modelling*. Amsterdam, 2009. Vol. 50. P. 860–868.
- [62] Garcia P., Castro M.A., Martin J.A., Sirvent A. Convergence of two Implicit numerical schemes for diffusion mathematical models with delay // *Mathematical and Computer Modelling*. 2010. Vol. 52. P. 1279–1287.
- [63] Jackiewicz Z., Zubik-Kowal B. Spectral collocation and waveform relaxation methods for nonlinear delay partial differential equations // *Appl. Numer. Math.* 2006. Vol. 56. P. 433–443.
- [64] Kamont Z., Czernous W. Implicit difference methods for Hamilton-Jacobi functional differential equations // *Numerical Analysis and Applications*. 2009. Vol. 2, N. 1. P. 57–70.
- [65] Kamont Z. *Hyperbolic Functional Differential Inequalities and Applications*, Kluwer Acad. Publ., Dordrecht, 1999.
- [66] Kamont Z., Leszczyński H. Stability of difference equations generated by parabolic differential-functional problems, *Rend. Mat. Appl* (7). 16, 1996, no. 2, 265–287.
- [67] Kepczynska A. Implicit difference methods for first order partial differential functional equations // *Func. Diff. Eq.* 2007. Vol. 14, N. 2–4. P. 279–298.
- [68] Kipnis M.M., Komissarova D.A. Stability of a delay difference system // *Advances in Difference Equ.* 2006. Vol. 2006. P. 1–9.
- [69] Kropielnicka K. Convergence of Implicit Difference Methods for Parabolic Functional Differential Equations // *Int. Journal of Mat. Analysis*. 2007. Vol. 1, N. 6. P. 257–277.
- [70] Luo L., Wang Y. Oscillation for nonlinear hyperbolic equations with influence of impulse and delay // *Int. J. Nonlinear Science*. 2012. V. 14. N. 1. P. 60–64.
- [71] Luzyanina T., Roose D., Bocharov G. Distributed parameter identification for a label-structured cell population dynamics model CFSE histogram time-series data // *J. Math. Biol.* 2009. Vol. 59. P. 581–603.

- [72] Ma S., Zou X. Existence, uniqueness and stability of travelling waves in a discrete reaction-diffusion monostable equation with delay // *J. Differential Equations*. 2005. Vol. 217. P. 54–87.
- [73] Pao C.V. Numerical methods for system of nonlinear parabolic equations with time delay // *J. Math. Anal. Appl.* 1999. N. 240. P. 249–279.
- [74] Pao C.V. Finite difference reaction diffusion systems with coupled boundary conditions and time delay // *J. Math. Anal. Appl.* 2002. N. 272. P. 407–434.
- [75] V. Pimenov, A. Lekomtsev. Convergence of the scheme with weights for the numerical solution of a heat conduction equation with delay for the case of variable coefficient of heat conductivity // *Applied Mathematics and Computation*. 2015. Vol. 256, 1, P. 83–93.
- [76] Vladimir Pimenov and Andrey Lozhnikov. Numerical methods for evolutionary equations with delay and software package PDDE // *Lecture Notes in Computer Science*. 2013. Vol. 8236. P. 437–444.
- [77] A.D. Polyanin, V.F. Zaitsev. *Handbook of Nonlinear Partial Differential Equations*, 2nd Edition. Boca Raton: Chapman & Hall/CRC Press, 2012.
- [78] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact separable solutions of delay reaction-diffusion equations and other nonlinear partial functional-differential equations // *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*. 2014. Vol. 19, P. 409–416.
- [79] Polyanin A.D., Zhurov A.I. Exact solutions of linear and non-linear differential-difference heat and diffusion equations with finite relaxation time // *Int. J. Non-Linear Mechanics*. 2013. Vol. 54, pp. 115–126.
- [80] Skeel R.D. Analysis of Fixed-Stepsize Methods // *SIAM J. Numer. Anal.* 1976. V. 13 P. 664–683.
- [81] Solodushkin S.I. Numerical Solving of Functional Differential Equations in Partial Derivatives on a Remote Server through a Web Interface // *Lecture Notes in Computer Science*. 2013. Vol. 8236. P. 502–508.
- [82] Solodushkin S.I., Yumanova I.F., De Staelen R.H. First order partial differential equations with time delay and retardation of a state variable // *Journal of Computational and Applied Mathematics*. V. 289. N. 3. 2015. P. 322–330.
- [83] Tavernini L. Finite Difference Approximations for a Class of Semilinear Volterra Evolution Problems // *SIAM J. Numer. Anal.* 1977. Vol. 14, N. 5. P. 931–949.

- [84] Van Der Houwen P.J., Sommeijer B.P., Baker C.T.H. On the stability of predictor-corrector methods for parabolic equations with delay // *IMA J. Numer. Anal.* 1986. Vol. 6. P. 1–23.
- [85] Sapa L. A finite difference method for quasi-linear and nonlinear differential functional parabolic equations with Dirichlet's conditions // *Ann. Polon. Math.* 2008. Vol. 93, N. 2. P. 113–133.
- [86] Slodicka M. Parabolic partial differential equations with memory // *Math. Slovaca.* 1984. Vol. 34, N. 1. P. 3–34.
- [87] Voigt W. On finite-difference methods for parabolic functional-differential equations on unbounded domain. Sofia. Publ. House Bulgar. Acad. Sci. 1989.
- [88] Wang P., Meng F., Lui S. Interval oscillation criteria for second order partial differential equations with delays // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2008. Vol. 212. P. 397–405.
- [89] Wang P., Wu Y., Cacceta L. Forced oscillation of a class of neutral hyperbolic differential equations // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2005. Vol. 177. P. 301–308.
- [90] Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996. 428 c.
- [91] Yuan-Ming W., Pao C.V. Time delay finite difference reaction-diffusion systems with nonquasimonotone functional // *Numer. Math.* 2006. N. 103. P. 485–513.
- [92] Zhang Q., Zhang C. A compact difference scheme combined with extrapolation techniques for solving a class of neutral delay parabolic differential equations // *Appl. Math. Lett.* 2013. Vol. 26. P. 306–312.
- [93] Zou X. Delay induced traveling wave fronts in reaction diffusion equations of KPP-Fisher type // *J. of Comput. and Appl. Math.* 2002. Vol. 146. P. 309–321.
- [94] Zubik-Kowal B. Stability in the numerical solution of linear parabolic equations with delay term // *BIT.* 2001. Vol. 41. P. 191–206.
- [95] Zubik-Kowal B. The method of lines for parabolic differential-functional equations // *IMA J. Numer. Anal.* 1997. Vol. 17. P. 103–123.
- [96] Zubik-Kowal B., Vandewalle S. Waveform relaxation for functional-differential equations // *SIAM J. on Scientific Computing.* 1999. Vol. 21. N. 1. P. 207–226.