На правах рукописи

Таширова Екатерина Евгеньевна

Численные алгоритмы решения уравнений гиперболического типа с запаздыванием

Специальность 01.01.07 — вычислительная математика

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

Екатеринбург — 2016

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Института математики и компьютерных наук ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина».

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Пименов Владимир Германович
Официальные оппоненты:	Кипнис Михаил Мордкович, доктор физико-математических наук, профессор, ФГБОУ ВПО «Челябинский государственный педагогический университет», профессор кафедры математики и методики обучения математике.
	Шишленин Максим Александрович, кандидат физико-математических наук, ФГБУН «Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН», старший научный сотрудник лаборатории волновых процессов.
Ведущая организация:	ФГБУН «Институт вычислительной математики РАН».

Защита состоится «__» ________ 2016 г. в ____ на заседании диссертационного совета Д 004.006.04 на базе ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН» по адресу: 620990, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке и на сайте ФГБУН «Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН»,
http://wwwrus.imm.uran.ru/C16/Diss/.

Автореферат разослан «__» ________ 2016 года.

Ученый секретарь
диссертационного совета,
доктор физико-математических наук Скарин В. Д.

Общая характеристика работы

Актуальность темы и степень ее разработанности. Уравнения гиперболического типа с эффектом запаздывания, как и другие эволюционные уравнения с наследственностью, широко применяются в приложениях математического моделирования. Имеется большое количество работ по исследованию качественных свойств таких объектов[1,2]. Однако, в силу сложности объектов и невозможности применения аналитических методов отыскания решений, на первый план выходят численные методы[3,4,5], и в этой области конструктивных результатов недостаточно.

В работах В.Г. Пименова и его сотрудников[6,7,8]основным моментом в построении сеточных методов является идея разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей в предыстории искомой функции (разделение настоящего и прошлого). По конечномерной составляющей, входящей в линейную дифференциальную часть уравнения, строятся аналоги известных для объектов без наследственности сеточных методов, а для учета эффекта наследственности применяется интерполяция дискретной предыстории с заданными свойствами. Другая идея состоит в применении экстраполяции продолжением интерполяции дискретной предыстории. Такая экстраполяция необходима для реализации неявных методов, а кроме того, это позволяет избегать решения многомерных нелинейных систем при реализации сеточных алгоритмов на каждом временном слое. В совокупности эти идеи позволили создать простые и в то же время эффективные алгоритмы, которые могут быть положены в основу комплекса программ, предназначенного для численного решения уравнений в частных производных с наследственностью.

[1]Bainov D., Cui B.T, Minchev E. Oscillation properties of the solutions of hyperbolic equations with deviating arguments // Demon Math. 1996. V. 29. N. 1. P. 61–69.

[2]Wu J. Theory and applications of partial functional differential equations. New York: Springer-Verlag, 1996.

[3]Tavernini L. Finite Difference Approximations for a Class of Semilinear Volterra Evolution Problems // SIAM J. Numer. Anal. 1977. Vol. 14, N. 5. P. 931–949.

[4]Zubik-Kowal B. The method of lines for parabolic differential-functional equations // IMA J. Numer. Anal. 1997. Vol. 17. P. 103–123.

[5]Камонт З., Кропельницка К. Неявные разностные методы для эволюционных функционально-дифференциальных уравнений // Сиб. журн. вычис. математики. 2011. Т. 14, N. 4. С. 361–379.

[6]Пименов В.Г., Ложников А.Б. Разностные схемы численного решения уравнения теплопроводности с последействием // Труды ИММ УрО РАН. 2011. Т. 17, № 1. С. 178–189.

[7]Пименов В.Г., Лекомцев А.В. Сходимость метода переменных направлений численного решения уравнения теплопроводности с запаздыванием // Труды ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 1. С. 102–118.

[8]Пименов В.Г. Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью. Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2014.

Для уравнений гиперболического типа этот подход ранее не разрабатывался.

Цели и задачи диссертационной работы. Цель работы состоит в разработке сеточных методов решения одномерных и многомерных уравнений гиперболического типа с эффектом функционального запаздывания, а также связанной с ними системы уравнений акустики с запаздыванием. К задачам работы относятся обоснование сходимости разработанных алгоритмов и изучение факторов, оказывающих влияние на порядки сходимости.

Научная новизна. В диссертационной работе для уравнения гиперболического типа с одной пространственной переменной и с наличием нелинейно входящего эффекта функционального запаздывания по времени сконструировано семейство сеточных схем с весами, при этом эффект запаздывания учитывается в схеме с помощью интерполяции с заданными свойствами, а возможная неявность по этому эффекту преодолевается за счет экстраполяции. Исследованы локальные порядки схем этого семейства без учета интерполяции и с учетом интерполяции и экстраполяции. Получены условия на вес, гарантирующие устойчивость предложенных конструкций по начальным данным. С помощью конструкций общей теории разностных схем систем с наследственностью доказана теорема о сходимости и о порядках сходимости разработанных численных методов.

Для начально-краевой задачи гиперболического типа с двумя пространственными переменными и с наличием эффекта функционального запаздывания по времени разработано семейство разностных схем, допускающих факторизацию по пространственным переменным. Также как в одномерном случае, эффект запаздывания учитывается с помощью соответствующих интерполяционных и экстраполяционных конструкций. Факторизация позволяет свести расчеты по предложенному алгоритму к последовательному применению трехдиагональной прогонки. Исследованы порядки невязки без интерполяции и с интерполяцией относительно пространственных и временных шагов разбиения. Получены условия устойчивости и доказана теорема о порядках сходимости.

Для системы уравнений акустики с наличием эффекта запаздывания разработаны неявные сеточные схемы с учетом интерполяции дискретной предыстории модели. При этом неявность за счет экстраполяции возникает только в виде систем линейных уравнений с трехдиагональной матрицей. Изучены свойства локальной погрешности без учета интерполяции и с учетом интерполяции. С помощью вложения в общую разностную схему численного решения систем с наследственностью получена теорема о порядках сходимости.

Все теоретические результаты подтверждены тестовыми примерами, содержащими постоянное сосредоточенное, переменное и распределенное запаздывание.

Теоретическая и практическая значимость работы. Уравнения в частных производных, в том числе и гиперболического типа, с эффектом наследственности играют важную роль при описании различных явлений в науке и технике. Теоретическая значимость работы состоит в создании с единых позиций сеточных методов решения для одномерных и многомерных уравнений гиперболического типа с эффектом запаздывания общего вида, а также для систем уравнений акустики с подобным эффектом, в получении условий устойчивости и порядков сходимости методов. Создание эффективных и обоснованных с точки зрения сходимости численных методов послужит большему распространению таких уравнений в математическом моделировании, в этом состоит практическая значимость работы.

Методология и методы исследования. В основе исследования лежат понятия и методы теории разностных схем для решения уравнений в частных производных, см., например, книгу А.А.Самарского[9]. Так, следуя этой теории выводятся условия устойчивости однородных разностных схем, трехслойные схемы сводятся к двухслойным, используются методы факторизации многомерных алгоритмов[10]. Однако, исследуемые эффекты наследственности потребовали для построения и исследования разрабатываемых численных методов использовать также понятия и методологию численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений[11,12], особенно теоремы сходимости в общей схеме систем с наследственностью, в форме, приспособленной для уравнений с частными производными[6,8].

Достоверность результатов. Достоверность полученных в работе результатов подтверждается соответствующими математическими доказательствами и проведенными компьютерными экспериментами на тестовых примерах.

Апробация работы. Основные результаты докладывались и обсуждались

[9]Самарский А.А. Теория разностных схем. 3-е изд. М.: Наука, 1989.

[10]Калиткин Н.Н. Численные методы. М., Наука, 1978.

[11]Пименов В.Г. Общие линейные методы численного решения функционально-дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 1. С. 105–114.

[12]Ким А.В., Пименов В.Г. i-Гладкий анализ и численные методы решения функционально-дифференциальных уравнений. М.; Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2004.

на семинарах кафедры вычислительной математики Института математики и компьютерных наук Уральского федерального университета, Международной конференции «Алгоритмический анализ неустойчивых задач», посвященной памяти В.К. Иванова (Екатеринбург, 2011, Челябинск, 2014), VI Всероссийской конференции «Актуальные проблемы математики и механики», посвященной памяти А.Ф. Сидорова (Абрау-Дюрсо, 2012), 44-ой, 45-ой, 46-ой, 47-ой Международных молодежных школах-конференциях «Современные проблемы математики и ее приложений» (Екатеринбург, 2013, 2014, 2015, 2016), Международной конференции «Колмогоровские чтения - VI. Общие проблемы управления и их приложения» (Тамбов, 2013), Всероссийской конференции с международным участием «Теория управления и математическое моделирование», посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова (Ижевск, 2015), семинаре отдела некорректных задач анализа и приложений Института математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1–3, 5–10], а также составили главу 5 в монографии [4]. Работы [2, 3, 5] опубликованы в журналах, входящих в перечень ВАК.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, заключения и списка литературы. Общий объем работы составляет 94 страницы машинописного текста. Библиография содержит 96 наименований.

Основное содержание работы

Во **введении** обосновывается актуальность исследований, проводимых в рамках данной диссертационной работы, приводится обзор научной литературы по изучаемой проблеме, ставятся цели и задачи работы, изложена ее научная и практическая значимость.

В **главе 1** конструируются и исследуются численные алгоритмы решения волнового уравнения с эффектом наследственности.

В **разделе 1.1** рассматривается начально-краевая задача для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) + f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot))\colon t_0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X, \qquad (1)$$

с граничными условиями $u(0,t) = g_1(t),\ u(X,t) = g_2(t)\colon t_0 \leqslant t \leqslant T$ и начальными условиями $u(x,t) = \varphi(x,t)\colon 0 \leqslant x \leqslant X,\ t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$. Здесь x, t — независимые переменные; $u(x,t)$ — искомая функция; $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+\xi), -\tau \leqslant \xi < 0\}$

— функция предыстория искомой функции к моменту t; τ — величина запаздывания; $f(x,t,u,u_t(x,\cdot))$ — функционал, определенный на $[0,X]\times[t_0,T]\times\mathbb{R}\times Q$; $Q = Q[-\tau,0)$ — множество функций $u(\xi)$, кусочно-непрерывных на $[-\tau,0)$ с конечным числом точек разрыва первого рода, в точках разрыва непрерывных справа, $\|u(\cdot)\|_Q = \sup_{\xi\in[-\tau,0)}|u(\xi)|$.

В **разделе 1.2** проводится дискретизация этой задачи и описывается семейство численных методов. Отрезок $[0,X]$ разбивается на части с шагом $h = X/N$, где N — некоторое целое число. Вводятся точки $x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,N$. Отрезок $[t_0,T]$ разбивается на части с шагом Δ так, чтобы $m = \tau/\Delta$ было целым числом. Вводятся точки $t_j = \ t_0 + j\Delta,\ j = -m,\ldots,M$, где $M = \lfloor T/\Delta \rfloor$. Приближение точного решения $u(x_i,t_j)$ обозначается через u^i_j. Вводится дискретная предыстория к моменту t_j при каждом фиксированном i: $\{u^i_l\}_j = \{u^i_l\colon j-m \leqslant l \leqslant j\}$.

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории называется отображение: $I:\{u^i_l\}_j \to v^i_j(\cdot) \in Q[-\tau,\Delta]$. Вводится определение порядка погрешности оператора интерполяции-экстраполяции.

Рассматривается семейство методов с весами $(0 \leqslant s \leqslant 1)$:

$$\frac{u^i_{j+1} - 2u^i_j + u^i_{j-1}}{\Delta^2} = sa^2\frac{u^{i-1}_{j+1} - 2u^i_{j+1} + u^{i+1}_{j+1}}{h^2} + sa^2\frac{u^{i-1}_{j-1} - 2u^i_{j-1} + u^{i+1}_{j-1}}{h^2} +$$

$$+ (1-2s)a^2\frac{u^{i-1}_j - 2u^i_j + u^{i+1}_j}{h^2} + F^i_j(v^i_j(\cdot)),\ i = 1,\ldots,N-1,\ j = 0,\ldots,M-1 \quad (2)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Здесь $F^i_j(v(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на функциях $v(\cdot) = v^i_j(\cdot) = I(\{u^i_l\}_j) \in Q[-\tau,\Delta]$ и связанный с функционалом $f(x_i,t_j,u^i_j,v^i_j(\cdot))$.

При $s = 0$ получается явная схема, при других s $(0 < s \leqslant 1)$, при каждом фиксированном j система является линейной трехдиагональной относительно u^i_{j+1} с диагональным преобладанием, она эффективно решается методом прогонки.

В этом же разделе вводится и исследуется величина, характеризующая погрешность аппроксимации метода (невязка). Невязка (без интерполяции) метода определяется следующим образом:

$$\psi^i_j = \frac{u(x_i,t_{j+1}) - 2u(x_i,t_j) + u(x_i,t_{j-1})}{\Delta^2} -$$

$$- sa^2\frac{u(x_{i-1},t_{j+1}) - 2u(x_i,t_{j+1}) + u(x_{i+1},t_{j+1})}{h^2} -$$

$$- \ sa^2 \frac{u(x_{i-1}, t_{j-1}) - 2u(x_i, t_{j-1}) + u(x_{i+1}, t_{j-1})}{h^2} -$$

$$- \ (1-2s)a^2 \frac{u(x_{i-1}, t_j) - 2u(x_i, t_j) + u(x_{i+1}, t_j)}{h^2} - F_j^i(u_{t_j}(x_i, \cdot)). \qquad (3)$$

Рассматривается семейство методов (2), в которых функционал F_j^i определяется следующим образом:

$$F_j^i(v_j^i(\cdot)) = f(t_j, x_i, u_j^i, \widehat{v}_j^i(\cdot)), \qquad (4)$$

где $\widehat{v}_j^i(\cdot) \in Q[-\tau, 0)$; $\widehat{v}_j^i(\xi) = v_j^i(\xi), -\tau \leqslant \xi < 0$.

Доказывается следующая теорема.

Теорема 1. *Если для точного решения задачи* (1) *существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,* F_j^i *определяется соотношением* (4)*, то для любого* $0 \leqslant s \leqslant 1$ *невязка имеет порядок* $h^2 + \Delta^2$.

В **разделе 1.3** проводится исследование порядков сходимости методов из описанного выше семейства. Обозначим величину погрешности метода в узлах через $\varepsilon_j^i = u(x_i, t_j) - u_j^i$. Будем говорить, что метод сходится с порядком $h^p + \Delta^q$, если существует такая константа C, не зависящая от Δ, h, что выполняется неравенство $|\varepsilon_j^i| \leqslant C(h^p + \Delta^q)$ для всех $i = 0, \ldots, N$, $j = 0, \ldots, M$.

Схемы семейства (2) исследуются на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему решения уравнений с наследственностью, следуя методике работ[6,8,11,12]. Предварительно описывается эта схема. Главным ее элементом является пошаговая формула

$$\gamma_{n+1} = S\gamma_n + \Delta\Phi(t_n, I(\{\gamma_l\}_n)), \qquad (5)$$

где γ_n — элемент банахова пространства моделей, S — линейный оператор, $I(\{\gamma_l\}_n)$ — оператор интерполяции дискретной предыстории модели к моменту t_n, Φ — функция, липшицевая по второму аргументу.

Основным результатом этой теории является теорема о порядке сходимости, вариант которой приводится в диссертации.

Далее в разделе 1.3 приводятся конструкции, сводящие метод (2) к пошаговой формуле (5). В этом разделе рассматриваются задачи с однородными краевыми условиями: $u(0,t) = u(X,t) = 0$, $t_0 \leqslant t \leqslant T$. При каждом t_j определим значения дискретной модели вектором $\widetilde{\gamma}_j = (u_j^0, u_j^1, \ldots, u_j^N)' \in \widetilde{\Gamma}$, где $'$ — знак транспонирования, $\widetilde{\Gamma}$ — векторное пространство размерности $N+1$ со скалярным произведением:

$$(\widetilde{\gamma},\widetilde{\omega}) = \sum_{i=0}^{N} \widetilde{\gamma}^i \widetilde{\omega}^i h, \widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}^0, \widetilde{\gamma}^1, \ldots, \widetilde{\gamma}^N)' \in \widetilde{\Gamma},\ \widetilde{\mu} = (\widetilde{\mu}^0, \widetilde{\mu}^1, \ldots, \widetilde{\mu}^N)' \in \widetilde{\Gamma}. \qquad (6)$$

В пространстве $\widetilde{\Gamma}$ вводятся операторы A и R:

$$A\widetilde{\gamma}_j = \widetilde{\mu}_j,\ \ \widetilde{\mu}_j = (\widetilde{\mu}_j^0, \widetilde{\mu}_j^1, \ldots, \widetilde{\mu}_j^N)',$$

$$\widetilde{\mu}_j^i = -a^2 \frac{u_j^{i-1} - 2u_j^i + u_j^{i+1}}{h^2} : 1 \leqslant i \leqslant N-1,\ \ \widetilde{\mu}_j^0 = 0,\ \ \widetilde{\mu}_j^N = 0,$$

$$R = \frac{1}{\Delta^2} E + sA.$$

Операторы A и R самосопряженные и положительные в смысле скалярного произведения векторов (6). Предположим, что выполнено условие

$$R > \frac{1}{4} A. \qquad (7)$$

В пространстве $\widetilde{\Gamma}$ вводится норма:

$$\|\widetilde{\gamma}_n\|_{\widetilde{\Gamma}} = \sqrt{\frac{1}{4}(A(\widetilde{\gamma}_n + \widetilde{\gamma}_{n-1}),\, \widetilde{\gamma}_n + \widetilde{\gamma}_{n-1}) + ((R - \frac{1}{4}A)(\widetilde{\gamma}_n - \widetilde{\gamma}_{n-1}),\, \widetilde{\gamma}_n - \widetilde{\gamma}_{n-1})}.$$

Тогда систему (2) можно привести к виду

$$\widetilde{\gamma}_{j+1} = 2\widetilde{\gamma}_j - \widetilde{\gamma}_{j-1} - R^{-1}A\widetilde{\gamma}_j + R^{-1}F_j(I(\{\widetilde{\gamma}_l\}_j)),$$

где $F_j(v(\cdot)) = (F_j^0(v_j^0(\cdot)), F_j^1(v_j^1(\cdot)), \ldots, F_j^N(v_j^N(\cdot)))'$, $v(\cdot) \in Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$, $Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$ — пространство вектор-функций, каждая компонента которых принадлежит $Q[-\tau, \Delta]$.

Вводится вектор $\gamma_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)' = (\widetilde{\gamma}_{j-1}, \widetilde{\gamma}_j)' \in \Gamma$, где Γ — векторное пространство размерности $q = 2(N+1)$. Считаем, что если в пространстве $\widetilde{\Gamma}$ определена норма, то в пространстве Γ норма определяется следующим образом: $\|\gamma\|_\Gamma^2 = \|\gamma^1\|_{\widetilde{\Gamma}}^2 + \|\gamma^2\|_{\widetilde{\Gamma}}^2$. В результате получаем разностную схему (5), где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - R^{-1}A \end{pmatrix}, \Phi(t_n, I(\{\gamma_l\}_n)) = \begin{pmatrix} 0 \\ R^{-1}F_n(I(\{\gamma_l^2\}_n))/\Delta \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Определяются также другие конструкции общей разностной схемы решения уравнений с наследственностью: функция точных значений, стартовые значения модели. Понятие погрешности аппроксимации (невязки с интерполяцией) в общей разностной схеме отличается от ранее введенного понятия невязки без интерполяции, однако имеет место утверждение.

Теорема 3. *Пусть невязка без интерполяции* (3) *имеет порядок* $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, *функции* F_j^i *липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции* I *имеет порядок погрешности* p_0 *на точном решении,* $\sigma = a^2\Delta^2/h^2$ *зафиксировано, тогда невязка с интерполяцией имеет одинаковый порядок погрешности по* Δ *и* h, *равный* $\Delta^{\min\{p_0,p_1,p_2\}}$.

Далее исследуется устойчивость метода. Схема (5) называется устойчивой, если выполняется условие $\|S\|_\Gamma \leqslant 1$. Используя результаты общей теории разностных схем[9], доказывается, что схема (5), (8) устойчива при выполнении условия (7), которое выполнено, если

$$s > \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{\sigma}\right). \tag{9}$$

Вложение в общую разностную схему с наследственностью проведено, отсюда получаем следующий результат.

Теорема 4. *Пусть выполнено условие устойчивости* (9), *невязка без интерполяции* (3) *имеет порядок* $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, *функции* F_j^i *липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции* I *липшицев и имеет порядок погрешности* p_0 *на точном решении, стартовые значения имеют порядок* $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$, σ *зафиксировано, тогда метод* (2) *сходится с порядком* $\Delta^{\min\{p_0,p_1,p_2,p_3\}} + h^{\min\{p_0,p_1,p_2,p_4\}}$.

Опираясь на теорему 4, получаем следующее следствие

Следствие 1. *Если для точного решения задачи* (1) *существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,* F_j^i *задается соотношением* (4), *применяется кусочно-линейная интерполяция, выполнено условие устойчивости* (9), σ *зафиксировано, тогда метод* (2) *сходится с порядком* $h^2 + \Delta^2$.

В **разделе 1.4** приводятся результаты компьютерного моделирования вычислений по описанным выше алгоритмам для тестовых примеров уравнений гиперболического типа с постоянным, переменным и распределенным запаздыванием. Все тесты подобраны так, чтобы задачи имели известные точные решения. Сравнивая результаты вычислений для разностных схем с различными шагами дискретизации по времени и по пространству, получаем, что при выполнении условий устойчивости приближенные решения сходятся к точным при уменьшении шагов дискретизации.

В **главе 2** конструируются и исследуются численные алгоритмы решения волнового уравнения с эффектом наследственности с двумя пространственными переменными.

В **разделе 2.1** рассматривается начально-краевая задача для уравнения вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,y,t) = a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,y,t) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}(x,y,t)\right) + f(x,y,t,u(x,y,t),u_t(x,y,\cdot))\colon$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y \tag{10}$$

с граничными условиями $u(0,y,t) = g_0(y,t),\ u(X,y,t) = g_1(y,t),\ :\ 0 \leqslant y \leqslant Y,\ t_0 \leqslant t \leqslant T$, $u(x,0,t) = g_2(x,t),\ u(x,Y,t) = g_3(x,t)\ :\ 0 \leqslant x \leqslant X,\ t_0 \leqslant t \leqslant T$ и начальными условиями $u(x,y,t) = \varphi(x,y,t)\colon 0 \leqslant x \leqslant X,\ 0 \leqslant y \leqslant Y,\ t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0$. Здесь x, y, t — независимые переменные; $u(x,y,t)$ — искомая функция; $u_t(x,y,\cdot) = \{u(x,y,t+\xi), -\tau \leqslant \xi < 0)\}$ — функция предыстория искомой функции к моменту t; τ — величина запаздывания; $f(x,y,t,u,u_t(x,y,\cdot))$ — функционал, определенный на $[0,X] \times [0,Y] \times [t_0,T] \times \mathbb{R} \times Q[-\tau,0)$.

В **разделе 2.2** проводится дискретизация задачи и строится семейство численных методов. Отрезок $[0,X]$ разбивается на части с шагом $h_1 = X/N_1$, отрезок $[0,Y]$ на части с шагом $h_2 = Y/N_2$, где N_1, N_2 — некоторые целые числа. Вводятся точки $x_i = ih_1,\ i = 0,1,\ldots,N_1$, $y_k = kh_2,\ k = 0,1,\ldots,N_2$. Отрезок $[t_0,T]$ разбивается на части с шагом Δ так, чтобы $m = \tau/\Delta$ было целым числом. Вводятся точки $t_j =\ t_0 + j\Delta,\ j = -m,\ldots,M$, где $M = \lfloor T/\Delta \rfloor$. Приближение точного решения $u(x_i,y_k,t_j)$ обозначается через $u_j^{i,k}$. Вводится дискретная предыстория к моменту t_j при фиксированных i,k: $\{u_l^{i,k}\}_j = \{u_l^{i,k}\colon j-m \leqslant l \leqslant j\}$.

Оператором интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории называется отображение: $I : \{u_l^{i,k}\}_j \to v_j^{i,k}(\cdot) \in Q[-\tau,\Delta]$.

Рассматривается семейство методов с весами $(0 \leqslant s \leqslant 1)$:

$$\frac{u_{j+1}^{i,k} - 2u_j^{i,k} + u_{j-1}^{i,k}}{\Delta^2} = sa^2\left(\frac{u_{j+1}^{i-1,k} - 2u_{j+1}^{i,k} + u_{j+1}^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{j+1}^{i,k-1} - 2u_{j+1}^{i,k} + u_{j+1}^{i,k+1}}{h_2^2}\right) +$$

$$+ sa^2\left(\frac{u_{j-1}^{i-1,k} - 2u_{j-1}^{i,k} + u_{j-1}^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_{j-1}^{i,k-1} - 2u_{j-1}^{i,k} + u_{j-1}^{i,k+1}}{h_2^2}\right) +$$

$$+ (1-2s)a^2\left(\frac{u_j^{i-1,k} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i+1,k}}{h_1^2} + \frac{u_j^{i,k-1} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i,k+1}}{h_2^2}\right) + F_j^{i,k}(v_j^{i,k}(\cdot)),$$

$$i = 1,\ldots,N_1-1,\ k = 1,\ldots,N_2-1,\ j = 0,\ldots,M-1, \tag{11}$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Здесь $F_j^{i,k}(v(\cdot))$ — некоторый функционал, определенный на функциях $v(\cdot) = v_j^{i,k}(\cdot) = I(\{u_l^{i,k}\}_j) \in Q[-\tau,\Delta]$ и связанный с функционалом $f(x_i,y_k,t_j,u_j^{i,k},v_j^{i,k}(\cdot))$.

Для того чтобы привести систему к виду, при котором ее можно решить методом прогонки, производится переход к факторизованной схеме[10].

Раздел 2.3 посвящен сведению полученной схемы к факторизованной. При каждом t_j определим значения дискретной модели $\widetilde{\gamma}_j = (u_j^{0,0}, u_j^{0,1}, \ldots, u_j^{0,N_2}, u_j^{1,0}, u_j^{1,1}, \ldots, u_j^{1,N_2}, \ldots, u_j^{N_1,0}, u_j^{N_1,1}, \ldots, u_j^{N_1,N_2-1}, u_j^{N_1,N_2})' \in \widetilde{\Gamma}$, где $\widetilde{\Gamma}$ — векторное пространство размерности $q = (N_1+1)(N_2+1)$ со скалярным произведением:

$$(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\mu}) = \sum_{i=0}^{N_1} \sum_{k=0}^{N_2} \widetilde{\gamma}_{i,k} \widetilde{\mu}_{i,k} h_1 h_2, \widetilde{\gamma} = (\widetilde{\gamma}_{0,0}, \widetilde{\gamma}_{0,1}, \ldots, \widetilde{\gamma}_{N_1,N_2})' \in \widetilde{\Gamma},$$

$$\widetilde{\mu} = (\widetilde{\mu}_{0,0}, \widetilde{\mu}_{0,1}, \ldots, \widetilde{\mu}_{N_1,N_2})' \in \widetilde{\Gamma}.$$

В пространстве $\widetilde{\Gamma}$ вводятся операторы A_1, A_2 и R:

$$A_1 \widetilde{\gamma}_j = \widetilde{\mu}_j, \ \widetilde{\mu}_j = (\widetilde{\mu}_j^{0,0}, \widetilde{\mu}_j^{0,1}, \ldots, \widetilde{\mu}_j^{N_1,N_2})',$$

$$\widetilde{\mu}_j^{i,k} = -a^2 \frac{u_j^{i-1,k} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i+1,k}}{h_1^2} : 1 \leqslant i \leqslant N_1 - 1, \ \widetilde{\mu}_j^{0,k} = 0, \ \widetilde{\mu}_j^{N_1,k} = 0,$$

$$A_2 \widetilde{\gamma}_j = \widetilde{\omega}_j, \ \widetilde{\omega}_j = (\widetilde{\omega}_j^{0,0}, \widetilde{\omega}_j^{0,1}, \ldots, \widetilde{\omega}_j^{N_1,N_2})',$$

$$\widetilde{\omega}_j^{i,k} = -a^2 \frac{u_j^{i,k-1} - 2u_j^{i,k} + u_j^{i,k+1}}{h_2^2} : 1 \leqslant k \leqslant N_2 - 1, \ \widetilde{\omega}_j^{i,0} = 0, \ \widetilde{\omega}_j^{i,N_2} = 0,$$

$$R = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2.$$

Тогда систему (11) можно привести к виду:

$$R(\widetilde{\gamma}_{j+1} - 2\widetilde{\gamma}_j + \widetilde{\gamma}_{j-1}) + \Delta^2 (A_1 + A_2) \widetilde{\gamma}_j = \Delta^2 F_j(I(\{\widetilde{\gamma}_l\}_j)),$$

где $F_j(v(\cdot)) = (F_j^{0,0}(v_j^{0,0}(\cdot)), F_j^{0,1}(v_j^{0,1}(\cdot)), \ldots, F_j^{N_1,N_2}(v_j^{N_1,N_2}(\cdot))'$, $v(\cdot) = I(\{\widetilde{\gamma}_l\}_j) \in Q^q[-\tau, \Delta]$.

Вводятся операторы R_1 и R_2: $R_1 = E + \Delta^2 s A_1$, $R_2 = E + \Delta^2 s A_2$. С учетом соотношения $(E + \Delta^2 s A_1)(E + \Delta^2 s A_2) = E + \Delta^2 s A_1 + \Delta^2 s A_2 + O(\Delta^4)$, получается следующее равенство

$$R = R_1 R_2 + O(\Delta^4). \tag{12}$$

Операторы $(A_1 + A_2)$ и $R_1 R_2$ самосопряженные и положительные. Предполагается, что выполнено условие

$$\frac{1}{\Delta^2} R_1 R_2 > \frac{1}{4}(A_1 + A_2). \tag{13}$$

В пространстве $\widetilde{\Gamma}$ вводится норма:

$$\|\widetilde{\gamma}_n\|_{\widetilde{\Gamma}} = \sqrt{\frac{1}{4}\left((A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}_n^+,\, \widetilde{\gamma}_n^+\right) + \left(\left(\frac{1}{\Delta^2}R_1R_2 - \frac{1}{4}(A_1 + A_2)\right)\widetilde{\gamma}_n^-,\, \widetilde{\gamma}_n^-\right)},$$

где $\widetilde{\gamma}_n^+ = \widetilde{\gamma}_n + \widetilde{\gamma}_{n-1}$, $\widetilde{\gamma}_n^- = \widetilde{\gamma}_n - \widetilde{\gamma}_{n-1}$.

Используя соотношение (12), переходим к факторизованной схеме:

$$R_1R_2(\widetilde{\gamma}_{j+1} - 2\widetilde{\gamma}_j + \widetilde{\gamma}_{j-1}) + \Delta^2(A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}_j = \Delta^2 F_j(v(\cdot)). \tag{14}$$

Система эффективно решается с помощью двух прогонок по каждому из направлений x и y.

В **разделе 2.4** вводится и исследуется величина $\psi_j^{i,k}$, характеризующая погрешность аппроксимации метода (невязка).

Рассматривается схема (14), в которой функционал $F_j^{i,k}$ определяется следующим образом:

$$F_j^{i,k}(v_j^{i,k}(\cdot)) = f(x_i, y_k, t_j, u_j^{i,k}, \widehat{v}_j^{i,k}(\cdot)), \tag{15}$$

где $\widehat{v}_j^{i,k}(\cdot) \in Q[-\tau, 0)$; $\widehat{v}_j^{i,k}(\xi) = v_j^{i,k}(\xi), -\tau \leqslant \xi < 0$.

Доказывается теорема о порядке невязки построенного метода.

Теорема 5. *Если для точного решения задачи* (10) *существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,* $F_j^{i,k}$ *определяется соотношением* (15), *то для любого* $0 \leqslant s \leqslant 1$ *невязка имеет порядок* $h_1^2 + h_2^2 + \Delta^2$.

В **разделе 2.5** производится исследование порядков сходимости методов описанного выше семейства.

Для исследования сходимости схемы используется общая разностная схема численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений, модифицированная для случая двух пространственных переменных и, следовательно, двух параметров h_1 и h_2. Излагаются основные понятия и утверждения модифицированной схемы, формулируется и доказывается основная теорема о сходимости.

Уравнение (14) приводится к явной форме

$$\widetilde{\gamma}_{j+1} = 2\widetilde{\gamma}_j - \widetilde{\gamma}_{j-1} - \Delta^2 R_2^{-1}R_1^{-1}(A_1 + A_2)\widetilde{\gamma}_j + \Delta^2 R_2^{-1}R_1^{-1}(F_j(v(\cdot))).$$

Вводится вектор $\gamma_j = (\gamma_j^1, \gamma_j^2)' = (\widetilde{\gamma}_{j-1}, \widetilde{\gamma}_j)' \in \Gamma$, где Γ — пространство размерности $q = 2(N_1 + 1)(N_2 + 1)$.

В результате получаем пошаговую формулу (5), где

$$S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 - \Delta^2 R_2^{-1} R_1^{-1}(A_1 + A_2) \end{pmatrix}, \Phi(t_n, I(\{\gamma_l\}_n)) = \begin{pmatrix} 0 \\ \Delta R_2^{-1} R_1^{-1} F_n(I(\{\gamma_l^2\}_n)) \end{pmatrix} \quad (16)$$

Определяются функция точных значений и стартовые значения для схемы (14).

Подобно тому, как это было сделано в предыдущей главе, устанавливается связь между порядком невязки без интерполяции, порядком погрешности оператора интерполяции-экстраполяции и порядком невязки с интерполяцией.

Далее исследуется устойчивость схемы (5), (16). С помощью результатов общей теории разностных схем доказывается, что схема устойчива при выполнении условия (13), которое справедливо, если

$$(1 - 4s)(\sigma_1 + \sigma_2) < 1, \quad (17)$$

где $\sigma_1 = a^2\Delta^2/h_1^2$, $\sigma_2 = a^2\Delta^2/h_2^2$.

Вложение в общую разностную схему проведено, получаем следующее утверждение.

Теорема 8. *Пусть выполнено условие устойчивости* (17)*, невязка без интерполяции имеет порядок* $\Delta^{p_1} + h_1^{p_2} + h_2^{p_3}$*, функционалы* $F_j^{i,k}$ *липшицевы, оператор интерполяции-экстраполяции* I *имеет порядок погрешности* p_0 *на точном решении, стартовые значения имеют порядок* $\Delta^{p_4} + h_1^{p_5} + h_2^{p_6}$*,* σ_1 *и* σ_2 *зафиксированы, тогда метод* (14) *сходится с порядком*
$\Delta^{\min\{p_0,p_1,p_2,p_3,p_4\}} + h_1^{\min\{p_0,p_1,p_2,p_3,p_5\}} + h_2^{\min\{p_0,p_1,p_2,p_3,p_6\}}$.

Следствие 2. *Если для точного решения задачи* (10) *существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 4-го порядка включительно,* $F_j^{i,k}$ *задается соотношением* (15)*, применяется кусочно-линейная интерполяция, выполнено условие устойчивости* (17)*,* σ_1 *и* σ_2 *зафиксированы, тогда метод* (14) *сходится с порядком* $\Delta^2 + h_1^2 + h_2^2$.

В **разделе 2.6** приводятся результаты компьютерного моделирования вычислений по описанным выше алгоритмам для тестовых примеров уравнений гиперболического типа с двумя пространственными переменными.

В **главе 3** конструируется и исследуется численный метод для систем уравнений акустики с последействием. Уравнение гиперболического типа без запаздывания можно заменить эквивалентной ему системой уравнений акустики[10]. Однако в случае уравнений с запаздыванием такая замена не будет эквивалентной. Поэтому в данной главе рассматривается система уравнений акустики как самостоятельный объект, без привязки к уравнениям гиперболического типа.

В **разделе 3.1** рассматривается система уравнений акустики с эффектом наследственности

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial w}{\partial x}(x,t)\colon t_0 \leqslant t \leqslant T,\ 0 \leqslant x \leqslant X,$$
$$\frac{\partial w}{\partial t}(x,t) = \frac{\partial u}{\partial x}(x,t) + f(x,t,u(x,t),u_t(x,\cdot)) \qquad (18)$$

с граничными условиями $u(0,t) = g_1(t),\ u(X,t) = g_2(t),\ w(0,t) = g_3(t),$ $w(X,t) = g_4(t)\colon t_0 \leqslant t \leqslant T$ и начальными условиями $u(x,t) = \varphi_1(x,t)\colon 0 \leqslant x \leqslant X,\ t_0 - \tau \leqslant t \leqslant t_0,\ w(x,t_0) = \varphi_2(x)\colon 0 \leqslant x \leqslant X$. Здесь x, t — независимые переменные; $u(x,t), w(x,t)$ — искомые функции; $u_t(x,\cdot) = \{u(x,t+\xi), -\tau \leqslant \xi < 0\}$ – функция-предыстория искомой функции к моменту t; τ – величина запаздывания; $f(t,x,u,u_t(x,\cdot))$ – функционал, определенный на $[t_0,T]\times[0,X]\times R\times Q[-\tau,0)$.

В **разделе 3.2** проводится дискретизация задачи и описывается численный метод. Отрезок $[0,X]$ разбивается на части с шагом $h = X/N$, где N – некоторое целое число. Вводятся точки $x_i = ih,\ i = 0,1,\ldots,N$. Отрезок $[t_0,T]$ разбивается на части с шагом $\Delta,\ t_j = t_0 + j\Delta,\ j = -m,\ldots,M$. Приближение точного решения системы $\widetilde{u}(x_i,t_j) = (u(x_i,t_j), w(x_i + h/2, t_j))'$ обозначается через $\widetilde{u}^i_j = (u^i_j, w^i_j)'$. $\|\widetilde{u}^i_j\|_2 = \sqrt{(u^i_j)^2 + (w^i_j)^2}$.

Для системы уравнений акустики без запаздывания можно построить метод[10], имеющий порядок $h^2 + \Delta^2$. Для построения аналогичного метода для систем уравнений акустики с последействием потребуется вычислять f в полуцелых узлах по переменной x. Это требование приводит к необходимости расширения понятия оператора интерполяции-экстраполяции.

Вводится оператор двойной интерполяции-экстраполяции дискретной предыстории: $I\colon (\{u^i_l\}_j, \{u^{i+1}_l\}_j) \to v^{i+1/2}_j(\cdot) \in Q[-\tau,\Delta]$; определение порядка оператора двойной интерполяции-экстраполяции.

Приводится способ построения оператора двойной интерполяции-экстраполяции. Для двух дискретных предысторий $\{u^i_l\}_j = \{u^i_l\colon j-m \leqslant l \leqslant j\}$, $\{u^{i+1}_l\}_j = \{u^{i+1}_l\colon j-m \leqslant l \leqslant j\}$ определим средние точки

$$\{u^{i+1/2}_l\}_j = \left\{\frac{u^{i+1}_l + u^i_l}{2}\colon j-m \leqslant l \leqslant j\right\}.$$

Проведем через эти точки кусочно-линейную интерполяцию

$$v^{i+1/2}_j(\xi) = \frac{1}{\Delta}((t_l - t_j - \xi)u^{i+1/2}_{l-1} + (t_j + \xi - t_{l-1})u^{i+1/2}_l), \qquad (19)$$

$$t_{l-1} \leqslant t_j + \xi \leqslant t_l, \ -\tau \leqslant \xi \leqslant 0$$

с экстраполяцией продолжением

$$v_j^{i+1/2}(\xi) = \frac{1}{\Delta}((-\xi)u_{j-1}^{i+1/2} + (\Delta + \xi)u_l^{i+1/2}), \ t_j \leqslant t_j + \xi \leqslant t_{j+1}, \ \xi > 0. \qquad (20)$$

Доказываются теоремы о порядке и липшицевости построенного оператора.

Рассматривается метод:

$$\frac{u_{j+1}^i - u_j^i}{\Delta} = \frac{(w_{j+1}^i - w_{j+1}^{i-1}) + (w_j^i - w_j^{i-1})}{2h},$$

$$\frac{w_{j+1}^i - w_j^i}{\Delta} = \frac{(u_{j+1}^{i+1} - u_{j+1}^i) + (u_j^{i+1} - u_j^i)}{2h} + F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)),$$

$$i = 1, \dots, N-1, \ j = 0, \dots, M-1 \qquad (21)$$

с соответствующими граничными и начальными условиями. Здесь $F_j^i(v(\cdot))$ – некоторый функционал, определенный на функциях $v(\cdot) = v_j^{i+1/2}(\cdot) = I(\{u_l^i\}_j, \{u_l^{i+1}\}_j) \in Q[-\tau, \Delta]$ и связанный с функционалом $f(x_i, t_j, u_j^i, v_j^{i+1/2}(\cdot))$.

Схема неявная, но она может быть преобразована к виду, в котором ее можно эффективно решить методом прогонки.

Раздел 3.3 посвящен исследованию погрешности аппроксимации построенного метода (невязке). Метод (21) преобразуется к виду

$$\frac{1}{\Delta}(\widetilde{u}_{j+1}^i - \widetilde{u}_i^j) = \frac{1}{2h}\Lambda_1(\widetilde{u}_{j+1}^{i-1} + \widetilde{u}_j^{i-1}) - \frac{1}{2h}(\Lambda_1 + \Lambda_2)(\widetilde{u}_{j+1}^i + \widetilde{u}_j^i) +$$

$$+ \frac{1}{2h}\Lambda_2(\widetilde{u}_{j+1}^{i+1} + \widetilde{u}_j^{i+1}) + \widetilde{F}_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)), \qquad (22)$$

где $\widetilde{u}_j^i = (u_j^i, w_j^i)'$, $\Lambda_1\widetilde{u}_j^i = (-w_j^i, 0)'$, $\Lambda_2\widetilde{u}_j^i = (0, u_j^i)'$, $\widetilde{F}_j^i(v(\cdot)) = (0, F_j^i(v(\cdot)))'$.

Рассмотривается метод (21), в котором функционал F_j^i определяется следующим образом:

$$F_j^i(v_j^{i+1/2}(\cdot)) = f(t_{j+1/2}, x_{i+1/2}, v_j^{i+1/2}(\Delta/2), \overline{v}_j^{i+1/2}(\cdot)), \qquad (23)$$

где $t_{j+1/2} = t_j + \Delta/2$, $x_{i+1/2} = x_i + h/2$; $\overline{v}_j^{i+1/2}(\xi) = v_j^{i+1/2}(\xi + \Delta/2)$, $-\tau \leqslant \xi < 0$.

Теорема 11. *Если для точного решения задачи* (18) *существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно,* F_j^i *определяется соотношением* (23), *то невязка (без интерполяции) имеет порядок* $h^2 + \Delta^2$.

В **разделе 3.4** схема (21) исследуется на сходимость с помощью вложения в общую разностную схему, которая изложена в разделе 1.3.

При каждом t_j определим значения дискретной модели вектором $\gamma_j = (\widetilde{u}_j^0, \widetilde{u}_j^1, \widetilde{u}_j^2, \ldots, \widetilde{u}_j^{N-1}, \widetilde{u}_j^N)' = (u_j^0, w_j^0, u_j^1, w_j^1, u_j^2, w_j^2, \ldots u_j^{N-1}, w_j^{N-1}, u_j^N, w_j^N)' \in \Gamma$, Γ — векторное пространство размерности $2(N+1)$ со скалярным произведением

$$(\gamma, \mu) = \sum_{l=0}^{2N+1} \gamma^i \mu^i h, \gamma = (\gamma^0, \gamma^1, \ldots, \gamma^{2N+1})' \in \Gamma,\ \mu = (\mu^0, \mu^1, \ldots, \mu^{2N+1})' \in \Gamma$$

и нормой $\|\gamma_n\|_\Gamma = \sqrt{(\gamma_n, \gamma_n)} = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{N-1} \|\widetilde{u}_n^i\|_2^2 h}$.

В пространстве Γ вводятся операторы A и B:

$$A\widetilde{\gamma}_j = \widetilde{\mu}_j,\ \widetilde{\mu}_j = (\widetilde{\mu}_j^0, \widetilde{\mu}_j^1, \ldots, \widetilde{\mu}_j^N)',$$

$$\widetilde{\mu}_j^i = \frac{1}{h}(-\Lambda_1 \widetilde{u}_j^{i-1} + (\Lambda_1 + \Lambda_2)\widetilde{u}_j^i - \Lambda_2 \widetilde{u}_j^{i+1}) \colon 1 \leqslant i \leqslant N-1,\ \widetilde{\mu}_j^0 = \widetilde{\mu}_j^N = (0,0)',$$

$$B = E + \frac{1}{2}\Delta A,$$

Тогда систему (22) можно переписать в виде:

$$B\frac{\gamma_{j+1} - \gamma_j}{\Delta} + A\gamma_j = \widetilde{F}_j(I(\{\gamma_l\}_j)).$$

где $\widetilde{F}_j(v(\cdot)) = (\widetilde{F}_j^0(v_j^{1/2}(\cdot)), \widetilde{F}_j^1(v_j^{3/2}(\cdot)), \ldots, \widetilde{F}_j^{N-1}(v_j^{N-1/2}(\cdot)), \widetilde{F}_j^{N-1}(v_j^{N+1/2}(\cdot)))'$, $v(\cdot) = I(\{\gamma_l\}_j) \in Q^{N+1}[-\tau, \Delta]$.

В результате получаем разностную схему (5), где

$$S = E - \Delta B^{-1} A, \Phi(t_j, I(\{\gamma_l\}_n)) = B^{-1}\widetilde{F}_n(I(\{\gamma_l\}_n)). \tag{24}$$

Устанавливается связь между порядками невязки без интерполяции и невязки с интерполяцией. Используя результаты работы[9], доказывается, что схема (5), (24) устойчива.

Теорема 13. *Пусть невязка без интерполяции имеет порядок $\Delta^{p_1} + h^{p_2}$, функции F_j^i липшицевы, оператор двойной интерполяции-экстраполяции I липшицев и имеет порядок погрешности $\Delta^{p_3} + h^{p_4}$ на точном решении, стартовые значения имеют порядок $\Delta^{p_5} + h^{p_6}$, $\sigma = h/\Delta$ зафиксировано, тогда метод* (21) *сходится с порядком $\Delta^{\min\{p_1,p_3,p_5\}} + h^{\min\{p_2,p_4,p_6\}}$.*

Следствие 3. *Если для точного решения задачи* (18) *существуют и непрерывны все частные производные вплоть до 3-го порядка включительно, F_j^i задается соотношением* (23)*, применяется оператор двойной интерполяции-экстраполяции со значениями* (19)–(20)*, $\sigma = h/\Delta$ зафиксировано, тогда метод* (21) *сходится с порядком $h^2 + \Delta^2$.*

В **разделе 3.5** приводятся результаты компьютерного моделирования вычислений по описанному выше алгоритму для тестовых примеров.

В **заключении** излагаются основные результаты работы, указываются возможные направления дальнейших исследований.

Основные результаты работы

1. Для уравнений гиперболического типа с одной пространственной переменной и с наличием функционального запаздывания по времени сконструировано семейство сеточных методов с весом для численного решения. Учет функционального запаздывания осуществляется с помощью подходящих интерполяционных и экстраполяционных процедур. Получены условия на вес, гарантирующие устойчивость методов. Доказана теорема о порядках сходимости разработанных методов.

2. Для уравнения с двумя пространственными переменными с наличием запаздывания по времени сконструировано семейство сеточных численных методов, допускающее факторизацию по пространственным переменным. Получены условия устойчивости методов. С помощью вложения в общую схему сеточных методов с наследственностью доказана теорема о сходимости разработанных методов.

3. Для системы уравнений акустики с эффектом наследственности построен численный метод, в котором наследственность учитывается с помощью новых методик интерполяции дискретной предыстории сеточной модели. Исследована устойчивость метода и получено утверждение о порядке сходимости метода.

Публикации автора по теме диссертации

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных изданиях, определенных ВАК

1. Пименов В. Г., Таширова Е.Е. Численные методы решения уравнения гиперболического типа с наследственностью // Труды ИММ УрО РАН, Т. 18, № 2, 2012. С. 222–231.

2. Таширова Е.Е. Численные методы решения двумерного волнового уравнения с последействием. // Вестник Тамбовского университета. Серия: Естественные и технические науки. 2013. Т. 18, вып. 5-2. С. 2704–2706.

3. Таширова Е.Е. Сходимость разностного метода для решения двумерного волнового уравнения с наследственностью. // Вестник Удмуртского университета. Математика. Механика. Компьютерные науки, 2015, т. 25, № 1, с. 78–92.

Разделы в монографиях

4. Таширова Е.Е. Глава 5. Численные методы решения гиперболического уравнения с наследственностью / В.Г. Пименов, Е.Е. Таширова // Разностные методы решения уравнений в частных производных с наследственностью / Пименов В.Г. Екатеринбург: изд-во Урал. ун-та, 2014. - 134 с. С. 52 - 72.

Другие публикации

5. Пименов В.Г., Таширова Е.Е. Численные методы для уравнения гиперболического типа с запаздыванием // Алгоритмический анализ неустойчивых задач, Тезисы докладов Международной конференции, посвященной памяти В.К. Иванова. Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2011. С. 266–267.

6. Таширова Е.Е. Сеточные схемы для решения двумерного уравнения гиперболического типа с последействием. // Актуальные проблемы прикладной математики и механики, Тезисы докладов VI Всероссийской конференции, посвященной памяти академика А.Ф. Сидорова. Екатеринбург: УрО РАН, 2012. С. 73–74.

7. Таширова Е.Е. Алгоритмы решения волнового уравнения с запаздыванием. // Современные проблемы математики. Тезисы международной (44-й Всероссийской) молодежной школы-конференции. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, 2013. С. 412–415.

8. Таширова Е.Е. Сеточные схемы для решения двумерного волнового уравнения с последействием. // Современные проблемы математики и ее приложений, Труды 45-й Международной молодежной школы-конференции, посвященной 75-летию В.И. Бердышева. Екатеринбург: Институт математики и механики УрО РАН, УрФУ, 2014. С. 281–283.

9. Таширова Е.Е. Численный метод для решения системы уравнений акустики с последействием. // Алгоритмический анализ неустойчивых задач, Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти В.К. Иванова. Челябинск: Издательский центр ЮУрГУ, 2014. С. 156–157.

10. Таширова Е.Е. Разностные методы решения системы уравнений акустики с наследственностью. // Теория управления и математическое моделирование. Тезисы докладов Всероссийской конференции с международным участием, посвященной памяти профессора Н.В. Азбелева и профессора Е.Л. Тонкова. Ижевск: Изд-во «Удмуртский университет», 2015. С. 134–135.