РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
УРАЛЬСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ

На правах рукописи

Сафин Константин Леонидович

Идеалы итеративных алгебр

01.01.06 — математическая логика, алгебра и теория чисел

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург, 2000

Работа выполнена на кафедре алгебры и дискретной математики Уральского государственного университета в г.Екатеринбурге.

Научный руководитель:

кандидат физико-математических наук, доцент Е.В.Суханов

Официальные оппоненты:

доктор физико-математических наук, профессор В.Б.Репницкий

доктор физико-математических наук, профессор Д.А.Бредихин

Ведущая организация:

Институт математики СО РАН

Защита диссертации состоится 19 декабря 2000 года в 16 часов на заседании диссертационного совета Д 002.07.03 при Институте математики и механики УрО РАН по адресу:
620219, г.Екатеринбург, ул.Софьи Ковалевской, 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан 19 ноября 2000 г.

Ученый секретарь
диссертационного совета
к.ф.-м.н. В.В.Кабанов

Общая характеристика работы

Тема данной диссертации относится к теории замкнутых классов функций k-значной логики (также называемой "теорией клонов" и "теорией итеративных алгебр"). Эта теория берет свое начало в работах Э.Поста, которые были написаны в 20-40-х годах XX века. К настоящему времени она имеет собственную богатую проблематику и содержит большое число глубоких результатов. В Уральском государственном университете работы по изучению решетки замкнутых классов ведутся с начала 90-х годов. Обзору полученных за это время результатов посвящены работы [3,9].

Итеративной алгеброй на конечном множестве X называется совокупность всех конечноместных функций на X, замкнутая относительно суперпозиции функций, перестановок, отождествлений переменных функции и добавлений фиктивных переменных (см. [2]). Если итеративная алгебра содержит проекции, т.е. функции вида $e_n^i(x_1, \dots, x_n) = x_i$, то она называется клоном. Для алгебр, не удовлетворяющих этому условию, мы будем использовать термин "алгебра без проекций". Так как пересечение любого числа итеративных алгебр является итеративной алгеброй, то все они образуют полную решетку, которую мы будем обозначать через $\mathcal{L}_X$. То же самое можно сказать и про множество всех клонов, подрешетку которых мы будем обозначать через $\mathcal{L}_X^c$. К сожалению, множество всех алгебр без проекций не образует решетку. Частично упорядоченное множество всех алгебр без проекций мы будем обозначать через $\mathcal{L}_X^{wp}$.

Поскольку операция суперпозиции является ассоциативной, на итеративную алгебру удобно смотреть как на полугруппу, наделенную дополнительными унарными операциями. Суперпозиция функций в дальнейшем обозначается через $*$.

В теории полугрупп в числе главных вводятся такие важные понятия, как отношения Грина и идеалы (см. [1]). Эти понятия полезны тем, что они являются мощными инструментами при решении различных полугрупповых проблем. Поэтому можно попытаться перенести эти понятия и связанные с ними утверждения в теорию итеративных алгебр для того, чтобы использовать полученные результаты при решении проблем из этой области. На этом пути возникают некоторые трудности. Наличие дополнительных операций не позволяет просто применять полугрупповые определения к итеративным алгебрам, эти определения требуется соответствующим образом модернизировать. Также эти понятия целесообразно использовать лишь в том случае, если они имеют для итеративных алгебр ясный смысл и являются достаточно содержательными.

Введем основное определение.

Определение 4 *Подмножество $I \subseteq A$ мы называем идеалом итеративной алгебры A, если*

1) I — подалгебра в A;

2) I — идеал полугруппы $\langle A; * \rangle$.

Оказывается, что собственные идеалы итеративной алгебры являются алгебрами без проекций. В связи с этим рассмотрению таких алгебр в дальнейшем отведено особое место.

Также представляется интересным изучение итеративных алгебр, множество идеалов которых удовлетворяет некоторым естественно возникающим ограничениям. Среди таких алгебр наибольшее внимание уделяется идеально простым алгебрам.

Определение 5 *Итеративная алгебра A называется идеально простой, если она не содержит нетривиальных идеалов, т.е. из того, что I — идеал в A следует $I = \emptyset$ или $I = A$.*

Исследования, результаты которых представлены в данной диссертации, в основном направлены на изучение понятия идеала итеративной алгебры и свойств простых алгебр.

В работе используются методы, конструкции и результаты теории итеративных алгебр и теории полугрупп.

В диссертации получены следующие теоретические результаты:

1) установлена связь между идеалами итеративных алгебр и алгебрами пар отношений определенного вида;

2) получено описание решеток идеалов некоторых известных классов итеративных алгебр;

3) доказано, что любая итеративная алгебра из некоторого класса является максимальной итеративной алгеброй без проекций;

4) установлена связь максимальных идеально простых итеративных алгебр с группами перестановок;

5) получено полное описание максимальных идеально простых итеративных алгебр функций k-значной логики при $k \leq 4$.

Все перечисленные результаты являются новыми.

Диссертационная работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут использоваться в теории итеративных алгебр и в универсальной алгебре, а также при чтении специальных курсов по алгебре и дискретной математики.

Основные результаты диссертации были представлены на Международной конференции по математической логике (Новосибирск, 1994 г.), Международной алгебраической конференции памяти Д.К.Фаддеева (Санкт-Петербург, 1997 г.), Международной математической конференции "Упорядоченные множества" (Варшава, 1999 г.), а также на семинарах Московского государственного университета и Новосибирского государственного университета, семинарах "Алгебраические системы" и "Дискретная математика" Уральского государственного университета. Они опубликованы в работах [4, 5, 6, 7, 8, 9]. Из совместной обзорной работы [9] в текст данной диссертации включены только результаты автора.

Диссертация состоит из двух глав, каждая из которых разбита на 4 параграфа. Основные результаты сформулированы в виде теорем 1–10. Общий объем диссертации составляет 81 страницу. Библиография содержит 39 наименований. Используется сквозная нумерация утверждений.

Краткое изложение основных результатов

Основное место в данной диссертационной работе уделено понятию идеала итеративной алгебры. В главе 1 вводится это понятие, а также приводятся результаты, описывающие решетки идеалов для некоторых известных классов итеративных алгебр. При этом выясняется, что основную их часть составляют алгебры без проекций, в связи с чем в §4 приводятся некоторые утверждения о свойствах таких алгебр.

В §1 рассмотрен вопрос о том, какую мощность может иметь решетка идеалов итеративной алгебры. Известно, что решетка подалгебр любой итеративной алгебры имеет не более чем континуальную мощность, а значит, этим же свойством обладает и решетка идеалов. Следующее утверждение говорит о том, что решетка идеалов может иметь любую из возможных бесконечных мощностей.

Предложение 1

1) Существует алгебра, имеющая счетную решетку идеалов.

2) Существует алгебра, имеющая континуальную решетку идеалов.

Имеется соответствие Галуа между итеративными алгебрами и объектами, названными в диссертационной работе алгебрами пар отношений. Это соответствие является мощным инструментом при решении различных задач, связанных с итеративными алгебрами. В связи с этим можно рассмотреть вопрос о том, какие алгебры пар отношений при этом соответствии отвечают идеалам. Ответ на этот вопрос содержится в формулировке теоремы 1.

Пусть A — некоторая итеративная алгебра и Q — некоторое частично упорядоченное множество. Через $Idl(A)$ мы будем обозначать решетку идеалов алгебры A, а через $Oid(Q)$ — решетку порядковых идеалов множества Q.

В §2 рассматриваются классы алгебр, часто возникающие естественным образом в исследованиях по данной тематике. Следующее предложение описывает решетку идеалов алгебры P_X всех функций на X. Пусть $\mathcal{P}(X)$ — множество всех непустых подмножеств основного множества X, упорядоченное по включению.

Предложение 2 *Для алгебры P_X выполняется $Idl(P_X) \cong Oid(\mathcal{P}(X))$.*

Далее рассматриваются алгебры, состоящие из функций, представимых полиномами определенного вида. Наделим множество X структурой ассоциативного кольца с единицей, это кольцо мы будем обозначать символом R. Пусть L_X — алгебра функций, представимых линейными полиномами над R, т.е. полиномами вида $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n + a_0$, где все $a_i \in R$. Пусть также Q_R — множество всех смежных классов по всем правым идеалам кольца R, упорядоченное по включению, т.е. $Q_R = \{a + I | a \in R \text{ и } I \text{ — правый идеал в } R\}$.

Теорема 2 *Для алгебры L_X выполняется $Idl(L_X) \cong Oid(Q_R)$.*

Пусть теперь множество X наделено структурой коммутативного моноида с единицей e. Через M_X обозначим алгебру функций, представимых мономами над X, т.е. полиномами вида $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, где все $\alpha_i \geq 0$. Рассмотрим множество $\mathcal{T}(X)$ всем преобразований множества X. Зададим на $\mathcal{T}(X)$ структуру коммутативного моноида, определив для любых элементов f и g их произведение поточечно: $(f \cdot g)(a) = f(a) \cdot g(a)$, где $\cdot$ — умножение в X, и a — произвольный элемент из X. Тогда единицей будет константное преобразование $e(a) = e$. Пусть $\mathcal{M}(X)$ — моноид, порожденный в $\mathcal{T}(X)$ тождественным преобразованием x, т.е. $\mathcal{M}(X) = \{x^0 = e, x, x^2, \dots, x^l, \dots, x^{s-1}\}$, где $x^l = x^s$ для некоторых $l, s \geq 0$ и $s \geq l$. Через $Sub(\mathcal{M}(X))$ обозначим множество подмоноидов из $\mathcal{M}(X)$, упорядоченное по включению. Справедлива следующая теорема.

Теорема 3 *Для алгебры M_X выполняется $Idl(M_X) \cong Oid(Sub(\mathcal{M}(X)))$.*

Перейдем к изложению результатов §3. Он посвящен выяснению строения решеток идеалов алгебр вида $Pol(R)$, состоящих из функций, сохраняющих некоторое отношение R. Пусть $U \subset X$. Унарное отношение, соответствующее подмножеству U, мы также будем обозначать через U. Рассмотрим множество $Q_U = \{(A_1, A_2) | \emptyset \neq A_1 \subseteq A_2 \subseteq X,\ A_1 \subseteq \subseteq U\}$, естественным образом упорядоченное отношением покомпонентного включения: $(A_1, A_2) \leq (A_1', A_2') \Leftrightarrow A_1 \subseteq A_1'$ и $A_2 \subseteq A_2'$.

Теорема 4 *Для алгебры $Pol(U)$ выполняется $Idl(Pol(U)) \cong Oid(Q_U)$.*

Пусть теперь $\alpha = \{(a_1, \dots, a_q)\}$ — одноэлементное q - арное отношение на X. Рассмотрим множество $Q_\alpha = \{A \subseteq X | \{a_1, \dots, a_q\} \subseteq A\}$, упорядоченное по включению.

Теорема 5 *Для алгебры $Pol(\alpha)$ выполняется $Idl(Pol(\alpha)) \cong Oid(Q_\alpha)$.*

Пусть, наконец, β — отношение эквивалентности на X, не являющееся тотальным, и $B_1 \cup \dots \cup B_m = X$ — соответствующее ему разбиение. Рассмотрим множество

$Q_\beta = \{(I_1, \ldots, I_m) | I_i$ — порядковый идеал в $\mathcal{P}(B_i)$ и найдется $I_j \neq \neq \emptyset\} = (Oid(\mathcal{P}(B_1)) \times \ldots \times Oid(\mathcal{P}(B_m))) \setminus \{0\}$,

где $0 = (\emptyset, \ldots, \emptyset)$ — наименьший элемент декартова произведения. Это множество упорядочено как подмножество прямого произведения упорядоченных множеств.

Теорема 6 *Для алгебры $Pol(\beta)$ выполняется $Idl(Pol(\beta)) \cong Oid(Q_\beta)$.*

В §4 приведены результаты, относящиеся к изучению итеративных алгебр без проекций. Для их изложения нам понадобится понятие стабилизатора. Пусть S — произвольная полугруппа преобразований на X. Стабилизатор полугруппы S — это множество $St(S) = \{f \in P_X^{(n)} | n \in N$ и для любых $s_1, \ldots, s_n$ таких, что $s_i \in S$ или $s_i(x) = x$ выполняется $f(s_1(x), \ldots, s_n(x)) \in S\}$.

Предложение 3

1) Множество всех итеративных алгебр без проекций образует в решетке $\mathcal{L}_X$ порядковый идеал, не являющийся подрешеткой.

2) Каждая алгебра без проекций содержится в некоторой максимальной алгебре без проекций.

3) Каждая максимальная алгебра без проекций имеет вид $St(S)$, где S — полугруппа несюрвективных преобразований на X.

Затем в §4 доказывается предложение, утверждающее, что решетка клонов и множество алгебр без проекций устроены, в некотором смысле, "одинаково сложно".

Предложение 4 *В частично упорядоченном множестве $\mathcal{L}_m^{wp}$ при $m > > k$ существует интервал, изоморфный $\mathcal{L}_k$ (а значит, существует также интервал, изоморфный $\mathcal{L}_k^c$).*

Результаты, изложенные далее, посвящены алгебрам без проекций, являющимся аналогами максимальных клонов, и решению вопроса об их максимальности. Пусть на X определен частичный порядок. Полугруппу несюръективных преобразований, монотонных относительно этого порядка, будем обозначать через MT_X. Тогда $St(MT_X)$ — алгебра без проекций, являющаяся аналогом алгебры всех функций, монотонных относительно рассматриваемого порядка на X.

Предложение 5 *Пусть трехэлементное множество $X = \{0,1,2\}$ упорядоченно естественным образом. Тогда алгебра без проекций $St(MT_X)$ не является максимальной.*

Пусть теперь $\emptyset \neq U \subset X$ и S_X^U — полугруппа, состоящая из всех несюръективных преобразований, сохраняющих множество U. Тогда $St(S_X^U)$ — алгебра без проекций, являющаяся аналогом клона всех функций, сохраняющих множество U. Рассмотрим также алгебру $A_1(U)$ всех несюръективных функций, сохраняющих множество U, алгебру $A_2(U)$ всех функций, которые сохраняют U и ограничения которых на U несюръективны, и алгебру $A(U) = A_1(U) \cup A_2(U)$.

Теорема 7

1) Если $|U| > 1$, то $St(S_X^U)$ — максимальная алгебра без проекций и $St(S_X^U) = A(U)$.

2) Если $|U| = 1$, то $St(S_X^U)$ — алгебра без проекций, не являющаяся максимальной.

В главе 2 основное внимание уделено изучению идеально простых итеративных алгебр. Далее ради краткости изложения мы в основном будем говорить "простая" вместо "идеально простая".

В §5 исследуются свойства простых алгебр, являющиеся основными для дальнейшего изложения.

Предложение 6 *Алгебра A проста тогда и только тогда, когда для любых функций $f, g \in A$ выполняется равенство $Imf = Img$.*

Эта теорема имеет два важных следствия.

Следствие 1 *Для любой алгебры C эквивалентны следующие условия:*

1) C — простой клон;

2) для любой функции $f \in C$ выполняется равенство $Imf = X$;

3) $C^{(1)}$ — группа перестановок на X.

Следствие 2 *Множество всех простых алгебр*

1) является порядковым идеалом в $\mathcal{L}_X$;

2) удовлетворяет условию леммы Цорна.

Это означает, что алгебра является простой в том и только в том случае, когда она содержится в некоторой максимальной простой алгебре.

Введем обозначения, необходимые для формулировки следующего предложения. А именно, если U — подмножество множества X, и F — подмножество в $Pol(U)$, то через $F|_U$ мы будем обозначать подмножество $\{f|_U \mid f \in F\}$ множества P_U. Если G — множество функций из P_U, то через $[G]$ здесь обозначается множество $\{g \in P_X \mid g|_U \in G\}$.

Предложение 7

1) Пусть $U \subseteq X$ и C — максимальный простой клон в P_U. Тогда $[C]$ — максимальная простая алгебра.

2) Обратно, если A — максимальная простая алгебра в P_X и $U = ImA$, то $A = [A|_U]$ и $A|_U$ — максимальный простой клон в P_U.

Отсюда следует, что для нахождения всех максимальных простых алгебр в P_X достаточно найти все максимальные простые клоны в P_U, где $U \subseteq X$.

В §6 исследуются свойства простых клонов и устанавливается тесная связь между этими свойствами и свойствами групп перестановок на X. В связи с этим нам потребуются обозначения для некоторых групп перестановок. Пусть $X = \{a_1, \ldots, a_k\}$ — некоторое перечисление элементов множества X. Введем обозначения:

S_X или S_k — для группы всех перестановок на множестве X,

A_k — для знакопеременной группы на множестве X,

$C_k = \langle (a_1, \ldots, a_k) \rangle$ — для циклической подгруппы группы S_k, порожденной циклом длины k,

J_k — для единичной подгруппы в S_k.

В случае $k = 4$:

$V = \{id_X, (a_1a_2)(a_3a_4), (a_1a_3)(a_2a_4), (a_1a_4)(a_2a_3)\}$ — четверная группа Клейна,

$S_2 \wr S_2 = \{id_X, (a_1a_2), (a_3a_4), (a_1a_2)(a_3a_4), (a_1a_3)(a_2a_4), (a_1a_4)(a_2a_3), (a_1a_3 a_2a_4), (a_1a_4a_2a_3)\}$ — сплетение группы S_2 при помощи группы S_2.

Нетрудно понять, что все максимальные простые клоны в P_X имеют вид $St(G)$, где G — некоторая подгруппа в S_X. Такие подгруппы G мы будем называть подходящими. Пусть $X = X_1 \cup \ldots \cup X_m$ — разбиение основного множества X на непустые подмножества.

Предложение 8 *Пусть G_i — группы перестановок, транзитивно действующие на X_i, где $i = 1, \ldots, m$. Прямое произведение $G_1 \ldots G_m$ является подходящей группой тогда и только тогда, когда таковой является каждая из подгрупп G_i.*

Предложение 9 *Пусть G — максимальная подгруппа в S_X. Группа G является подходящей тогда и только тогда, когда она несжимающая.*

Предложение 10 *Если группа перестановок G регулярна, то она является подходящей.*

Определения сжимающей и регулярной групп приведены в диссертационной работе на с.59 и с.61 соответственно.

Далее в §7 приводится полное описание подходящих подгрупп в случае $k \leq 4$.

Теорема 8 *Подходящими подгруппами в S_2 являются в точности группы J_2 и S_2.*

Теорема 9 *Подходящими подгруппами в S_3 являются в точности группы вида J_3, S_1S_2, C_3 и S_3.*

Теорема 10 *Подходящими подгруппами в S_4 являются в точности группы вида J_4, $S_1S_1S_2$, S_1C_3, V, S_2S_2, C_4, S_1S_3, $S_2 \wr S_2$, S_4.*

Эти теоремы позволяют получить полное перечисление максимальных простых алгебр для случая $k \leq 4$.

Наконец, в §8 приводятся некоторые заключительные замечания и формулировки вопросов, относящиеся к проблематике идеалов итеративных алгебр.

Таковы основные результаты диссертации.

Работа выполнена под руководством доцента Евгения Витальевича Суханова, которому автор очень признателен за постоянное внимание и всестороннюю поддержку.

Литература

[1] Клиффорд А., Престон Г. Алгебраическая теория полугрупп, т.I,II. -М.: Мир, 1972.

[2] Мальцев А.И. Итеративные алгебры Поста, Новосибирск, 1976.

[3] Bulatov A.A., Krokhin A.A., Safin K.L., Sukhanov E.V. On the structure of clone lattices, General Algebra and Discrete Mathematics (eds: K.Denecke, O.Lüders), Heldermann Verlag, Berlin, 1995, 27–34.

Работы автора по теме диссертации

[4] Сафин К.Л. Идеалы итеративных алгебр, в кн: Междунар. конф. по математической логике. Тез.докл., Новосибирск, 1994, 89.

[5] Сафин К.Л. Идеалы итеративных алгебр, Сиб.мат.журнал, 36, 6, 1995, 1384–1391.

[6] Сафин К.Л. Об изоморфных вложениях решеток итеративных алгебр, в кн: IV Междунар. конф. по алгебре памяти Д.К.Фаддеева. Тез.докл., Санкт-Петербург, 1997, 274.

[7] Сафин К.Л. Простые итеративные алгебры, Алгебра и логика, 37, 4, 1998, 460–477.

[8] Сафин К.Л. Соответствие Галуа для итеративных алгебр, Междунар. алгебр. конф. памяти А.Г.Куроша, Москва, 1998, 206–207.

[9] Bulatov A.A., Krokhin A.A., Safin K.L., Semigrodskikh A.P., Sukhanov E.V. On the structure of clone lattices II, Multipli-Valued Logic (принята к печати)

ЛР № 020257 от 22.11.96.
Подписано к печати 09.11.2000. Формат 60x841/16
Бумага офсетная. Печать офсетная. Тираж 100 экз. Заказ 301.

Издательство Уральского университета
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4

Отпечатано в типографии ИПЦ «Издательство УрГУ»
620083, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4