На правах рукописи

НИКОЛАЕВ СЕРГЕЙ ГЕННАДЬЕВИЧ

УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИСТЕМ С ПОСТОЯННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

Специальность 01.02.01 - теоретическая механика

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико- математических наук

Екатеринбург 2000

Работа выполнена на кафедре теоретической механики Уральского государственного университета им. А.М. Горького

Научный руководитель доктор физико-математических наук, профессор Долгий Ю.Ф.

Официальные оппоненты:

доктор физ.-мат. наук, профессор Максимов В.И.

канд. физ.-мат. наук, доцент Козлов Ю.Д.

Ведущая организация Пермский государственный университет

Защита состоится «7» июня 2000 г. на заседании диссертационного совета Д 002.07.01 Института математики и механики УрО РАН по адресу: 620219, Екатеринбург, ГСП-384, ул. С.Ковалевской, 16, в 14-00.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики УрО РАН.

Автореферат разослан «____» _____________ 2000 г.

Ученый секретарь диссертационного совета Гусев М.И.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. В самых разнообразных областях современной науки и техники встречаются динамические системы, описываемые системами дифференциальных уравнений с последействием. Такие системы используются в математических моделях механики сплошных сред со сложной реологией при описании необратимых термодинамических процессов, при учете конечности скорости распространения электромагнитных взаимодействий, в математических моделях биологии, в системах автоматического управления, и, наконец, системами дифференциальных уравнений с последействием описываются некоторые технологические процессы.

На качественное поведение динамической системы влияет наличие последействия в математической модели. Поэтому проблема изучения периодических колебаний в системах дифференциальных уравнений с последействием всегда привлекала к себе большое внимание. Важным свойством периодических движений является свойство устойчивости. В настоящее время достаточно хорошо развита теория устойчивости линейных стационарных дифференциальных уравнений с последействием. Для линейных нестационарных периодических систем с последействием рассматриваемая нами теория получила развитие только для отдельных классов уравнений. На сложность этой проблемы указывают трудности, которые имеют место в теории устойчивости линейных периодических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями. В нашем случае эта проблема усложняется бесконечномерностью объекта исследования.

В теории устойчивости линейных периодических дифференциальных уравнений с последействием развиваются несколько направлений. Фундаментальные результаты в теории устойчивости линейных периодических систем дифференциальных уравнений получены в работах А.М. Зверкина, А. Халаная, Дж. Хейла, С.Н. Шиманова, А. Стокса и В. Хана. Применяемый в работе подход к исследованию устойчивости является развитием первого метода Ляпунова. Центральным понятием в нем является оператор монодромии, спектр которого определяет устойчивость или неустойчивость линейных периодических систем дифференциальных уравнений с последействием. Так, для асимптотической устойчивости указанных динамических систем необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии лежали на комплексной плоскости внутри единичного круга с центром в начале координат. Настоящая работа посвящена дальнейшему развитию первого метода Ляпунова для периодических дифференциальных уравнений с последействием.

Цель работы. Развитие бифуркационного метода исследования устойчивости линейных периодических систем с запаздыванием. Нахождение эффективных признаков асимптотической устойчивости (устойчивости и неустойчивости) для периодических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Методика исследования. Методы исследования данной работы основаны на результатах таких направлений науки, как теория устойчивости движения, функционального анализа, теории функционально-дифференциальных уравнений и теории обыкновенных дифференциальных уравнений. При исследовании на устойчивость линейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием основным является понятие оператора монодромии, спектр которого определяет устойчивость или неустойчивость таких систем. Задача нахождения собственных чисел оператора монодромии сводится к задаче нахождения собственных чисел краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Используются методы теории возмущений самосопряженных и несамосопряженных краевых задач.

Научная новизна. Результаты, представленные в диссертации, являются новыми и позволяют находить эффективные условия асимптотической устойчивости (устойчивости и неустойчивости) исследуемых классов периодических систем с запаздыванием. На защиту выносятся следующие результаты:

1. Установлена связь между асимптотической устойчивостью систем дифференциальных уравнений с вещественными ω-периодическими коэффициентами и запаздыванием $\mathbf{J}_{2k}\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{H}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_2(t)\mathbf{x}(t-\omega)$ и сильной устойчивостью канонических уравнений с гамильтонианами $\mathbf{H}_1 \pm \mathbf{H}_2$.

2. Получены эффективные признаки асимптотической устойчивости выделенного класса периодических систем дифференциальных уравнений уравнений с запаздыванием.

3. Установлена неустойчивость системы дифференциальных уравнений второго порядка с запаздыванием $\ddot{\mathbf{x}}(t) + \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t-\omega) = \mathbf{0}$.

4. Найдены условия устойчивости периодического решения скалярного дифференциального уравнения с постоянным запаздыванием $\dot{x}(t) = -\alpha f(x(t-1))$.

Теоретическая и практическая ценность работы. Работа носит теоретический характер. Полученные результаты могут быть использованы для дальнейшего развития качественной теории исследуемых задач. Практическая ценность результатов диссертации состоит в том, что они позволили исследовать задачи устойчивости для конкретных классов периодических дифференциальных уравнений с запаздыванием.

Апробация работы. Результаты, составляющие основу диссертации, были доложены на 27 и 28 Молодежной конференции «Проблемы теоретической и прикладной математики», VII Четаевской конференции «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением», VIII Понтрягинских чтениях «Современные методы в теории краевых задач», Международной конференции «Моделирование и исследование устойчивости систем» (Киев), V Международном семинаре «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления».

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1-10]. В работах, написанных в соавторстве с научным руководителем, Ю.Ф. Долгому принадлежат постановка задач и общее руководство исследованиями. Теоретическое обоснование научных результатов в указанных работах получено автором самостоятельно.

Структура и объем работы. Работа состоит из введения и трех глав, которые содержат восемь параграфов. Общий объем диссертации составляет 106 страниц. В списке литературы приведено 98 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении указаны области современной науки и техники, в которых встречаются математические модели, описываемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием. Подчеркивется важное значение проблемы качественного исследования дифференциальных уравнений с запаздыванием и анализа решений рассматриваемых уравнений на устойчивость.

Первая глава содержит три параграфа. Глава носит вспомогательный характер. В ней рассматривается линейная система периодических дифференциальных уравнений с постоянным запаздыванием

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t-\tau), \qquad (0.1)$$

где $\mathbf{A},\mathbf{B}$ - вещественные $n \times n$-матрицы, периодические с периодом $\omega > 0$; элементы матриц $\mathbf{A}$ и $\mathbf{B}$ суммируемы на отрезке $[0,\omega]$, запаздывание τ - положительная величина.

В **параграфе 1 первой главы** вводятся определения и формулируются теоремы, используемые при доказательстве основных результатов диссертации. Вводится эволюционный оператор

$$T(t,t_0)(\varphi_{t_0}) = x_t(t_0,\varphi_{t_0}), \; t_0 \in \Re, \qquad (0.2)$$

действующий в пространстве $C([-\tau,0],\Re^n)$. Здесь $\varphi_{t_0}(\theta)=\varphi(t_0+\theta)$, $\theta\in[-\tau,0]$, элемент начальной функции и $x_t = x_t(t_0,\varphi_{t_0}) = x_t(\theta,t_0,\varphi_{t_0}) = x(t+\theta,t_0,\varphi_{t_0})$, $\theta\in[-\tau,0]$, $t\ge t_0$ - элементы решения системы (0.1), соответствующие элементу начальной функции $\varphi_{t_0}(\theta)$. Оператор

$$U = U(t_0) = T(t_0+\omega,t_0),\ t_0\in\Re, \tag{0.3}$$

называется оператором монодромии и является линейным непрерывным оператором. Более того, при $m\omega\ge\tau$, где m – натуральное число, оператор $U^m(t_0)$ является вполне непрерывным. Спектр оператора монодромии состоит из его собственных чисел и нулевой точки. При этом собственные числа оператора монодромии не зависят от выбора начальной точки. Далее вводится определения устойчивости (асимптотической устойчивости) дифференциального уравнения (0.1) с запаздывающим аргументом. Приведен результат, являющийся ключевым для дальнейшего исследования.

Теорема 1.1.1. *Для асимптотической устойчивости системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии имели модули меньше единицы. Для устойчивости системы периодических дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом необходимо и достаточно, чтобы все собственные числа оператора монодромии имели модули, не превосходящие единицы, и для любого собственного числа с модулем, равным единице, собственное подпространство совпадало с корневым подпространством.*

В **параграфе 2 первой главы** рассматривается уравнение (0.1), в котором запаздывание кратно периоду $\omega = N\tau$ (N – натуральное число). Задача нахождения ненулевых собственных чисел оператора монодромии сведена к проблеме нахождения собственных чисел краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$
\begin{aligned}
&\dot{\mathbf{y}}_1 = \mathbf{A}_1(\vartheta)\mathbf{y}_1 \pm z\mathbf{B}_1(\vartheta)\mathbf{y}_N, \\
&\dot{\mathbf{y}}_q = \mathbf{A}_q(\vartheta)\mathbf{y}_q + z\mathbf{B}_q(\vartheta)\mathbf{y}_{q-1}, 2 \le q \le N, \\
&\mathbf{y}_1(-\tau) = \pm z\mathbf{y}_N(0), \mathbf{y}_q(-\tau) = z\mathbf{y}_{q-1}(0), 2 \le q \le N.
\end{aligned} \tag{0.4}
$$

Здесь $\mathbf{A}_i(\vartheta) = \mathbf{A}(i\tau + \vartheta)$, $\mathbf{B}_i(\vartheta) = \mathbf{B}(i\tau + \vartheta)$, при $1 \le i \le N$.. Обозначим через $\mathbf{\Phi}(\vartheta, z)$, $\mathbf{\Phi}(-\tau, z) = \mathbf{I}_{nN}$ ($\mathbf{I}_{nN}$ - единичная матрица размерности $nN \times nN$) нормированную фундаментальную матрицу системы (0.4). Ненулевые собственные значения ρ оператора монодромии определяются с помощью формулы $\rho = \pm z^{-N}$, в которой z является корнем характеристического уравнения

$$
\det[\mathbf{I}_{nN} - z\mathbf{S}\mathbf{\Phi}(0, z)] = 0. \tag{0.5}
$$

Здесь $\mathbf{S} = \|\mathbf{S}_{ij}\|$, где $\mathbf{S}_{i+1,i} = \mathbf{I}_n$, $1 \le i \le N-1$, $\mathbf{S}_{1N} = \pm\mathbf{I}_n$ ($\mathbf{I}_n$ - единичная матрица размерности $n \times n$), остальные $\mathbf{S}_{ij}$ ($1 \le i, j \le N$) равны нулю.

Теорема 1.2.2. *Для асимптотической устойчивости системы (0.1) с запаздыванием, соизмеримым с периодом* $(\omega = N\tau)$, *необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения (0.5) были по модулю меньше единицы. Если существует корень уравнения (0.5) с модулем, большим единицы, то система (0.1) неустойчива.*

Выделяется класс периодических систем с запаздыванием, для которых краевая задача (0.4) может быть преобразована к виду

$$
\mathbf{J}_{2k}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_1(\vartheta)\mathbf{y} + z\mathbf{H}_2(\vartheta)\mathbf{y}, \ \mathbf{y}(-\tau) = z\mathbf{S}\mathbf{y}(0), \tag{0.6}
$$

где $\mathbf{J}_{2k} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I}_k \\ \mathbf{I}_k & \mathbf{0} \end{pmatrix}$. При этом должны выполняться следующие условия:

1). $\mathbf{S}^{\mathrm{T}}\mathbf{J}_{2k}\mathbf{S} = \mathbf{J}_{2k}$.

2). $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ - симметрические матрицы-функции.

3). Матрицы $\mathbf{H}_2(t)$ неотрицательны почти при всех $t \in \Re$, т.е. $(\mathbf{H}_2(t)\mathbf{c}, \mathbf{c}) \ge 0$ для любого вектора $\mathbf{c}$.

4). Система уравнений $\mathbf{J}_{2k}\dot{\mathbf{y}} - \mathbf{H}_1(\vartheta)\mathbf{y} = 0$, $\mathbf{H}_2(\vartheta)\mathbf{y} = 0$ имеет лишь тривиальное решение $\mathbf{y} \equiv 0$.

Излагается идея бифуркационного метода исследования устойчивости. В этом методе используется вспомогательная краевая задача

$$\mathbf{J}_{2k}\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{H}_1(\vartheta)\mathbf{y} + \mu z\mathbf{H}_2(\vartheta)\mathbf{y},\ \mathbf{y}(-\tau) = z\mathbf{S}\mathbf{y}(0), \mu \in [0,1]. \tag{0.7}$$

При $\mu = 1$ вспомогательная краевая задача (0.7) совпадает с основной краевой задачей (0.6). Изменяя параметр μ на отрезке [0,1], можно проследить поведение собственных чисел краевой задачи (0.7) на комплексной плоскости. Собственные числа вспомогательной краевой задачи определяются из уравнения

$$\det[\mathbf{I}_{2k} - z\mathbf{S}\mathbf{\Phi}(0, \mu z)] = 0 \tag{0.8}$$

Здесь $\mathbf{I}_{2k}$ - единичная матрица размерности $2k \times 2k$, $\mathbf{\Phi}(\vartheta, \mu z)$-фундаментальная матрица системы из краевой задачи (0.7), $\mathbf{\Phi}(-\tau, \mu z) = \mathbf{I}_{2k}$. Установлено важное свойство корней уравнения (0.8).

Теорема 1.2.3. *На комплексной плоскости собственные числа краевой задачи (0.6) при изменении параметра μ на полуинтервале $(0,1]$ могут приходить внутрь единичного круга с центром в нуле или уходить из него только через две точки на вещественной оси $z = \pm 1$.*

Этот результат дает возможность применять методы возмущений при анализе поведения собственных чисел краевой задачи (0.6) вблизи единичной окружности и, следовательно, делать заключения об асимптотической устойчивости (устойчивости или неустойчивости) системы (0.1).

В параграфе 3 первой главы дан реферативный обзор результатов из теории гамильтоновых систем.

Во **второй главе**, содержащей три параграфа, развиваются бифуркационные методы исследования устойчивости линейных периодических систем дифференциальных уравнений с запаздыванием. Получены эффективные достаточные условия асимптотической устойчивости для рассматриваемого класса систем.

В **параграфе 1 второй главы** сформулирован и доказан основной результат диссертации. Здесь рассматривается система дифференциальных уравнений с вещественными периодическими коэффициентами и запаздыванием

$$\mathbf{J}_{2k}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{H}_1(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{H}_2(t)\mathbf{x}(t-\omega), \tag{0.9}$$

где $\mathbf{x}:\Re\to\Re^{2k}, \omega>0$; $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{H}_2$ - ω-периодические вещественные симметрические интегрируемые по Лебегу на отрезке $[0,\omega]$ матрицы-функции, причем матрицы $\mathbf{H}_2(t)$ неотрицательны почти при всех $t\in\Re$, а система уравнений $\mathbf{J}_{2k}\dot{\mathbf{x}} - \mathbf{H}_1(\vartheta)\mathbf{x} = 0$ и $\mathbf{H}_2(\vartheta)\mathbf{x} = 0$ имеет лишь тривиальное решение $\mathbf{x}\equiv 0$.

В работах Ю.Ф. Долгого изучалась система (0.9) с параметром при матрице-функции $\mathbf{H}_2$. Установлено наличие бифуркациоиного значения параметра, в окрестности которого меняется тип устойчивости системы (0.9). В этом параграфе получено описание областей асимптотической устойчивости системы (0.9) в функциональном пространстве гамильтонианов $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2$.

Теорема 2.1.1. *Для асимптотической устойчивости системы (0.9) необходимо и достаточно, чтобы* $\mathbf{H}_1 \pm \mathbf{H}_2 \in \sigma_n^{(-)}$, *т.е. чтобы системы канонических обыкновенных дифференциальных уравнений с гамильтонианами* $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \pm \mathbf{H}_2$ *были сильно устойчивы и все их мультипликаторы с положительной мнимой частью были мультипликаторами второго рода.*

При доказательстве теоремы рассматривается вспомогательная краевая задача

$$\mathbf{J}_{2k}\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \left(\mathbf{H}_1(\vartheta) + \varepsilon z\mathbf{H}_2(\vartheta)\right)\mathbf{y}, \quad \mathbf{y}(-\omega) = z\mathbf{y}(0), 0\le\varepsilon\le 1. \tag{0.10}$$

Собственные числа вспомогательной краевой задачи определяются из уравнения

$$\det[\mathbf{I}_{2k} - z\mathbf{Y}(0,\varepsilon z)] = 0 . \tag{0.11}$$

Здесь $\mathbf{Y}$ - фундаментальная матрица уравнения из краевой задачи (0.10), $\mathbf{Y}(-\omega,\varepsilon z) = \mathbf{I}_{2k}$. Установлен один вспомогательный результат, используемый при доказательстве теоремы 2.1.1.

Лемма 2.1.1. *Пусть все собственные числа матрицы* $\mathbf{Y}^{-1}(0,0)$ *по модулю равны единице и дефинитны. Тогда все собственные числа краевой задачи (0.10) при малых* $\varepsilon > 0$ *расположены вне единичного круга, если все собственные числа матрицы* $\mathbf{Y}^{-1}(0,0)$ *с отрицательной мнимой частью являются собственными числами второго рода. Если существует собственное число матрицы* $\mathbf{Y}^{-1}(0,0)$ *первого рода с отрицательной мнимой частью, то при малых* $\varepsilon > 0$ *найдется собственное число краевой задачи (0.10), расположенное внутри единичного круга.*

Согласно лемме, достаточные условия асимптотической устойчивости гарантируют, что все собственные числа краевой задачи (0.10) находятся вне единичного круга при малых $\varepsilon > 0$. В дальнейшем, при возрастании ε, собственное число краевой задачи (0.10) не может попасть внутрь единичного круга, поскольку это входит в противоречие с условиями сильной устойчивости канонических систем с гамильтонианами $\mathbf{H} = \mathbf{H}_1 \pm \mathbf{H}_2$. При доказательстве необходимости функциональное пространство Ω всех гамильтонианов представляется в виде объединения множества всех сильно устойчивых гамильтонианов σ, множества всех сильно неустойчивых гамильтонианов Λ и множества Γ - их общей границы. Показано, что только принадлежность гамильтонианов $\mathbf{H}_1 \pm \mathbf{H}_2$ к одному множеству сильной устойчивости $\sigma_n^{(-)}$ с мультипликаторным типом, состоящим из одних минусов, для которой все мультипликаторы с положительной мнимой частью являются мультипликаторами второго рода, не приводит к противоречию с требованием асимптотической устойчивости системы (0.9).

В **параграфе 2 второй главы** сформулированы и доказаны признаки асимптотической устойчивости. В основе этих признаков лежат известные признаки сильной устойчивости канонических систем, полученные М.Г. Крейном. Использование их для получения условий асимптотической устойчивости потребовало, согласно условиям теоремы 2.1.1, выделения областей сильной устойчивости канонических систем с мультипликаторным типом, состоящим из одних минусов. Ниже приведены некоторые из признаков.

Рассматривается система (0.9) с матрицами вида $\mathbf{H}_1(t) = h_1(t)\mathbf{I}_{2k}, \mathbf{H}_2(t) = h_2(t)\mathbf{I}_{2k}$, $h_2(t) > 0$, $t \in [0,\omega]$, т.е.

$$\mathbf{J}_{2k}\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = h_1(t)\mathbf{x}(t) + h_2(t)\mathbf{x}(t-\omega). \qquad (0.12)$$

Признак 1. *Система (0.12) асимптотически устойчива тогда и только тогда, когда при некотором целом* $n = 0,\pm1,\pm2,...$

$$\pi(2n+1)/\omega < \left(h_1^{cp} - h_2^{cp}\right) < \left(h_1^{cp} + h_2^{cp}\right) < 2\pi(n+1)/\omega,$$

где $h_1^{cp} = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{-\omega}^{0} h_1(t)dt$, $h_2^{cp} = \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_{-\omega}^{0} h_2(t)dt$.

Признак 2. *Пусть матрицы* $\mathbf{H}_2(t)$ *определенно положительны при* $0 \le t \le \omega$. *Для асимптотической устойчивости системы (0.9) достаточно, чтобы нашлось такое целое* n, $n = 0,\pm1,\pm2,...,$ *что*

$$\pi(2n+1) < \int_{-\omega}^{0} h_{\min}^{(-)}(s)ds < \int_{-\omega}^{0} h_{\max}^{(+)}(s)ds < 2\pi(n+1),$$

где $h_{\min}^{(-)}(t)$ *-наименьшее собственное число матрицы* $\mathbf{H}_1(t) - \mathbf{H}_2(t)$, $h_{\max}^{(+)}(t)$ *-наибольшее собственное число матрицы* $\mathbf{H}_1(t) + \mathbf{H}_2(t)$.

Для формулировки следующего признака введем обозначения:

$$\mathbf{H}_1(t)+\mathbf{H}_2(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_{11}^{(+)}(t) & \mathbf{H}_{12}^{(+)}(t)\\ \mathbf{H}_{21}^{(+)}(t) & \mathbf{H}_{22}^{(+)}(t)\end{pmatrix},\quad \mathbf{H}_1(t)-\mathbf{H}_2(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{H}_{11}^{(-)}(t) & \mathbf{H}_{12}^{(-)}(t)\\ \mathbf{H}_{21}^{(-)}(t) & \mathbf{H}_{22}^{(-)}(t)\end{pmatrix},$$

где $\mathbf{H}_{jh}^{(\pm)}(t)$ $(j,h=1,2)$ - матрицы-функции порядка $k\times k$,

$$\mathbf{A}_{jh}=\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{0}\mathbf{H}_{jh}^{(+)}(s)ds,\ \mathbf{B}_{jh}=\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{0}\mathbf{H}_{jh}^{(-)}(s)ds,\ j,h=1,2.$$

Признак 5. *Система (0.9), для матриц которой выполнены условия* $\mathbf{H}_2(t)>0,\ \mathbf{H}_1(t)+\mathbf{H}_2(t)<0$, $t\in[0,\omega]$, *асимптотически устойчива, если*

$$\omega^2 sp\left(\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{12}^2\right)<2,\ \omega^2 sp\left(\mathbf{B}_{11}\mathbf{B}_{22}-\mathbf{B}_{12}^2\right)<2.$$

Для четных матриц-функций $\mathbf{H}_1(t)$ *и* $\mathbf{H}_2(t)$ *система (0.9) асимптотически устойчива, если*

$$\omega^2 sp\left(\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{12}^2\right)<4,\ \omega^2 sp\left(\mathbf{B}_{11}\mathbf{B}_{22}-\mathbf{B}_{12}^2\right)<4.$$

Для формулировки следующего признака рассмотрим систему дифференциальных уравнений с запаздыванием второго порядка

$$\frac{d^2\mathbf{y}(t)}{dt^2}+\mathbf{P}_1(t)\mathbf{y}(t)+\mathbf{P}_2(t)\mathbf{y}(t-\omega)=0, \tag{0.13}$$

в которой $\mathbf{P}_1^{\mathrm{T}}(t)=\mathbf{P}_1(t)=\mathbf{P}_1(t+\omega)$, $\mathbf{P}_2^{\mathrm{T}}(t)=\mathbf{P}_2(t)=\mathbf{P}_2(t+\omega)$, $\mathbf{P}_1(t)=\left\|p_{ij}^1(t)\right\|_1^k$, $\mathbf{P}_2(t)=\left\|p_{ij}^2(t)\right\|_1^k$.

Признак 7. *Пусть выполняются условия:* $\mathbf{P}_2(t)<0$, $t\in[0,\omega]$, *и для любого вектора* $\mathbf{c}\in\Re^{2k}$ *найдутся числа a и b такие, что для всех* $t\in[-\omega,0]$ *выполняются неравенства:*

$$\left(\left[\mathbf{P}_1(t)+\mathbf{P}_2(t)\right](\mathbf{c},\mathbf{c})\right)\ge a^2(\mathbf{c},\mathbf{c}),\ \left(\left[\mathbf{P}_1(t)-\mathbf{P}_2(t)\right](\mathbf{c},\mathbf{c})\right)\ge b^2(\mathbf{c},\mathbf{c}),$$

$$\text{где } 0<a<\frac{\pi}{\omega},\ 0<b<\frac{\pi}{\omega},$$

тогда система (0.13) асимптотически устойчива, коль скоро

$$\omega\int_{-\omega}^{0} sp(\mathbf{P}_1(s)+\mathbf{P}_2(s))ds < 4+\left(k-\frac{4}{\pi^2}\right)a^2,$$

$$\omega\int_{-\omega}^{0} sp(\mathbf{P}_1(s)-\mathbf{P}_2(s))ds < 4+\left(k-\frac{4}{\pi^2}\right)b^2.$$

В **параграфе 3 второй главы** рассматривается система дифференциальных уравнений с запаздыванием

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2}+\mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t-\omega)=\mathbf{0}, \qquad (0.14)$$

где $\mathbf{x}:\Re\to\Re^n$; $\omega>0$; $\mathbf{H}$ – ω-периодическая симметрическая матрица-функция. Систему (0.14) можно представить в виде (0.9) с матрицами-функциями $\mathbf{H}_1(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_n\end{pmatrix}$, $\mathbf{H}_2(t)=\begin{pmatrix}\mathbf{H}(t) & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & \mathbf{0}\end{pmatrix}$. Поскольку теорема 2.2.1 не дает достаточных условий неустойчивости, то исследование этой системы на неустойчивость представляет собой самостоятельную задачу. Показано, что при условии $\det\mathbf{H}_{av}\neq 0$, где $\mathbf{H}_{av}=\frac{1}{\omega}\int_{-\omega}^{0}\mathbf{H}(t)dt$, система (0.14) неустойчива.

В качестве содержательного примера рассматривается задача исследования круговых движений материальной точки с массой m, движущейся в центральном силовом поле под действием притягивающей ньютоновской силы. Предполагается, что скорость распространения взаимодействий между материальными телами конечна. В.И. Зубов предложил учитывать запаздывание во взаимодействии, описывая динамику системы векторным уравнением

$$m\frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2}=-\chi\frac{\mathbf{r}(t-\tau(|\mathbf{r}(t)|))}{|\mathbf{r}(t-\tau(|\mathbf{r}(t)|))|^3}. \qquad (0.15)$$

Здесь $\mathbf{r}$ - радиус-вектор положения материальной точки, $\tau(|\mathbf{r}|)=\delta|\mathbf{r}|$ - запаздывание, $\delta>0$; $\chi>0$ - физические постоянные. В случае круговых движений запаздывание будет постоянным : $|\mathbf{r}(t)| = \rho, \ \ \tau = \tau(\rho)$ для всех t, а система (0.15) станет линейной

$$m\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = -\frac{\chi}{\rho^3}\mathbf{r}(t-\tau(\rho)). \qquad (0.16)$$

В.И. Зубов установил, если выполняется условие квантования

$$\omega_n\tau(\rho_n) = 2\pi n, \ \ \omega_n^2 = \frac{\chi}{m\rho_n},$$

то система (0.16) будет иметь круговые периодические решения:

$$\mathbf{r}_n(t) = \mathbf{p}_n\cos\omega_n t + \frac{\mathbf{v}_n}{\omega_n}\sin\omega_n t, \qquad n = 1,2,3,...,$$

где $\mathbf{p}_n, \mathbf{v}_n$ - соответственно начальное положение и начальная скорость точки на некоторой орбите, при этом $\mathbf{v}_n \perp \mathbf{p}_n$, $|\mathbf{v}_n| = \omega_n|\mathbf{p}_n|$, $|\mathbf{p}_n| = \rho_n$. Естественно, возникает принципиальный вопрос об устойчивости движения по этим орбитам, который ранее не исследовался. Система линейного приближения возмущенного движения для круговых орбит после замены времени имеет вид

$$\frac{d^2\mathbf{x}(t)}{dt^2} = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t-2\pi n),$$

где матрица $\mathbf{H}(t) = \begin{Vmatrix} -1+3\cos^2 t & 3/2\sin 2t \\ 3/2\sin 2t & -1+3\sin^2 t \end{Vmatrix}$, $\det\mathbf{H}_{av} = \frac{1}{4} \neq 0$. Таким образом, установлена неустойчивость круговых движений.

В третьей главе, содержащей два параграфа, рассмотрен класс нелинейных скалярных дифференциальных уравнений с запаздыванием, имеющих периодические решения с периодом, кратным запаздыванию. Такие уравнения изучались в работах J.L. Kaplan, J.A. Yorke, R. Grafton, R Nussbanm, G. Jones. В работе J.L. Kaplan, J.A. Yorke установлены условия существования периодических решений для рассматриваемого класса дифференциальных уравнений с запаздыванием. P. Dormayer получил условия устойчивости для периодических решений с малой амплитудой.

В **параграфе 1 третьей главы** рассматривается скалярное дифференциальное уравнение с постоянным запаздыванием

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\alpha f(x(t-1)), \tag{0.17}$$

где α - положительный параметр, f - непрерывно дифференцируемая функция на интервале $(-\infty,+\infty)$, являющаяся антисимметрической $f(-x) = -f(x)$ и удовлетворяющая условию $f'(x) > 0$, $x \in (-\infty,+\infty)$. Построено антисимметрическое периодическое решение $x_0(t,\mu)$ уравнения (0.17) и предложен метод исследования его на устойчивость.

Рассматривается известный подход, позволяющий сводить задачу построения периодического решения для уравнения с запаздыванием с периодом кратным запаздыванию к нахождению решения специальной краевой задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. Антисимметрическое периодическое решение x_0 уравнения (0.17), период которого $\omega = 4$, удовлетворяющее условию $x(t+2) = -x(t)$, $t \in (-\infty,+\infty)$, является решением краевой задачи для системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{x}_1 = \alpha f(x_2),\ \dot{x}_2 = -\alpha f(x_1),$$
$$x_1(1) = x_2(0), x_2(1) = -x_1(0).$$

Метод исследования на устойчивость построенного решения связан с изучением спектра оператора монодромии для уравнения возмущенного движения в линейном приближении:

$$\dot{y}(t) = -\alpha(\mu) f'\left(x^0(t-1,\mu)\right) y(t-1).$$

Здесь

$$\alpha(\mu) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{F(\mu)\sin 2\varphi d\varphi}{f\left(F^{-1}\left(F(\mu)\cos^2\varphi\right)\right) f\left(F^{-1}\left(F(\mu)\sin^2\varphi\right)\right)},$$

$F(x) = \int_0^x f(z)dz$, μ - положительный параметр. Оператор монодромии всегда имеет собственное число $\rho = -1$, поэтому периодическое решение не может быть асимптотически устойчиво, а может быть только устойчиво. Установлен следующий результат.

Теорема 3.1.3. *Пусть* f *- трижды непрерывно дифференцируемая функция на интервале* $(-\infty,+\infty)$, *являющаяся антисимметрической* $f(-x)=-f(x)$ *и удовлетворяющая условию* $f'(x)>0$ $x\in(-\infty,+\infty)$. *Полагаем также, что* $\alpha'(\mu)>0$ *при* $\mu>0$ *и* $\alpha>\pi/(2f'(0))$. *Тогда для устойчивости антисимметрического периодического решения уравнения (0.17) необходимо и достаточно, чтобы* $f'''(0)<0$.

Замечание 3.1.4. *Пусть* $f'''(0)\neq 0$ *и* $f^2(x)-2f'(x)\int\limits_0^x f(y)dy>0$ *при* $x>0$.

Тогда $\alpha'(\mu)>0$ *при* $\mu>0$ *и* $f'''(0)<0$.

Последнее утверждение дает эффективные достаточные условия устойчивости рассматриваемого периодического решения.

В **параграфе 2 третьей главы** рассматривается дифференциальное уравнение с вещественным периодическим коэффициентом и запаздыванием

$$\dot{x}(t)=-\alpha\sin x(t-1),$$

которое ранее изучалось P. Dormayer и B. Lani-Waida с помощью численных методов. Уравнение при $\alpha>\dfrac{\pi}{2}$ имеет периодическое решение, удовлетворяющее условию $x(t+2)=-x(t)$, $t\in(-\infty,+\infty)$. Используя результаты предыдущего параграфа, показано, что при $\pi/2<\alpha<\mathrm{K}(\sqrt{3}/2)$, где $\mathrm{K}(k)$ - главное значение эллиптического интеграла первого рода и k – модуль этого эллиптического интеграла, периодическое решение устойчиво.

ПУБЛИКАЦИИ ОСНОВНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

1. Николаев С.Г. Неустойчивость движения по круговым орбитам с учетом последействия. Молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики» № 27: Тезисы докладов. - Екатеринбург: УрО РАН, 1996. с. 27.
2. Николаев С.Г. Неустойчивость одной периодической системы с запаздыванием. Украинская конференция «Моделирование и исследование устойчивости систем»: Тезисы докладов. - Киев, Киевский ун-т, 1996. с. 99.
3. Николаев С.Г. Об абсолютной устойчивости периодического дифференциального уравнения с запаздыванием. Молодежная конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики» № 28: Тезисы докладов. - Екатеринбург: УрО РАН, 1997. с. 60.
4. Николаев С.Г. Устойчивость одной периодической системы с запаздыванием. Воронежская зимняя математическая школа «Современные методы теории функций и смежные проблемы»: Тезисы докладов. - Воронеж, ВГУ, 1997. с.121.
5. Николаев С.Г. Критерии асимптотической устойчивости периодической системы с запаздыванием: VII Четаевская конференция «Аналитическая механика, устойчивость и управление движением»: Тезисы докладов. - Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 1997. с. 20.
6. Долгий Ю.Ф, Николаев С.Г. Достаточные условия устойчивости периодических систем дифференциальных уравнений с кусочно-постоянными коэффициентами и запаздыванием. Понтрягинские чтения-VIII «Современные методы в теории краевых задач»: Тезисы докладов. - Воронеж, ВГУ, 1997. с.47.

7. Николаев С.Г. Критерии устойчивости периодического дифференциального уравнения с запаздыванием. Международная конференция «Моделирование и исследование устойчивости систем»: Тезисы докладов. - Киев, Киевский ун-т, 1997. с. 76.
8. Долгий Ю.Ф, Николаев С.Г. Исследование устойчивости периодического решения нелинейного дифференциального уравнения с запаздыванием. V Международный семинар «Устойчивость и колебания нелинейных систем управления»: Тезисы докладов. - Москва, ИПУ, 1998. с.52.
9. Долгий Ю.Ф, Николаев С.Г. Неустойчивость одной периодической системы с запаздыванием.// Дифференц. уравнения. 1998. Т. 34, № 4. с. 456-470.
10. Долгий Ю.Ф, Николаев С.Г. Об устойчивости периодической системы дифференциальных уравнений с запаздыванием.// Дифференц. уравнения. 1999. Т. 35, № 10. с. 1330-1336.

Отпечатано в типографии
ООО "Издательство УМЦ УПИ"
г. Екатеринбург, ул. Мира, 17, С-134.
Заказ 90. Тираж 100 экз.