На правах рукописи

**Пименов
Владимир Германович**

# УПРАВЛЯЕМЫЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МОДЕЛИ СИСТЕМ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

**Автореферат**

диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук



ЕКАТЕРИНБУРГ — 2001

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Уральского государственного университета им. А.М.Горького.

Официальные оппоненты: — доктор физико-математических наук Г.А. Бочаров;

— доктор физико-математических наук, профессор Ю.Ф. Долгий;

— член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук А.Г. Ченцов.

Ведущая организация — Московский государственный университет им. М.В. Ломоносова.

Защита диссертации состоится "26" декабря 2001 г. в 11 ч. 00 м. на заседании диссертационного Совета Д 004.006.01 по защите диссертации на соискание ученой степени доктора физико-математических наук в Институте математики и механики УрО РАН по адресу: 620219, г. Екатеринбург, ул. Софьи Ковалевской 16.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Института математики и механики.

Автореферат разослан "22" ноября 2001 года.

Ученый секретарь
диссертационного Совета
кандитат физ.-мат. наук — Гусев М.И.

# ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

**Актуальность темы.** Во многих динамических моделях окружающей действительности будущее развитие процессов зависит не только от настоящего, но и существенно определяется всей предысторией развития. Математическое описание указанных процессов может быть осуществлено при помощи дифференциальных уравнений с запаздываниями различных видов, называемыми также уравнениями с последействием или функционально-дифференциальными уравнениями (ФДУ).

Исследования качественных свойств систем с последействием в настоящее время интенсивно проводится в различных направлениях, одним из которых является перенос результатов теории оптимального управления системами, описываемыми обыкновенными дифференциальными уравнениями (ОДУ). Основополагающий вклад в развитие теории дифференциальных уравнений с запаздыванием, в том числе и в развитие теории оптимального управления системами с запаздываниями, внесли Н.В. Азбелев, А.В. Арутюнов, Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, В.Б. Колмановский, Н.Н. Красовский, А.В. Кряжимский, А.Б. Куржанский, Г.И. Марчук, М.Д. Марданов, А.Д. Мышкис, С.Б. Норкин, В.Р. Носов, Ю.С. Осипов, Л.С. Понтрягин, Ю.М. Репин, Т.А. Тадумадзе, В.Е. Третьяков, Г.Л. Харатишвили, С.Н. Шиманов, Л.Е. Эльсгольц, C.H.T. Baker, H.T. Banks, R. Bellman, K.L. Cooke, C. Corduheanu, R.D. Driver, A. Halanay, J.K. Hale, V. Lakshmikatham, V. Volterra и многие другие математики. Полученные при этом результаты находят значительные приложения в моделировании процессов автоматического регулирования, управления и устойчивости движений, механики, различных технологических процессов, биологии, медицины, химии, экономики и в других отраслях знаний. В настоящее время в качественной теории дифференциальных уравнений с запаздыванием и в теории оптимального управления системами с запаздыванием получены фундаментальные результаты, что позволяет сделать вывод о сформировавшемся разделе научных исследований.

Значительно меньше развита теория оптимального управления системами с запаздываниями в управляющих параметрах. При изучении такого рода систем, кроме линейного случая, основное внимание в исследованиях уделялось вопросам получения необходимых условий оптимальности управления.

В данной диссертации для систем с запаздыванием в управлении исследуются:

1) вопросы существования оптимального управления в классе обобщенных управлений-мер;

2) вопросы позиционного управления системами в условиях конфликта или неопределенности в классах обобщенных и обычных управлений;

3) вопросы выбора предыстории оптимального управления до начала процесса управления;

4) вопросы восстановления управления по информации о фазовых координатах.

Обобщенные управления трактуются с помощью подхода, предложенного для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) в монографиях [1], однако наличие запаздывания в управлении потребовало внести значительные изменения в понятие управлений-мер. Этот подход позволяет, во-первых, получать теоремы существования оптимального управления без дополнительных условий типа выпуклости правой части уравнения, во-вторых, в задаче с фазовыми ограничениями улучшать результат в так называемых анормальных ситуациях, в-третьих, упрощать получение необходимых условий оптимальности в силу выпуклости множества обобщенных управлений.

При изучении задач позиционного управления автор использовал ставшую классической схему экстремального прицеливания Н.Н. Красовского и А.И. Субботина, изложенную для ОДУ в монографиях [2], и развитую для уравнений с запаздыванием в координатах в работах Ю.С. Осипова. Для систем с запаздыванием в управлении подобные задачи в классе обычных управлений были изучены ранее в работах [3]. Расширение класса управлений позволяет существенно упростить разрешающие задачи конструкции и замкнуть множество позиций, из которых разрешима поставленная задача сближения.

В дифференциальных управляемых системах качество процесса зависит не только от управления, выбираемого в каждый момент (и, возможно, помехи), но и от начального состояния системы. В случае, если система имеет эффект запаздывания в управляющих параметрах, то состояние системы содержит в каждый момент наряду с фазовым векто-

[1] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М. 1977. 624 с., *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси. 1975. 253 с.

[2] *Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М. Наука. 1974. 456 с., *Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М. Наука. 1981. 288 с., *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М. Наука. 1985. 520 с.

[3] *Осипов Ю.С., Пименов В.Г.* К теории дифференциальных игр в системах с последействием // Прикл. матем. и механ. 1978. Т.42. Г6. С. 963 977., *Осипов Ю.С., Пименов В.Г.* О позиционном управлении при последействии в управляющих силах // Прикл. матем. и механ. 1981. Т.45. Г2. С. 223 229.

ром системы также функцию-предысторию управления, сложившуюся к этому моменту. Встает задача о том, чтобы выбирать начальную предысторию управления так, чтобы улучшить качество процесса. Эта задача не является позиционной, и для неё в диссертации разработаны специальные алгоритмы решения.

Для решения задачи о позиционном восстановлении неизвестного управления по поступающей информации о фазовых состояниях системы использована модификация метода динамического моделирования Ю.С. Осипова и А.В. Кряжимского [4].

Следует отметить, что исследование систем с последействием сопряжено со значительными трудностями, вследствие которых, например, точное аналитическое решение задач удается получить лишь в исключительных случаях. При этом наряду с обычными для дифференциальных уравнений трудностями рассмотрение систем с последействием сопряжено и с рядом специфических проблем, обусловленных прежде всего бесконечномерность фазового пространства этих систем. В связи с этим особенно актуальной является проблема создания эффективных численных методов решения задач и разработка их программной реализации современными вычислительными средствами. Недостаточная разработанность современного программного обеспечения в этой области является значительным препятствием для широкого применения запаздывания в прикладных моделях.

Среди многообразия исследований в области численных методов решения ФДУ отметим следующие направления.

1. Численные схемы, основанные на методе шагов [5]. Если ФДУ имеет постоянное запаздывание $\tau > 0$, то при подстановке известной начальной функции вместо $x(t-\tau)$ на отрезке времени $[t_0, t_0+\tau]$ получаем ОДУ, которое можно решить каким-либо методом. При этом величина запаздывания $\tau$ всегда должна быть кратна шагу численного метода. Затем, используя полученную функцию в качестве начальной, можно получить решение на $[t_0+\tau, t_0+2\tau]$ и т.д. Достоинство метода - предельная простота. Однако, метод шагов, как правило, не применим к другим типам ФДУ, например, с переменным запаздыванием. Кроме того, этот метод не применим для использования процедур с автоматическим выбором шага, без которых не обходятся современные пакеты прикладных программ.

[4] *Кряжимский А.В. Осипов Ю.С.* О позиционном моделировании в динамических системах // Известия АН СССР. Тех. кибернетика. 1983. Г2. с. 51 - 60.

[5] *Эльсгольц Л.Э., Норкин С.Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М. Наука. 1971. 296 с.

2. Большое число работ посвящено численным методам, использующим специфику конкретного типа ФДУ, см. обзоры [6]. Особенно много исследований для уравнений с постоянным или переменным сосредоточенным запаздыванием и для интегро-дифференциальных уравнений Вольтерра. На эти типы уравнений перенесены практически все известные для обыкновенных дифференциальных уравнений методы, однако использование их в пакетах общего назначения затруднительно, в силу того, что в методах, как правило, используется специфика уравнения.

3. Идея непрерывных методов [7] состоит в том, что численная модель задает не только значение в узлах, но и во всех промежуточных точках. Эти методы обладают большой степенью общности по отношению к различным типам ФДУ. Главный недостаток при этом - гораздо больший объем вычислений. Большинство эффективных методов решения ОДУ (в том числе и применяемых в различных пакетах прикладных программ) не являются непрерывными.

4. Многие типы ФДУ можно свести к интегральным уравнениям и затем применять известные методы решения интегральных уравнений. В отличие от ОДУ интегральные уравнения решаются непозиционными методами, т.е. в позиционных методах в момент времени $t$ можно определить часть траектории до этого момента, а в интегральных уравнениях решение определяется целиком. Этот факт является препятствием для использования методов в задачах позиционного управления системами ФДУ.

5. Системы с запаздыванием можно приближенно заменить системой ОДУ большой размерности. Этот метод, основанный на идеях [8], применяется в задачах управления, но только для задач с постоянным запаздыванием небольшой размерности, и дает небольшую точность.

6. Функциональный подход [9], столь эффективный в теоретическом

---

[6] *Холл Д., Уатт Д.* Современные численные методы решения обыкновенных дифференциальных уравнений. М. Мир. 1979. 312 с., *Bellen A.* Constrained mesh methods for functional differential equations // International Series of Numerical Mathematics, Verlag, Basel. 1985. P. 52 - 70., *Baker C.T.H., Paul C.A.H. and Wille D.R.* Issues in the numerical solution of evolutionary delay differential equations // Advances in Comput. Math. 1995. V. 3. P. 171 - 196.

[7] *Tavernini L.* One-step methods for the numerical solution of Volterra functional differential equations // SIAM J. Numer. Anal. 1971. V. 8. P. 786 - 795., *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. Мир. 1990. 512 с.

[8] *Красовский Н.Н.* Об аппроксимации одной задачи аналитического конструирования регуляторов в системе с запаздыванием // Прикл. матем. механ. 1964. Т. 28. Г4. С. 716-724., *Репин Ю.М.* О приближенной замене системы с запаздыванием обыкновенными динамическими системами // Прикл. матем. механ. 1965. Т. 29. Г2. С. 226 - 235.

[9] *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М. Гостехиздат. 1959. 211 с., *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. М., 1984. 421 с.

плане, в плане численных методов не дает эффективных алгоритмов, т.к. возникает проблема счета производных функционала правой части системы.

Предлагаемый в диссертации подход к конструированию численных методов основан на следующих основных идеях:

а) разделении конечномерной и бесконечномерной составляющих в фазовой структуре ФДУ, построении по конечномерной составляющей полных аналогов известных для ОДУ дискретных алгоритмов;

б) интерполяции с заданными свойствами – введении промежуточного элемента между изначально непрерывной (бесконечномерной) системой ФДУ и априори дискретной численной моделью, в качестве интерполяционных процедур предложена интерполяция вырожденными сплайнами и экстраполяция продолжением;

в) использовании специальной техники, позволяющей получать конструктивные формулы тейлоровского разложения функционалов правой части системы ФДУ (эта техника названа i-гладким анализом [10]).

Такой подход позволяет строить численные методы, являющиеся полными аналогами известных для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) методов и на их основе создать программное обеспечение для решения широкого класса задач моделирования систем с запаздыванием, в том числе и для решения задач управления такими системами.

Кроме того, в диссертации предпринята попытка объединить многие известные численные методы решения ФДУ и ОДУ в одну общую схему, дав необходимые и достаточные условия порядка сходимости. Наличие такой схемы позволяет с единой позиции оценивать достоинства и недостатки многоэтапных и многошаговых методов, разрушать барьеры, связанные с повышенной точностью, изучать вопросы устойчивости и асимптотического представления глобальной погрешности. Для ОДУ такая схема была предложена в работе [11].

**Цель работы.** Цель работы состоит в исследовании существования и разработке алгоритмов построения оптимального управления системами с эффектом последействия в управляющих параметрах. При этом, для обеспечения замыкания управление (в том числе и в позиционных задачах) ищется в классе обобщенных управлений-мер. Кроме того, целью работы было решение задач о выборе предыстории оптимального упра-

---

[10] *Ким А.В.* $i$-гладкий анализ и функционально-дифференциальные уравнения. Екатеринбург: ИММ УрО РАН. 1996. 236 с.

[11] *Skeel R.D.* Analysis of Fixed-Stepsize Methods // SIAM J. Numer. Anal. 1976. V. 13. P. 664–683.

вления до начала процесса управления и о восстановления управления по информации о фазовых координатах.

Следующей и основной целью является разработка и изучение свойств численных методов для ФДУ. Необходимо было получить условия порядка сходимости методов в зависимости от порядка локальной аппроксимации, от порядка интерполяции дискретной предыстории модели и от порядка ее экстраполяции. Теоретической задачей являлось создание аксиоматической схемы численных методы решения ФДУ, в рамках которой возможно дать необходимые и достаточные условия порядка сходимости. Также нужно было разработать алгоритмы с автоматическим выбором шага и протестировать построенные методы на модельных и тестовых примерах.

**Методы исследования.** Методы исследования опираются на концепции и подходы теории позиционного управления и теории численных методов решения дифференциальных уравнений. Систематически используются понятия и методы теории функционально-дифференциальных уравнений, математической теории оптимальных процессов, теории расширения экстремальных задач, функционального анализа и численного анализа.

**Научная новизна.** Все существенные результаты работы являются новыми. Приведем основные из них.

1. Для систем с функциональным последействием в фазовых координатах и управляющих параметрах предложен способ расширения класса управлений так, что решение задачи управления в этом классе заведомо существует и аппроксимируется минимизирующей последовательностью обычных управлений. Для систем с несколькими постоянными сосредоточенными запаздываниями в управлении и с интегральным последействием проведено эффективное описание класса обобщенных управлений.

2. Для конфликтно-управляемой системы с запаздыванием в управлении проведена формализация задач сближения и уклонения в классе обобщенных управлений. Приведены разрешающие конструкции, доказана теорема об альтернативе. Приведены условия, при которых позиционные задачи в классах обобщенных управлений и обычных управлений эквивалентны.

3. Разработаны конструкции метода программных итераций для позиционных задач управления системами с эффектом последействия в управлении.

4. Изучена задача о выборе начальной предыстории управления. Приведены условия оптимальности и разработаны соответствующие численные методы.

5. Для систем с запаздыванием в управлении исследована задача о позиционном восстановлении неизвестного управления по поступающей информации о фазовых состояниях системы.

6. Для широкого класса дифференциальных уравнений с запаздыванием сконструированы одношаговые численные методы решения, основанные на идее разделения конечномерной и бесконечномерной фазовой составляющей. Получена теорема о порядке сходимости методов. Сконструированы другие численные методы, основанные на методе разделения фазовой переменной, являющиеся полными аналогами соответствующих методов для обыкновенных дифференциальных уравнений.

7. Изучены способы интерполяции вырожденными сплайнами и экстраполяции продолжением дискретной предыстории модели в случаях постоянного и переменного шага.

8. Сконструирована общая линейная схема, объединяющая многие известные численные методы решения ФДУ и ОДУ. В рамках этой схемы приведены достаточные и необходимые и достаточные условия, обеспечивающие сходимость с данным порядком.

9. Для численных методов решения ФДУ изучено асимптотическое поведение глобальной погрешности, получено уравнение для главного члена в разложении по степеням шага дискретизации.

10. Решена задача о стабилизации системы с запаздыванием в управлении методом удаляющегося горизонта.

**Теоретическая и практическая ценность.** Изложенные в диссертации методы и установленные результаты могут служить основой для дальнейших исследований в оптимальном управлении системами с эффектом последействия в фазовых координатах и в управляющих параметрах. Результаты диссертации могут быть применены для дальнейшей разработки численных алгоритмов решения ФДУ и исследования их свойств. С помощью сконструированных в работе алгоритмов и и созданного на их основе программного обеспечения (пакет программ Time-Delay System Toolbox) могут быть численно изучены многие задачи моделирования реальных процессов, описываемых дифференциальными уравнениями с запаздыванием, а также могут быть решены задачи управления и стабилизации таких объектов. Материалы диссертации могут быть использованы и уже используются в учебном процессе: в Уральском госу-

дарственном университете читается специальный курс, учениками автора написаны и защищены несколько курсовых, дипломных работ, кандидатская диссертация, в которых существенно используются результаты и методика данной диссертационной работы.

**Апробация результатов работы.** Результаты диссертации докладывались и обсуждались на 3-ей Уральской региональной конференции "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложение" (Пермь-1988), 7-ой Всесоюзной конференции "Управление в механических системах" (Свердловск-1990), международной конференции "Electrical Engineering" (Kyungju-1998), международном семинаре IFAC "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации" (Челябинск-1998), Всероссийских конференциях "Алгоритмический анализ некорректных задач" (Екатерибург-1998 и Екатеринбург-2001), международной конференции "Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения" (Воронеж-2000), на других Российских и международных конференциях, на научных семинарах в Уральском государственного университете, Московском государственном университете и в Институте математики и механики УрО РАН.

**Публикации.** Основные результаты работы опубликованы в работах [1-33]. Из совместных работ в диссертацию вошли результаты, полученные лично автором.

**Структура и объем диссертации.** Работа состоит из введения, шести глав и списка литературы, содержащего 241 наименование. В работе приведено 19 рисунков. Общий объем диссертации 245 страниц.

## СОДЕРЖАНИЕ ДИССЕРТАЦИИ

Во введении дается общая характеристика рассматриваемого в диссертации круга вопросов, дается краткий обзор основных направлений исследований, к которым примыкает диссертация, дается обзор основного содержания работы, описываются подходы к решению задач.

В **главе 1** изучаются системы с функциональным последействием в фазовых координатах и управляющих параметрах

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t(\cdot), u_t(\cdot)), \tag{1}$$

где $t \in [t_0, \theta]$ - независимая переменная (время); $x$ - фазовый вектор; $u$ - вектор управления, стесненный ограничениями $u \in P$, $P$ - компакт; $x_t(\cdot) = \{x_t(s) = x(t+s),\ -\rho \leq s \leq 0\}$ - отрезок функции предыстории

фазового вектора к моменту времени $t$; $u_t(\cdot) = \{u_t(s) = u(t+s), \ -\tau \leq s \leq 0\}$ - отрезок функции предыстории управления к моменту времени $t$.

В разделе 1.1 делаются основные предположения о системе (1). Ставится задача о минимизации функционала $g_0(t, x(\cdot))$, определенного вдоль траекторий системы (1), при наличии фазовых ограничений, за счет выбора управления $u(\cdot)$ из множества $U([t_0, \theta], P)$ – множества измеримых на $[t_0, \theta]$ функций со значениями в $P$.

В разделе 1.2 на примере системы с одним сосредоточенным запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t) = f(t, x(t), u(t), u(t-\tau)) \tag{2}$$

изучаются вопросы существования решения оптимизационной задачи с функционалом качества вида

$$J(x(\cdot), u(\cdot)) = \int_{t_0}^{\theta} \varphi(t, x(t), u(t))dt + \sigma(x(\theta)),$$

$$c(u(\cdot)) = J(x(\cdot), u(\cdot)) \to min, \quad u(\cdot) \in U([t_0, \theta], P). \tag{3}$$

Предполагается, что $\varphi$ и $\sigma$ непрерывные функции.

Как и в случае систем без запаздывания, задача минимизации функционала (3) на траекториях системы (2), без дополнительных предположений выпуклости функции $f$ по управлению не имеет решения в классе обычных управлений в силу некомпактности множества $U([t_0, \theta], P)$ в топологии, обеспечивающей непрерывность функционала $c(u(\cdot))$. В системах без запаздывания в управлении существование решения в таких задачах достигается заменой обычных управлений $u(t)$ на обобщённые $\nu(t)$ – слабо измеримые по $t \in [t_0, \theta]$ функции со значениями во множестве $rpm(P)$ – во множестве вероятностных мер Радона на $P$. Класс таких функций обозначим $U([t_0, \theta], rpm(P))$.

В отличие от систем без запаздывания в управлении, расширение задачи (2) – (3) и в этом классе имеет решение лишь при весьма жестких ограничениях, например, $f(t, x(t), u(t), u(t-\tau)) = f_1(t, x(t), u(t)) + f_2(t, x(t), u(t-\tau))$. В противном случае наблюдаются новые эффекты отсутствия решения задачи оптимального управления в классе функций из $U([t_0, \theta], rpm(P))$, что показывает приведенный в этом разделе пример.

Далее в разделе доказывается существование решения аналога задачи (2) – (3), но в другом, более широком классе обобщенных управлений.

Рассмотрим $rpm(P \times P)$ - множество вероятностных мер Радона, сосредоточенных на декартовом произведении $P \times P$. Проекциями меры

$\mu \in rpm(P \times P)$ назовём меры $\nu^\mu \in rpm(P)$ и $\eta^\mu \in rpm(P)$, определенные на $\sigma$-алгебре $\Sigma$ борелевских множеств $B$ из $R^m$ следующим образом: $\nu^\mu(B) = \mu(B \times P)$, $\eta^\mu(B) = \mu(P \times B)$.

Пусть $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))$ - множество слабо измеримых по $t \in [t_0, \theta]$ функций $\mu(t)$, значениями которых являются меры из $rpm(P \times P)$. Тогда всякая $\mu(\cdot) \in U([t_0, \theta], rpm(P \times P))$ индуцирует пару функций $\nu^\mu(\cdot) \in U([t_0, \theta], rpm(P))$ и $\eta^\mu(\cdot) \in U([t_0, \theta], rpm(P))$, значения которых при всех $t \in [t_0, \theta]$ являются соответствующими проекциями значений функции $\mu(t)$.

Из множества $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))$ выделим подмножество $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))^{\tau,0}$ функций $\mu(t)$ (*обобщенных управлений*), сопряжённых по запаздыванию $\tau$ и с предысторией управления $\psi(\cdot)$:

$$\text{при почти всех } t \in [t_0 + \tau, \theta] \quad \nu^\mu(t - \tau) = \eta^\mu(t), \tag{4}$$

$$\text{при почти всех } t \in [t_0, t_0 + \tau] \quad \eta^\mu(t) = \delta(u_0(t - t_0 - \tau)). \tag{5}$$

Для сосредоточенных мер (обычных управлений) $\{u(\cdot), v(\cdot)\} \in U([t_0, \theta], P \times P)$ условия (4), (5) принимают вид

$$u(t - \tau) = v(t), \quad t \in [t_0 + \tau, \theta],$$
$$v(t) = u_0(t - t_0 - \tau), \quad t \in [t_0, t_0 + \tau),$$

это множество будем обозначать $U([t_0, \theta], P \times P)^{\tau,0}$.

Основным результатом этого раздела является доказательство аналога аппроксимационной леммы, показывающей, что всякое обобщенное управление с условием согласования по запаздыванию может быть аппроксимировано последовательностью обычных управлений.

*Лемма 1.2.2.* Слабое замыкание $U([t_0, \theta], (P \times P))^{\tau,0}$ совпадает с $U([t_0, \theta], rpm(P \times P))^{\tau,0}$.

Из этого утверждения следует

*Теорема 1.2.1.*

$$\inf_{u(\cdot) \in U([t_0, \theta], P)} c(u(\cdot)) = \inf_{\nu(\cdot) \in U([t_0, \theta], rpm(P))} c(\nu_{(\cdot)}) =$$
$$= \min_{\mu(\cdot) \in U([t_0, \theta], rpm(P \times P))^{\tau,0}} c(\mu(\cdot))$$

В разделе 1.3 для общей задачи управления системой (1) предлагается способ расширения класса управления так, что решение задачи управления в этом классе заведомо существует и аппроксимируется минимизирующей последовательностью обычных управлений. При этом само

множество обобщенных управлений определяется неконструктивно и, поэтому, встает вопрос об эффективном описании обобщенных управлений для разных классов систем.

В разделе 1.4 этот вопрос изучается для систем с несколькими постоянными сосредоточенными запаздываниями в управлении

$$\dot{x}(t) = f(t, x_t(\cdot), u(t-\tau_1), u(t-\tau_2), \cdots, u(t-\tau_k)), \tag{6}$$

Для слабо измеримых по $t$ функций со значениями в $rpm(P^k)$ вводится аналог условия сопряжения (4), показывается, что множество функций с таким условием (слабо) замкнуто. Доказывается аналог аппроксимационой леммы, из которого следует, что функции из множества обобщенных управлений удовлетворяют условию сопряжения. Приводятся необходимые условия оптимальности для обобщенного управления.

В разделе 1.5 исследуются интегродифференциальные системы вида

$$\dot{x}(t) = \int\limits_{-\tau}^{0} f_0(t, x_t(\cdot), s, u_t(s))\eta(ds), \tag{7}$$

где $\eta(ds)$ неатомическая мера Лебега. Пусть $\Phi$ - множество слабо измеримых на $[-\tau, 0]$ функций $\nu(s)$ со значениями в $rpm(P)$. Согласно общей концепции раздела 1.3, определяется множество $M = U([t_0, \theta], rpm(\Phi))$ –слабо измеримых на $[t_0, \theta]$ функций $\mu(t)$ со значениями в $rpm(\Phi)$. Пусть $M_\delta$ его подмножество функций, сосредоточенных на элементах из $\Phi$. В этом множестве выделяется множество функций-сверток

$$S = \{\mu(\cdot) \in M_\delta : \ \mu(t,s) = \nu(t+s), \ \nu(\cdot) \in \Psi\}.$$

Здесь $\Psi = U([t_0 - \tau, \theta], rpm(P))$ - множество слабо измеримых на $[t_0 - \tau, \theta]$ функций, со значениями в $rpm(P)$, т.е. обобщенных управлений, используемых для систем без запаздывания.

Показывается, что множество обобщенных управлений совпадает с $S$, таким образом, для введения обобщенных управлений можно ограничиться функциями $\nu(t)$ из $\Psi$, т.е. обобщенными управлениями в смысле [12]. Этим системы (7) принципиально отличаются от систем вида (6), где такое сведение невозможно, как показывает пример, приведенный в разделе 1.2.

[12] *Варга Дж.* Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. М. 1977. 624 с., *Гамкрелидзе Р.В.* Основы оптимального управления. Тбилиси. 1975. 253 с.

**В главе 2** изучаются задачи позиционного управления системой с запаздыванием в управлении

$$\dot{x}(t) = f_1(t, x(t), u(t), u(t-\tau)) + f_2(t, x(t), v(t)), \tag{8}$$

в условиях конфликта или неопределенности.

Ранее для такой системы в работах Ю.Осипова и В.Г.Пименова были изучены задачи сближения и уклонения фазового вектора $x(t)$ системы и предыстории управления – функции $u_t(\cdot) = \{u_t(s) = u(t+s),\ -\tau \le s < 0\}$ – с некоторым целевым множеством к моменту $\theta$. При этом целевое множество выбирается в функциональном пространстве позиций системы (8) – троек $\{t, x, u_t(\cdot)\}$. Решения этих задач получены в виде экстремальных стратегий к стабильным множествам (или к последовательности вложенных стабильных множеств). Наличие запаздывания в управлении создает дополнительные трудности в формализации понятий движений, максимального стабильного множества и наделяет систему новыми эффектами. Это связано, в основном, с некомпактностью множества управлений $u(t)$, и, как следствие, с некомпактностью движений системы (8). Расширение понятия управлений согласно схеме главы 1, позволяет вводить не только аппроксимационные движения, но и предельные движения системы (8), избежать процедуры прицеливания на последовательность стабильных множеств.

В разделе 2.1 производится формализация обобщенной позиции системы (8) как тройки $\{t, x, \mu_t(\cdot)\}$, где предыстория обобщенного управления $\mu_t(\cdot)$ трактуется согласно конструкциям главы 1, а также формализуются понятия обобщенной стратегии, аппроксимационного обобщенного и предельного обобщенного движений системы (8). Приводится постановка задач сближения и уклонения обобщенного движения системы с целевым множеством $M$ внутри множества ограничений $N$ в пространстве обобщенных позиций.

С помощью модификации понятий стабильности множеств в пространстве позиций и экстремальных к этим множествам стратегий указываются достаточные условия разрешимости поставленных задач. Приводится ряд утверждений, которые образуют доказательство теоремы об альтернативе:

*Теорема 2.1.4.* Для любой обобщенной позиции $p_0$ и любой пары замкнутых множеств $M$ и $N$ либо разрешима задача сближения с $M$ внутри $N$, либо разрешима задача уклонения от $M$ вплоть до выхода из $N$.

В разделе 2.2 изучаются задачи позиционного управления системой

(8) в классе обычных позиций $\{t, x, u_t(\cdot)\}$. По схеме предыдущего раздела вводится понятие позиции, стратегии, аппроксимационного движения, производится формализация задач сближения и уклонения. Указываются условия разрешимости поставленных задач с помощью понятий стабильных множеств и экстремальным к ним стратегий. В отличие от конструкций предыдущего раздела существенно используется процедура прицеливания на последовательность вложенных стабильных множеств. Приводятся условия, при которых задачи позиционного управления системой (8) в классах обычных и обобщенных стратегий эквивалентны.

Вторая часть этого раздела посвящена описанию процедур построения множества $W^{\text{поз}}(M, N)$ (множества позиционного поглощения) – максимального множества позиций, из которых, как из начальных разрешима задача сближения с $M$ внутри $N$. Для построения этого множества используется метод программных итераций [13], однако, используемые здесь определения стабильности ($(\gamma, u)$–стабильность) и множества программного поглощения ($\gamma$-поглощения) позволяют формально обойтись в программных конструкциях без привлечения обобщенных управлений-мер.

В разделе 2.3 для системы (8) изучается типичная задача позиционного управления – дифференциальная игра с фиксированным временем окончания. Плата игры определяется функционалом на конечном состоянии системы. Доказывается наличие ситуации равновесия в этой игре. Предлагается итерационный процесс нахождения цены игры с помощью программных конструкций. Рассматривается пример системы с функциональной платой, в котором цена игры определяется после первой итерации программного максимина.

В **главе 3** изучается задача о выборе начальной предыстории управления с целью улучшения качества дальнейшего управления системой с эффектом последействия в управляющих параметрах.

В разделе 3.1 производится постановка задачи о выборе предыстории управления для нелинейной управляемой системы вида (2).

В разделе 3.2 указываются условия существования решения этой задачи в классах обычных управлений и обобщенных управлений-мер, приводятся необходимые условия минимума.

В качестве примеров в разделе 3.3 рассматриваются линейные задачи. Один из примеров представляет собой задачу минимизации терминального функционала, заданного выпуклой функцией. С помощью аппарата выпуклого анализа выводятся условия оптимальности. Второй при-

[13] *Ченцов А.Г.* К игровой задаче наведения //Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. Г1. С. 73 76.

мер представляет собой задачу выбора оптимальной предыстории управления в задаче о линейно-квадратичном регуляторе с запаздыванием. В этом случае необходимые условия оптимальности выводятся в силу условия дифференцируемости по Фреше минимизируемого функционала и сводятся к решению интегрального уравнения Фредгольма второго рода.

В других примерах рассматриваемый минимизируемый функционал, определенный на предысториях, оказывается недифференцируемым даже при сколь угодно гладких функциях, задающих систему и исходный функционал качества, поэтому градиентные методы минимизации неприменимы. В разделе 3.4 предлагается численный алгоритм поиска минимума, основанный на обобщении градиентного метода (полуградиентный метод). В разделе 3.5 указываются условия применимости этого метода для исследуемой задачи.

В последнем разделе этой главы для систем с запаздыванием в управлении вида

$$\dot{x} = f_1(t,x) + f_2(t,x)u(t) + f_3(t,x)u(t-\tau)$$

исследована задача о позиционном восстановлении неизвестного управления по поступающей информации о фазовых состояниях системы. В качестве метода решения задачи рассматривается модификация метода динамического моделирования Ю.С. Осипова и А.В. Кряжимского. Алгоритм строится на базе модели, отслеживающей реальное движение, а управление в модели дает искомое среднеквадратичное приближение реального управления. В процедуре существенно используется информация о начальной предыстории управления. Дается приложение решения этой задачи в теории дифференциальных игр с запаздыванием в управлении.

В **главе 4** конструируются и изучаются численные методы решения ФДУ с постоянным шагом.

В разделе 4.1 производится постановка начальной задачи для системы

$$\dot{x} = f(t, x(t), x_t(\cdot)), \tag{9}$$

( $x_t(\cdot) = \{x(t+s), -\tau \le s < 0\}$ ) с начальными условиями

$$x(t_0) = x_0,\ x_{t_0}(\cdot) = \{y^0(s), -\tau \le s < 0\}. \tag{10}$$

Здесь $f : [t_0, t_0+\theta] \times R^l \times Q[-\tau, 0) \to R^l$; $\theta > 0$ - величина временного интервала, $\tau > 0$ - величина интервала запаздывания, $R^l$ - $l$-мерное евклидово

пространство; $Q[-\tau, 0)$ - пространство $l$-мерных кусочно-непрерывных на $[-\tau, 0)$ функций $y(\cdot)$ с разрывами первого рода и непрерывными справа в точках разрыва.

Особенность этой системы ФДУ состоит в том, что конечномерная фазовая составляющая отделена от бесконечномерной, в отличие от обычно рассматриваемых ФДУ.

Делаются предположения о правой части системы (9) (непрерывность по сдвигу и липшицевость по второму и третьему аргументам), которые гарантируют существование и единственность решения задачи (9) – (10).

В разделе 4.2 особенности численного решения задачи (9) – (10) иллюстрируются на простейшей численной модели – методе Эйлера с кусочно-постоянной интерполяцией.

Пусть $t_n = t_0 + n\Delta$, $n = 0, 1, ..., N$, $\Delta = \theta/N$, $\tau/\Delta = m$. Введем дискретную численную модель системы (9), обозначив приближение точного решения $x(t_n) = x_n$ в точке $t_n$ через $u_n \in R^l$.

В отличие от обыкновенных дифференциальных уравнений, в системе (9) функционал правой части $f$ определён на функциях-предысториях, поэтому задание дискретной предыстории недостаточно для построения адекватной системе (9) численной модели. Для того чтобы определить функционал $f$ на приближенном решении, необходима интерполяция. Простейший способ - кусочно-постоянная интерполяция:

$$u(t) = \begin{cases} u_i, \ t \in [t_i, t_{i+1}), \ i = 0, 1, ..., n, \\ y^0(t - t_0), \ t \in [t_0 - \tau, t_0). \end{cases}$$

Методом Эйлера назовем пошаговую модель

$$u_0 = x_0; \quad u_{n+1} = u_n + \Delta f(t_n, u_n, u_{t_n}(\cdot)), \ n = 0, ..., N-1,$$

где $u_{t_n}(\cdot) = \{u(t_n + s), -\tau \le s < 0\}$ – предыстория модели, определенная интерполяцией.

Доказывается что метод Эйлера сходится, т.е. $\max_{1 \le n \le N} \|u_n - x(t_n)\| \to 0$ при $N \to \infty$, и имеет порядок сходимости 1, т.е. найдется постоянная $C$ такая, что $\|u_n - x(t_n)\| \le C\Delta$ для всех $n = 1, ..., N$. Доказательство показывает, что порядок сходимости определяется двумя факторами: качеством интерполяции и качеством дискретной модели. Дальнейшее улучшение свойств сходимости возможно, во-первых, за счет усложнения интерполяции, во-вторых, за счет усложнения пошаговой модели.

В разделе 4.3 изучаются методы интерполяции дискретной предыстории модели и методы ее экстраполяции.

Дискретной предысторией модели в момент $t_n$ назовем множество $\{u_i\}_n = \{u_i \in R^l, \ \ n - m \le i \le n\}$.

Оператором интерполирования $I$ дискретной предыстории модели назовем отображение $I : \{u_i\}_n \to u(\cdot) \in Q[t_n - \tau, t_n]$.

Будем говорить, что оператор $I$ имеет порядок погрешности $p$ на точном решении, если существуют константы $C_1$, $C_2$ такие, что для всех $n = 0, 1, ..., N$ и $t \in [t_n - \tau, t_n]$ выполняется

$$\|x(t) - u(t)\| \le C_1 \max_{i \ge 0, n-m \le i \le n} \|u_i - x_i\| + C_2 \Delta^p.$$

Рассматривается способ интерполяции функциями, кусочно составленными из многочленов $p$-й степени, где $p$ - произвольное натуральное число. (Такие функции называются вырожденными сплайнами.)

Доказывается

*Теорема 4.3.1.* Пусть точное решение $x(t)$ $p+1$ раз непрерывно дифференцируемо на отрезке $[t_0 - \tau, t_0 + \theta]$, тогда оператор интерполяции вырожденными сплайнами $p$-го порядка имеет погрешность интерполяции $p + 1$.

Указываются другие способы интерполяции.

Во многих рассматриваемых методах (типа Рунге–Кутты, неявных многошаговых и других) необходимо в момент $t_n$ знать предысторию модели $u_{t_n + a\Delta}(\cdot)$ при $a > 0$, т.е. произвести экстраполяцию модели на отрезок $[t_n, t_n + a\Delta]$.

Для любого $a > 0$ оператором экстраполирования $E$ предыстории модели назовем отображение $E : \{u_i\}_n \to u(\cdot) \in Q[t_n, t_n + a\Delta]$.

Будем говорить, что экстраполяция предыстории модели имеет порядок погрешности $p$ на точном решении, если существуют константы $C_3$, $C_4$ такие, что для всех $a > 0$ и всех $n = 0, 1, ..., N - 1$ и $t \in [t_n, t_n + a\Delta]$ выполняется

$$\|x(t) - u(t)\| \le C_3 \max_{n-m \le i \le n} \|u_i - x_i\| + C_4 (\Delta)^p.$$

Описывается один из способов задания оператора экстраполяции – экстраполяция продолжением интерполяционного многочлена $p$-ой степени.

*Теорема 4.3.2.* Пусть точное решение $x(t)$ $p+1$ раз непрерывно дифференцируемо на отрезке $[t_0 - \tau, t_0 + \theta]$, тогда оператор экстраполяции продолжением интерполяционного многочлена $p$-й степени имеет погрешность экстраполяции порядка $p + 1$.

Операторы интерполяции и экстраполяции можно объединить в один оператор $IE$, для которого также вводится понятие порядка погрешности.

В разделе 4.4 конструируются методы типа Рунге-Кутты и изучается порядок их сходимости.

Назовем $k$-этапным явным методом типа Рунге-Кутты – ЯРК (с интерполяцией $I$ и экстраполяцией $E$) численную модель вида

$$u_0 = x_0, \quad u_{n+1} = u_n + \Delta \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \, h_i(u_n, u_{t_n}(\cdot)), \;\; n = 0, ..., N-1,$$

$$h_1(u_n, u_{t_n}(\cdot)) = f(t_n, u_n, u_{t_n}(\cdot)),$$

$$h_i(u_n, u_{t_n}(\cdot)) = f(t_n + a_i\Delta, u_n + \Delta \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} h_j(u_n, u_{t_n}(\cdot)), u_{t_n + a_i\Delta}(\cdot)).$$

Здесь предыстория модели определяется соотношениями

$$u_t(s) = \begin{cases} y^0(t+s-t_0) & \text{при } t+s < t_0, \\ I(\{u_i\}_n) & \text{при } t_n - \tau \le t+s < t_n, \\ E(\{u_i\}_n) & \text{при } t_n \le t+s \le t_n + a\Delta, \end{cases}$$

$$a = \max\{|a_i|, 1 \le i \le k\}.$$

Невязкой (погрешностью аппроксимации) ЯРК-метода назовем функцию

$$\psi(t_n) = \frac{x_{n+1} - x_n}{\Delta} - \sum_{i=1}^{k} \sigma_i \, h_i(x_n, x_{t_n}(\cdot)).$$

Будем говорить, что невязка имеет порядок $p$, если найдется постоянная $C$ такая, что $\|\psi(t_n)\| \le C\Delta^p$ для всех $n = 0, 1, ..., N-1$.

Будем говорить, что метод имеет порядок сходимости $p$, если найдется постоянная $C$ такая, что $\|u_n - x(t_n)\| \le C\Delta^p$ для всех $n = 1, ..., N$.

Доказывается основное утверждение:

*Теорема 4.4.1.* Если ЯРК-метод имеет невязку порядка $p_1 > 0$, интерполяция предыстории модели имеет порядок $p_2 > 0$, экстраполяция предыстории модели имеет порядок $p_3 > 0$, то метод сходится, причем порядок сходимости ЯРК-метода $p$ не меньше минимума из $p_1$, $p_2$, $p_3$.

В разделе 4.5 предлагается методика определения порядка невязки и построения методов высокого порядка. Для ОДУ основным инструментом этого служит разложение Тейлора точного решения и правой части системы. Для ФДУ методика сохраняется, однако для вычисления производных функционала $f$ правой части системы (9) используется техника

$i$-гладкого анализа. Эта техника позволяет сделать вывод о том, что если некоторый ЯРК-метод имеет для ОДУ порядок невязки $p$, то ЯРК-метод с теми же коэффициентами для ФДУ имеет также порядок невязки $p$. Этот вывод позволяет использовать для ФДУ все разнообразие численных методов, созданных для ОДУ.

В разделе 4.6 изучаются многошаговые методы вида

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i u_{n-i} + \Delta \sum_{i=0}^{k} \beta_i f_{n-i}^*, \ n = k, \ldots, N,$$

где $f_i^* = f(t_i, u_i, u_{t_i}(\cdot))$, $u(\cdot) = IE(\{u_i\}_n)$.

Порядок сходимости многошаговых методов определяется порядком невязки, порядком оператора интерполяции-экстраполяции $IE$ и порядком аппроксимации стартовых значений модели $u_i$, $i = 0, \ldots, k-1$ (качеством разгона), а также свойством 0 – устойчивости, которое определяется аналогично случаю ОДУ.

В следующем разделе изучается класс многошаговых методов, не требующих разгона, который возникает в связи со спецификой ФДУ.

В разделе 4.8 конструируется аналог метода Нордсика – одного из самых экономичных. Этот метод эквивалентен многошаговому, но, в отличие от многошагового, в нем легко можно изменять величину шага. Коэффициенты вектора Нордсика приближают производные точного решения системы, но сами производные считаются только один раз для получения стартовых значений, что особенно актуально в случае ФДУ.

В разделе 4.9 показано как технику $i$–гладкого анализа можно применять для построения методов, использующих вычисление старших производных решения.

В разделе 4.10 дается обзор других методов численного решения ФДУ, основанных на принципе разделения конечномерной и бесконечномерной составляющей фазового вектора.

**Глава 5** посвящена формализации и изучению свойств сходимости общих линейных методов численного решения ФДУ с постоянным шагом. Для обыкновенных дифференциальных уравнений имеется ряд работ, в которых методы типа Рунге-Кутты, многошаговые и другие методы объединяются в общие схемы. Наиболее общей, видимо, следует считать схему, предложенную Skeel R.D., в которую вкладываются многие известные методы. В данной главе эта схема модифицируется на случай системы ФДУ. Главным моментом в модификации является введение промежуточного пространства – звена между дискретной схемой и функциональ-

ной моделью, которая адекватно отражает свойства исходной системы ФДУ, этот элемент схемы назван интерполяцией. Кроме того, традиционное условие липшицевости функции, определяющей продвижение дискретной модели на шаг, заменяется на более слабое условие, названное квазилипшицевостью.

В разделе 5.1 рассматривается начальная задача для ФДУ вида

$$\dot{x} = f(t, x_t(\cdot)), \quad t \in [\alpha, \beta], \tag{11}$$

$$x(t) = \phi(t), \quad t \in [\alpha - \tau, \alpha]. \tag{12}$$

Здесь $\tau \geq 0$ - величина запаздывания, $x \in R^l$ -фазовый вектор, $x_t(\cdot) = \{x(t+s), \alpha - \tau \leq t + s \leq t\}$ -предыстория фазового вектора к моменту $t$. Делаются основные предположения о системе (11).

В разделе 5.2 приводятся конструкции общей схемы. Ее основные элементы следующие.

Пусть $\Delta > 0$, такое, что $\tau/\Delta = m$ – целое, $t_0 \in [\alpha, \beta]$. Сеткой назовем конечный набор чисел $\Sigma_\Delta = \{t_i = t_0 + i\Delta \in [\alpha - \tau, \beta], \quad i = -m, ..., N\}$.

Дискретной моделью назовем всякую сеточную функцию $U \colon t_i \in \Sigma_\Delta \to u(t_i) = u_i \in U_i$, где $U_i$ – линейные нормированные пространства.

Для $n \geq 0$ предысторией дискретной модели к моменту $t_n$ назовем множество $\{u_i\}_{n-m}^n = \{u_i \in U_i, \quad i = n - m, ..., n\}$.

Стартовыми значениями модели назовем $\{u_i\}_{-m}^0$.

Оператором интерполяции дискретной предыстории модели назовем функцию $I$: $I(\{u_i\}_{n-m}^n) = v \in V_n$, где $V_n$ – линейные нормированные пространства.

Формулой продвижения модели на шаг (численным методом) назовем алгоритм

$$u_{n+1} = S_n u_n + \Delta\Phi(t_n, I(\{u_i\}_{n-m}^n), \Delta), \tag{13}$$

где $S_n$ - линейный оператор .

Функцией точных значений назовем отображение $Z(t_i, \Delta) = z_i \in U_i$, $i = -m, ..., N$, которое является следствием задания точного решения $x(t_i)$ исходной системы ФДУ в узлах сетки. Будем говорить, что метод сходится с порядком $p$, если существует константа $C$ такая, что $\|z_n - u_n\| \leq C\Delta^p$ для всех $n = -m, ..., N$.

Назовем метод (13) устойчивым, если произведение операторов $S_i$, $i = n, n-1, ..k$ равномерно ограничено для всех $n \geq 0$, $0 \leq k \leq n$.

Погрешностью аппроксимации (невязкой) метода назовем сеточную функцию

$$d_{n+1} = z_{n+1} - S_n z_n - \Delta\Phi(t_n, I(\{z_i\}_{-m}^n), \Delta), \; n = 0, ..., N-1.$$

Будем говорить, что метод имеет порядок погрешности аппроксимации $p$, если существует константа $C$ такая, что $\| d_n \| \leq C\Delta^{p+1}$ для всех $n = 1, ..., N$.

Будем говорить, что оператор интерполяции удовлетворяет условию квазилипшицевости, если найдутся такие $K_1$ и $\omega_1(\Delta)$, что для всех $\Delta \geq 0$ и для всяких предысторий дискретной модели $\{u_i^1\}_{-m}^n$ и $\{u_i^2\}_{-m}^n$ выполняется

$$\| v^1 - v^2 \|_V \leq K_1 \max_{-m \leq i \leq n} \| u_i^1 - u_i^2 \|_{U_i} + \omega_1(\Delta),$$

где $v^j = I(\{u_i^j\}_{-m}^n)$, $j = 1, 2$; $\omega_1(\Delta) \to 0$ при $\Delta \to 0$.

Будем говорить, что оператор интерполяции удовлетворяет условию квазилипшицевости с порядком $p$, если существует константа $C$ такая, что

$$\omega_1(\Delta) \leq C\Delta^p.$$

Будем говорить, что стартовые значения модели имеют порядок $p$, если найдется константа $C$ такая, что

$$\| z_i - U^0(t_i, \Delta) \|_{U_i} \leq C\Delta^p \text{ для всех } i = -m, ..., 0.$$

Доказывается основное утверждение о достаточных условиях сходимости и порядке сходимости.

*Теорема 5.2.1.* Пусть метод (13) устойчив, функция $\Phi$ удовлетворяет условию квазилипшицевости с порядком $p_1 > 0$ по второму аргументу, оператор интерполирования $I$ удовлетворяет условию квазилипшицевости с порядком $p_2 > 0$, стартовые значения имеют порядок $p_3 > 0$, погрешность аппроксимации имеет порядок $p_4 > 0$, тогда метод сходится, причем порядок сходимости не меньше минимума из $p_1, p_2, p_3, p_4$.

В разделе 5.3 путем выбора сетки, пространств дискретных моделей и интерполяционных пространств, стартовых значений, оператора интерполяции и формулы продвижения на шаг проводится вложение важнейших методов в предложенную выше схему. Рассмотрены ЯРК-методов, многошаговые методы, непрерывные методы.

В разделе 5.4 приводятся необходимые и достаточные условия сходимости с порядком $p$ в терминах понятия согласованности[14] метода с порядком $p$. В этом и следующем разделах предполагается, что пространство дискретных моделей конечномерно.

[14] *Хайрер Э., Нерсетт С., Ваннер Г.* Решение обыкновенных дифференциальных уравнений. Нежесткие задачи. М. Мир. 1990. 512 с.

В разделе 5.5 изучается асимптотическое разложение глобальной погрешности по величине шага дискретизации. Как известно, в случае обыкновенных дифференциальных уравнений главный член разложения глобальной погрешности удовлетворяет некоторой линейной системе дифференциальных уравнений, сопряженной к исходной. В случае ФДУ главный член разложения глобальной погрешности также удовлетворяет некоторой линейной системе, но уже функционально-дифференциальных уравнений. Асимптотическое разложение глобальной погрешности является теоретической основой для конструирования широкого класса экстраполяционных методов и для организации процедур автоматического выбора шага. В первой части раздела рассматриваются одношаговые методы, во второй части результаты обобщаются на произвольные сильно-устойчивые методы.

В главах 4 и 5 рассматривались численные методы решения ФДУ с постоянным шагом дискретизации. Однако, современные программные средства численного решения ОДУ используют процедуры с автоматическим выбором шага в зависимости от поведения решения системы. В **главе 6** некоторые модификации приведенных в двух предыдущих главах алгоритмов, позволяют перенести большую часть результатов и на случай переменного шага. В качестве примера такой модификации в разделе 6.1 приводится описание (с доказательством соответствующих теорем сходимости) явных методов типа Рунге-Кутты. Вводится понятие невязки и её порядка, порядка сходимости метода. Аналогично случаю постоянного шага доказывается утверждение о том, что ЯРК-метод с переменным шагом имеет порядок сходимости равный минимуму из порядка аппроксимации (невязки) и порядка оператора интерполяции-экстраполяции $IE$. В оценках утверждения этой теоремы существенно входит константа, ограничивающая отношение величины максимального шага дискретизации временного отрезка к минимальному.

В разделе 6.2 исследуется порядок оператора интерполяции расширенной предыстории дискретной модели вырожденными сплайнами $p$–степени. При неравномерной временной сетке в отрезок $[t_n-\tau, t_n]$, длиной равный величине запаздывания, укладывается не обязательно целое число шагов. Поэтому, чтобы не потерять точности интерполяции, нужно привлечь для построения самого левого из многочленов в конструкции сплайна узлы из предыдущего отрезка $[t_n-2\tau, t_n-\tau]$. Доказывается, что при такой модификации оператор интерполяции расширенной предыстории дискретной модели вырожденными сплайнами $p$–степени имеет

порядок $p+1$ при условии достаточной гладкости точного решения. Оператор экстраполяции расширенной предыстории дискретной модели продолжением вырожденного сплайна $p-$степени также имеет порядок $p+1$, откуда следует существование оператора интерполяции-экстраполяции $IE$ с требуемыми в теореме о порядке сходимости предыдущего раздела свойствами.

Раздел 6.3 посвящен описанию процедур автоматического выбора шага. Излагается правило Рунге практической оценки погрешности применительно к рассматриваемым методам. На основе оценки локальной погрешности в зависимости от величины шага приводятся алгоритмы автоматического уменьшения или увеличения шага в зависимости от заданной погрешности. Рассматривается два варианта: оценка погрешности одного метода с двумя разными шагами и оценка погрешности двух вложенных методов (методов с почти одинаковыми матрицами Бутчера). Такие процедуры являются неотъемлемой частью современных численных методов решения ОДУ и ФДУ, применяемых в пакетах прикладных программ. Эти алгоритмы послужили основой для создания соответствующего программного обеспечения в виде пакета программ Time-Delay System Toolbox, предназначенного для численного решения широкого класса систем с постоянным, переменным и распределенным запаздыванием и для моделирования некоторых задач управления такими системами.

В разделе 6.4 приводятся оценки глобальной погрешности, проведенные с учетом того, что функционал правой части ФДУ вычисляется неточно. Такая ситуация возникает, например, если ФДУ содержит распределенное запаздывание в виде интегралов от предыстории. Эти оценки показывают, насколько точно должен вычисляться функционал правой части ФДУ, чтобы не уменьшить порядок сходимости метода. Так в программах пакета Time-Delay System Toolbox, где используется метод Рунге-Кутты-Фельберга 4(5) порядков с интерполяцией и экстраполяцией вырожденными сплайнами четвертого порядка, для подсчета интегралов в системах с распределенным запаздыванием используется составной метод Симпсона, имеющий четвертый порядок точности.

В разделе 6.5 рассматриваются несколько простых примеров систем, относящимся к различным типам ФДУ. В некоторых из этих примеров аналитически выписываются точные решения, поэтому численные методы можно тестировать, сравнивая приближенные и точные решения, и по величине погрешности (а также по затратам времени и памяти) де-

лать выводы об эффективности различных численных методов, способов интерполяции и экстраполяции предыстории и способов выбора шага. В других (модельных) примерах этого раздела аналитическое представление точных решений неизвестно, однако известны полученные аналитическими способами некоторые качественные характеристики поведения решений: асимптотика, предельные циклы. Проведенные численные расчеты позволяют дополнить представления о качественных свойствах решений этих моделей.

В разделе 6.6 в качестве примера приводится реализация обратной связи в линейно-квадратичной задаче с сосредоточенным запаздыванием в управлении. Обратная связь представляет в этой задаче интегральное уравнение типа Вольтерра и сводится к системе ФДУ с сосредоточенным и распределенным запаздыванием, которую можно численно моделировать.

В разделе 6.7 для линейных автономных систем с запаздыванием в управлении решается задача о стабилизации методом удаляющегося горизонта [15]. Этот метод состоит в том, что для решения задачи стабилизации решается вспомогательная задача управления на конечном промежутке времени (назначается видимый горизонт). В некоторых ситуациях полученное оптимальное управление не зависит от времени, и передвигая горизонт, можно получить стабилизирующее управление. В качестве минимизируемого критерия рассмотрена сумма интеграла от квадрата управления и квадратичного терминального слагаемого. В этом случае, как показано в предыдущем разделе, для решения линейно-квадратичной задачи существуют точные формулы. Полученная линейная обратная связь и дает, при определенных условиях, решение задачи стабилизации.

В качестве иллюстрации материала разделов 6.6 и 6.7 приводится решение модельных задач управления и стабилизации трехстепенного гироскопа в кардановом подвесе – гирорамы с запаздыванием в канале управления.

## ПУБЛИКАЦИИ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[1] *Пименов В.Г.* Дифференциальная игра с фиксированным временем окончания для систем последействием в управлении // Задачи позиционного моделирования. Свердловск. 1986. С. 103 – 118.

[15] *Kwon W.H. and Pearson A.E.* Feedback stabilizatiion of lihear systems with delay systems with delayed control //IEEE Tras. Automat. Contr. 1980. V.25 (2). P. 266 – 269.

[2] *Пименов В.Г.* Задача о регулировании системой с запаздыванием в управлении // Труды 3-ей конф. "Дифференциальные уравнения и применения". Руссе. Болгария. 10 июня – 6 июля 1985. Руссе. 1987. Т. 1. С. 321 – 324.

[3] *Пименов В.Г.* К задаче о регулировании системой с запаздыванием в управлении // Некоторые методы позиционного и программного управления. Свердловск. 1987. С. 107 – 121.

[4] *Пименов В.Г.* Задача о моделировании управления с запаздыванием // Качественные вопросы теории дифференциальных уравнений и управляемых систем. Свердловск. УНЦ АН СССР. 1988. С. 83 – 95.

[5] *Пименов В.Г.* Алгоритм выбора начального состояния в системе с последействием в управлении // 3-я Уральская региональная конференция "Функционально-дифференциальные уравнения и их приложение". Тезисы докладов. Пермь. 1988. С. 188.

[6] *Пименов В.Г.* О выборе начального состояния в системе с последействием в управлении // Некоторые задачи управления и устойчивости. Свердловск. 1989. С. 71 – 89.

[7] *Пименов В.Г.* Обобщенные оптимальные управления в системах с запаздываниями по управлению // 7-я Всесоюзная конференция "Управление в механических системах". Тезисы докладов. Свердловск. 1990. С. 84 – 85.

[8] *Пименов В.Г.* О существовании обобщенных оптимальных управлений в системах с запаздыванием в управлении // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27. Ѓ8. С. 2174 – 2176.

[9] *Пименов В.Г.* Некоторые применения метода динамической регуляризации в задачах численного решения дифференциальных уравнений // Международная конференция "Дифференциальные уравнения и их приложения". Тезисы докладов. Саранск. 1994. С. 90.

[10] *Пименов В.Г.* Обобщенные управления, согласованные по последействию // 3-ий международный семинар "Негладкие и разрывные задачи управления, оптимизации и их приложения". Тезисы докладов. Санкт-Петербург. 1995, часть 2. С. 92 – 96.

[11] *Пименов В.Г.* Концепция обобщенных управлений для дифференциально-функциональных систем // Дифференц. уравнения. 1995. Т. 31. Ѓ6. С. 980 – 989.

[12] *Пименов В.Г.* Функционально-дифференциальные уравнения: численные методы. Екатеринбург. Из-во Урал. ун-та. 1998. 80 с.

[13] *Пименов В.Г.* Общая схема численных методов решения ФДУ и

асимптотическое разложение погрешности // Международная научная конференция "Нелинейный анализ и функционально-дифференциальные уравнения". Тезисы докладов. Воронеж. 2000. С. 168 -169.

[14] *Пименов В.Г.* Общие линейные методы численного решения дифференциально-функциональных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. Ѓ1. С. 105 -114.

[15] *Пименов В.Г.* Задачи позиционного управления в классе обобщенных управлений с последействием // Изв. УрГУ. 2001. Ѓ18. С. 139 - 160.

[16] *Pimenov V.* Asymptotic behavior of global error of general numerical methods for functional differential equations // SACTA (Stability and Control: Theory and Applications). 2000. V. 3 Ѓ2. P. 117 - 124.

[17] *Квон О.Б., Пименов В.Г.* Неявные методы типа Рунге-Кутты // Изв. УрГУ. 1998. Ѓ10. С. 69 - 79.

[18] *Ким А.В., Кучина Е.П., Онегова О.В., Пименов В.Г., Прохоров В.В.* Пакеты программ для решения функционально-дифференциальных уравнений // Алгоритмический анализ некорректных задач. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции, посвященной памяти В.К. Иванова. 2 - 6 февраля 1998. Екатеринбург. С. 119 - 120.

[19] *Ким А.В., Пименов В.Г.* О применении i-гладкого анализа к разработке численных методов решения функционально-дифференциальных уравнений // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 1998. Т. 5. С. 104 - 126.

[20] *Ким А.В. Пименов В.Г.* Общая схема численного решения ФДУ и пакет TIME-DELAY SYSTEM TOOLBOX // Дифференциальные и интегральные уравнения. Тезисы докладов международной конференции. Челябинск. ЧГУ. 22 - 26 июня 1999. С. 63.

[21] *Пименов В.Г., Стихина Т.К.* Итерационная процедура построения стабильных множеств в системах с последействием в управлении // Задачи управления и моделирования в динамических системах. Свердловск. 1984. С. 69 - 76.

[22] *Пименов В.Г., Онегова О.В.* О применении численных методов к решению задач управления системами с запаздыванием // Алгоритмический анализ некорректных задач. Тезисы докладов Всероссийской научной конференции. 26 февраля - 2 марта 2001. Екатеринбург. С. 171 - 172.

[23] *Han S.H., Kim A.V., Kwon W.H., Lozhnikov A.B., Onegova O.V, Pimenov V.G.* Time-Delay System Toolbox // The Third European Congress of Mathematics. Barcelona. Yuly 10 - 14. 2000. P. 116.

[24] *Kim A.V., Han S.H., Kwon W.H., Pimenov V.G.* Explicit numerical methods and LQR control algorithms for time-delay systems // Proceeding of the International Conference on Electrical Engineering. Iuly 20 – 25. 1998. Kyungju. Korea. P. 413 – 416.

[25] *Kim A.V., Kwon O.B., Pimenov V.G.* Functional differential equations: qualitative theory and numerical methods based on i-smooth calculus // SIAM Conference on Dynamical Systems. Snowbird. USA. May 23 – 27. 1999. P. 43.

[26] *Kim A.V., Kwon W.H., Pimenov V.G.* Numerical methods and a software package for delay differential equations // The Third International Conference on Dynamical Systems and Applications. Atlanta. USA. May 26-29. 1999. P. 101 – 102.

[27] *Kim A.V., Pimenov V.G.* Numerical methods for time-delay systems on the basis of *i*-smooth analysis // Proc. of the 15th World Congr. on Scient. Computation, Modelling and Applied Mathematics. Berlin. August 1997. V. 1: Computational Mathematics. P. 193 – 196.

[28] *Kim A.V., Pimenov V.G.* Multistep numerical methods for functional differential equations //Mathematics and Computers in Simulation. 1998. V.45. P. 377 – 384.

[29] *Kim A.V., Pimenov V.G.* Numerical Methods for Delay Differential Equations// Lecture Notes Series Г44. Seoul National University. Seoul. Korea. 1999. 96 p.

[30] *Kwon O.B., Kim A.V., Pimenov V.G.* Numerical modeling of control time-delay systems // Proceeding of the IFAC Workshop "Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization" Iune 17 – 20. 1998. Chelyabinsk. Russia. P. 137 – 139.

[31] *Kwon O.B., Kim A.V., Pimenov V.G.* Numerical modeling of control time-delay systems // Nonsmooth and discontinuous problems of control and optimization / Edited by V.D.Batukhtin, F.M.Kirilova and Ukhobotov. Elsevier Publishers. London. 1999. P. 155 – 160.

[32] *Kwon W.H., Kim A.V., Pimenov V.G., Han S.H., Lozhnikov A.B., Onegova O.V.* Time-Delay System Toolbox and its Applications // Proc. of Korean Automatic Control Conference. Pusan. October 1998. P. 147 – 150.

[33] *Kwon W.H., Kim A.V., Pimenov V.G., Lozhnikov A.B., Han S.H., Onegova O.V.* Time-Delay System Toolbox (for use with MATLAB). Beta Version. Seoul National University. Seoul. Korea. 1998. 114 p.

Отпечатано в ИПЦ "Издательство УрГУ".
Печать офсетная. Усл. печ. л. 2. Тираж 100. Заказ № 290.