



**С.В. ПОРШНЕВ, Ф. РАБАЙА**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ  
МЕТОДА СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО  
АНАЛИЗА В ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА  
И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

**МОНОГРАФИЯ**

Ульяновск  
2016

**Рецензенты:**

*Берг Дмитрий Борисович* – доктор физико-математических наук, профессор, главный научный сотрудник Института промышленной экологии УрО РАН, г. Екатеринбург.

*Зобнин Борис Борисович* – доктор технических наук, профессор, профессор кафедры информационных технологий Федерального государственного бюджетного образовательного учреждения высшего профессионального образования «Уральский государственный горный университет», г. Екатеринбург.

**П 60** Поршнева С.В., Рабайа Ф. Исследование особенностей применения метода сингулярного спектрального анализа в задаче анализа и прогнозирования временных рядов: монография. – Ульяновск: Зебра, 2016. – 167 с.

Представлены результаты исследований особенностей применения метода сингулярного спектрального анализа (Singular Spectrum Analysis – SSA) в задачах анализа и прогнозирования временных рядов (ВР). В ходе их проведения были решены следующие задачи: 1) разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных ВР и их экспериментальная апробация на примере реальных геофизических и экономических ВР; 2) разработка алгоритма оценки точности прогнозирования нестационарных ВР методом SSA; 3) получение количественных оценок точности прогнозирования нестационарных ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовых значений цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности (ОРЭМ).

При этом получен ряд новых научных результатов, в том числе предложен научно обоснованный критерий выбора значений параметров метода SSA, обеспечивающий совпадение ВР, восстановленного по рекомендованному набору сингулярных троек, и дискретных значений периодической функции, породивших анализируемый ВР.

В задаче анализа ВР вида  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ : 1) обоснована возможность упрощения процедуры разделения ВР  $F_N$  на главные компоненты (ГК), соответствующие ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ , за счет использования зависимости  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{(i,i+1)}(L \cdot \Delta t)$ , где  $i$  – номер сингулярной тройки разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$ ,  $L$  – размер окна сдвига,  $\Delta t$  – период дискретизации анализируемого ВР; 2) уточнены понятия сильной и слабой разделимостей ВР  $F_N^{(1)}$ , 3) научно обоснованы рекомендации по выбору размер окна сдвига  $L$  обеспечивающие наилучшее разделение ВР типов «шум + const», «шум + периодическая составляющая», «шум + тренд» при различных отношениях сигнал/шум; 4) предложен алгоритм исследования точности прогнозирования ВР методом SSA; 5) предложен алгоритм выбора сингулярных троек траекторной матрицы ВР  $(\lambda_i, U_i, V_i)$ , используемых для прогнозирования значений ВР; 6) получены экспериментальные подтверждения целесообразности использования для краткосрочного прогнозирования нестационарных ВР полинома, аппроксимирующего ВР, восстановленный по набору сгруппированных сингулярных троек траекторной матрицы ВР  $F_N (\lambda_i, U_i, V_i)$  в соответствие с предложенным в работе алгоритмом; 7) на основе использования научных результатов, проведен анализ ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электроэнергии и мощности (ОРЭМ), методом SSA, которые подтверждают целесообразность использования зависимости  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{(i,i+1)}(L \cdot \Delta t)$  для обоснования выбора группируемых главных компонент ВР  $F_N$  и получены оценки точности прогнозирования данных ВР.

УДК 631.371  
ББК 22.172



**S. PORSHNEV, F. RABAIA**

**THE STUDY OF FEATURES OF USING THE SINGULAR  
SPECTRUM ANALYSIS METHOD  
FOR THE ANALYSIS AND FORECASTING  
THE TIME SERIES**

Ulyanovsk  
2016

**P 60** Porshnev S.V., Rabaia F. The study of features of using the singular spectrum analysis method for the analysis and forecasting the time series. – Ulyanovsk: Zebra, 2016. – 167 p.

We have studied the issues of applying the Singular Spectrum Analysis (SSA) to time series (TS) analysis and forecast. The following problems were initially stated: 1) developing well-founded recommendations for choosing the SSA parameters and their experimental testing in real-world tasks of analysis and forecast of geophysical and economic TS; 2) developing an algorithm for estimating the SSA forecast error for nonhomogeneous TS; calculating the SSA forecast error for nonhomogeneous TS of monthly-averaged Wolf numbers and of hourly electricity prices on Russian electricity market; 3) the following original results have been achieved.

We propose a well-founded criterion for choosing the SSA parameters. It ensures the TS reassembled from the proposed singular triples to coincide with the corresponding values of the periodical function which has generated the original TS.

For a TS having the form  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ : 1) we show a possibility of a simplification of the procedure of separating the TS  $F_N$  into principal components corresponding to  $F_N^{(1)}$  and  $F_N^{(2)}$ . It utilizes the dependency  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{(i,i+1)}(L \cdot \Delta t)$ , where  $i$  is a number of singular triple of  $F_N$ 's trajectory matrix' SVD,  $L$  is a window length and  $\Delta t$  is a discretization period of the analyzed TS; 2) we give a more precise definitions for strong and weak separability of  $F_N^{(1)}$  and  $F_N^{(2)}$ ; 3) we give well-founded recommendations for choosing the window length  $L$  for the best separation of TS of types «noise + constant», «noise + harmonic component», «noise + trend» with different signal/noise ratio; 4) we propose an algorithm studies the prediction accuracy of BP by SSA; 5) we propose an algorithm for choosing singular triples  $(\lambda_i, U_i, V_i)$  of TS' trajectory matrix appropriate for TS' forecast; 6) we have confirmed experimentally that one should use the polynomial reassembled by some of the trajectory matrix' singular triples for the short-term forecast of nonhomogeneous TS. We also give an algorithm for choosing these triples; 7) we also have applied the SSA to the analysis of the TS of month-averaged Wolf numbers and the TS of hourly electricity prices on Russian electricity market. The results confirm the correctness of using the dependency  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{(i,i+1)}(L \cdot \Delta t)$  as a criterion for grouping the principal components of TS  $F_N$ . The forecast errors were also estimated.

UDK 631.371  
BBK 22.172

## ОГЛАВЛЕНИЕ

СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ.....	6
ВВЕДЕНИЕ.....	7
ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ.....	10
1.1. Краткий обзор методов анализа и прогнозирования ВР .....	10
1.2. Метод SSA как средство анализа ВР .....	21
1.3. Метод SSA как средство прогнозирования ВР.....	24
1.4. Выводы .....	28
ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СИНГУЛЯРНЫХ ТРОЕК И РАЗДЕЛИМОСТИ АДДИТИВНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВР В МЕТОДЕ SSA .....	29
2.1. Исследование особенностей сингулярных чисел и сингулярных векторов выборочной траекторной матрицы метода SSA гармонического ВР.....	29
2.2. Исследование делимости ГК детерминированных ВР.....	35
2.2.1. Основные определения и свойства делимости ВР в методе SSA .....	36
2.2.2. Анализ делимости ВР вида «const +изменяющийся во времени ВР».....	38
2.2.3. Анализ делимости ВР вида «cos»+изменяющийся во времени ВР.....	50
2.2.4. Анализ делимости ВР вида «exp » + изменяющийся во времени ВР .....	70
2.3. Исследование особенностей сингулярных троек траекторной матрицы ВР, представляющего собой смесь шума и детерминированного сигнала.....	82
2.3.1. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и постоянной составляющей.....	87
2.3.2. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь шума с равномерным законом распределения и постоянной составляющей .....	92
2.3.3. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и периодической составляющей .....	97
2.3.3. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и тренда .....	108
2.4. Выводы .....	114
ГЛАВА 3. АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ВР МЕТОДОМ SSA .....	115
3.1. Анализ ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа.....	115
3.2. Применение метода SSA для прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа.....	128
3.3. Применение метода SSA для прогнозирования ВР, содержащих часовые значения цен на оптовом рынке электроэнергии и мощности .....	145
3.4. Выводы .....	157
ЗАКЛЮЧЕНИЕ.....	158
СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ.....	159

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

SSA – Singular Spectrum Analysis (сингулярный спектральный анализ)

АКФ – автокорреляционная функция

АР – авторегрессия

АРМ – авторегрессионная модель

АРСС – авторегрессии скользящего среднего

ВИ – временной интервал

ВПФР – выборочная плотность функции распределения

ВС –временная сетка

ВР – временной ряд

ГК – главная(-ые) компонент(-ы)

ЛРМ – линейная регрессионная модель

МНК – метод наименьших квадратов

ПР – плотность распределения

СПМ – СПМ

СС – скользящее среднее

ФР – функция распределения

SNR – отношение сигнал шум (Signal to Noise Ratio)

## ВВЕДЕНИЕ

Математические модели, описывающие статистические зависимости между величинами, изменение которых во времени обусловлено факторами, скрытыми от наблюдателя (возможно случайными), являются инструментом исследования сложных систем процессов, протекающих в окружающем нас мире. В большом количестве случаев исходная информация, используемая для построения данных моделей и оценки их адекватности, представляет собой временные ряды (ВР) (time series) – последовательности результатов измерений текущих значений одного или нескольких параметров, проводимых в упорядоченные моменты времени. Для объяснения причин того или иного поведения сложной системы или процесса, породивших данный ВР, выявления и объяснения закономерностей их динамики необходимо решить задачу анализа ВР, которые в подавляющем большинстве случаев оказываются нестационарными.

Для прогнозирования динамики развития сложной системы или процесса (как правило, на основе результатов анализа ВР) решается задача синтеза модели ВР, используя которую вычисляют прогнозируемые значения ВР. В связи с тем, что универсальных методов решения задач анализа и прогнозирования ВР не существует, использование любого метода решения рассматриваемых задач требует проведения исследований с целью определения границ применимости, обоснования выбора параметров данных методов и оценивания точности получаемых результатов. В этой связи тема исследования является актуальной.

Анализ методов обработки данной информации позволяет разделить их на две группы:

1) статистические методы, призванные либо по имеющимся данным находить оценки распределения, вид которого априори известен, или проверять статистическую гипотезу относительно вида распределения либо количественно описывать связи между величинами, как правило, находящимися в неочевидной функциональной связи;

2) методы анализа ВР, основанные, по сути, на использовании тех или иных математических моделей ВР и идентификации параметров данных модели на основе имеющихся экспериментальных данных.

В основе первой группы методов лежит априорное предположение о том, что генеральная совокупность изучаемой случайной величины существует. Однако данное предположение не выполняется для нестационарных процессов и процессов, физическая природа которых неизвестна, поскольку здесь каждое значение анализируемого ВР оказывается принадлежащим другой генеральной совокупности и, следовательно, оценка параметров распределения по одному значению случайной величины оказывается невозможной.

Среди основных методов анализа ВР, относящихся ко второй группе, следует отметить: методы выделения тренда (временного сглаживания), регрессионный, автокорреляционный, адаптивный (скользящих средних) будстреп (численного размножения выборок), нейросетовой метод. Необходимо отметить, что применимость данных методов корректно обоснована только для стационарных ВР, в то время как подавляющее большинство ВР, встречающихся на практике, оказывается нестационарными. Поэтому асимптоти-

ческие критерии, гарантирующие увеличение точности оценок моделей ВР с увеличением объема используемой выборки (за исключением случая, когда априори известно его функциональное описание), оказываются несостоятельными с точки зрения увеличения точности прогноза и, как следствие, требуют дополнительных проверок точности получаемых результатов.

Следует также отметить, что сегодня существует ряд методов анализа случайных ВР, которые не требуют предположения о стационарности анализируемого ВР, в том числе: вейвлет-преобразование (Meyer Y., Coifman R., Daubechies I., Coifman R., Новиков И.Я., Стечкин С.Б., Петухов А.Б. и др.); преобразование Хуанга-Гильберта (Huang N. E., R. C. Sharpley, V. Vatchev, Tao Q., Zhang L. и др.); метод сингулярного спектрального анализа (Singular Spectrum Analysis – SSA) (EISNRr J., Tsonis A., Hassani H., Schoellhamer D.H., Данилов Д.Л., и Жиглявский А.А., Голяндина Н.Э. и др.). При этом метод SSA позволяет не только проводить анализ, но и решает весьма актуальную практически важную задачу прогнозирования нестационарных ВР. В этой связи исследование данного метода, призванное научно обосновать рекомендации по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании нестационарных ВР, а также получить соответствующие оценки точности характеристик прогноза, является актуальным.

Объектом исследования данного исследования является метод сингулярного спектрального анализа (SSA).

Предметом исследования: одномерный ВР, представляющий собой последовательность чисел  $F_N = (f_0, f_2, \dots, f_{N-1})$ .

Цель исследования: изучение особенностей метода SSA в задачах анализа и прогнозирования ВР и разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров метода при анализе и прогнозировании нестационарных ВР и их проверки на примере геофизических и экономических ВР.

Для достижения поставленной были решены следующие основные задачи исследования:

1) Разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных ВР.

2) Экспериментальная апробация разработанных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных геофизических и экономических ВР.

3) Разработка алгоритма оценки точности прогнозирования нестационарных ВР методом SSA.

4) Получение количественных оценок точности прогнозирования нестационарных ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовых значений цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности (ОРЭМ).

К основным новым результатам, полученным в ходе проведенных исследований, можно отнести следующие результаты:

1. Обоснование критерия выбора значений параметров метода SSA, обеспечивающих совпадение ВР, восстановленного по рекомендованному набору сингулярных троек, и дискретных значений периодической функции, использованной для вычисления значений анализируемого ВР.



2. В задаче анализа ВР вида  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ :

2.1. Обоснование возможности упрощения процедуры разделения ВР  $F_N$  на главные компоненты, соответствующие ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ , при использовании зависимости разности между соответствующими сингулярными числами выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР  $F_N$ , номера которых отличаются друг от друга на единицу, от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $L$  – размер окна сдвига,  $\Delta t$  – период дискретизации анализируемого ВР:  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{\langle i, i+1 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ .

2.2. Уточнение понятия сильной и слабой делимости ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ .

2.3. Научно обоснованные рекомендации по выбору размер окна сдвига  $L$  обеспечивающие наилучшее разделение ВР типов «шум + const», «шум + периодическая составляющая», «шум + тренд» при различных SNR.

3. Алгоритм исследования точности прогнозирования ВР методом SSA.

4. Алгоритм выбора сингулярных троек траекторной матрицы ВР  $(\lambda_i, U_i, V_i)$ , используемых для прогнозирования значений ВР.

5. Экспериментальное подтверждение целесообразности использования для краткосрочного прогнозирования нестационарных ВР полинома, аппроксимирующего ВР, восстановленный по набору сгруппированных сингулярных троек траекторной матрицы ВР  $F_N(\lambda_i, U_i, V_i)$  в соответствие с предложенным в работе алгоритмом.

К практически значимым результатам исследования следует отнести:

1. Результаты анализа ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электроэнергии и мощности (ОРЭМ), методом SSA, которые подтверждают целесообразность использования зависимости  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{\langle i, i+1 \rangle}(L \cdot \Delta t)$  для обоснования выбора группируемых главных компонент ВР  $F_N$ .

2. Обоснованные рекомендации по выбору параметров метода SSA, обеспечивающих наилучшую точность прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен ОРЭМ, методом SSA.

3. Оценки точности прогнозирования методом SSA ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, и ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ.

В работе были использованы следующие научные методы исследования: статистическое моделирование, спектральный анализ, методы теории вероятности, математической статистики, метод SSA.

# ГЛАВА 1. АНАЛИЗ ПРОБЛЕМНОЙ СИТУАЦИИ. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ ИССЛЕДОВАНИЯ

## 1.1. Краткий обзор методов анализа и прогнозирования ВР

В нашей работе под ВР будем понимать последовательность упорядоченных во времени числовых показателей, характеризующих уровень состояния и изменения изучаемого явления или системы.

С точки зрения теории вероятностей ВР, представляет собой выборку из генеральной совокупности случайной величины  $\xi$ , характеризующейся одномерной функцией распределения (ФР)  $F(x)$ , представляющей собой вероятность того, что  $\xi$  не превосходит  $x$ :  $F(x) = P(\xi \leq x)$ .

Многомерная ФР вводится аналогично: если  $\xi, x \in R^n$ , то

$$F(x) = P(\xi_1 \leq x_1, \dots, \xi_n \leq x_n).$$

Конечномерным распределением процесса  $x(t)$  называется ФР  $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n)$  совместного распределения  $n$  случайных величин  $x(t_1), \dots, x(t_n)$  в моменты времени  $t_1, \dots, t_n$ .

Различают ВР, порожденные стационарными и нестационарными процессами.

Процесс  $x(t)$  называется стационарным в широком смысле, если его математическое ожидание  $\mu = M[x(t)]$  не зависит от  $t$ , а автокорреляционная функция (АКФ) процесса

$$K(t, t + \tau) = M[(x(t) - \mu)(x(t + \tau) - \mu)] = K(\tau)$$

зависит только от разности моментов времени  $\tau$ . Если конечномерное распределение любого количества рассматриваемых случайных величин в любые моменты времени не зависит от времени, процесс называется стационарным в узком смысле [58].

Методы анализа и прогнозирования ВР (time series analysis), активно развиваемые в прикладной математике на протяжении нескольких столетий, в настоящее время исчисляются многими десятками, а количество статей, монографий (см., например, [1, 2, 5, 7, 8, 11–14, 23, 25, 36, 42–44, 47, 51, 57, 61, 76, 81, 84, 88, 90, 93, 98–102, 109–111, 116, 119] и др.), справочников (см., например, [3, 61, 81, 82] и др.) и учебных пособий (см., например, [6, 28, 37–41, 45, 47, 48, 57, 80, 87, 88, 91, 94, 114] и др.), в которых обсуждаются, как теоретические аспекты, так и результаты, получаемые при их практическом применении, – десятками тысяч. (Данное утверждение можно легко проверить с помощью любой поисковой системы в сети Интернет, например, Google, которая в ответ на запрос «Анализ временных рядов», «Прогнозирование временных рядов», находит сотни тысяч страниц, содержащих, в том числе ссылки на опубликованные работы) В этой связи, понятно, что подробный анализ и рассмотрение истории развития данных методов является темой отдельного исследования, которое выходит за рамки данной работы. В этой связи далее мы кратко рассматриваем только наиболее популярные в настоящее время методы анализа ВР: метод выделения тренда (временного сглаживания), регрессионный, автокорреляционный, скользящих средних, адаптивные методы, метод прогнозирования ВР на основе

выборочных распределений [56–60], метод сингулярного спектрального анализа (SSA – Singular Spectrum Analysis) [21–23, 101, 104, 118].

Отметим, что перечисленный выше перечень методов оказывается отнюдь не исчерпывающим. Сегодня также активно развиваются методы, основанные на использовании статистического моделировании, например, имеющихся выборок (численное размножение выборок – бутстреп) и нейросетевой метод, которые находятся за рамками данной работы.

Напомним, что при исследовании ВР, традиционно, принято использовать следующую обобщенную математическую модель:

$$x(t) = x_{trend}(t) + x_{cycle}(t) + \xi(t), \quad (1.1)$$

где

$x_{trend}(t)$  – тренд или медленно (на данном интервале анализа) изменяющаяся компонента, определяемая долговременной тенденцией изменения ВР;

$x_{cycle}(t)$  – циклическая (сезонная) компонента, отражающая повторяемость исследуемого процесса на определенных промежутках времени;

$\xi(t)$  – случайная компонента, содержащая влияние прочих факторов, скрытых от наблюдателя.

Считается, что детерминированные составляющие  $x_{trend}(t)$  и  $x_{cycle}(t)$  могут быть описаны точно, так как они определяются закономерными факторами, описываемыми в рамках детерминированных моделей. Однако, сами детерминированным моделям, являющиеся, в свою очередь, известной идеализацией изучаемых процессов, а потому им имманентно присуща некоторая неточность. В то же время математическая модель (1.1), несмотря на отмеченную выше ее условность, оказывается весьма полезной на практике для интерпретации результатов статистического анализа ВР.

### **Методы выделения тренда**

Обычно трендовая составляющая ВР оказывается неизвестной точно, но случайной величиной, как анализируемый ВР, в целом. Однако, из априорных соображений рассматриваемую компоненту оказывается возможным описать феноменологически с помощью детерминированных функций. Для описания тренда, традиционно, используются кривые роста [6, 98, 102, 113], которые позволяют описать следующие процессы: 1) без предела роста; 2) с пределом роста без точки перегиба; 3) с пределом роста с точкой перегиба.

Процессы первого типа в основном характерны для абсолютных объемов показателей. Процессы второго типа – для относительных показателей, например, душевое потребление продуктов питания, внесение удобрений на единицу площади, затраты на единицу произведенной продукции и т.п. Процессы третьего типа – например, для описания изменения спроса на новые товары.

Кривые роста, традиционно, описываются полиномиальными или квазиполиномиальными зависимостями, в том числе, с экспоненциальными множителями, дробно-рациональными и линейно-логарифмическими функциями, а также их композициями. Данный подход, как показывают результаты его практического использования, дает возможность создавать многопараметрические модели, которые с требуемой точностью обеспечивают аппроксимацию исследуемых ВР. В тоже время результаты, используемые

при прогнозировании на основе данных моделей далеко не всегда оказываются удовлетворительными, поскольку формально подбираемые аппроксимирующие функции не обязательно отражают реальную зависимость наблюдаемой величины от времени или иных параметров [97, 112, 113]. Закономерно, что в этой ситуации наиболее популярными оказываются более простые, например, линейные модели, в которых связь между несколькими величинами имеет очевидный смысл: при изменении объясняющего параметра на  $\delta_1$  объясняемый параметр изменяется на  $\delta_2$ .

Отметим, что выбор аппроксимирующей функции из условия обеспечения наименьшей дисперсии остатков (разностей между исходным ВР и соответствующими значениями аппроксимирующей функции), отнюдь не всегда приводит к практически полезному результату. Действительно, для того чтобы формально аппроксимировать ту или иную эмпирическую зависимость так, чтобы обеспечить минимум дисперсии остатков, как правило, оказывается достаточным использовать полином достаточно высокой степени. Однако при решении подобной задачи важно помнить, что цель ее решения состоит не столько в решении математической задачи, сколько в качественном описании изучаемого явления с содержательной (физической) точки зрения (см., например, [47, 76]).

Таким образом, один из подходов, используемый при построении моделей ВР, в том числе и нестационарных, основан на использовании параметрического оценивания в выбранном классе функций. В данном подходе предполагается, что после подбора параметров той или иной функциональной зависимости, описывающей трендовую составляющую, и вычитании ее из соответствующих значений анализируемого ВР, получают стационарный ВР. (Если ВР, с удаленным трендом, не оказывается стационарным, в смысле строгого математического определения данного понятия, то на практике считают его таковым с доверительной вероятностью достаточной для исследователя.)

Цель описанного выше преобразования – переход от нестационарного к стационарному ВР, для которого справедлива теорема Гливенко о сходимости эмпирической функции распределения к ФР генеральной совокупности [59], а также критерия согласия типа Колмогорова-Смирнова о близости выборочной ФР и ФР генеральной совокупности [79]. Знание ФР генеральной совокупности, в свою очередь, позволяет с известной доверительной вероятностью строить прогноз.

Далее полученный стационарный ВР изучается с помощью методов регрессионного, корреляционного и гармонического анализов, рассматриваемых далее, каждый из которых позволяет создавать некоторые прогностические модели для изучаемого ВР.

#### **Линейная регрессионная модель**

Предположим, что в результате наблюдения за случайными величинами  $\xi \in X$  и  $\eta \in Y$  получены ряды значений  $x_1, \dots, x_n$  и  $y_1, \dots, y_n$ , соответственно. Обозначим  $\rho(y, y')$  метрику, используемую в пространстве  $Y$ .

Функцией теоретической регрессии случайной величины  $\xi$  на случайную величину  $\eta$  называется функция  $\varphi: X \rightarrow Y$ , для которой математическое ожидание расстояния  $M[\rho(y, \varphi(x))]$  минимально.

Переменная  $x$  называется регрессором (объясняющей переменной), переменная  $y$  – откликом (объясняемой переменной). Если  $X$  и  $Y$  – линейные пространства с евклидовой нормой, то метод нахождения регрессии называется методом наименьших квадратов (МНК). Если зависимость между величинами  $\xi \in X$  и  $\eta \in Y$  предполагается линейной, то такая модель называется линейной регрессионной моделью (ЛРМ).

Далее значения случайной величины  $\eta \in Y$ , вычисленные в соответствии с регрессионной моделью, будем обозначать  $\hat{y} = \varphi(x)$ .

Если значения случайных величин  $\xi \in X$  есть множество  $\{x_1, \dots, x_n\}$  и  $\eta \in Y$  – множество  $\{y_1, \dots, y_n\}$  то оценки параметров ЛРМ по парам значений  $(x_i, y_i), i = \overline{1, n}$  определяют выборочную прямую регрессии, уравнение которой записывается в виде:

$$\hat{y} - m_{1,y}(n) = a(x - m_{1,x}(n)), \quad (1.2)$$

где

$$m_{1,x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n x_k,$$

$$m_{1,y}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n y_k,$$

$$\mu_{1,x}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (x_k - m_{1,x}(n))^2,$$

$$a = \frac{\langle \Delta x \cdot \Delta y \rangle}{\mu_{2,x}(n)},$$

$$\langle \Delta x \Delta y \rangle = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_k - m_{1,x}(n))(y_k - m_{1,y}(n)).$$

Уравнение (1.2) с использованием коэффициента корреляции

$$R_{xy}(n) = \frac{n \sum_{k=1}^n x_k y_k - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right) \left( \sum_{k=1}^n y_k \right)}{\sqrt{n \sum_{k=1}^n x_k^2 - \left( \sum_{k=1}^n x_k \right)^2} \sqrt{n \sum_{k=1}^n y_k^2 - \left( \sum_{k=1}^n y_k \right)^2}} \quad (1.3)$$

можно представить в виде связи между нормированными выборочными величинами

$$\tilde{x} = \frac{x - m_{1,x}(n)}{\sqrt{\mu_{2,x}(n)}} \text{ и } \tilde{y} = \frac{y - m_{1,y}(n)}{\sqrt{\mu_{2,y}(n)}}:$$

$$\tilde{y} = R_{xy} \tilde{x}, \quad (1.4)$$

$$\text{где } \mu_{2,y}(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n (y_k - m_{1,y}(n))^2.$$

Разности между фактическим значением  $y_i$  и соответствующими значениями  $\hat{y}(x_i)$ , вычисляемого в соответствии с (1.2),  $\varepsilon = y - \hat{y}$ , называемые остатками модели, представляют собой некоторый случайный процесс, значения которого могут быть найдены из равенства

$$\hat{y}_i = m_{1,y}(n) + R_{xy}(n) \sqrt{\frac{\mu_{2,y}(n)}{\mu_{2,x}(n)}} (x_i - m_{1,x}) + \varepsilon_i. \quad (1.5)$$

Ошибка аппроксимации данных ЛР (1.5) равняется дисперсии  $\sigma^2$  остатков  $\varepsilon$ :

$$\sigma^2 = \mu_{2,y} (1 - R_{xy}(n)). \quad (1.6)$$

Несмещенной оценкой дисперсии остатков является величина  $s^2 = \frac{n\sigma^2}{n-1}$ .

На практике важную роль играет не абсолютная ошибка (1.6) или аналогичная ей ошибка нормированных величин (1.4), но относительная среднеквадратическая ошибка аппроксимации  $\delta$ :

$$\delta^2 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left( \frac{\hat{y}_k}{y_k} \right). \quad (1.7)$$

Оценка точности параметров ЛРМ гарантируется следующей теоремой.

**Теорема 1.** (Гаусс, 1809, Марков, 1900) Если значения  $y_1, \dots, y_n$  случайной величины  $\eta$  независимы, то оценки коэффициентов ЛРМ с минимальной дисперсией остатков, определяются формулой (1.2).  $\triangleright$

Теорема 1, если известна статистика случайного процесса  $\varepsilon(t)$  позволяет построить для ЛРМ (1.2) доверительные интервалы параметров регрессии. Например, если случайный процесс  $\varepsilon(t)$  имеет нормальное распределение  $N(\mu, \sigma)$ , а  $\xi$  и  $\eta$  не коррелированы,

то нормированные величины  $\tilde{y} = \frac{y - m_{1,y}(n)}{\sqrt{\mu_{2,y}(n)}}$ , а также  $t = R_{xy} \frac{\sqrt{n-1}}{\sqrt{1-R_{xy}^2}}$ , где  $R_{xy}$  – коэффициент

корреляции, вычисляемый в соответствие с (1.2), имеют распределение Стьюдента с  $n-2$  степенями свободы. Данная информация определить вероятность, с которой гипотеза об отсутствии корреляции может быть отвергнута. Для нормально распределенных остатков  $\varepsilon(t)$  статистика нормализованных величин выборочной корреляции  $(R_{xy} - M[R_{xy}]) / \sqrt{D[R_{xy}]}$ ,  $D[R_{xy}]$  – дисперсия коэффициента корреляции, также имеет нормальный закон распределения.

### Авторегрессионные модели

Математические модели данного типа используются для описания ВР, представляющих собой значения  $\{x_1, \dots, x_N\}$  случайной величины  $\xi$ , когда модуль троакторной функции (АКФ)  $|A_N|$ , вычисляемый по формуле

$$A_N(n) = \frac{(N-n) \sum_{k=1}^{N-n} x_k x_{k+n} - \sum_{k=1}^{N-n} x_k \sum_{k=1}^{N-n} x_{k+n}}{\sqrt{(N-n) \sum_{k=1}^{N-n} (x_k)^2 - \sum_{k=1}^{N-n} (x_k)^2} \sqrt{(N-n) \sum_{k=1}^{N-n} (x_{k+n})^2 - \sum_{k=1}^{N-n} (x_{k+n})^2}} \quad (1.8)$$

оказывается медленно убывающей функцией  $n$  или данная функция оказывается немонотонной на уровне, превосходящем заданный уровень значимости. Другими словами зна-

чения  $\{x_1, \dots, x_N\}$  нельзя считать независимыми. Подробный анализ свойств данных моделей можно найти в [53, 98].

Временные интервалы (ВИ) между соседними максимумами АКФ (лаги) ВР, содержащих циклические (сезонные) компоненты, позволяют получить оценки длительностей ВИ, на которых отсчеты оказываются зависимыми друг от друга. Величина лага называется порядком  $p$  авторегрессионной модели (АРМ). АРМ аппроксимирует отклонение значения ВР  $x_n$  от выборочного среднего  $m_{1,x}(n)$  в момент времени  $t = n$ , используя для этого  $p$  предыдущих значений ВР:

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^p a_k x_{n-k} + \varepsilon_n, \quad (1.9)$$

где  $\varepsilon_n$  – белый шум.

Коэффициенты  $a_k$  АРМ являются решением системы уравнений Юла-Уолкера:

$$\begin{pmatrix} A_N(q) & A_N(q-1) & \cdots & A_N(q-p+1) \\ A_N(q+1) & A_N(q) & \cdots & A_N(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_N(q+p-1) & A_N(q+p-2) & \cdots & A_N(q) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_N(q+1) \\ A_N(q+2) \\ \vdots \\ A_N(q+p) \end{pmatrix} \quad (1.10)$$

На практике обычно используют АРМ, порядок которых не превосходит 5.

При использовании АРМ модели (1.9) для прогнозирования предполагается, что коэффициенты  $a_k$  не зависят от времени. При справедливости данного предположения  $A_N \equiv \text{const}$ ,  $m_{1,x}(N) = m_1 = \text{const}$ .

Формула для вычисления прогнозируемых значений по АРМ первого порядка записывается в следующем виде:

$$\hat{x}_n = a_1 x_{n-1} + m_1 (1 - A_N(1)) = m_1 + A^{n-1}(1)(x_1 - m_1). \quad (1.11)$$

Из (1.11) видно, что при прогнозируемые на длительный срок значения ВР будут сходиться к его среднему значению. Следовательно, (1.1) можно использовать для прогнозирования только на один шаг вперед.

Для правильности прогноза АРМ его АКФ, вычисляемая в соответствии с (1.8), должна иметь небольшое число максимумов и достаточно быстро уменьшаться при увеличении сдвига  $n$ . При наличии в анализируемом ВР циклических компонент, полностью исключить из исходного ВР, как правило, не удастся, АРМ используются на этапе качественного анализа ВР. Далее для повышения точности получаемых результатов требуется применять и другие методы анализа ВР.

### Модели скользящих средних

Напомним, предваряя обсуждение модели скользящих средних, теорему Вольда.

**Теорема 2.** (Разложение Вольда) Всякий стационарный процесс  $T_s = 1.0$  может быть представлен единственным образом в виде суммы некоррелированных между собой процессов

$$\xi(t) = \xi^s(t) + \xi^r(t),$$

где  $\xi^s(t)$  – сингулярный (или детерминированный) процесс,  $\xi^r(t)$  – регулярный (полностью случайный) процесс.  $\triangleright$

Известно [98], что в терминах фильтрации теорема Вольда формулируется следующим образом: всякий стационарный ВР с конечным математическим ожиданием и дисперсией представим в виде

$$x_n = \mu + \sum_{k=0}^{\infty} h_k \varepsilon_{n-k}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |h_k| < \infty, \quad (1.12)$$

где  $\mu$  – среднее значение процесса,  $\varepsilon_n$  – стационарный белый шум с нулевым средним и дисперсией  $\sigma_\varepsilon$ .

Процесс, представимый в виде:

$$x_n = \mu + \sum_{k=0}^q h_k \varepsilon_{n-k}, \quad (1.13)$$

называется процессом скользящего среднего порядка  $q$  и обозначается  $CC(q)$ .

Процесс  $CC(q)$  имеет следующие свойства:

$$\begin{aligned} M[x] &= \mu, \\ D[x] &= \sigma_\varepsilon^2 \sum_{k=0}^q h_k^2, \\ A_N(\tau) \Big|_{\tau \leq q} &= \sum_{k=0}^{q-\tau} h_k h_{k+\tau}, \\ A_N(\tau) \Big|_{\tau > q} &. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Из (1.14) видно, что модель  $CC(q)$  целесообразно использовать, если выборочная АКФ оказывается близкой к нулю, начиная с определенного значения  $\tau = q$ .

Можно рассматривать (1.13) как операторный полином от оператора  $T_s = 0.95$ , реализующего сдвиг на один шаг:

$$y_n = x_n - \mu = \sum_{k=0}^q h_k \hat{L}^k \varepsilon_n, \quad (1.15)$$

где  $\hat{L} \varepsilon_n = \varepsilon_{n-1}$  и ввести в рассмотрение характеристический многочлен процесса  $CC(q)$ :

$$Y_q(\lambda) = \sum_{k=0}^q h_k \lambda^{q-k}. \quad (1.16)$$

Говорят, что процесс  $CC(q)$  (1.15) обратим, если существует такой процесс фильтрации с коэффициентом  $\psi_k$ , что

$$\varepsilon_n = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \hat{L}^k y_n. \quad (1.17)$$

Пусть  $\{\lambda_k\}$  – множество различных корней характеристического полинома  $Y_q(\lambda)$ , используя которые можно представить полином в следующем виде

$$Y_q(\lambda) = h_0 \prod_{k=1}^q (\lambda - \lambda_k).$$



Так как норма оператора сдвига  $\hat{L}$  равняется единице, то необходимым условием его обратимости является сходимость по параметру  $\lambda$  разложения в ряд дроби  $1/Y_q(\lambda)$ , которое выполняется, если  $|\lambda_k| < 1$ .

Можно показать [99, 37, 38], что обратным модели  $CC(q)$  является некоторый процесс  $AP(\infty)$ , а обратным к процессу  $AP(p)$  – процесс  $CC(\infty)$ . Представление процесса  $AP(p)$  через процесс  $CC(\infty)$  позволяет трактовать последний как декомпозицию Вольда. Отсюда следует, что обратимый процесс  $AP(p)$  является стационарным. Общее решение уравнения (1.9) представляет собой сумму частного решения неоднородного уравнения, являющегося решением системы уравнений Юла-Уокера (1.10) и общего решения однородного уравнения, которое ограничено, если корни характеристического уравнения для процесса (1.9) по модулю меньше единицы, что совпадает с условием обратимости процесса  $CC(q)$ . Напротив, если хотя бы один корень имеет действительную часть, равную или большую по модулю единицу, декомпозиция Вольда невозможна, и такой процесс не является стационарным.

Примером нестационарного  $AP$  процесса является так называемое броуновское движение, математическая модель которого записывается в следующем виде:

$$y_n = y_{n-1} + \varepsilon_n = y_0 + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{n-k} \quad (1.18)$$

Так как (1.18) можно записать в виде

$$\varepsilon_n = (\hat{L}^0 - \hat{L}^1) y_n,$$

характеристическое уравнение данного представления есть  $1 - \lambda$ , имеющее единственный единичный корень. Математическое ожидание модели (1.18)  $M[y_n] = 0$ , в то время как дисперсия оказывается линейно зависящей от времени:

$$D[y_n] = D\left[\sum_{k=1}^n \varepsilon_{n-k}\right] = \sum_{k=1}^n D[\varepsilon_{n-k}] = \sum_{k=1}^n \sigma_\varepsilon^2 = n\sigma_\varepsilon^2.$$

Следовательно, при практическом использовании  $AP(p)$  моделей требуется отдельно исследовать проблему единичного корня. При этом проверяется соответствующая статистическая гипотеза с помощью теста Дики-Фуллера [98]. Если гипотеза принимается (единичный корень весьма вероятен), то  $BP$  признается нестационарным и вместо случайного блуждания рассматривают стационарный процесс  $z_n = y_n - y_{n-1} = \varepsilon_n$ . Если первые разности исходного  $BP$  оказываются нестационарными, то переходят ко вторым разностям и т.д. Возвращение от разностей определенного порядка к исходным случайным величинам осуществляется суммированием, вычистившихся переменных, поэтому подобные модели называются интегрируемыми.

В общем случае говорят, что если в результате  $d$ -кратного применения разностного дифференцирования  $x_n^{(d)} = \Delta^d x_n$  где оператор  $\Delta - \hat{L}$  действует по правилу  $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ , получился стационарный процесс, то модель относительно  $x_n^{(d)}$  называется интегрируемой моделью порядка  $d$ .

Описанная выше процедура перехода от исходного  $BP$  к конечным разностям порядка  $d$  позволяет исключить полиномиальный по времени тренд, так как разностная произ-

водная полинома порядка  $d$  является полиномом порядка  $d-1$ . Однако при наличии в анализируемом ВР других видов трендов данный подход оказывается непродуктивным. В этой ситуации приходится использовать иные методы оценки трендов. При этом от правильности подбора тренда оказываются напрямую зависящими результаты анализа.

Помимо моделей  $AP(p)$  и  $CC(q)$  на практике могут использоваться комбинированные модели  $APCC(p, q)$ :

$$y_n = x_n - \mu = \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \hat{L}^k y_n + \sum_{k=0}^{\infty} \psi_k \hat{L}^k \varepsilon_n. \quad (1.19)$$

также допускающие представление вида  $AP(\infty)$  и  $CC(\infty)$ .

Если процесс  $d$ -кратного применения разностного дифференцирования приводится к процессу  $APCC(p, q)$ , то данный процесс называют процессом авторегрессии-проинтегрированного скользящего среднего и обозначают  $APCC(p, q, d)$ .

Основными проблемами использования математических моделей (1.19) на практике являются:

- 1) зависимость от времени коэффициентов  $APCC(p, q, d)$  модели при ее применении к реальным ВР;
- 2) априори неизвестное распределение ВР остатков  $\varepsilon_n$ ;
- 3) необходимость нахождения временного тренда.

Следует отметить, что одной из наиболее актуальных задач, возникающих при использовании обсуждаемых методов, – выбор порядка моделей. Для ее решения может использоваться, например, информационный критерий Акаике [96] или другие подходы, описание которых, а также ссылки на оригинальные работы приведены в [53].

### Адаптивные методы

Модели, реализующие адаптивные методы, не имеют строгого математического обоснования. Однако данные модели нашли сегодня широкое применение для явно нестационарных процессов [10, 51]. Их отличительной особенностью состоит в том, параметры модели изменяются с течением времени, в зависимости от того насколько удачным или неудачным оказался предыдущий прогноз. Отметим, что здесь процедура подгонки параметров модели принципиально отличается от аппроксимации нестационарного тренда.

Примером адаптивной модели является так называемая взвешенная схема скользящего сглаживания средними, когда в качестве прогнозной оценки  $\hat{x}_n$  принимается взвешенное среднее  $\bar{x}_{WA}(n, m)$   $m$  предыдущих значений анализируемого ВР:

$$\bar{x}_n = \bar{x}_{WA}(n, m) = \frac{\sum_{i=1}^m w_i x_{n-i}}{\sum_{i=1}^m w_i} \quad (1.20)$$

Весовые множители в (1.20), как правило, вводятся на основании экспертных оценок, учитывающих относительную важность ранее полученных значений. Обычно весовые множители убывают по мере удаления от правого конца отрезка ВР, использованного для прогнозирования (базовый интервал), т.е. информационная ценность наблюдений считается тем больше, чем ближе к концу базового интервала они находятся.

К другому типу прогнозных моделей относятся параметрические сглаживающие модели, в которых при вычислении прогнозируемого значения  $\alpha$  используются не только статистики самого анализируемого ВР, но и несколько спрогнозированных ранее значе-

ний, а также оценки тренда, полученные на базовом интервале. К данным моделям относятся модели Брауна, Хольта и Уинтерса [26, 51], как правило, применяемые в задачах с сезонной периодичностью. При этом в зависимости от того, какой порядок имела исходная адаптируемая модель, различают однопараметрические, двухпараметрические и т.д. адаптивные модели, применяемые в большинстве случаев для прогнозирования на один шаг вперед.

Примером одной из простейших однопараметрических адаптивных моделей является следующая модель первого порядка:

$$\hat{x}_{n+1} = \alpha x_n + (1-\alpha)\hat{x}_n. \quad (1.21)$$

В (1.21) параметр  $\alpha$  адаптирует «наивный» прогноз на один шаг вперед (завтра будет как сегодня) на величину рассогласования прошлого прогноза «на сегодня» и сегодняшнего факта. Подобная адаптация называется сглаживанием.

Двухпараметрическая модель Хольта, являющаяся обобщением модели (1.21), описывается следующей системой уравнений:

$$\begin{aligned} \hat{x}_{n+1} &= y_n + u_n, \\ y_n &= \alpha x_n + (1-\alpha)\hat{x}_n, \\ u_n &= \beta u_{n-1} + (1-\beta)(y_n - y_{n-1}). \end{aligned} \quad (1.22)$$

Из (1.22) видно, что в качестве виртуальных переменных для получения прогнозируемых значений  $\hat{x}_{n+1}$  используются сглаженные значения  $y_n$  исходного ВР  $x_n$  и сглаженные значения его тренда  $u_n$ . Постоянные  $\alpha$  и  $\beta$ , входящие в (1.22), называют константами сглаживания. Значение постоянной  $\alpha$  определяет оценку уровня прогноза, постоянной  $\beta$  – тренда.

Выбор указанных параметров оказывается весьма субъективным. Здесь один из возможных подходов – оценивание данных параметров по серии тестовых испытаний с помощью МНК и выбор из них тех значений, которые обеспечивают наилучшую аппроксимацию. Отметим, что в случае нестационарных ВР адаптивные модели типа (1.21), (1.22) требуют весьма тонкой настройки данных параметров, которые исследователь вынужден подбирать вручную, поскольку даже для стационарных ВР оптимальный выбор этих параметров является отдельно достаточно сложной задачей.

### Прогнозирование ВР на основе выборочных распределений [56–60]

В данном методе используются следующие понятия.

1. Выборочная функция распределения нестационарного ВР  $f_T(x, t)$  есть ВПРФ, построенная по выборке данных  $x_n, x_{n-1}, \dots, x_{n-T+1}$ .

2. Расстояние между двумя ВПРФ  $f_1 = f_{T_1}(x, t)$   $f_2 = f_{T_2}(x, t)$ , вычисляемое по следующей формуле

$$\rho(f_1, f_2) = \|f_{T_1}(x, t) - f_{T_2}(x, t)\| = \int |f_{T_1}(x, t) - f_{T_2}(x, t)| dx. \quad (1.23)$$

3. Критерий стационарности ВПРФ формулируется следующим образом: ВПРФ  $f_T(x, t)$  нестационарного ВР  $x_n, n = \overline{1, N}$  будем называть  $\theta - \varepsilon$  стационарной на ВИ  $\theta$ , если

$$\forall \tau: 1 \leq \tau \leq \theta, V(T, \tau, t) < \varepsilon, \quad (1.24)$$

где

$$V(T, \tau; x, t) = \rho(f_T(x, t + \tau), f_T(x, t)).$$

Основная идея данного метода прогнозирования нестационарных ВР, основанного на анализе выборочных плотностей функций распределения (ВПФР), состоит в том, чтобы:

- 1) определить длительность ВИ, на котором ВПРФ является «стационарной»;
- 2) получить в различные моменты времени на основе имеющихся данных оценки средних ВПРФ, построенных по выборке такого же объема;
- 3) найти на основе информации об эмпирическом операторе эволюции ВПРФ, полученной в п. 2, аналогичный оператор, входящий в уравнение Лиувилля;
- 4) определить максимальный горизонт прогноза и минимального объема выборки, обеспечивающей данный горизонт прогноза;
- 5) вычислить ВПРФ с учетом значений максимального горизонта прогноза и минимального объема выборки прогнозируемых;
- 6) вычислить в соответствии с выбранным функционалом от ВПРФ (например, выборочное среднее значение, наиболее вероятное значение, аргумент наиболее вероятного значения и т.д.) прогнозные значения ВР.

Отдавая должное оригинальности предложенного подхода, нельзя не отметить существенных, с нашей точки зрения, вопросов, от ответа на которые «ушли» авторы данного метода.

1. Авторы позиционируют данный метод, как метод, предназначенный для анализа нестационарных ВР, однако, его применение к ВР они предваряют процедурами, призванными привести его к стационарному ВР (удаление тренда и т.д.), сведений о работоспособности данного метода, применяемого непосредственно к нестационарному ВР, нам обнаружить не удалось.

2. При оценке точности прогнозирования авторы указывают некоторые конкретные (точечные) значения погрешностей, полученные при выбранной длине окна данных (см. [59, Глава 6–8]), которая, отнюдь, не является показательной. Действительно, нельзя, априори, гарантировать, что при смещении начальной точки выбранного окна данных в другую точку анализируемого ВР, оценки погрешностей не изменятся, так как, вообще говоря, точность прогнозирования любого ВР, определяется его локальными свойствами. Таким образом, заявленные авторами значения погрешностей прогнозирования некоторых нестационарных ВР методом ВПРФ, относящиеся только к конкретному положению окна данных, не могут характеризовать погрешность прогнозирования рассматриваемым методом.

Отмеченные недостатки, с одной стороны, требуют проведения его дальнейших исследований, которые, однако, находятся за рамками нашей работы, и рассмотрения иных методов, которые, действительно, не требуют стационарности ВР, одним из которых является рассматриваемый далее метод SSA.

## 1.2. Метод SSA как средство анализа ВР

В основании метода SSA [101, 102] (в русскоязычном научном пространстве – метод главных компонент (ГК) [29], «Гусеница» [21–23, 118]) лежит преобразование одномерного ВР в многомерный с помощью однопараметрической сдвиговой процедуры (отсюда в русскоязычной литературе данный метод получил название «Гусеница») и исследование полученной многомерной траектории с помощью сингулярного разложения и восстановления (аппроксимации) ВР по выбранным ГК. Целью метода является разложение ВР на интерпретируемые аддитивные составляющие.

При этом метод не требует стационарности анализируемого ВР, знания модели тренда, а также сведений о наличии во ВР периодических составляющих и их периодах. При таких слабых предположениях метод SSA позволяет решать различные задачи, например, выделение тренда, обнаружение периодик, сглаживание ВР, построение полного разложения ВР в сумму тренда, периодик и шума. Важно, что этот непараметрический метод позволяет получить результаты, часто лишь незначительно менее точные, чем многие параметрические методы, в которых используются известные модели ВР (например,  $CC(q)$ ,  $AP(p)$ ,  $APCC(p,q)$  и др.).

Отметим, что данный метод (под названием метод ГК) в 80-х гг. прошлого века активно использовался для анализа ВР, характеризующих состояние различных биологических и гидрологических систем [20, 29–33]. Однако данные работы в более поздних монографиях по непонятной для нас причине их авторы не упоминают.

Кроме этого известны примеры успешного применения метода SSA в астрономических и геофизических задачах [35, 54, 55, 63, 85, 86, 89, 95, 115], технико-экономических задачах [64, 67–69, 72, 103–108]. В то же время, несмотря на активные исследования данного метода различными авторами, ряд вопросов, связанных с выбором его параметров и интерпретацией полученных результатов, остаются неисследованными. Данный вывод подтверждается, например, работой [19], в которой обсуждаются проблемы оценки погрешностей, возникающих при восстановлении ВР методом SSA.

Приведем, следуя [21], краткое описание базового алгоритма метода SSA. Рассмотрим вещественно-значный ВР  $F = (f_0, \dots, f_{N-1})$  длины  $N$ . Будем считать, что  $N > 2$ . Предположим, что ВР  $F$  – ненулевой, т. е. существует, по крайней мере, одно  $i$ , такое, что  $f_i \neq 0$ . Обычно считается, что  $f_i = f(i\Delta)$  для некоторой функции  $f(t)$ , где  $t$  – время, а  $\Delta$  – некоторый ВИ. Числа  $0, \dots, N-1$  могут быть интерпретированы не только как дискретные моменты времени, но и как некоторые метки, имеющие линейно-упорядоченную структуру.

Здесь нумерация значений ВР начинается с  $i = 0$ , а не стандартно с  $i = 1$  для удобства обозначений. Базовый алгоритм состоит из двух дополняющих друг друга этапов, разложения и восстановления.

### *Первый этап: разложение*

#### *Шаг 1. Вложение*

Процедура вложения переводит исходный ВР в последовательность многомерных векторов.

Пусть  $L$  – некоторое целое число (длина окна),  $1 < L < N$ . Процедура вложения образует  $K = N - L + 1$  векторов вложения

$$X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T, \quad 1 \leq i \leq K,$$

имеющих размерность  $L$ . Если нам нужно будет подчеркнуть размерность  $X_i$ , то мы будем называть их векторами  $L$  – вложения.

$X$  – траекторная матрица ВР  $F$ , состоит из векторов вложения в качестве столбцов

$$X = [X_1 : \dots : X_K].$$

Другими словами, траекторная матрица – это матрица

$$X = (x_{ij})_{i,j=1}^{L,K} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & f_2 & \dots & f_{K-1} \\ f_1 & f_2 & f_3 & \dots & f_K \\ f_2 & f_3 & f_4 & \dots & f_{K+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{L-1} & f_L & f_{L+1} & \dots & f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (1.25)$$

Очевидно, что  $x_{ij} = f_{i+j-2}$  и матрица  $X$  имеют одинаковые элементы на «диагоналях»  $i + j = \text{const}$ . Таким образом, траекторная матрица является ганкелевой. Существует взаимно-однозначное соответствие между ганкелевыми матрицами размерности  $L \times K$  и ВР длины  $N = L + K - 1$ .

### **Шаг 2. Сингулярное разложение**

Результатом этого шага является сингулярное разложение траекторной матрицы ВР.

Пусть  $S = XX^T$ . Обозначим  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  собственные числа матрицы  $S$ , взятые в неубывающем порядке ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ ), и  $U_1, \dots, U_L$  – ортонормированную систему собственных векторов матрицы  $S$ , соответствующих сингулярным числам  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$ .

Пусть  $d = \max\{i : \lambda_i > 0\}$ . Если обозначить  $V_i = X^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , то сингулярное разложение матрицы  $X$  может быть записано как

$$X = X_1 + \dots + X_d, \quad (1.26)$$

где  $X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ . Каждая из матриц  $X_i$  имеет ранг 1, поэтому их можно назвать элементарными матрицами.

Набор  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  называют  $i$ -й сингулярной тройкой разложения (1.26).

### **Второй этап: восстановление**

#### **Шаг 3. Группировка**

На основе разложения (1.26) процедура группировки делит все множество индексов  $\{1, \dots, d\}$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $I_1, \dots, I_m$ .

Пусть  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ . Тогда результирующая матрица  $X_I$ , соответствующая группе  $I$ , определяется как

$$X_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}.$$

Такие матрицы вычисляются для  $I = I_1, \dots, I_m$ , тем самым разложение (1.26) может быть записано в сгруппированном виде:

$$X_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}. \quad (1.27)$$

Процедура выбора множеств  $I = I_1, \dots, I_m$  и называется группировкой сингулярных троек.

#### **Шаг 4. Диагональное усреднение**

На последнем шаге базового алгоритма каждая матрица сгруппированного разложения (1.27) переводится в новый ВР длины  $N$ .

Пусть  $Y$  – некоторая  $L \times K$  матрица с элементами  $y_{ij}$ , где  $1 \leq i \leq L$ ,  $1 \leq j \leq K$ . Положим  $L^* = \min(L, K)$ ,  $K^* = \max(L, K)$  и  $N = L + K - 1$ . Пусть  $y_{ij}^* = y_{ij}$ , если  $L < K$ , и  $y_{ij}^* = y_{ji}$  – иначе. Диагональное усреднение переводит матрицу  $Y$  в ВР  $g_0, \dots, g_{N-1}$  по формуле

$$g_k = \begin{cases} \frac{1}{k+1} \sum_{m=1}^{k+1} y_{m, k-m+2}^* & \text{для } 0 \leq k < L^* - 1, \\ \frac{1}{L^*} \sum_{m=1}^{L^*} y_{m, k-m+2}^* & \text{для } L^* - 1 \leq k < K^*, \\ \frac{1}{N-k} \sum_{m=k-K^*+2}^{N-K^*+1} y_{m, k-m+2}^* & \text{для } K^* \leq k < N. \end{cases} \quad (1.28)$$

Выражение (1.28) соответствует усреднению элементов матрицы вдоль «диагоналей»  $i + j = k + 2$ : выбор  $k = 0$  дает  $g_0 = y_{11}$ , для  $k = 1$  получаем  $g_1 = (y_{12} + y_{21}) / 2$  и т.д. Заметим, что если матрица  $Y$  является траекторной матрицей некоторого ВР  $(h_0, \dots, h_{N-1})$  (другими словами, если матрица  $Y$  является ганкелевой), то  $g_i = h_i$  для всех  $i$ .

Применяя диагональное усреднение (1.28) к результирующим матрицам, получаем ВР  $\tilde{F}^{(k)} = (\tilde{f}_0^{(k)}, \dots, \tilde{f}_{N-1}^{(k)})$ , и, следовательно, исходный ВР  $(f_0, \dots, f_{N-1})$  раскладывается в сумму  $m$  ВР:

$$f_n = \sum_{k=1}^m \tilde{f}_n^{(k)}. \quad (1.29)$$

Основным параметром базового алгоритма SSA является длина окна  $L$ . Выбор длины окна зависит от решаемой задачи и предварительной информации об анализируемом ВР. В общем случае нет универсальных правил и рекомендаций для выбора длины окна. Однако существуют несколько основных принципов для выбора длины окна  $L$ , которые теоретического обоснования, однако, не имеют [21]. Так, например, для получения наиболее детального сингулярного разложения траекторной матрицы предлагается выбирать длину окна  $L$ , приблизительно равной половине длины ВР ( $L \sim N/2$ ). (За исключением ВР конечного ранга, для которых при любом  $L$ , большем, чем ранг ВР  $d$  и  $N > 2d - 1$ , число ненулевых компонент в сингулярном разложении равно  $d$  и не зависит от длины окна.) Отметим, что практическое выполнение данной рекомендации для достаточно длинных ВР, приводит к резкому увеличению времени выполнения вычислений, а также получению заведомо избыточной информации, так как количество сингулярных троек сингулярного разложения траекторной матрицы, которые должны быть проанализированы равняется  $N/2$ .

Для выделения какой-либо составляющей анализируемого ВР, выбирается некоторый набор сингулярных троек траекторной матрицы данного ВР  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$ , далее выполняется их группировка и восстановление соответствующих ГК анализируемого ВР. При этом для количественно обоснованной группировки сингулярных троек анализируемого ВР  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  рекомендуется использовать:

1. Скаттерграммы – зависимости  $V_i(t) = f(V_{i+1}(t))$ . (Здесь используется свойство ортогональности сингулярных векторов  $U_i$  матрицы  $S$ , в силу которого векторы  $V_i, V_{i+1}$ , соответствующие одной и той же периодической составляющей анализируемого ВР, на скаттерграмме образуют правильный (выпуклый или звездчатый) многоугольник, возможно несколько искаженный).
2. Значения периодов составляющих выбранных ГК, соответствующих главному максимуму их спектральной плотности мощности (СПМ).
3. Зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ,  $\sqrt{\lambda_i} = f(i)$ ,  $i$  – номер сингулярного числа траекторной матрицы анализируемого ВР.

В то же время, как показывает опыт применения метода SSA для анализа реальных ВР, трактовка скаттерграмм и зависимостей  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ,  $\sqrt{\lambda_i} = f(i)$  сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  оказывается далеко не столь очевидной, а их ошибочное использование, как показывает анализ полученных нами результатов, может приводить к возникновению артефактов [66, 67].

В этой связи представляется целесообразным проведение самостоятельных исследований метода SSA, целью которого является:

- 1) изучение особенностей сингулярных троек  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  сингулярных разложений траекторных матриц модельных ВР;
- 2) исследование делимости аддитивных составляющих модельных ВР;
- 3) разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе реальных ВР и их экспериментальная апробация.

Отметим, что важность поставленных исследовательских задач подтверждается, в том числе, проводимой в настоящее время разработкой программного комплекса для выделения и прогноза ВР в рамках метода SSA [4], а также его использованием в задаче идентификации по звуковым сигналам дикторов, создавших данные сигналы [18].

### 1.3. Метод SSA как средство прогнозирования ВР

Предваряя описание алгоритма прогнозирования в соответствии с методом SSA и проблем, возникающих при его практическом использовании, отметим, что сегодня накоплен определенный положительный опыт решения подобных задач [21, 23, 27, 34, 46, 49, 65, 92, 100, 101, 107, 108].

Приведем, следуя [21, 104], краткое описание алгоритма рекуррентного прогнозирования. Рассмотрим вещественнозначный ВР  $F = (f_0, \dots, f_{N-1})$  длины  $N$ . Будем считать, что  $N > 2$ . Пусть  $L$  – некоторое целое число (длина окна),  $1 < L < N$ .



$X$  – траекторная матрица ВР  $F$ , состоящая из векторов вложения  $X_i = (f_{i-1}, \dots, f_{i+L-2})^T$ ,  $1 \leq i \leq K$ ,  $K = N - L + 1$ :

$$X = [X_1 : \dots : X_K].$$

Обозначим  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$  собственные числа матрицы  $XX^T$ , упорядоченные в порядке убывания их значений ( $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_L \geq 0$ ),  $U_1, \dots, U_L$  – ортонормированную систему сингулярных векторов, соответствующих сингулярным числам  $\lambda_1, \dots, \lambda_L$ , соответственно.

Пусть  $d = \max\{i: \lambda_i > 0\}$ . Если обозначить  $V_i = X^T U_i / \sqrt{\lambda_i}$ ,  $i = 1, \dots, d$ , то сингулярное разложение матрицы  $X$  может быть записано как  $X = X_1 + \dots + X_d$ , где  $X_i = \sqrt{\lambda_i} U_i V_i^T$ .

Процедура группировки делит все множество индексов  $\{1, \dots, d\}$  на  $m$  непересекающихся подмножеств  $I_1, \dots, I_m$ .

Пусть  $I = \{i_1, \dots, i_p\}$ , тогда результирующая матрица  $\hat{X}_I$ , соответствующая группе  $I$ , определяется как

$$\hat{X}_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}.$$

Такие матрицы вычисляются для  $I = I_1, \dots, I_m$ , тем самым разложение может быть записано в сгруппированном виде:

$$\hat{X}_I = X_{i_1} + \dots + X_{i_p}.$$

Проведем ганкелизацию матрицы  $\hat{X}$  (см. формулу (1.28)), получим  $\tilde{X}$  – траекторную матрицу некоторого ВР  $\tilde{F} = (\tilde{f}_0, \dots, \tilde{f}_{N-1})$ :

$$\tilde{X} = \eta \hat{X} = [\tilde{X}_1 : \dots : \tilde{X}_K],$$

где  $\eta$  – оператор ганкелизации.

Обозначим  $\tilde{X}^\nabla$  матрицу, состоящую из первых  $L-1$  компонент матрицы  $\tilde{X}$ ,  $U_1, \dots, U_r$  – ортонормированный базис пространства  $\mathfrak{Z}_r$ , где  $r = \max\{i: \lambda_i > 0\}$ ,  $i = 1, \dots, r$ ,  $\lambda_i$  – собственные числа матрицы  $\tilde{X}\tilde{X}^T$ . Рассмотрим линейное векторное пространство  $\mathfrak{Z}_r^\nabla$ , натянутое на векторы  $U_1^\nabla, \dots, U_r^\nabla$ . Пусть  $\pi_i$  – последняя компонента ( $U_{i,L}$ ) вектора  $U_i$ ,  $i = 1, \dots, r$ .

Предположив, что  $e_L = (0, \dots, 0, 1)^T \notin \mathfrak{Z}_r$ , получим неравенство  $v^2 = \pi_1^2 + \dots + \pi_r^2 < 1$ . Естественно назвать  $v^2$  коэффициентом вертикальности пространства  $\mathfrak{Z}_r$ . Заметим, что коэффициент вертикальности равняется квадрату косинуса угла между вектором  $e_L$  и пространством  $\mathfrak{Z}_r$ , а следовательно, эта характеристика не зависит от выбора базиса пространства.

Из  $e_L \notin \mathfrak{Z}_r$  следует, что  $r < L$ . Положим

$$R = \frac{1}{1-v^2} \sum_{i=1}^r \pi_i U_i^\nabla, \quad R = (a_{L-1}, \dots, a_1)^T. \quad (1.30)$$

Пусть  $M$  – число точек прогноза.

Определим ВР  $G_{N+M} = (g_0, \dots, g_{N+M-1})$  по формуле:

$$g_i = \begin{cases} \tilde{f}_i & \text{для } i = 0, \dots, N-1 \\ \sum_{j=1}^{L-1} a_j g_{i-j} & \text{для } i = N, \dots, N+M-1 \end{cases} \quad (1.31)$$

Числа  $T_s$  образуют  $M$  членов рекуррентного прогноза. Для краткости будем называть рекуррентный прогноз  $R$ -прогнозом.

Пусть  $F_N^{(2)}$  – аддитивная компонента ВР  $F$ , соответствующая выбранным ГК, а  $T_s$  – аддитивная компонента ряда  $F$ , соответствующая оставшимся ГК.

В [21, 104] авторы дают следующие рекомендации по прогнозированию ВР с помощью метода SSA:

- Необходимо правильно выбрать параметры метода SSA: длину окна  $L$ , обеспечивающую достаточно хорошее качество разделимости, и набор сингулярных троек  $(\lambda_i, U_i, V_i)$ , соответствующих ВР  $F_N^{(2)}$ . Заметим, что в данном случае нам необходимо отделить ВР  $F_N^{(1)}$  от  $F_N^{(2)}$ , однако, мы не нуждаемся в полном разложении всего ВР  $F = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ .

- Результаты прогноза существенно зависят от начальных данных. Не считая числа  $M$  шагов прогноза, к формальным параметрам алгоритма SSA-прогнозирования относят длину окна  $L$  и набор  $I$  сингулярных троек  $(\lambda_i, U_i, V_i)$ , описывающих ВР  $F_N^{(1)}$ . Эти параметры определяют как прогнозирующую ЛРФ (1.31), так и начальные данные для применения этой ЛРФ.

- Минимальное число выбираемых сингулярных троек равно  $d$ . Линейное пространство  $\mathfrak{Z}_r$  размерности  $r$ , определяющее прогнозирующую ЛРФ, является линейной оболочкой сингулярных векторов  $U_i$  из выбранных сингулярных троек  $(\lambda_i, U_i, V_i)$ . Так как условие  $r \geq d$  должно быть выполнено, число сингулярных выбираемых троек, соответствующих ВР  $F_N^{(1)}$ , должно быть не меньше чем  $d$ .

- К выбору  $I$  сингулярных троек  $(\lambda_i, U_i, V_i)$ , описывающих ВР  $F_N^{(1)}$ , необходимо относиться очень внимательно. При анализе ВР с помощью SSA, если дополнить множество правильно выбранных сингулярных троек  $(\lambda_i, U_i, V_i)$  некоторыми лишними тройками с относительно небольшими значениями сингулярных чисел  $\lambda_i$ , то результат восстановления существенно не изменится. Если же мы имеем дело с прогнозом, то такое действие может вызвать сильное изменение пространства  $\mathfrak{Z}_r$ , его размерность увеличится и, как следствие, ЛРФ прогноза также изменится. Все это может привести к кардинальному изменению прогноза. Заметим, что величины дополнительных сингулярных значений в этом случае не важны.

- Значение коэффициента вертикальности  $v^2$  равно квадрату косинуса угла между пространством  $\mathfrak{Z}_r$  и вектором-ортом  $e_L$ . Условие  $v^2 < 1$  является необходимым для возможности прогнозирования. Если величина  $v^2$  близка к 1, то, в силу (1.30), коэффициент

ты прогнозирующей ЛРФ будут большими и, следовательно, некоторые корни характеристического полинома также будут большими по модулю. Если ожидаемое поведение значений прогноза не предполагает резкого возрастания или убывания, то большие значения коэффициента вертикальности говорят о возможных проблемах, которые могут возникнуть, в частности о возможной неустойчивости прогноза. Такая ситуация, скорее всего, означает, что были выбраны лишние сингулярные тройки.

• Важно проверять последние точки восстановленного ВР, в частности, сравнивать их с ожидаемым поведением, так как метод SSA-прогнозирования в качестве начальных данных использует последние значения  $\tilde{f}_{N-L+1}, \dots, \tilde{f}_{N-1}$  восстановленного ВР  $\tilde{F}$ . В силу свойств диагонального усреднения последние (и первые) члены ВР  $F_N^{(1)}$  обычно восстанавливаются с меньшей точностью по сравнению с серединой ВР. Этот эффект может вызвать увеличение ошибок прогноза.

• Необходимо обеспечивать устойчивость и надежность прогноза. Под устойчивостью и надежностью будем понимать, что малые изменения входных данных не приводят к заметным изменениям результата. В то время как правомерность прогнозирования, основанная на требовании сохранения структуры ВР в будущем, не может быть проверена на основе внутренних свойств ВР, устойчивость прогноза поддается некоторой проверке. Упомянем несколько способов такой проверки:

– Изменение начальных данных. Поскольку последние элементы восстановленного ВР могут содержать значительные ошибки, то можно начать прогноз с одной из предыдущих точек. Результаты сравнения прогнозов, начатых с разных точек, также говорят об устойчивости прогноза.

– Изменение длины окна  $L$ . Если характеристики делимости устойчивы при небольших изменениях длины окна, то можно сравнивать прогнозы при измененных  $L$ .

– Прогнозирование укороченного ВР. Укоротим исходный ВР  $F$  удалением нескольких его последних элементов. Если условия делимости устойчивы относительно такой операции, то мы можем сравнивать прогноз укороченного ВР с последними, удаленными точками ВР. Этот способ более объективен, так как в построении прогноза не участвуют те точки ВР, на которых прогноз тестируется. Однако его недостатком является то, что значения в последних (наиболее «недавних») точках ВР не учитываются при построении прогноза.

Таким образом, проанализировав рекомендации авторов, можно сделать вывод о том, что без ответа остаются следующие вопросы связанные с выбором параметров алгоритма прогнозирования ВР методом SSA, в том числе, выбор: точки начала прогноза (параметр  $S$ ), набора сингулярных троек  $I$ , используемых для прогнозирования, длины прогноза (параметр  $M$ ), значения величины сдвига  $L$ , а также влияние формы ВР на качество прогноза. Кроме того не исследованным остается вопрос о точности прогнозирования алгоритма метода SSA.

В этой связи представляется целесообразным проведение самостоятельных исследований алгоритма прогнозирования методом SSA, целью которого является разработка научно обоснованных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе прогнозировании реальных ВР и их экспериментальная апробация.

## 1.4. Выводы

Проведенный анализ современного состояния области исследования показал:

1) Задача анализа и прогнозирования нестационарных ВР является актуальной в различных областях человеческой деятельности.

2) Сегодня, несмотря на наличие большого количества разнообразных методов анализа и прогнозирования ВР, часть из которых доведена до конкретных программных реализаций, не существует универсального метода, адаптированного к особенностям нестационарных процессов.

3) Из рассмотренных в работе методов анализа и прогнозирования ВР, наиболее перспективным представляется метод SSA, не требующий стационарности анализируемого ВР, который, однако, оказывается несвободным от следующих недостатков:

1. при обработке реальных ВР в ряде случаев возникают проблемы с однозначной идентификацией сингулярных троек  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  траекторной матрицы  $X$  анализируемого ВР;

2. неправильный выбор сингулярных троек  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  разложения траекторной матрицы  $X$  анализируемого ВР приводит к возникновению артефактов и затрудняет интерпретацию результатов анализа;

3. отсутствуют научно обоснованные рекомендации по выбору параметров метода SSA и сингулярных троек  $(\sqrt{\lambda_i}, U_i, V_i)$  сингулярного разложения траекторной матрицы  $X$  при анализе и прогнозировании ВР;

4. отсутствует методика оценки точности прогнозирования нестационарных ВР в соответствие с методом SSA.

Таким образом, задача совершенствования метода SSA, по-прежнему, остается актуальной.

В этой связи были предены целенаправленные исследования в данном направлении, позволившие, в том числе решить, следующие задачи:

1) Разработать научно обоснованные рекомендации по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных ВР.

2) Провести экспериментальную апробацию разработанных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных ВР.

3) Разработать методику оценки точности прогнозирования нестационарных ВР методом SSA.

4) Получить количественные оценки точности прогнозирования нестационарных ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности (ОРЭМ).

## ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ СИНГУЛЯРНЫХ ТРОЕК И РАЗДЕЛИМОСТИ АДДИТИВНЫХ СОСТАВЛЯЮЩИХ ВР В МЕТОДЕ SSA

В данной главе изучены следующие вопросы метода SSA:

- 1) особенности сингулярных чисел  $\lambda_i$  и сингулярных векторов  $V_i$  выборочной траекторной матрицы ВР;
- 2) делимость ВР, представляющих собой сумму дискретных значений периодических функций с кратными и некратными частотами;
- 3) делимость ВР, представляющих собой сумму дискретных значений периодических функций и шума;
- 4) делимость ВР, представляющих собой сумму дискретных значений периодических составляющих и различных видов тренда (линейный, квадратичный, полиномиальный, экспоненциальный).

Приведено научное обоснование границ применимости данного метода.

### 2.1. Исследование особенностей сингулярных чисел и сингулярных векторов траекторной матрицы гармонического ВР

Из приведенного в Главе 1 описания метода SSA, очевидно, что основным управляющим параметром метода является размер окна  $L$ . При этом теоретически обоснованных рекомендаций по выбору значения  $L$  не существует, поэтому на практике руководствуются опытом, имеющимся у конкретного исследователя, или следуют известным феноменологическим рекомендациям, приведенным например, в [22, с. 18]. Здесь также предложены следующие интерпретации метода SSA:

- 1) при  $L \ll N$  сингулярные векторы  $V_i$  выборочной траекторной матрицы  $X$  анализируемого ВР есть собственные векторы линейных фильтров, а ГК есть результат действия данных фильтров на исходный ВР;
- 2) при  $L \cong N/2$  метод SSA может трактоваться как метод аппроксимации исходного ВР рядами конечного ранга.

Напомним, что традиционно выбора пар сингулярных троек  $(\lambda_i, U_i, V_i)$  используются двумерные графики  $V_i = f(V_{i+1})$ . При этом, как постулируется в [22, с. 10–11], форма зависимости  $V_i = f(V_{i+1})$  пар сингулярных векторов  $(V_i, V_{i+1})$ , соответствующим сингулярным числам  $\lambda_i \approx \lambda_{i+1}$ , имеющих близкие значения амплитуд, аналогична форме фигур Лиссажу. В результате группировки каждой пары ГК с указанными свойствами получают периодическую составляющую анализируемого ВР. Однако обоснования, подтверждающего правомерность данного постулата, имеет скорее качественный, нежели количественный характер. Отметим также, что результаты экспериментальных исследований, в которых метод SSA, применялся к анализу ВР, структура которых была, априори, неизвестна, с нашей точки зрения, также нельзя считать убедительными.

Данные обстоятельства определили необходимость проведения целенаправленного исследования особенностей сингулярных троек траекторной матрицы анализируемых ВР

$(\lambda_i, U_i, V_i)$ , используя для этого ВР, структура которых изначально известна [71].

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ , представляющему собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = \sin(2\pi f t)$  ( $f_2$  – частота сигнала), вычисленные в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(1)} = \sin(2\pi f t_i) = \sin(2\pi f \Delta t(i-1)) = \sin\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

Графики зависимостей  $\log(\lambda_i) = f(i)$  и  $V_{(1,2)} = f_{(1,2)}(i)$  для  $f = 10$  Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$  при различных значениях  $L$  представлены на рис. 2.1.

Из рис. 2.1 видно:

1) у рассматриваемой траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(1)}$  значимыми оказываются только сингулярные тройки  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ,  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ , при этом частоты ответствующих зависимостей  $V_{(1,2)} = f_{(1,2)}(i)$  оказываются одинаковыми, следовательно, они выделяют пару ГК, которая соответствует единственной составляющей анализируемого ВР;

2) значения сингулярных чисел  $\lambda_i$  траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(1)}$  оказываются зависящими от  $L$  (рис. 2.1)

Для удобства дальнейшего анализа на рис. 2.2. представлены графики зависимостей  $\lambda_1 = f(L \cdot \Delta t \cdot f)$ ,  $\lambda_2 = f(L \cdot \Delta t \cdot f)$ . Из рис. 2.2 видно, что условие  $\lambda_1 = \lambda_2$  (параллельности отрезка, соединяющего сингулярные числа  $\lambda_1, \lambda_2$  на графике зависимости  $\lambda_i = f(i)$ ) может быть записано в виде

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5k, k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

При невыполнении условия (2.1)  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  и, соответственно, скаттерграмма сингулярных векторов  $V_1, V_2$  отличается от замкнутой кривой правильной формы (рис. 2.3: слева –  $L = 10$  ( $L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$ ), справа  $L = 100$  ( $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )).

Таким образом, полученные результаты позволяют сделать следующие выводы.

1. При равенстве сингулярных чисел  $\lambda_{i+1}$ ,  $\lambda_i$  выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР ГК, восстановленная по сгруппированным сингулярным тройкам  $(\lambda_i, U_i, V_i)$ ,  $(\lambda_{i+1}, U_{i+1}, V_{i+1})$ , соответствует периодической составляющей, присутствующей в данном ВР, однако, обратное не верно – неравенство сингулярных чисел  $\lambda_{i+1}$ ,  $\lambda_i$  не означает их соответствия составляющим ВР с различными частотами, но требует дополнительно анализа (например, спектрального) сингулярных векторов.

2. При анализе ВР, содержащих значения реальных физических процессов, следует использовать не параметр сдвига  $L$ , но физически содержательную величину  $L \cdot \Delta t \cdot f$  имеющую следующий смысл:

– при  $L \cdot \Delta t \cdot f = n$ ,  $n = 1, 2, \dots, n$  – количество периодов периодической функции с частотой  $f$ , укладываемогося на ВИ  $L \cdot \Delta t$ ;

– при  $L \cdot \Delta t \cdot f = n$ ,  $n > 1$ ,  $n \notin \mathbb{N}$ , где  $\mathbb{N}$  – множество целых чисел,  $n$  – целое число периодов и доля периода периодической функции с частотой  $f$ , укладывающегося на ВИ  $L \cdot \Delta t$ ;

– при  $L \cdot \Delta t \cdot f = n$ ,  $n < 1$ ,  $n$  – доля периода периодической функции с частотой  $f$ , укладывающегося на ВИ  $L \cdot \Delta t$ .

3. Для описания зависимостей  $V_{(1,2)} = f_{(1,2)}(t) = f_{(1,2)}(i \cdot \Delta t)$  целесообразно использовать следующие математические модели:

$$\begin{aligned} f_1(t) &= a_1(t) \cos(\omega t + \psi), \\ f_2(t) &= a_2(t) \sin(\omega t + \psi) \end{aligned} \quad (2.2)$$

и дополнить алгоритм оценки частоты ГК на основе анализа формы скаттерграммы векторов  $V_1, V_2$  [2, с. 10] нахождением  $a_1(t), a_2(t)$ , например, с помощью метода аналитического сигнала (АС) [15], и далее умножением выражений (2.2) на множители  $1/a_1(t), 1/a_2(t)$ , соответственно.

Напомним, что по Габору АС  $w(t)$ , соответствующий действительной функции  $u(t)$ , определяется для всех функций, принадлежащих классу  $L^p(-\infty, \infty)$ ,

$$w(t) = u(t) + j\sigma(t) = a(t)e^{j\varphi(t)}, \quad (2.3)$$

где  $j$  – комплексная единица ( $j^2 = -1$ );  $\sigma(t)$  – сигнал, сопряженный к исходному по Гильберту,

$$\sigma(t) = H(u) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau; \quad (2.4)$$

здесь  $H(u)$  – оператор, описывающий преобразование Гильберта,  $a(t)$  – амплитуда АС, имеющая физический смысл огибающей сигнала  $u(t)$ :

$$a(t) = \pm |w(t)| = \pm \sqrt{u^2(t) + \sigma^2(t)}. \quad (2.5)$$

Для функций  $u(t), w(t)$  справедливо обратное преобразование:

$$u(t) = H(u) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sigma(\tau)}{t - \tau} d\tau. \quad (2.6)$$

Можно показать [2], что существует связь между спектрами исходного сигнала  $u(t)$  –  $S_u(\omega)$  и сигнала, сопряженного к исходному по Гильберту,  $\sigma(t)$  –  $S_\sigma(\omega)$ :

$$S_\sigma(\omega) = -i S_u(\omega) \operatorname{sgn}(\omega), \quad (2.7)$$

где

$$\operatorname{sgn}(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \geq 0, \\ -1, & \omega \leq 0. \end{cases}$$

<sup>1</sup> Интеграл в (2.5) понимается в смысле главного значения по Коши [15].

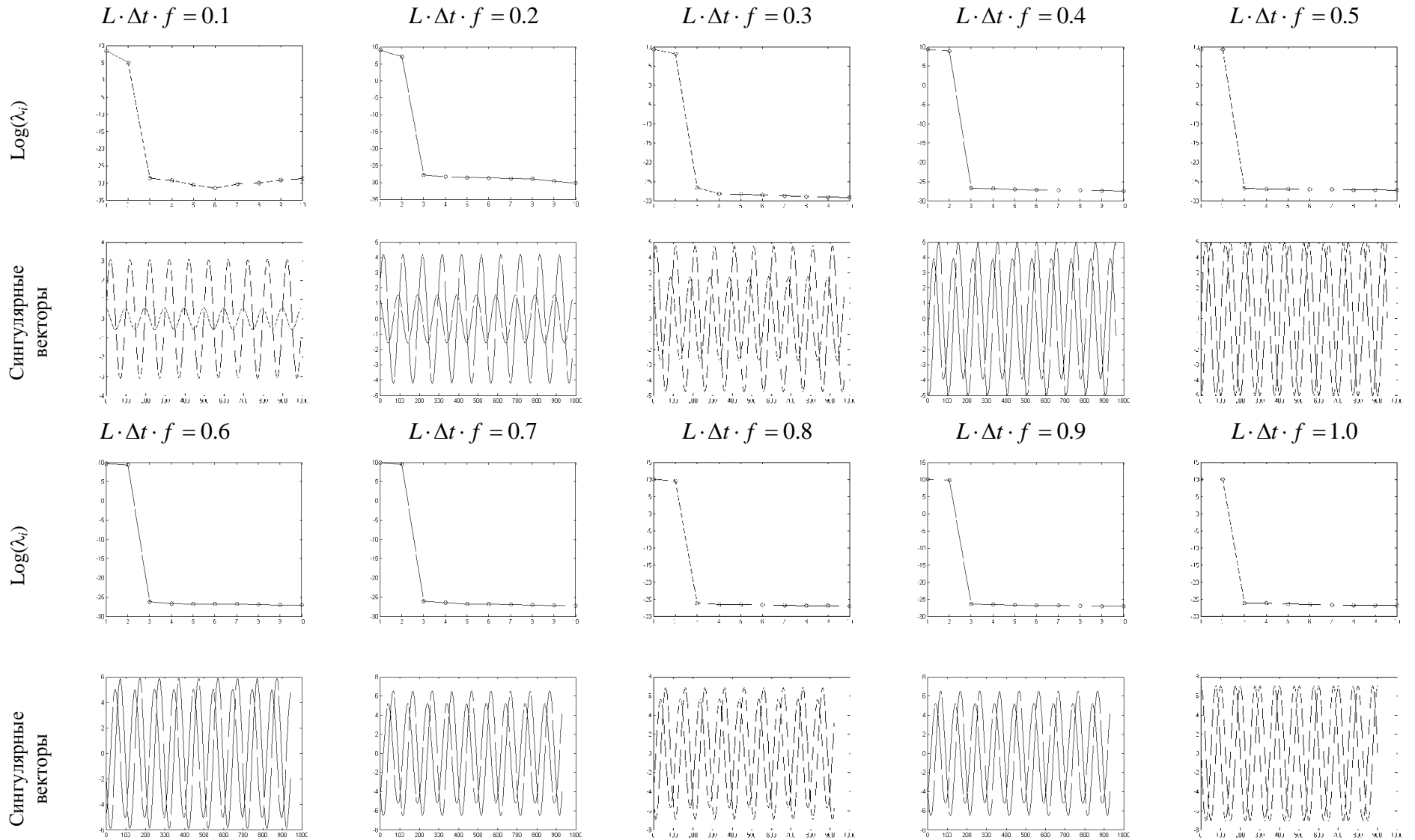


Рис. 2.1. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . Графики зависимостей  $\log(\lambda_i) = f(i)$  и  $V_{(1,2)} = f_{(1,2)}(i)$  при различных значениях  $L \cdot \Delta t \cdot f$



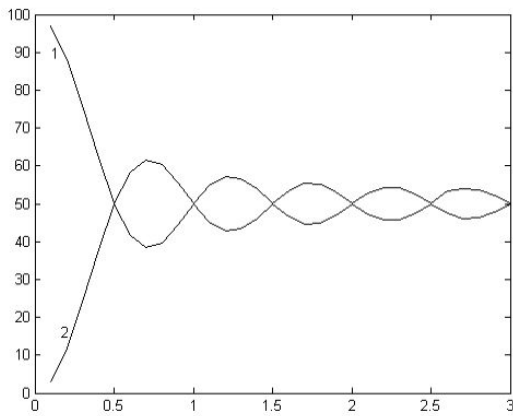


Рис. 2.2. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . Графики зависимостей  $\lambda_1 = f^{(1)}(L \cdot \Delta t \cdot f)$  (1),  $\lambda_2 = f^{(2)}(L \cdot \Delta t \cdot f)$  (2)

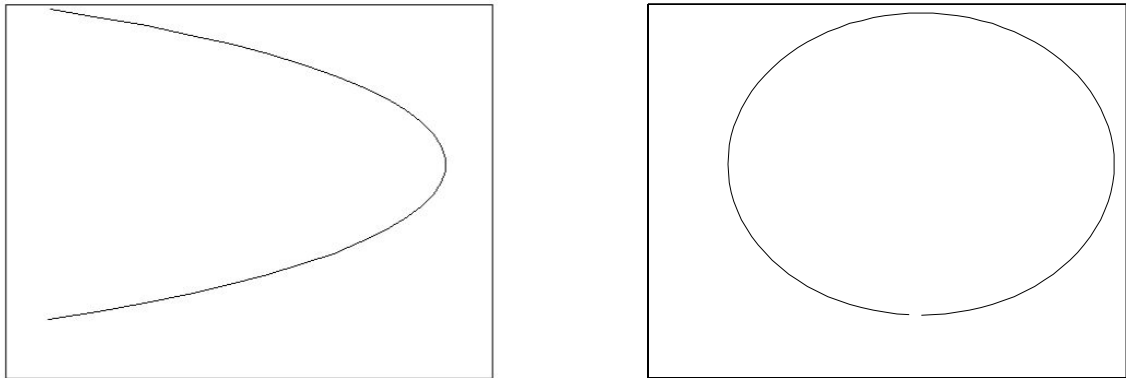


Рис. 2.3. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . Скаттерграмма сингулярных векторов  $V_1, V_2$  (слева —  $L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$ ; справа —  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

Прямое вычисление сигнала, сопряженного к исходному по Гильберту, согласно (2.4) требует большого объема вычислений, поэтому на практике используют метод, основанный известной на связи спектров исходного и аналитического сигналов:

$$S_w(\omega) = \begin{cases} 2S_u(\omega), & \omega > 0, \\ S_u(\omega), & \omega = 0, \\ 0, & \omega < 0, \end{cases} \quad (2.8)$$

непосредственно следующим из (2.4), (2.7).

Из (2.8) видно, что  $\sigma(t)$  можно найти, как мнимую часть обратного преобразования Фурье функции  $S_w(\omega)$ :

$$\sigma(t) = \text{Im} \left( \int_0^{+\infty} S_z(\omega) e^{i\omega t} dt \right). \quad (2.9)$$

Данный алгоритм, являющийся по своей сути линейным, будучи примененным к векторам  $V_1, V_2$  реализуется следующей последовательностью действий.

1. Вычисление спектров сингулярных векторов  $V_1(t), V_2(t) - S_{V_1}(\omega), S_{V_2}(\omega)$ , соответственно.

2. Вычисление пов соответствие с (2.8) спектров аналитических сигналов  $w_1(t), w_2(t) - S_{w_1}(\omega), S_{w_2}(\omega)$ , соответственно.

3. Вычисление в соответствии с (2.9) сигналов, сопряженных векторам  $V_1(t), V_2(t)$  по Гильберту,  $-\sigma_1(t), \sigma_2(t)$ , соответственно.

4. Вычисление по (2.5) огибающих сингулярных векторов  $V_1(t), V_2(t) - a_1(t), a_2(t)$ , соответственно.

5. Умножение сингулярных векторов  $V_1(t), V_2(t)$  на множители  $1/a_1(t), 1/a_2(t)$ , соответственно.

Огибающие сингулярных векторов  $V_1(t), V_2(t)$  полученные с помощью метода АС, для ВР, обсуждавшего в данном разделе выше, для случая  $L = 20$  представлены на рис. 2.4, 2.5.

Результаты обработки сингулярных векторов  $V_1(t), V_2(t)$ , в соответствии с описанным алгоритмом, а также скаттерграмма нормированных сингулярных векторов  $V_1(t), V_2(t)$  представлены на рис. 2.6–2.8.

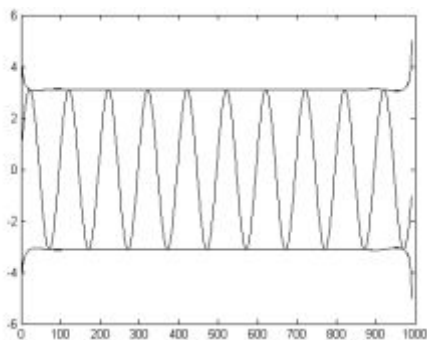


Рис. 2.4. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . График зависимости  $V_{1_i} = f(i)$  и ее огибающая

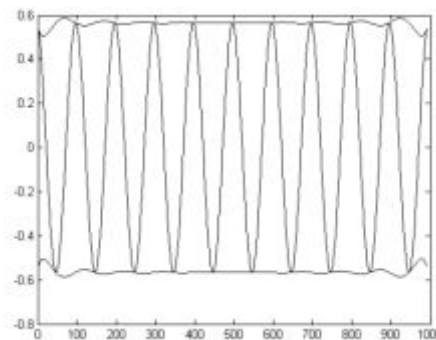


Рис. 2.5. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . График зависимости  $V_{2_i} = f(i)$  и ее огибающая

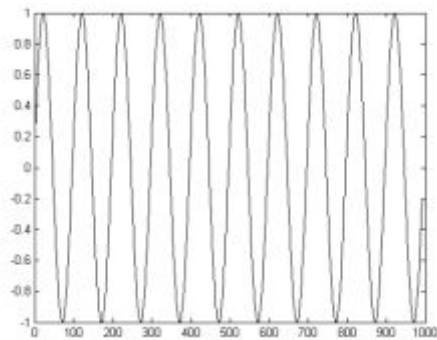


Рис. 2.6. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . График зависимости  $V_1(t)/a_1(t)$

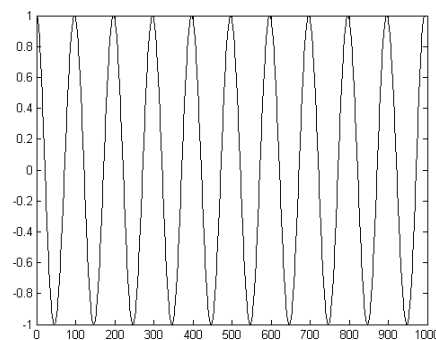


Рис. 2.7. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . График зависимости  $V_2(t)/a_2(t)$

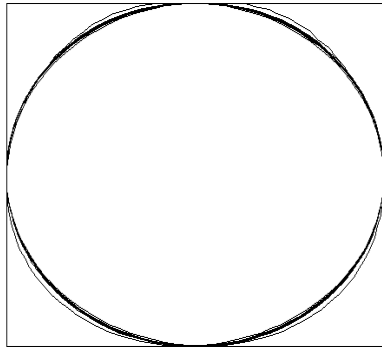


Рис. 2.8. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . Скаттерграмма нормированных сингулярных векторов  $V_1(t)/a_1(t)$ ,  $V_2(t)/a_2(t)$  ( $L \cdot \Delta t \cdot f = 0.2$ )

Из сравнения рис. 2.3 и рис. 2.8 видно, что предложенный алгоритм, действительно, повышает однозначность трактовки скаттерграмм сингулярных векторов траекторной матрицы анализируемого ВР.

Таким образом, результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(1)}$  позволяют сделать следующие выводы:

1. Необходимым и достаточным условием равенства амплитуд сингулярных векторов  $V_1(t), V_2(t)$ , является выполнение условия (2.1).

2. Значения ГК, восстановленной по первойму  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярным тройкам траекторой матрицы ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ , оказывается идентичными значениям функции, породившей данный ВР, только при выполнении условия (2.1).

3. Скаттерграммы сингулярных векторов траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(1)}$  при невыполнении условия (2.1) и небольших значениях сдвига  $L$  ( $L \cdot \Delta t \cdot f < 0.5$ ), отличаются от замкнутых кривых правильной форму, а потому в этом случае требуется привлечения спектрального анализа сингулярных векторов или ГК.

4. Для устранения отличия скаттерграмм сингулярных векторов от замкнутых спиралей правильной формы следует использовать описанный выше алгоритм, основанный на методе АС.

## 2.2 Исследование делимости ГК детерминированных ВР

Задача делимости ГК ВР формулируется следующим образом: определить условия (количество детерминированных функций  $m$  и их вид) для которых возможен выбор такого размера сдвига  $L$ , что можно сгруппировать сингулярные тройки, так что в результате SSA-разложения получить  $m$  исходных ВР, т.е. восстановить составляющие ВР с помощью сингулярного разложения его траекторной матрицы.

Теоретически вопрос о делимости составляющих ВР, представляющего собой сумму дискретных отсчетов  $m$  известных детерминированных функций, взятых в одни и те же моменты времени, наиболее подробно исследовался в [22]. Для решения данной задачи автор [22] ввел понятия слабой  $L$ -делимости, сильной  $L$ -делимости, приближенной делимости и асимптотической делимости составляющих ВР, а также привел без доказательства их свойства. Исходя из целей нашей работы, далее мы приведем их формулировки, следуя [22], и обсудим их свойства более подробно.

### 2.2.1. Основные определения и свойства разделимости ВР в методе SSA

Пусть каждый член ВР длины  $N$   $F_N$  равен сумме соответствующих членов ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ :

$$F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}. \quad (2.10)$$

При выборе величины сдвига, равной  $L$ , каждый из ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  порождает соответствующие  $L$ -траекторные матрицы:  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$  и  $X$ .

Обозначим линейные пространства, порожденные столбцами траекторных матриц  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$ , соответственно,  $\mathfrak{F}^{(L,1)}$  и  $\mathfrak{F}^{(L,2)}$ . Пространства, порожденные столбцами транспонированных матриц  $(X^{(1)})^T$ ,  $(X^{(2)})^T$ , обозначим, соответственно,  $\mathfrak{F}^{(K,1)}$  и  $\mathfrak{F}^{(K,2)}$ ,  $K = N - L + 1$ .

**Определение 2.1.** Будем говорить, что ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы, если  $\mathfrak{F}^{(L,1)} \perp \mathfrak{F}^{(L,2)}$  и  $\mathfrak{F}^{(K,1)} \perp \mathfrak{F}^{(K,2)}$ .

**Предложение 2.1.** Пусть  $K = N - L + 1$ . ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы тогда и только тогда, когда

$$\begin{aligned} f_k^{(1)} f_m^{(2)} + \dots + f_{k+L-1}^{(1)} f_{m+L-1}^{(2)} &= 0, 0 \leq k, m \leq K - 1, \\ f_k^{(1)} f_m^{(2)} + \dots + f_{k+K-1}^{(1)} f_{m+K-1}^{(2)} &= 0, 0 \leq k, m \leq L - 1. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Из (2.11) видно, что необходимым и достаточным условием слабой  $L$ -разделимости разделимости ВР (2.10) является ортогональность отрезков длины  $L$  ряда  $F_N^{(1)}$  и отрезков длины  $L$  ВР  $F_N^{(2)}$  а также отрезков длины  $K$  ВР  $F_N^{(1)}$  и отрезков длины  $K$  ВР  $F_N^{(2)}$ .

**Предложение 2.2.** Пусть ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы. Рассмотрим некоторые сингулярные разложения траекторных матриц  $X^{(1)}$ ,  $X^{(2)}$ :

$$\begin{aligned} X^{(1)} &= \sum_k \sqrt{\lambda_{1k}} U_{1k} V_{1k}^T, \\ X^{(2)} &= \sum_k \sqrt{\lambda_{2k}} U_{2k} V_{2k}^T, \end{aligned}$$

тогда разложение

$$X = X^{(1)} + X^{(2)} = \sum_k \sqrt{\lambda_{1k}} U_{1k} V_{1k}^T + \sum_k \sqrt{\lambda_{2k}} U_{2k} V_{2k}^T,$$

также является сингулярным.

Таким образом, при слабой  $L$ -разделимости представление ВР в виде (2.10) является естественным с точки зрения разложения его траекторной матрицы  $X$ .

**Следствие 2.1.** Пусть ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы. Тогда существует такое сингулярное разложение траекторной матрицы  $X$  ВР  $F_N$ , что его можно разбить на две части, являющиеся сингулярным разложением траекторных матриц ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ .

В связи с тем, что на этапе разложения базового алгоритма SSA, получают некоторое разложение сингулярное траекторной матрицы  $X$ , которое, вообще говоря, не обязано соответствовать  $L$ -разделимости двух ВР, используют усиленное понятие разделимости.

**Определение 2.2.** Если ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  слабо  $L$ -разделимы и множество сингулярных чисел  $\{\lambda_{1k}\}, k = \overline{1, L}$  сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N^{(1)}$  не пересекается с множеством сингулярных чисел разложения траекторной матрицы ВР  $F_N^{(2)}$   $\{\lambda_{2k}\}, k = \overline{1, L}$ , то говорят, что ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  сильно  $L$ -разделимы.

**Предложение 2.3.** Пусть ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$  сильно  $L$ -разделимы. Тогда любое сингулярное разложение траекторной матрицы  $X$  ВР  $F_N$  можно разбить на две части, являющиеся сингулярными разложениями матриц ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ .

Напомним, что в [22] наряду с понятиями «слабая  $L$ -разделимость» и «сильная  $L$ -разделимость» введены понятия «приближенная разделимость» и «асимптотическая разделимость». Для введения данных понятий автор использует следующие обозначения.

Для любого ВР  $F_N = \{f_0, \dots, f_{N-1}\}$  положим

$$F_{i,j} = \{f_{i-1}, \dots, f_{j-1}\}, 1 \leq i \leq j \leq N.$$

$$\text{Пусть } F_N^{(1)} = \{f_0^{(1)}, \dots, f_{N-1}^{(1)}\}, F_N^{(2)} = \{f_0^{(2)}, \dots, f_{N-1}^{(2)}\}.$$

Для  $i, j \geq 1$  и  $M \leq N - 1 - \max(i, j)$  определим

$$\rho_{i,j}^{(M)} = \frac{\left( F_{i,i+M-1}^{(1)} F_{j,j+M-1}^{(2)} \right)}{\left\| F_{i,i+M-1}^{(1)} \right\| \left\| F_{j,j+M-1}^{(2)} \right\|}. \quad (2.13)$$

Здесь (...) – скалярное произведение векторов,  $\|\cdot\|$  – евклидова норма. Если знаменатель в (2.13) равен нулю, то полагают, что  $\rho_{i,j}^{(M)} = 0$ . Значение  $\rho_{i,j}^{(M)}$ , имеющее смысл косинуса угла между векторами  $F_{i,i+M-1}^{(1)}$ .

В [22] рассмотрен ВР тестовых примеров, иллюстрирующих понятие разделимости ВР, в которых были использованы следующие ВР:

1) ВР, все значения которого одинаковы (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**const**»);

2) ВР, содержащий последовательные дискретные значения экспоненциальной функции (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**exp**»);

3) ВР, содержащий последовательные дискретные значения функций вида  $\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi)$  (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**cos**»);

4) ВР, содержащий последовательные дискретные значения экспоненциальной функций, умноженной на функции вида  $\cos(\omega t + \varphi), \sin(\omega t + \varphi)$  (для данного ряда в табл. 2.1. используется обозначение «**exp cos**»);

5) ВР, содержащий последовательные дискретные значения линейной функции или полинома (для данного ВР в табл. 2.1. используется обозначение «**a·k+b**»).

Результаты анализа выше перечисленных ВР, полученные в [22], для представлены в табл. 2.1, в которой пары слабо  $L$ -разделимых ВР помечены знаком плюс.

Таблица 2.1. Точная разделимость

	<b>const</b>	<b>cos</b>	<b>exp</b>	<b>exp cos</b>	<b><math>a \cdot k + b</math></b>
<b>const</b>	–	+	–	–	–
<b>cos</b>	+	+	–	–	–
<b>exp</b>	–	–	–	+	–
<b>exp cos</b>	–	–	+	+	–
<b><math>a \cdot k + b</math></b>	–	–	–	–	–

Здесь уместно отметить, что при использовании метода SSA для анализа реальных ВР, решается прямо противоположная задача: по вычисленному разложению  $X$  траекторной матрицы ВР  $F_N$  (набору сингулярных чисел сингулярного разложения, сингулярным векторам) определить вид в общем случае  $m$  неизвестных детерминированных функций, сумма соответствующих дискретных значений которых определяет значение соответствующего члена ВР  $N = 1000$ . Другими словами, практический интерес представляет не столько установление факта разделимости ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ , сколько исследования возможности установления взаимно однозначного соответствия между вычисленным разложением траекторной матрицы  $X$  ВР  $F_N$  и функциями, определяющими значения членов рядов  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ . В этой связи, представляется целесообразным провести самостоятельное более подробное рассмотрение проблемы разделимости ВР, образованных данными функциями [72].

### 2.2.2. Анализ разделимости ВР вида «const +изменяющийся во времени ВР»

#### Анализ разделимости ВР вида «const»+«cos»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = c + \sin(2\pi f t)$  ( $f$  – частота сигнала,  $c$  – константа, неравная нулю), вычисленные в узлах временной сетки (ВС)  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\Delta t = T_s / (N - 1)$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(2)} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = c + \sin(2\pi f t_i) = c + \sin\left(2\pi f \Delta t(i-1)\right) = c + \sin\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

В связи с тем, что в данном тестовом примере нас в первую очередь интересует точность выделения постоянной составляющей анализируемого ВР  $F_{N_i}^{(2)}$  ( $f = 10$  Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$ ,  $c = 0.2$ ) –  $F_{N_i}^{(1)}$ , на рис. 2.9 представлены графики зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$ , а также ГК, восстановленные по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(2)}$   $(\lambda_3, U_3, V_3)$ , при различных значениях сдвига  $L$ .

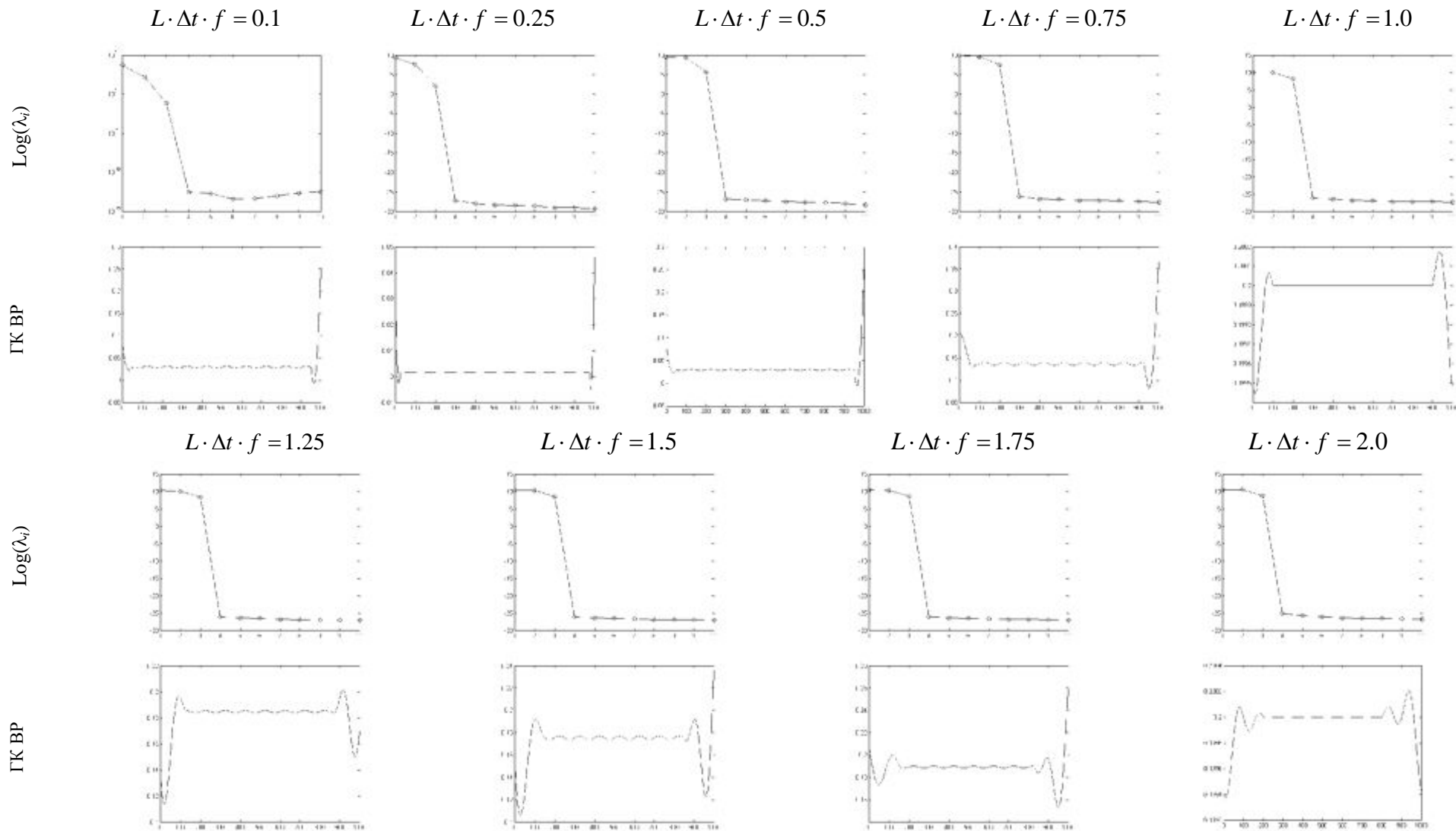


Рис. 2.9. BP  $F_{N_i}^{(2)}$ . График за зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  и ГК, восстановленная по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  при различных значениях  $L \cdot \Delta t \cdot f$

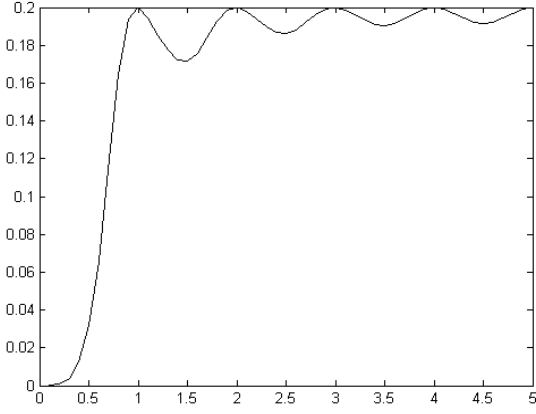


Рис. 2.10. ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . Зависимость среднего значения ГК, восстановленной по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $T_s = 1.0$  с)

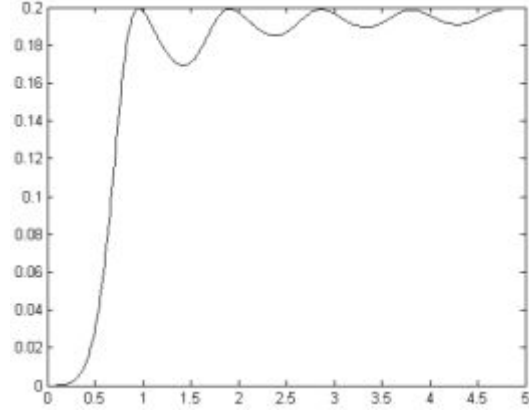


Рис. 2.11. ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $T_s = 0.95$  с)

Из рис. 2.9 видно, что сингулярные тройки траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(2)} (\lambda_1, U_1, V_1)$ ,  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ , соответствующие периодической составляющей ВР, при изменении размера сдвига  $L$ , изменяются аналогично описанию, приведенному в Разделе 2.1.

ГК, восстановленная по третьей тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(2)} (\lambda_3, U_3, V_3)$ , оказывается отличной от постоянной составляющей, заложенной в модель ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ , а степень отличия зависит от размера сдвига  $L$ . Следовательно, для количественного описания отличия ГК от истинной составляющей (ВР  $F_N^{(2)}$ ) следует использовать зависимость среднего значения ГК, восстановленной по сингулярной третьей тройке траекторной матрицы ВР  $F_N^{(2)} (\lambda_3, U_3, V_3)$ , от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ . Данная зависимость представлена на рис. 2.10.

Из рис. 2.10 видно, что в рассматриваемом случае условие сильной  $L$ -разделимости ВР  $F_N^{(1)}, F_N^{(2)}$  записывается в виде

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 1, 2, \dots, \quad (2.12)$$

т.е. на ВИ  $T_s$  должно укладываться целое количество периодов ВР  $F_N^{(2)}$ . Отметим, что данный результат согласуется с [22, С. 17]. В то же время требование выбора длины интервала анализа ВР такой, чтобы на нем укладывалось целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , является избыточным. Данный вывод подтверждает рис. 2.11, на котором представлена зависимость среднего значения ГК, восстановленной по третьей сингулярной тройке ВР  $F_{N_i}^{(2)} (\lambda_3, U_3, V_3)$ , от  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , когда ВР  $F_N^{(2)}$  представляет собой дискретные отсчеты функции  $u(t) = \sin(2\pi f t)$  ( $f = 10$  Гц,  $T_s = 0.95, 1.0$  с), вычисленные в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ . Отметим, что значения интервалов сдвига  $L$ , при которых обсуждаемая зависимость совпадает с истинным значения постоянной составляющей, оказывается отличной от (2.12) – абсциссы точек, соответствующих максимальному зна-



чениям рассматриваемой зависимости оказываются равными: 1.0365; 1.9780; 2.8624; 3.8323.

Из рис. 2.10, 2.11 видно, что условие разделимости ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при  $c < \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  можно сформулировать следующим образом: длина ВР  $F_{N_i}^{(2)}$  должна быть такой, чтобы на ВИ  $L_{\max} \cdot \Delta t$ , где  $L_{\max} \leq N/2$ , укладывалось не менее одного периода ВР  $F_N^{(1)}$ .

При  $c \geq \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(2)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), будет соответствовать ВР  $F_N^{(1)}$ , ГК, восстановленная группировкой второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) третьей сингулярных троек траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ , – ВР  $F_N^{(2)}$  (рис. 2.12).

ГК, соответствующие ВР  $F_N^{(1)}$ , для  $T_s = 1$ ,  $T_s = 0.95$ , представлены на рис. 2.13, 2.14, соответственно. Из рис. 2.13, 2.14 видно, что ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  в данном случае оказываются разделимыми при любом значении параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ .

В то же время значение максимального отклонения значений членов ВР  $F_N^{(1)}$ , выделенного методом SSA из ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ , от его точных значений, оказывается зависящим от длины интервала  $T_s$ , на котором вычислены значения анализируемого ВР:

1) если на интервале  $T_s$  укладывается целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 0.05\%$ ;

2) если на интервале  $T_s$  укладывается нецелое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 1.13\%$ . Отметим, что наибольшей погрешность оказывается для случая когда  $c = \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  (рис. 2.15, 2.16).

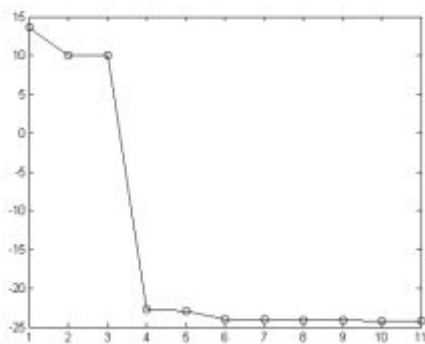


Рис. 2.12а. ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  ( $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

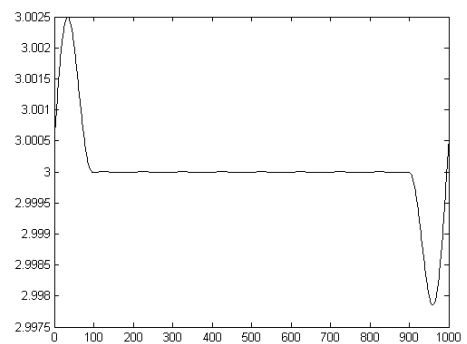


Рис. 2.12б. ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) ( $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

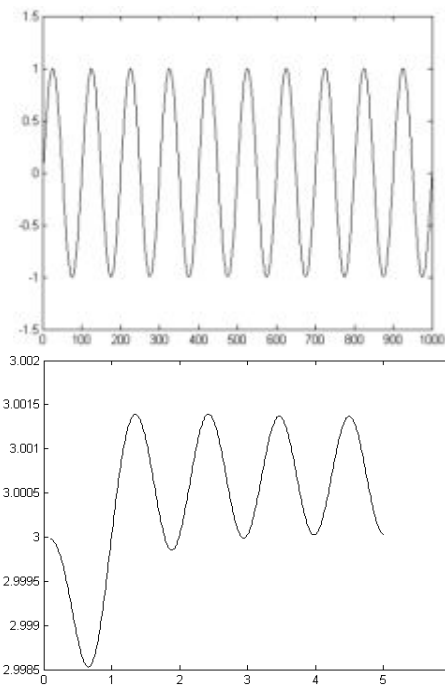


Рис. 2.13. ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 3.0, T_s = 1.0$  с)

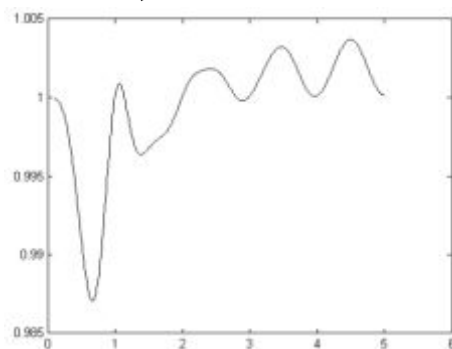


Рис. 2.15. ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 1.0, T_s = 1.0$  с)

Рис. 2.12в. ВР . ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . ГК, восстановленная по второй и третьей сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_2, U_2, V_2), (\lambda_3, U_3, V_3)$  ( $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

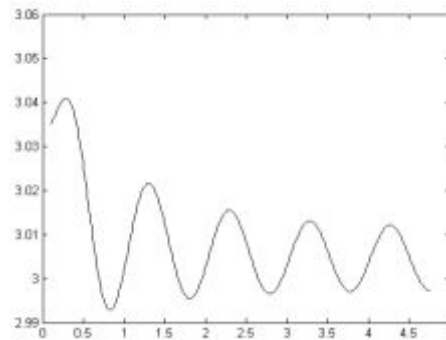


Рис. 2.14. ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . Зависимость ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 3.0, T_s = 0.95$  с)

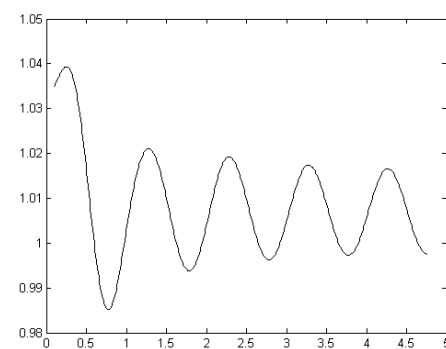


Рис. 2.16. ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ . Зависимость среднего значения составляющей ВР, восстановленной по первой сингулярной тройке  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 1.0, T_s = 0.95$  с)

Из рис. 2.15, 2.16 видно:

- 1) если на интервале  $T_s$  укладывается целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 1.5\%$ ;
- 2) если на интервале  $T_s$  укладывается нецелое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой величины составляет  $\approx 4.0\%$ .

#### Анализ разделимости ВР вида «const»+«exp»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(3)}$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = c + \exp(\alpha t)$  ( $c$  – константа, неравная ну-

лю), вычисленные в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(3)} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = c + \exp(\alpha t_i) = c + \exp(\alpha \Delta t(i-1)) = c + \exp\left(\alpha \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

Графики зависимостей  $\log(\lambda_i) = f(i)$  и ГК, восстановленная по второй сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(3)}(\lambda_2, U_2, V_2)$ , представлены на рис. 2.17. Из рис. 2.17 видно, что ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  в рассматриваемом случае оказываются неразделимыми при любом значении параметра сдвига  $L$ , что соответствует данным [22, С. 16].

#### Анализ разделимости ВР вида «const»+«exp cos»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = c + \exp(\alpha t) \sin(2\pi f t), \quad (2.12)$$

здесь  $c$  – константа, не равная нулю, вычисленные в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(4)} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = c + \exp(\alpha t_i) \sin(2\pi f t_i) = c + \exp(\alpha \Delta t(i-1)) \sin(2\pi f \Delta t(i-1)) = \dots \\ c + \exp\left(\alpha \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right) \sin\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

Отметим, что ВР  $F_{N_i}^{(4)}$  в [22] отнесен к точно неразделимым ВР, однако,

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} u(t) = c + \sin(2\pi f t),$$

следовательно, при малых значениях  $\alpha$  ВР  $F_{N_i}^{(4)}$  будет аналогичен ВР вида «const» + «cos», а потому можно ожидать, что ВР в этом случае окажется разделимым, особенно, как показано выше в нашей работе, при  $c > 1$ .

Графики зависимостей  $\log(\lambda_i) = f(i)$  и ГК, восстановленная по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}(\lambda_3, U_3, V_3)$ , для случая  $c = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2 \text{ с}^{-1}$ , представлены на рис. 2.18. Из рис. 2.18 видно, что сингулярные числа  $\lambda_i$  траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ , при изменении размера сдвига  $L$ , изменяются аналогично описанному в Разделе 2.1.

Из рис. 2.18 видно, что ГК, восстановленная по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}(\lambda_3, U_3, V_3)$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ ), оказывается отличной от ВР  $F_N^{(1)} = c$ . При этом это отличие оказывается зависящим от размера сдвига  $L$ . В этой связи, была вычислена зависимость среднего значения ГК, восстановленной по третьей сингулярной тройке  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  ВР  $F_{N_i}^{(4)}$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ ), от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$  (рис. 2.19).

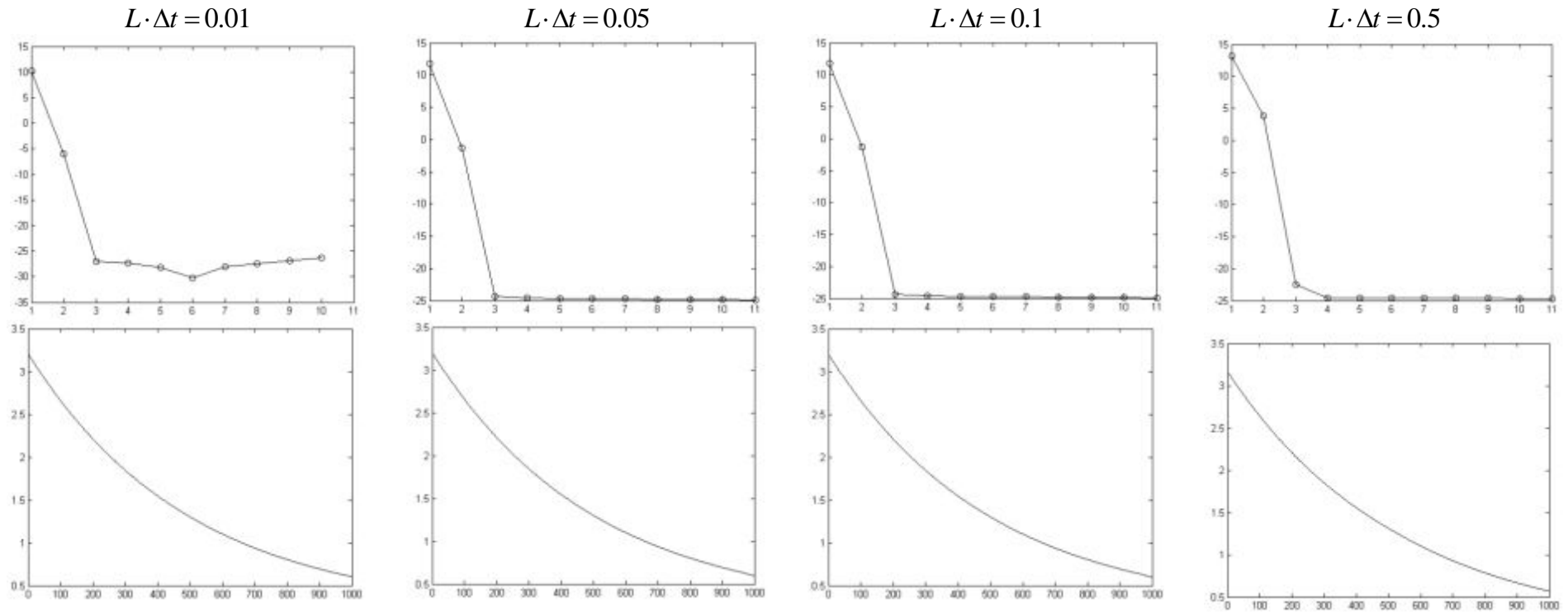


Рис. 2.17. ВР  $F_N^{(3)}$ . Графики зависимостей  $\log(\lambda_i) = f(i)$  и ГК, восстановленных по второй сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  ( $F_N^{(1)} = 0.2$ ,  $\alpha = -2$ ), при различных значениях  $L \cdot \Delta t$

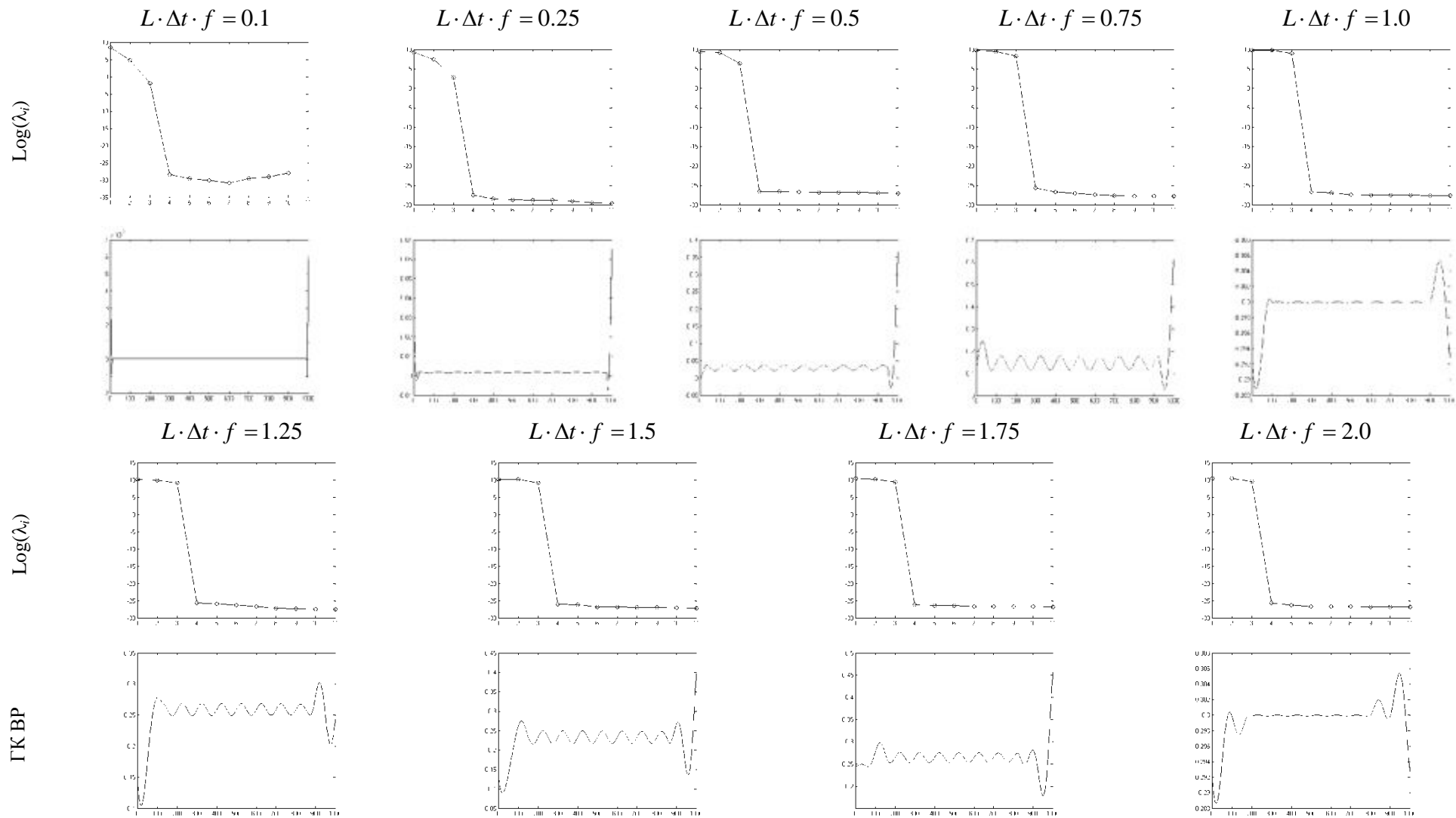


Рис. 2.18. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . Графики зависимостей  $\log(\lambda_i) = f(i)$  и ГК, восстановленные по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  ( $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $c = 0.3$ ), при различных значениях  $L \cdot \Delta t \cdot f$

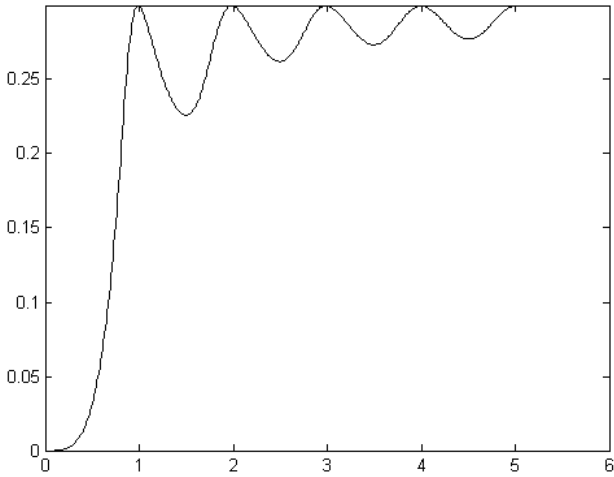


Рис. 2.19. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График зависимости среднего значения ГК, восстановленной по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$ , от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ )

Из рис. 2.19 видно, что в рассматриваемом случае условие точной делимости ВР  $F_N^{(2)}$  от ВР  $F_N^{(1)}$  аналогично условию (2.12).

На рис. 2.20 представлена зависимость среднего значения ГК, восстановленной по третьей сингулярной тройке  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  ВР  $F_N^{(2)}$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ ), от  $L \cdot \Delta t \cdot f$ .

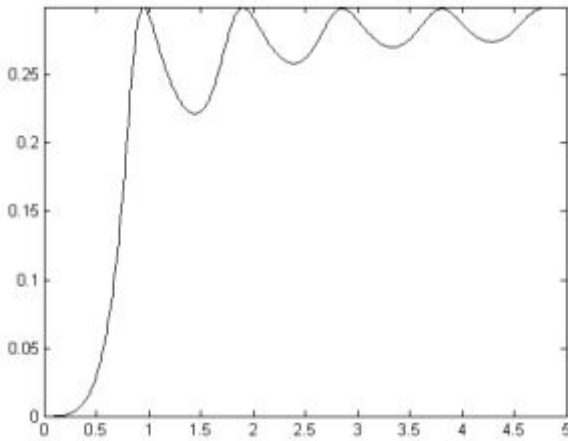


Рис. 2.20. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График зависимости среднего значения ГК, восстановленной по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$ , от  $L \cdot \Delta t$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 0.95 \text{ с}$ )

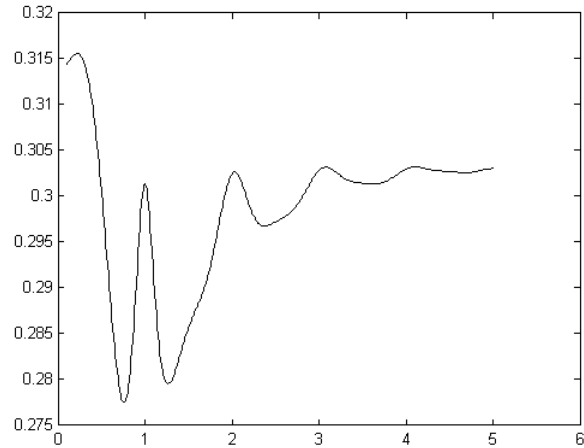


Рис. 2.21. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График зависимости среднего значения ГК, восстановленной по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$ , от параметра  $L \cdot \Delta t$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -2.0$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ )

Из рис. 2.20 видно, что значения длительностей интервалов сдвига, при которых обобщаемая зависимость совпадает с ВР  $F_N^{(2)}$ , оказывается отличной от (2.12) – абсциссы точек, соответствующих максимальным значениям рассматриваемой зависимости, оказываются равными: 1.0365; 1.9780; 2.8624; 3.8323.

На рис. 2.21 представлена зависимость среднего значения ГК, восстановленная по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}$   $(\lambda_3, U_3, V_3)$ , от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , для случая когда ВР  $F_N^{(2)}$  образован дискретными отсчетами функции

$u(t) = \exp(\alpha t) \sin(2\pi f t)$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $f = 10$  Гц,  $T_s = 1.0$  с,  $\alpha = -2.0$ ), вычисленными в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ .

На рис. 2.22 представлена ГК, восстановленная по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}$  ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ), от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , для случая, когда ВР  $F_N^{(2)}$  представляет собой дискретные отсчеты функции  $u(t) = \exp(\alpha t) \sin(2\pi f t)$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $f = 10$  Гц,  $T_s = 0.95$  с,  $\alpha = -2.0$ ), вычисленные в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ .

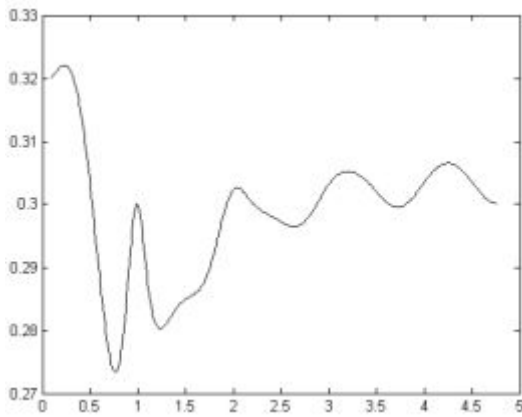


Рис. 2.22. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График зависимости среднего значения ГК, восстановленной по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ), от  $L \cdot \Delta t$  ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -2.0$ ,  $f = 10$  с<sup>-1</sup>,  $T_s = 0.95$  с)

Из рис. 2.21, 2.22 видно, что при  $L \cdot \Delta t \cdot f > 2$  отличие среднего значения ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), отличается от истинного значения постоянной составляющей не более чем на 1.0%.

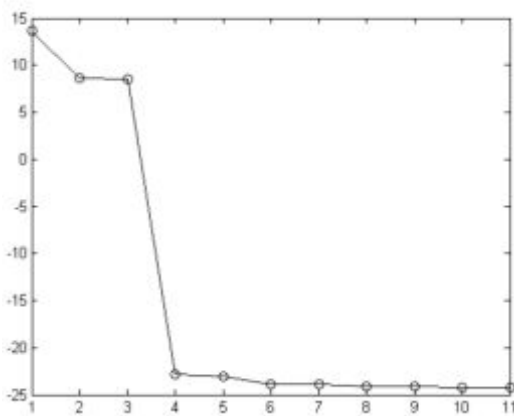


Рис. 2.23а. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График функции  $\log(\lambda_i) = f(i)$ , ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с<sup>-1</sup>,  $T_s = 1$  с,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

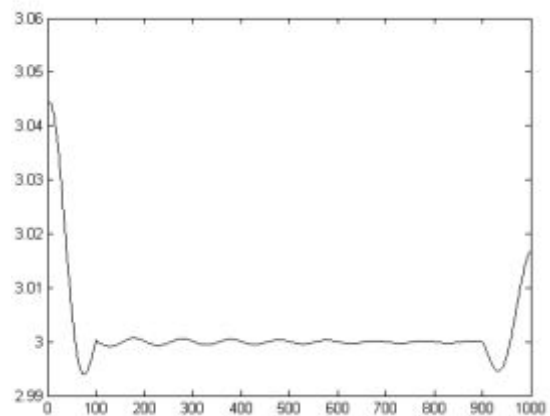


Рис. 2.23б. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10$  с<sup>-1</sup>,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

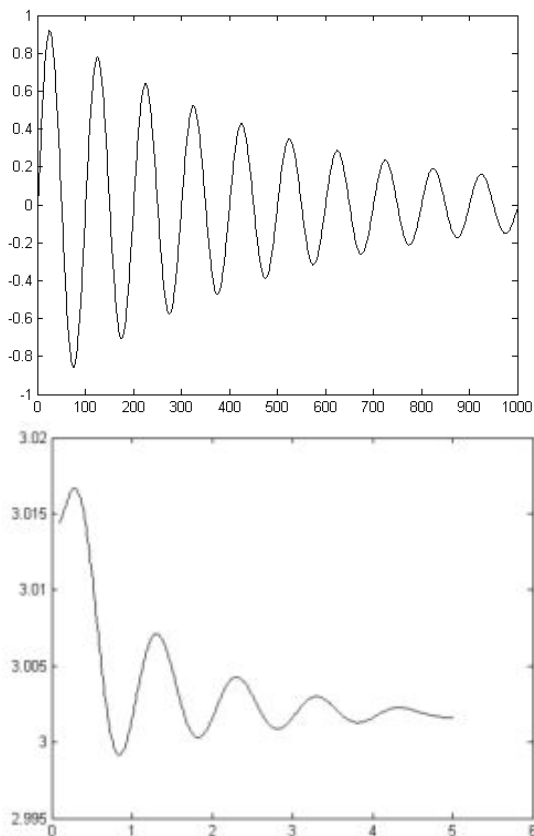


Рис. 2.24а. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График зависимости ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ , от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 3.0$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1.0 \text{ с}$ )

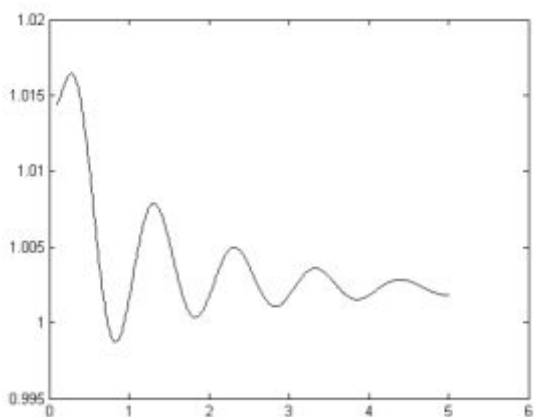


Рис. 2.25а. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График зависимости среднего значения ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ , от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 1.0$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1.0 \text{ с}$ )

Рис. 2.23в. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы ( $F_N^{(1)} = 0.3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$ )

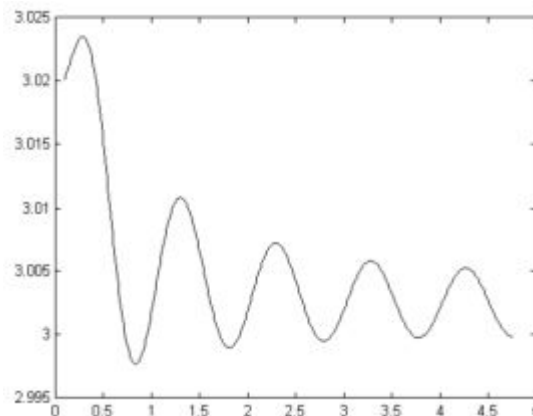


Рис. 2.24б. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График зависимости ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ , от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_N^{(1)} = 3.0$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 0.95 \text{ с}$ )

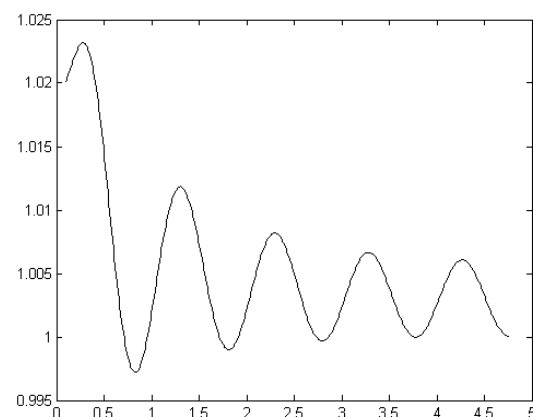


Рис. 2.25б. ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ . График зависимости ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ , от  $L \cdot \Delta t \cdot f$  ( $F_{N_i}^{(1)} = 1.0$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $f = 10 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 0.95 \text{ с}$ )



При  $c \geq \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}(\lambda_1, U_1, V_1)$ , соответствует ряду  $F_N^{(1)}$ , а ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ , соответствуют ВР  $F_N^{(2)}$  (рис. 2.23).

На рис. 2.24 представлена зависимость ГК, восстановленной по первой тройке сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(4)}(\lambda_1, U_1, V_1)$ , для случая  $F_N^{(1)} = 3.0$ ,  $T_s = 1$ ,  $T_s = 0.95$  от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ . На рис. 2.25 представлена зависимость ГК, восстановленной по первой тройке ВР  $F_{N_i}^{(4)}(\lambda_1, U_1, V_1)$ , для случая  $F_N^{(1)} = 1.0$ ,  $T_s = 1$ ,  $T_s = 0.95$  от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ .

Из рис. 2.24 видно, что ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  оказываются разделимыми при любом значении параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ . В то же время максимальная погрешность значений членов ВР  $F_N^{(1)}$  оказывается зависящей от длины интервала  $T_s$ , на котором вычислены значения анализируемого ВР  $F_{N_i}^{(4)}$ :

1) если на интервале  $T_s$  укладывается целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой погрешности составляет  $\approx 0.05\%$ ;

2) если на интервале  $T_s$  укладывается нецелое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой погрешности составляет  $\approx 1.13\%$ .

Из рис. 2.25 видно, что ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  оказываются разделимыми при любом значении параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ . В то же время максимальная погрешность значений членов ВР  $F_N^{(1)}$  оказывается зависящей от длины интервала  $T_s$ , на котором вычислены значения анализируемого ВР:

1) если на интервале  $T_s$  укладывается целое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой погрешности составляет  $\approx 1.5\%$ ;

2) если на интервале  $T_s$  укладывается нецелое число периодов ВР  $F_N^{(2)}$ , то максимальное значение обсуждаемой погрешности составляет  $\approx 2.5\%$ .

Таким образом, ряды вида «const»+«exp cos» отделимы друг от друга. Отметим, что обсуждаемая погрешность оказывается наибольшей, когда  $c = \max(F_{N_i}^{(2)})$ ,  $i = \overline{1, N}$  (рис. 2.15, 2.16).

#### Анализ разделимости ВР вида «const»+«a·k+b»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(5)}$ , представляющему собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = c + (a \cdot t + b), \quad (2.13)$$

здесь  $c$  – константа, неравная нулю, вычисленные в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(5)} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = c + (a \cdot t_i + b) = c + \left( a \cdot T_s \frac{i}{N-1} + b \right).$$

Пример зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(5)}(\lambda_1, U_1, V_1)$ , для случая  $c \equiv F_{N_i}^{(1)} = 1.0$ ,  $a = 0.3 \text{ с}^{-1}$ ,  $b = 0.5, \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ , представлены на рис. 2.26.

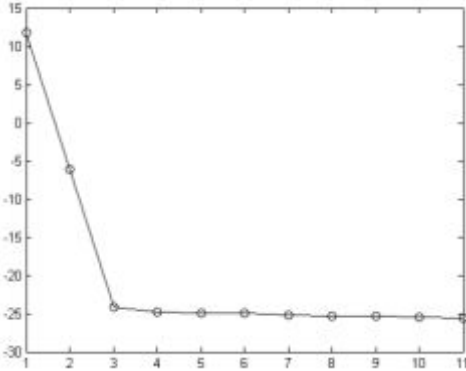


Рис. 2.26а. ВР  $F_{N_i}^{(5)}$ . График функции  $\log(\lambda_i) = f(i)$

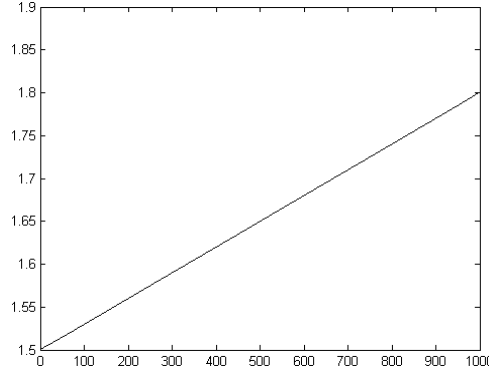


Рис. 2.26б. ВР  $F_{N_i}^{(5)}$ . ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  ( $c \equiv F_{N_i}^{(1)} = 1.0$ ,  $a = 0.3 \text{ с}^{-1}$ ,  $b = 0.5, \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ )

Результаты проведенных вычислительные эксперименты показывают, что вне зависимости от размера параметра сдвига  $L$ , а также значений параметров, входящих в (2.13), зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ , а также вид ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(5)}(\lambda_1, U_1, V_1)$ , не меняются. Следовательно, ВР вида «const»+«a·k+b» неразделимы.

### 2.2.3. Анализ разделимости ВР вида «cos»+изменяющийся во времени ВР

#### Анализ разделимости ВР вида «cos» + «cos»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = A_1 \cos(2\pi f_1 t + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t + \varphi_2). \quad (2.14)$$

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i}^{(6)} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\ &A_1 \cos(2\pi f_1 t_i + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 t_i + \varphi_2) = \dots \\ &A_1 \cos(2\pi f_1 \Delta t(i-1) + \varphi_1) + A_2 \cos(2\pi f_2 \Delta t(i-1) + \varphi_2) = \dots \\ &A_1 \cos\left(2\pi f_1 \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi_1\right) + A_2 \cos\left(2\pi f_2 \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi_2\right). \end{aligned}$$

**Случай № 1.**  $f_2$  кратна  $f_1$ ,  $A_1 \neq A_2$

Исходный ВР, значения которого вычислены в соответствии с (2.14) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.5$ ,  $f_1 = 10$  Гц,  $f_2 = 3f_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ , ГК, по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ , а также по третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертой  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ , представлены на рис. 2.27.

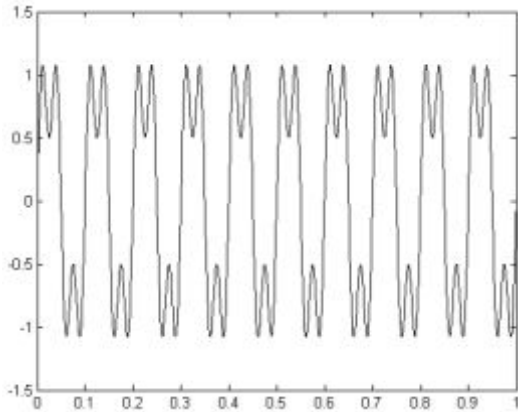


Рис. 2.27а. Анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ .  
( $L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 1$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 3$ ,  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.5$ )

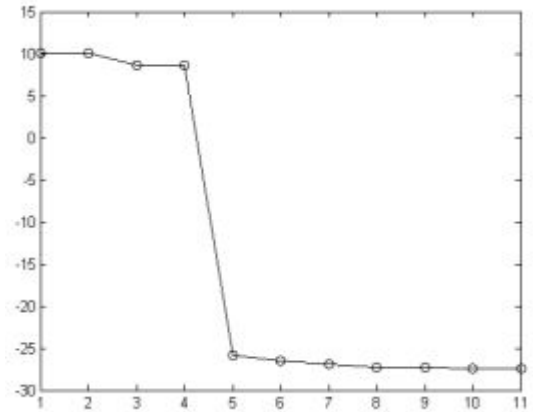


Рис. 2.27б. ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$

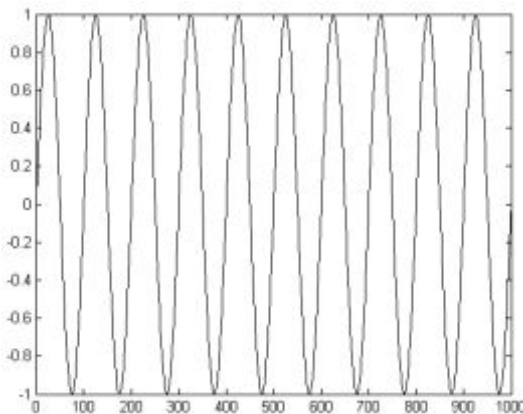


Рис. 2.27в. ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ . ГК, восстановленная по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

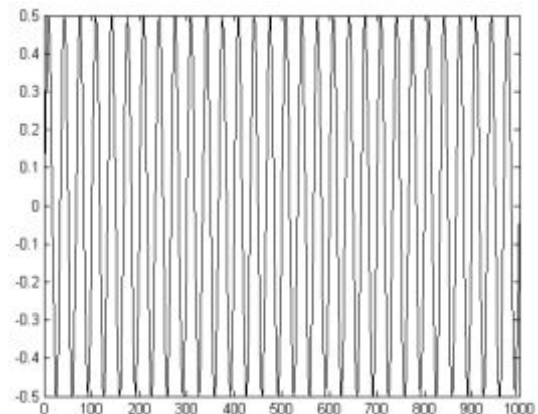


Рис. 2.27г. ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ . ГК, восстановленная по третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертой  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

Из рис. 2.27 видно, что первая  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и вторая  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярные тройки траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ , соответствует составляющей  $F_{N_i}^{(1)}$  с параметрами  $A_1 = 1$ ,  $f_1 = 10$  Гц, третья  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертая  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярные тройки – периодической составляющей  $F_{N_i}^{(2)}$  с параметрами  $A_2 = 1$ ,  $f_2 = 30$  Гц.

На рис. 2.28 представлены: зависимости первого  $(\lambda_1)$  и второго  $(\lambda_2)$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(6)}$  от параметров  $L \cdot \Delta t \cdot f_1$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ , соответственно, а также зависимости  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $\lambda_3 - \lambda_4 = f_{(3,4)}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.28 видно, что условия равенства первого ( $\lambda_1$ ) и второго ( $\lambda_2$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(6)}$  записываются в виде:

$$L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 0.5 \cdot k, k = 1, 2, \dots, \quad (2.15)$$

третьего ( $\lambda_3$ ) и четвертого ( $\lambda_4$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(6)}$  записываются в виде:

$$L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 0.5 \cdot k, k = 0, 1, \dots \quad (2.16)$$

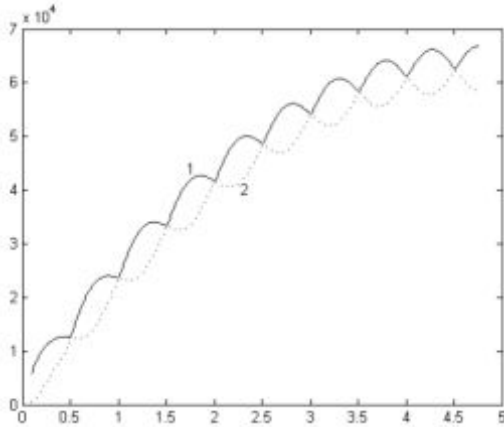


Рис. 2.28а. ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ . Зависимости первого ( $\lambda_1$ ) – 1 и второго ( $\lambda_2$ ) – 2 сингулярных чисел траекторной матрицы от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f_1$

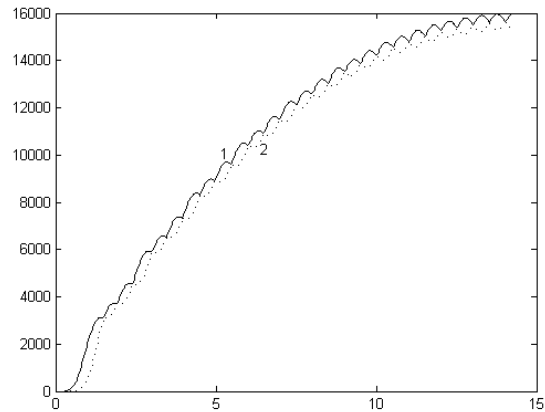


Рис. 2.28б. ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ . Зависимости третьего ( $\lambda_3$ ) – 1 и четвертого ( $\lambda_4$ ) – 2 сингулярных чисел траекторной матрицы от параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$

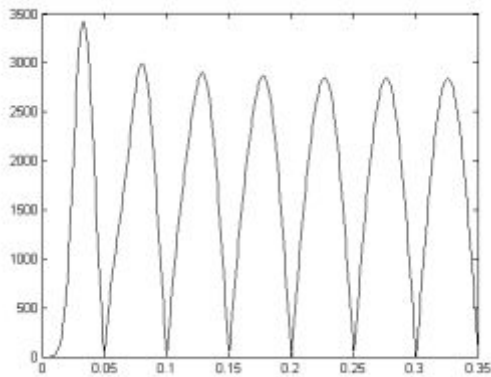


Рис. 2.28в. ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ . График функции  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(L \cdot \Delta t), T_s = 1.0$  с

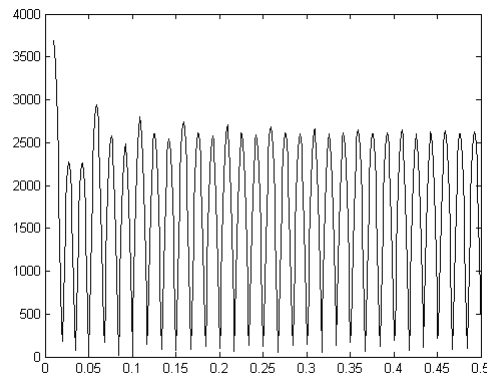


Рис. 2.28г. ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ . График функции  $\lambda_3 - \lambda_4 = f_{(3,4)}(L \cdot \Delta t), T_s = 1.0$  с

На рис. 2.29 представлены: анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.14) для  $A_1 = 0.5, A_2 = 1.0, \Gamma_ц, f_2 = 3f_1, \varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1), \Delta t = T_s/(N-1), i = \overline{1, N}, N = 1000, T_s = 1$  с, зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ , ГК, восстановленные по первой ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) и второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ), а также по третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) и четвертой ( $\lambda_4, U_4, V_4$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(6)}$ .

Из рис. 2.29 видно, что первая  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и вторая  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройки сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ , соответствуют периодической составляющей ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  с параметрами  $A_2 = 1, f_2 = 30$  Гц – ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ , третья  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертая  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярные тройки ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  – периодической составляющей ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  с параметрами  $A_1 = 0.5, f_1 = 10$  Гц – ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ .

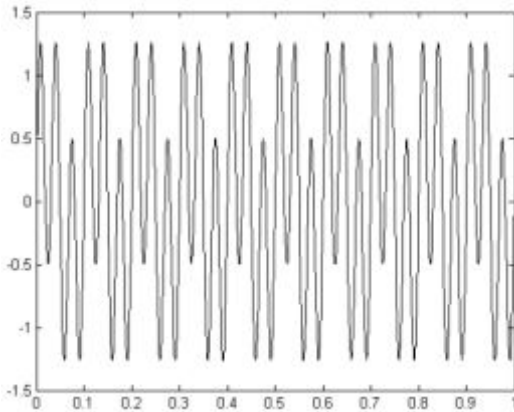


Рис. 2.29а. Анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ .  
( $L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 1, L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 3, A_1 = 0.5, A_2 = 1$ )

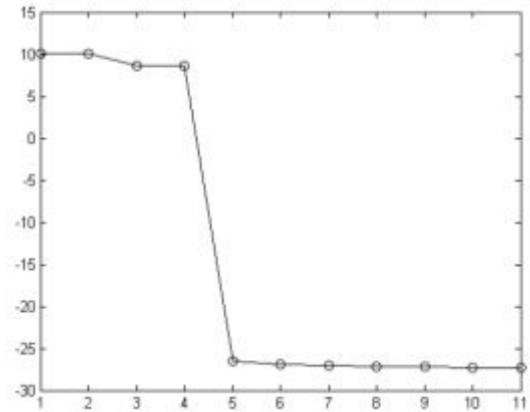


Рис. 2.29б. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  График функции  $\log(\lambda_i) = f(i)$

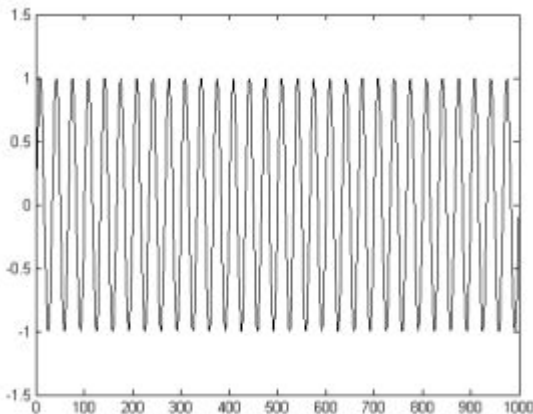


Рис. 2.29в. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . ГК, восстановленная по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

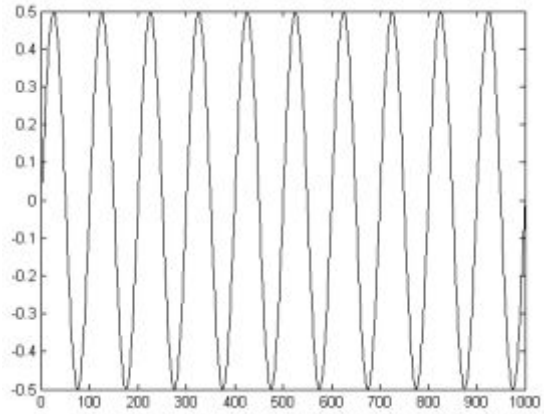


Рис. 2.29г. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . ГК, восстановленная по третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертой  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

На рис. 2.30 представлены: зависимости первого  $(\lambda_1)$  и второго  $(\lambda_2)$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  от параметров  $L \cdot \Delta t \cdot f_1, L \cdot \Delta t \cdot f_2$ , соответственно, а также зависимости  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{1,2}(L \cdot \Delta t), \lambda_3 - \lambda_4 = f_{3,4}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.29 и 2.30, видно, что в отличие от преобразования дискретного Фурье ВР, состоящего в вычислении амплитуд базисных функции  $e^{-i2\pi f_k t}$ , частоты которых  $f_k$  представляют упорядоченную последовательность

$$f_k = \frac{k}{T_s}, k = 0, 1, \dots, N,$$

метод SSA упорядочивает восстанавливаемые ГК анализируемого ВР в соответствие со значениями их энергии:

$$E_m = \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} [F_{N_i}^{(m)}]^2, m = 1, 2,$$

а потому при его использовании требуется проведение дальнейшего спектрального анализа восстановленных ГК с целью определения их частот.

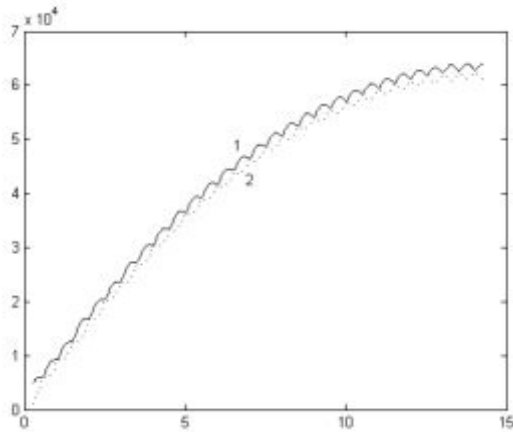


Рис. 2.30а. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . Зависимости первого ( $\lambda_1$ ) и второго ( $\lambda_2$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 1$  с

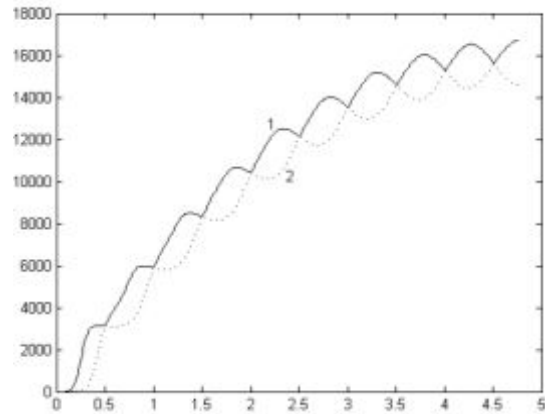


Рис. 2.30б. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . Зависимости третьего ( $\lambda_3$ ) и четвертого ( $\lambda_4$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t \cdot f_1$ ,  $T_s = 1$  с

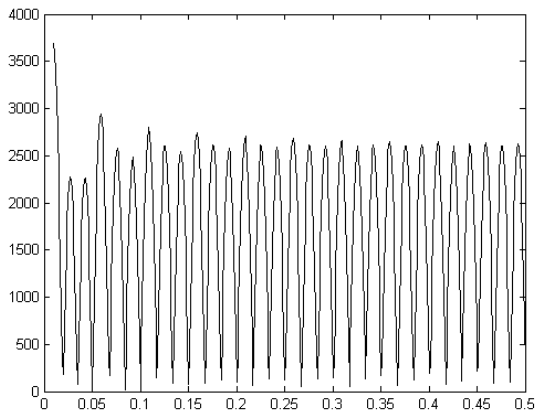


Рис. 2.30в. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График функции  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{1,2}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1.0$  с

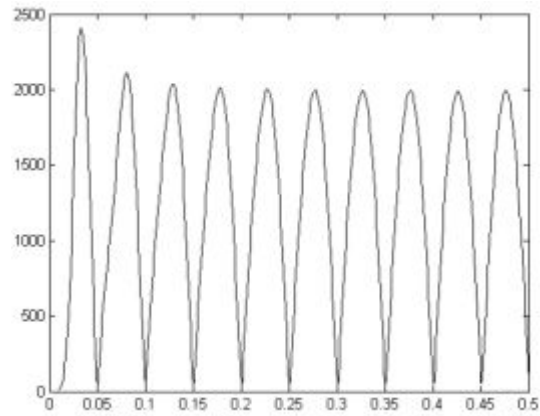


Рис. 2.30г. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График функции  $\lambda_3 - \lambda_4 = f_{3,4}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1.0$  с

Из рис. 2.29, 2.30 видно, что условия равенства первого ( $\lambda_1$ ) и второго ( $\lambda_2$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  записываются в виде:

$$L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 0.5 \cdot k, k = 1, 2, \dots \quad (2.17)$$

третьего ( $\lambda_3$ ) и четвертого ( $\lambda_4$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  записываются в виде:

$$L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 0.5 \cdot k, k = 1, 2, \dots \quad (2.18)$$

Из соотношений (2.15)–(2.16) и рис. 2.29, 2.30 видно, что ВИ между последовательными значениями параметра сдвига  $L$ , при которых сингулярные числа  $\lambda_i, \lambda_{i+1}$  оказываются максимально близкими, равен  $0.5L \cdot \Delta t$ , следовательно, частота ГК, восстановленной по набору собственных сингулярных троек  $(\lambda_i, U_i, V_i), (\lambda_{i+1}, U_{i+1}, V_{i+1})$ , равняется

$$f_{1,2} = \frac{0.5}{L\Delta t}.$$

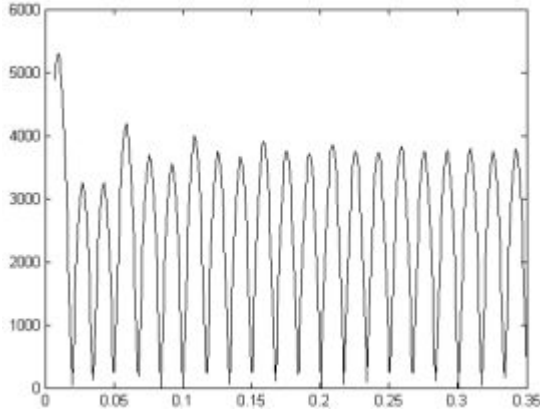


Рис. 2.31а. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График функции

$$\lambda_1 - \lambda_2 = f_{1,2}(L \cdot \Delta t), T_s = 0.7 \text{ с}$$

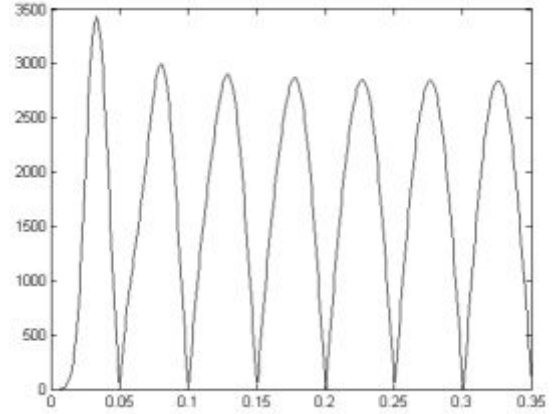


Рис. 2.31б. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График функции

$$\lambda_3 - \lambda_4 = f_{3,4}(L \cdot \Delta t), T_s = 0.7 \text{ с}$$

Отметим, что данный результат оказывается независимым от значения произведения  $f \cdot T_s$ , точнее от того целое или нецелое число периодов составляющей ВР укладывается на интервале анализа. Данный вывод подтверждает рис. 2.31, на котором представлены зависимости  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{1,2}(L \cdot \Delta t)$ , а также  $\lambda_3 - \lambda_4 = f_{3,4}(L \cdot \Delta t)$  при  $T_s = 1.0$  и  $T_s = 0.7$ .

**Случай № 2.**  $f_2$  некратна  $f_1$ ,  $A_1 \neq A_2$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(8)}$ , значения которого вычислены в соответствие с (2.14) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 0.5$ ,  $f_1 = 10$  Гц,  $f_2 = 2.7 f_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ , ГК, восстановленные первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ , а также по третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертой  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(8)}$  представлены на рис. 2.32.

Из рис. 2.32 видно, что первая  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и вторая  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройки сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ , соответствуют периодической составляющей ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  с параметрами  $A_2 = 1$ ,  $f_2 = 27$  Гц – ВР  $F_{N_i}^{(2)}$ , третья  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертая  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  соответствуют периодической составляющей ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  с параметрами  $A_1 = 0.5$ ,  $f_1 = 10$  Гц – ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ .

На рис. 2.33 представлены: зависимости первого ( $\lambda_1$ ) и второго ( $\lambda_2$ ), а также третьего ( $\lambda_3$ ) и четвертого ( $\lambda_4$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ , от параметров  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(L \cdot \Delta t)$ , соответственно, а также зависимости  $\lambda_3 - \lambda_4 = f_{(3,4)}(L \cdot \Delta t)$ .

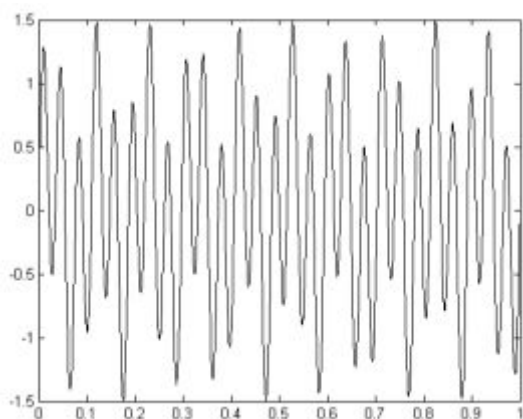


Рис. 2.32а. Анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(7)}$   
( $L \cdot \Delta t \cdot f_1 = 1$ ,  $L \cdot \Delta t \cdot f_2 = 2.7$ ,  $A_1 = 0.5$ ,  $A_2 = 1$ )

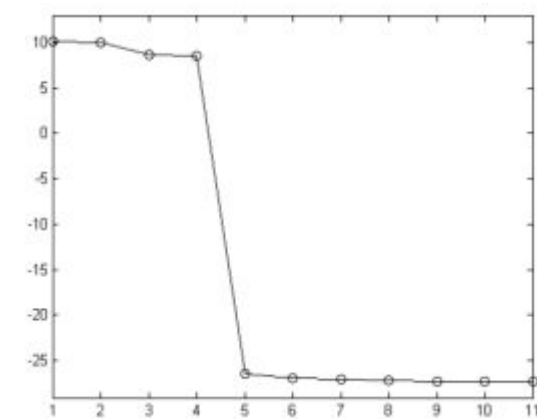


Рис. 2.32б. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$

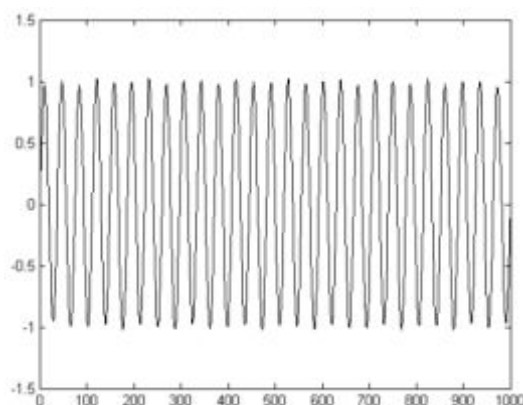


Рис. 2.32в. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . ГК, восстановленная по первой ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) и второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы

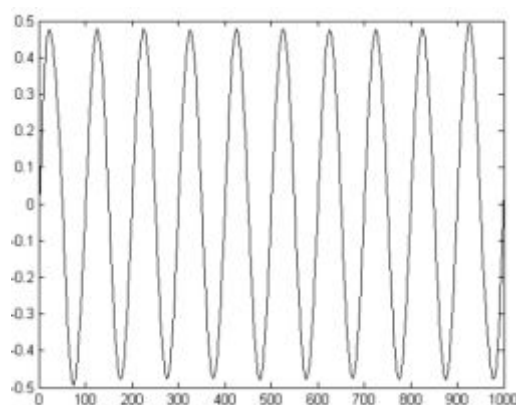


Рис. 2.32г. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . ГК, восстановленная по третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) и четвертой ( $\lambda_4, U_4, V_4$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы

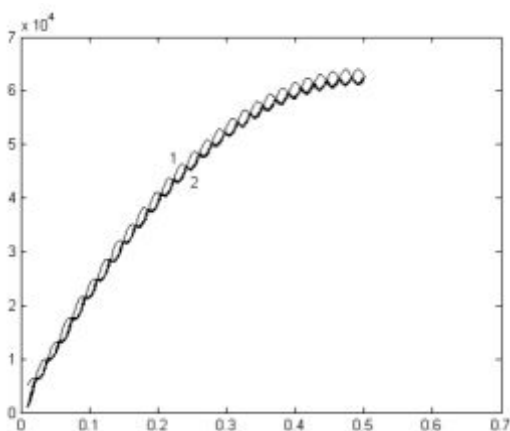


Рис. 2.33а. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . Зависимости первого ( $\lambda_1$ ) – 1 и второго ( $\lambda_2$ ) – 2 сингулярных чисел от  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 1$  с

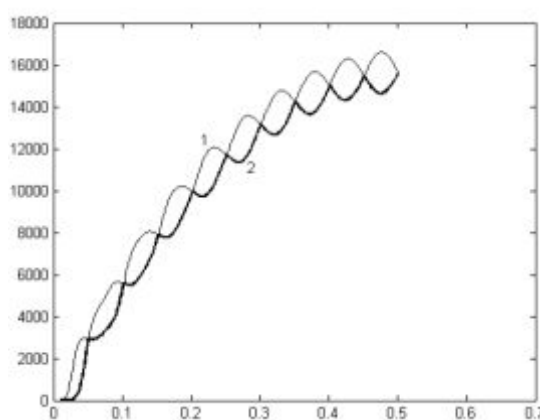


Рис. 2.33б. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . Зависимости третьего ( $\lambda_3$ ) – 1 и четвертого ( $\lambda_4$ ) – 2 сингулярных чисел от  $L \cdot \Delta t \cdot f_2$ ,  $T_s = 1$  с



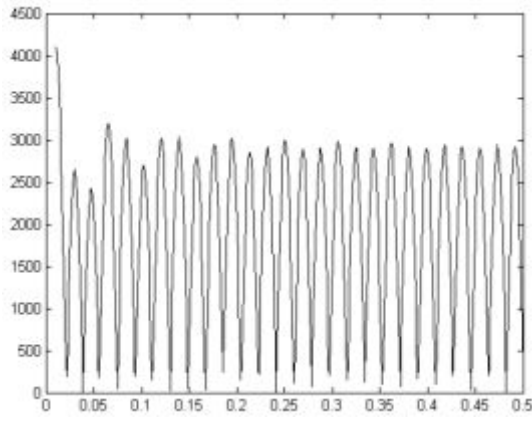


Рис. 2.33в. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График зависимости

$$\lambda_1 - \lambda_2 = f_{1,2}(L \cdot \Delta t) \text{ от } L \cdot \Delta t \cdot f_2, T_s = 1 \text{ с}$$

На рис. 2.34 представлены зависимости представленные зависимости разностей между первым и вторым, а также третьим и четвертым сингулярными числами от параметра  $L \cdot \Delta t$  при  $T_s = 1.0$  и  $T_s = 0.7$ .

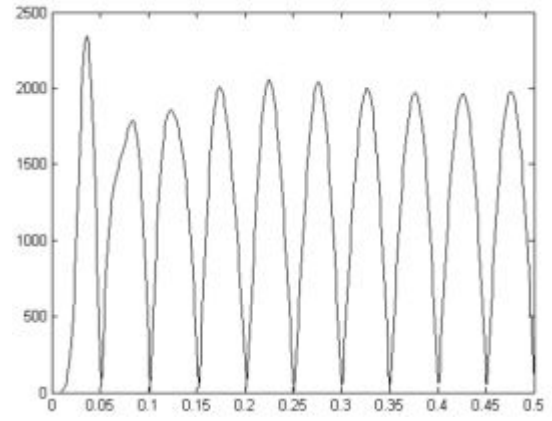


Рис. 2.33г. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График зависимости

$$\lambda_3 - \lambda_4 = f_{(3,4)}(L \cdot \Delta t) \text{ от } L \cdot \Delta t \cdot f_2, T_s = 1$$

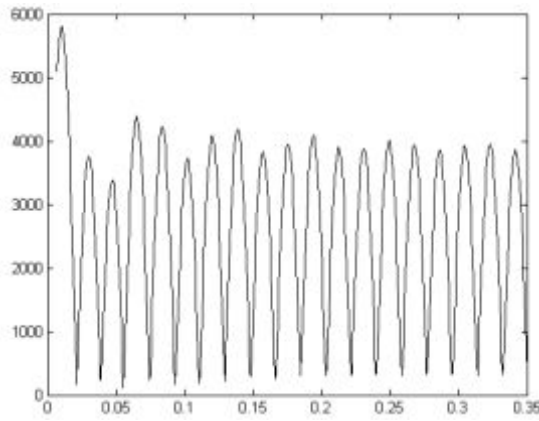


Рис. 2.34в. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График зависимости

$$\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(L \cdot \Delta t), \text{ от } L \cdot \Delta t \cdot f_2, T_s = 0.7$$

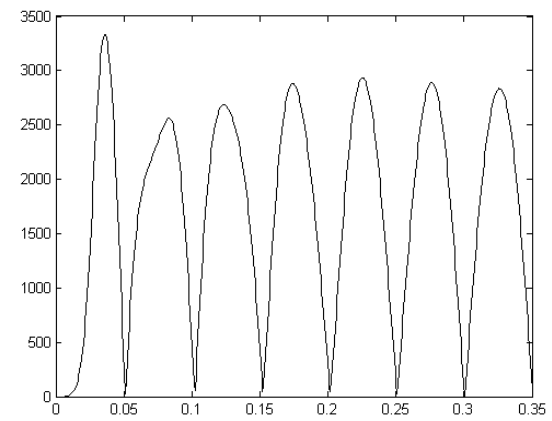


Рис. 2.34г. ВР  $F_{N_i}^{(7)}$ . График зависимости

$$\lambda_3 - \lambda_4 = f_{(3,4)}(L \cdot \Delta t) \text{ от } L \cdot \Delta t \cdot f_2, T_s = 0.7$$

Сравнивая рис. 2.30 и 2.31, а также 2.332, 2.34, видим, что вне зависимости от кратности частот  $f_1, f_2$  описанные выше зависимости сингулярных чисел  $\lambda_i$  выборочной траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(7)}$  от параметра  $L \cdot \Delta t$  остается неизменной. Следовательно, при использовании описанной выше методики оценки частоты составляющих анализируемых ВР, оказывается возможным разделение периодических составляющих ВР, вне зависимости от кратности частот данных составляющих, а также значений параметров  $L \cdot \Delta t \cdot f_1, L \cdot \Delta t \cdot f_2$ . Также необходимо отметить, что данный результат вносит уточнения в условия разделимости обсуждаемых ВР  $F_N^{(1)}$  и  $F_N^{(2)}$ , приведенные в [22, С. 17], которые в наших обозначениях записываются в виде:

$$\begin{aligned} L \cdot \Delta t \cdot f_1 &= l_1, L \cdot \Delta t \cdot f_2 = l_2, l_1, l_2 \in \mathbb{N}, \\ K \cdot \Delta t \cdot f_1 &= k_1, K \cdot \Delta t \cdot f_2 = k_2, k_1, k_2 \in \mathbb{N}, \end{aligned} \quad (2.17)$$

и могут быть, как очевидно, обеспечены только при выполнении условия

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{l_1}{l_2} = \frac{k_1}{k_2}.$$

**Случай № 3.**  $A_1 = A_2$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(8)}$ , значения которого вычислены в соответствие с (2.14) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 1$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f_1 = 10$  Гц,  $f_2 = 3.0 f_1$ ,  $\varphi_1 = \varphi_2 = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ , ГК, восстановленные по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ , а также по третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертой  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(8)}$  представлены на рис. 2.35.

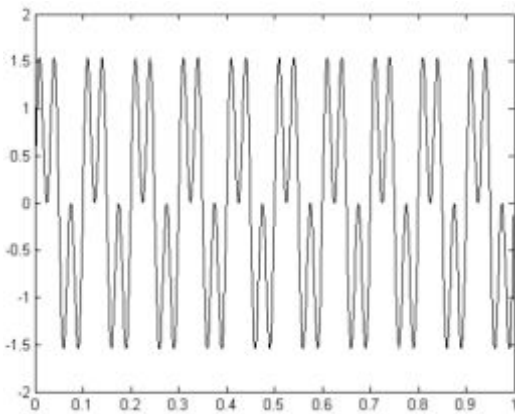


Рис. 2.35а. Анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(8)}$

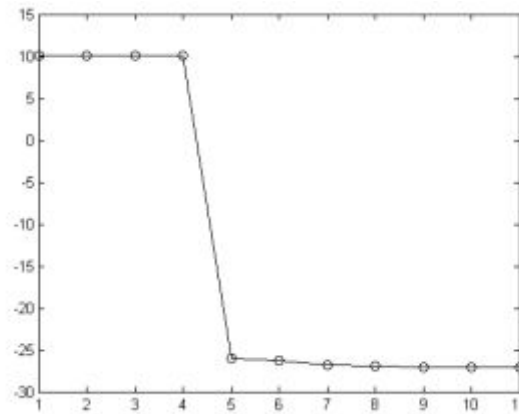


Рис. 2.35б. ВР  $F_{N_i}^{(8)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$

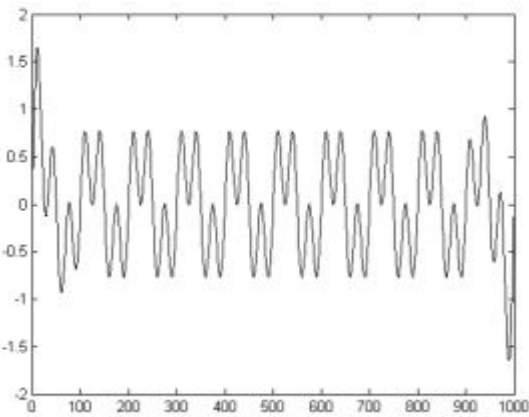


Рис. 2.35в. ВР  $F_{N_i}^{(8)}$ . ГК, восстановленная по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

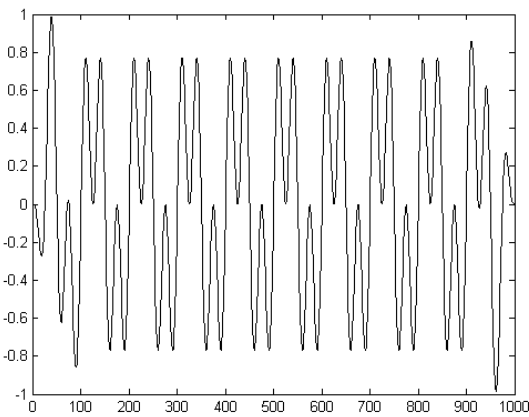


Рис. 2.35г. ВР  $F_{N_i}^{(8)}$ . ГК, восстановленная по третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертой  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

Из рис. 2.35 видно, что значения сингулярных чисел  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(8)}$  оказываются близки друг другу, что не позволяет разделить составляющие анализируемого ВР. Данный результат предсказан в [22, С. 27], однако, при  $L, K \rightarrow \infty$ .

Для проверки правомерности наложения данного условия были вычислены в соответствии с (2.14) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1=1$ ,  $A_2=1.0$ ,  $f_1=10$  Гц,  $f_2=3.0f_1$ ,  $\varphi_1=\varphi_2=\pi/2$  в узлах ВС  $t_i=\Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t=T_s/(N-1)$ ,  $i=\overline{1,N_1}$ ,  $N_1=100$ ,  $T_s=1$  с, значения ВР  $F_{N_i}^{(9)}$ . (Здесь значения безразмерных частот составляющих ВР были равны  $f_1 \cdot \Delta t = 0.1$ ,  $f_2 \cdot \Delta t = 0.3$ .)

На рис. 2.36 приведены исходный ВР  $F_{N_i}^{(9)}$ , зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ , ГК, восстановленные по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ , а также по третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертой  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(9)}$ .

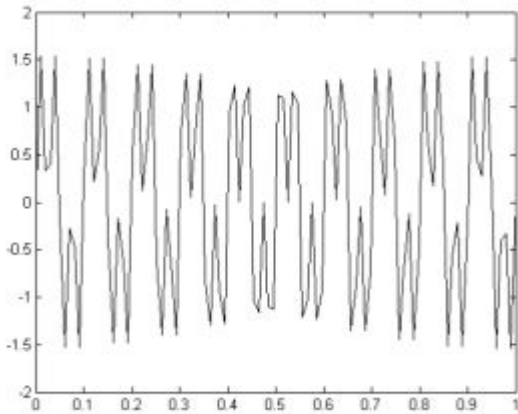


Рис. 2.36а. Анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(9)}$

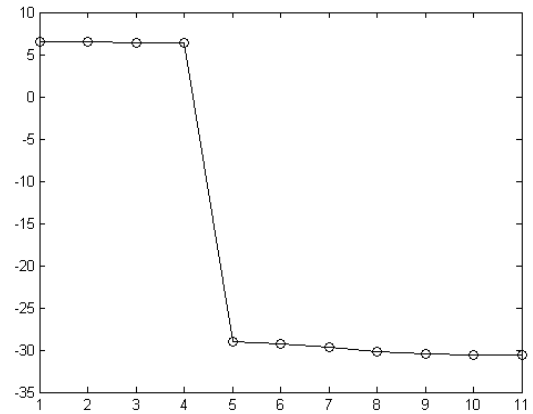


Рис. 2.36б. ВР  $F_{N_i}^{(9)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$

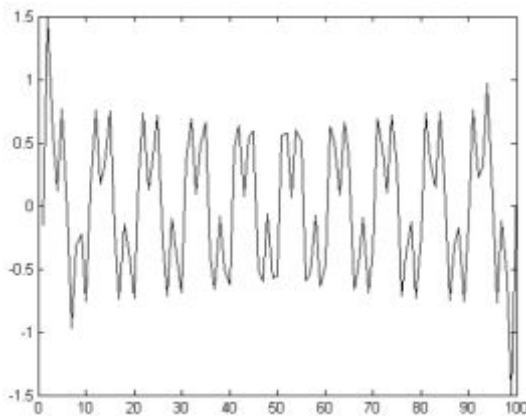


Рис. 2.36в. ВР  $F_{N_i}^{(9)}$ . ГК, восстановленная по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

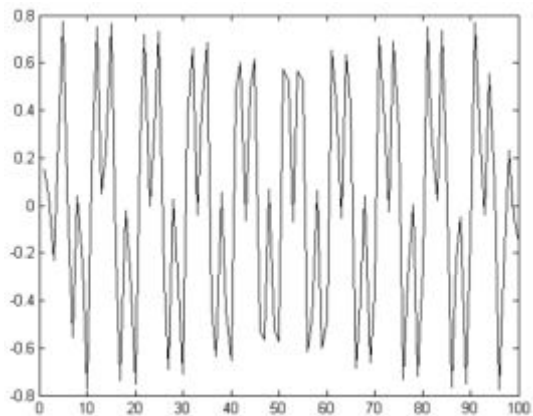


Рис. 2.36г. ВР  $F_{N_i}^{(9)}$ . ВР ГК, восстановленная по третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  и четвертой  $(\lambda_4, U_4, V_4)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

Из рис. 2.36 видно, что описанные выше свойства сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(9)}$  остаются неизменными и для тех случаев, когда значения  $L, K$  оказываются конечными, следовательно, условие разделимости ВР  $L, K \rightarrow \infty$ , не является необходимым.

### Анализ разделимости ВР вида «cos» + «exp»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(10)}$ , представляющих собой последовательные отсчеты функции вида

$$u(t) = A_1 \exp(\alpha t) + A_2 \cos(2\pi f t + \varphi), \quad (2.18)$$

здесь вычисляемые в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i}^{(10)} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\ &A_1 \exp(\alpha t_i) + A_2 \cos(2\pi f t_i + \varphi) = \dots \\ &A_1 \exp(\alpha \Delta t(i-1)) + A_2 \cos(2\pi f \Delta t(i-1) + \varphi) = \dots \\ &A_1 \exp\left(\alpha \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right) + A_2 \cos\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi\right). \end{aligned}$$

#### Случай № 1. $\min(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(10)}$ , значения которого вычислены в соответствие с (2.18) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 3$ ,  $\alpha = -0.2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , ГК, восстановленная по первому сингулярному числу  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ , ГК, восстановленная по второму  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьему  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(10)}$ , представлены на рис. 2.37.

На рис. 2.38 представлены зависимости второго  $\lambda_2$  и третьего  $\lambda_3$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(10)}$  от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , а также зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.37, 2.38 видно, что в рассматриваемом случае можно строго разделить ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия

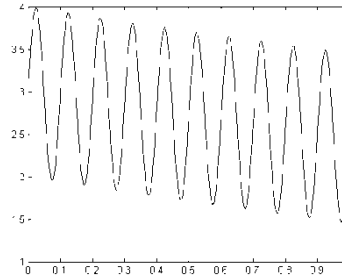
$$L \cdot \Delta t \cdot f = n, n = 1, 2, \dots \quad (2.19)$$

При выполнении условия

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5 \cdot n, n = 2, 3, \dots \quad (2.20)$$

можно отнести ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых, так как ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(10)}$   $(\lambda_1, U_1, V_1)$ , содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.37). Отметим, что при выполнении условия (2.19) погрешность оценки амплитуды периодической составляющей ВР  $F_N^{(2)}$  не превосходит  $\approx 5\%$ .

а)



$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.1$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5$

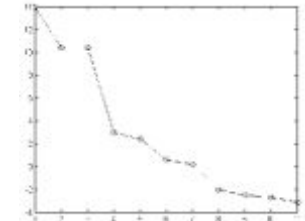
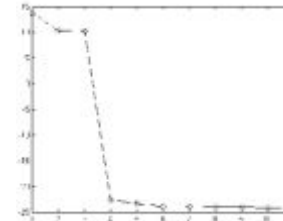
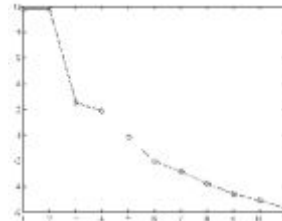
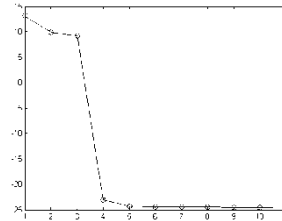
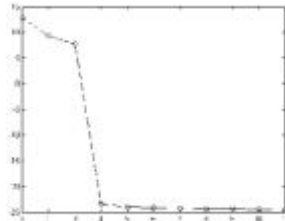
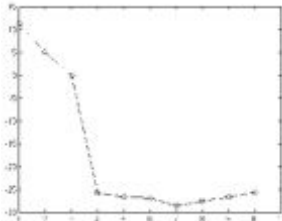
$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.75$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.0$

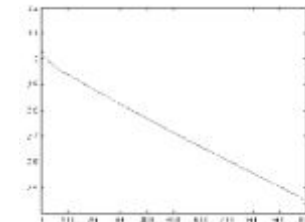
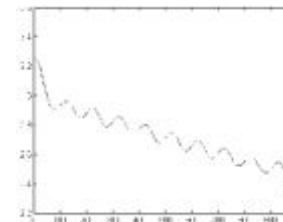
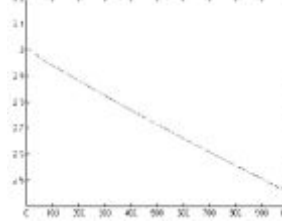
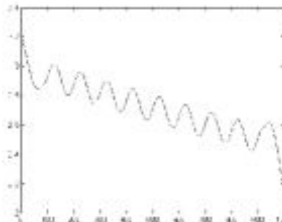
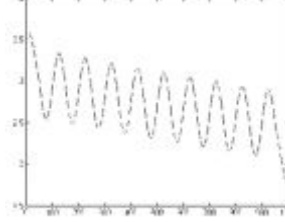
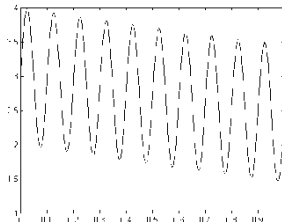
$L \cdot \Delta t \cdot f = 1.5$

$L \cdot \Delta t \cdot f = 2.0$

б)



в)



г)

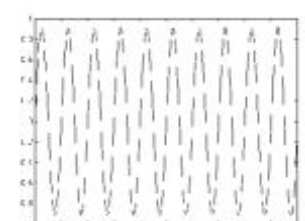
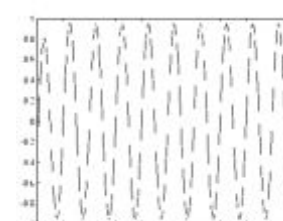
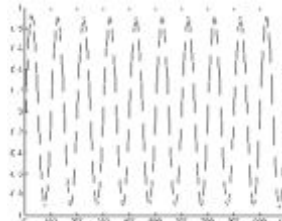
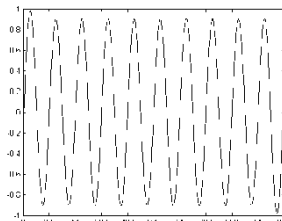
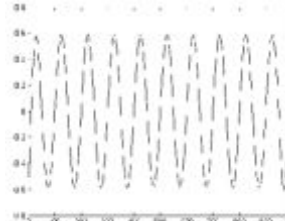
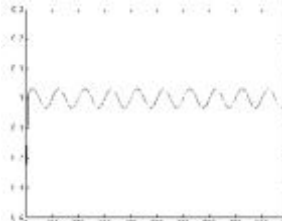


Рис. 2.37. а) Анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(10)}$ ; б) график зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ; г) ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

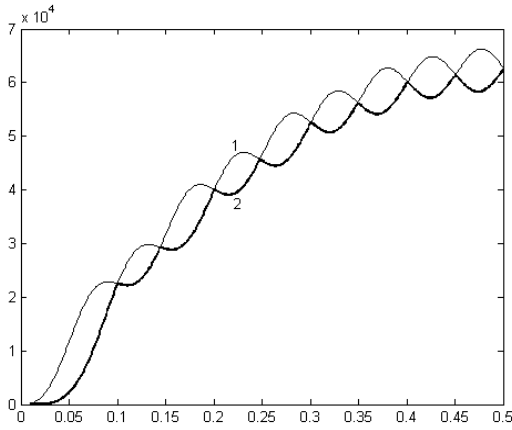


Рис. 2.38а. ВР  $F_{N_i}^{(10)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

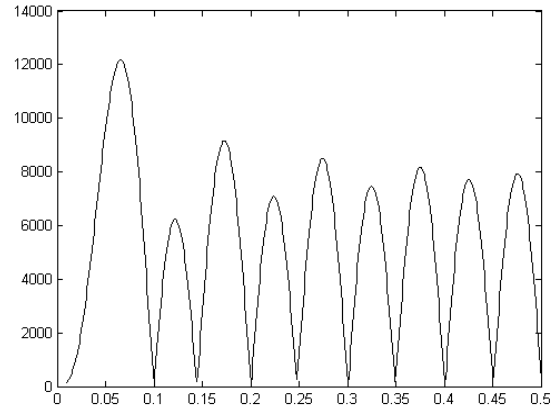


Рис. 2.38б. ВР  $F_{N_i}^{(10)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$

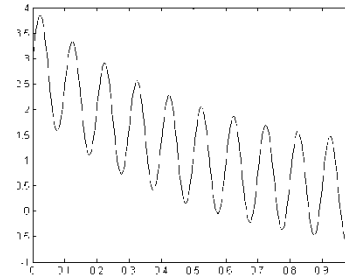
**Случай № 2.**  $\max(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$ ,  $\min(F_N^{(1)}) < \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(11)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.18) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 3$ ,  $\alpha = -2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первому сингулярному числу траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(11)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), и ГК, восстановленная по второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(11)}$  представлены на рис. 2.39.

На рис. 2.40 представлены зависимости второго  $\lambda_2$  и третьего  $\lambda_3$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(11)}$  от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , а также зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.39, 2.40 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно строго разделить ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19), а при выполнении условия (2.20) в связи с тем, что ГК, выделенная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(11)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.39), поэтому можно отнести ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Отметим, что при выполнении условия (2.19) погрешность оценки амплитуды периодической составляющей ВР  $F_N^{(2)}$  не превосходит  $\approx 3\%$ .

а)



б)

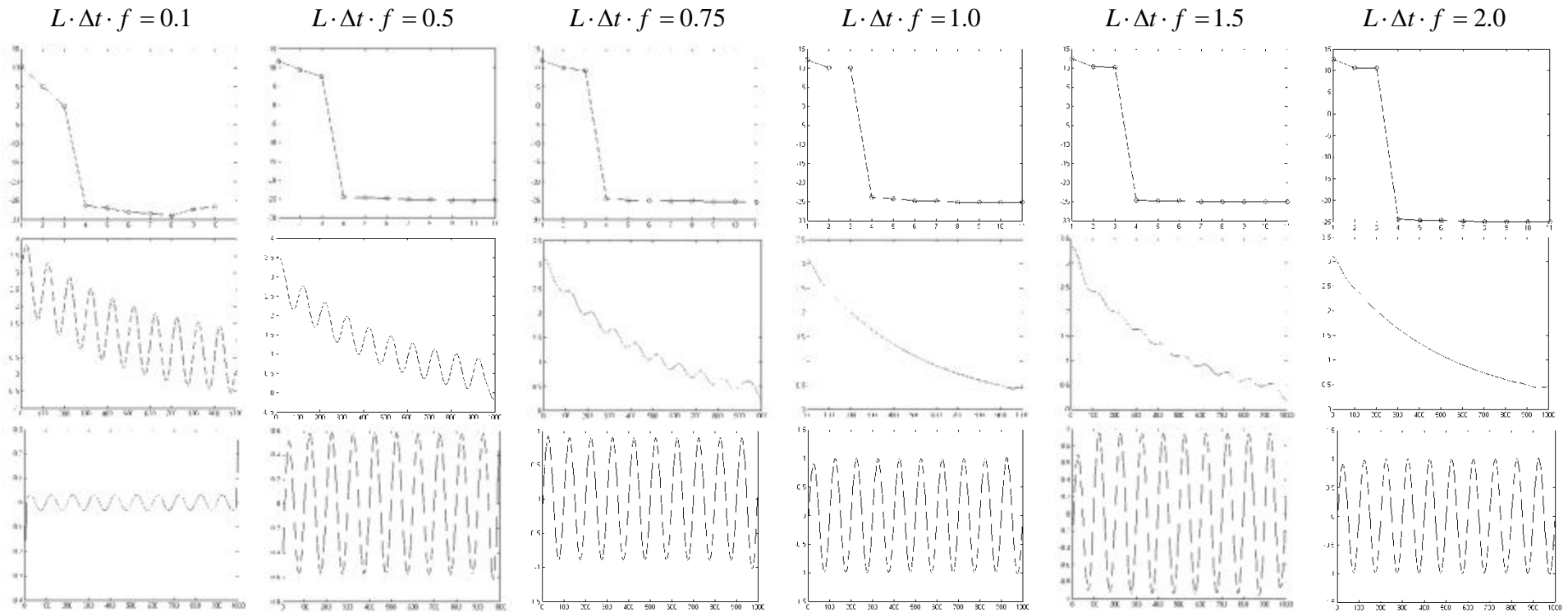


Рис. 2.39. а) анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ ; б) зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ; г) ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

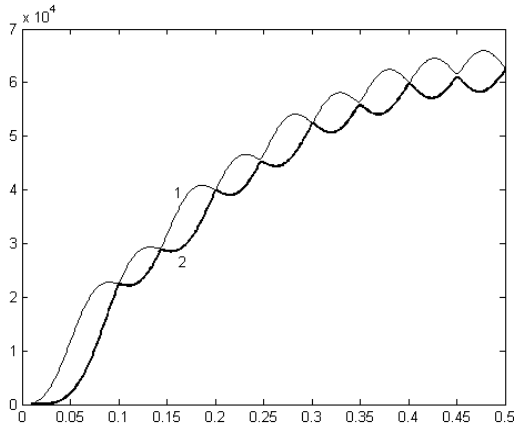


Рис. 2.40а. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

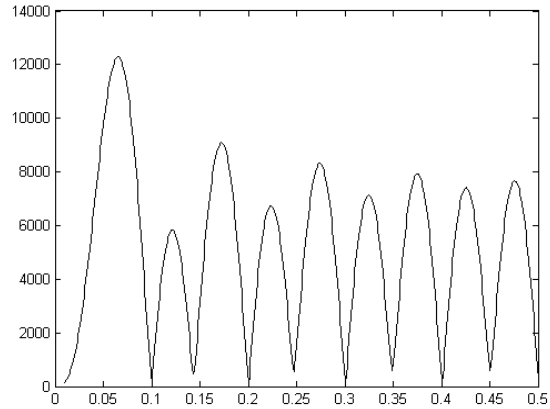


Рис. 2.40б. ВР  $F_{N_i}^{(1)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$  с

**Случай № 3.**  $\max(F_N^{(1)}) < \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(12)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.18) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 3$ ,  $\alpha = -2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первому сингулярному числу траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(1)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), и ГК, восстановленная по второму ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьему ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(1)}$  представлены на рис. 2.41.

На рис. 2.42 представлены зависимости второго  $\lambda_2$  и третьего  $\lambda_3$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(12)}$  от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , а также зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.41, 2.42 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно строго разделить ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19). При выполнении условия (2.20) можно отнести ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых, так как ГК, восстановленная по первой ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) и второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(12)}$ , содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.41). Отметим, что при выполнении условия (2.19) погрешность оценки амплитуды периодической составляющей ВР  $F_N$  не превосходит  $\approx 2\%$ .



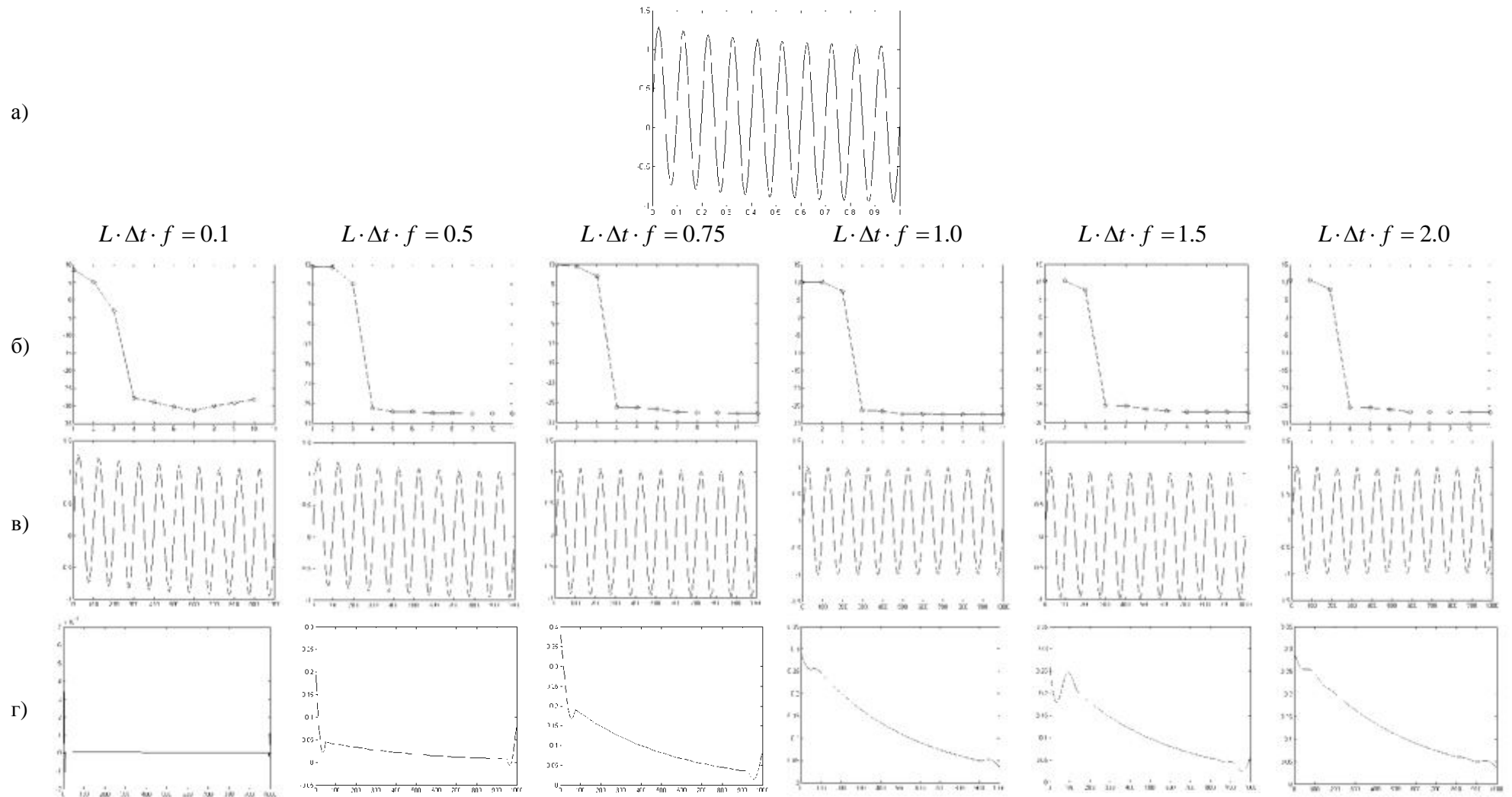


Рис. 2.41. а) анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(12)}$ ; б) зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ; г) ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

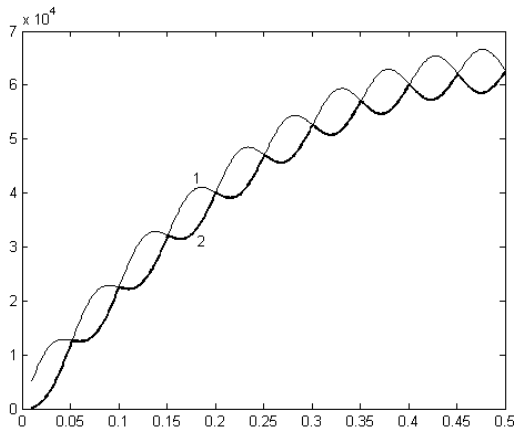


Рис. 2.42а. ВР  $F_{N_i}^{(12)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

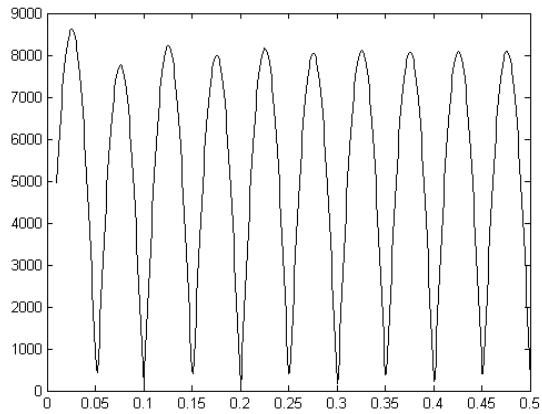


Рис. 2.42б. ВР  $F_{N_i}^{(12)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$

### Анализ разделимости ВР вида «cos» + «a k+b»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = (a \cdot t + b) + A \cos(2\pi f t + \varphi), \quad (2.21)$$

вычисляемые на ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = (a \cdot t_i + b) + A \cos(2\pi f t_i + \varphi) = \dots$$

$$(a \cdot \Delta t(i-1) + b) + A \cos(2\pi f \Delta t(i-1) + \varphi) = \left( a \cdot \frac{T_s}{N-1}(i-1) + b \right) + A \cos\left( 2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi \right).$$

**Случай № 1.**  $\min(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(13)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.21) на ВИ длительностью 1 с для  $a = 0.3$ ,  $b = 2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(13)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), и ГК, восстановленная по второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(13)}$ , представлены на рис. 2.43.

На рис. 2.44 представлены зависимости второго  $\lambda_2$  и третьего  $\lambda_3$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(13)}$  от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , а также зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ .

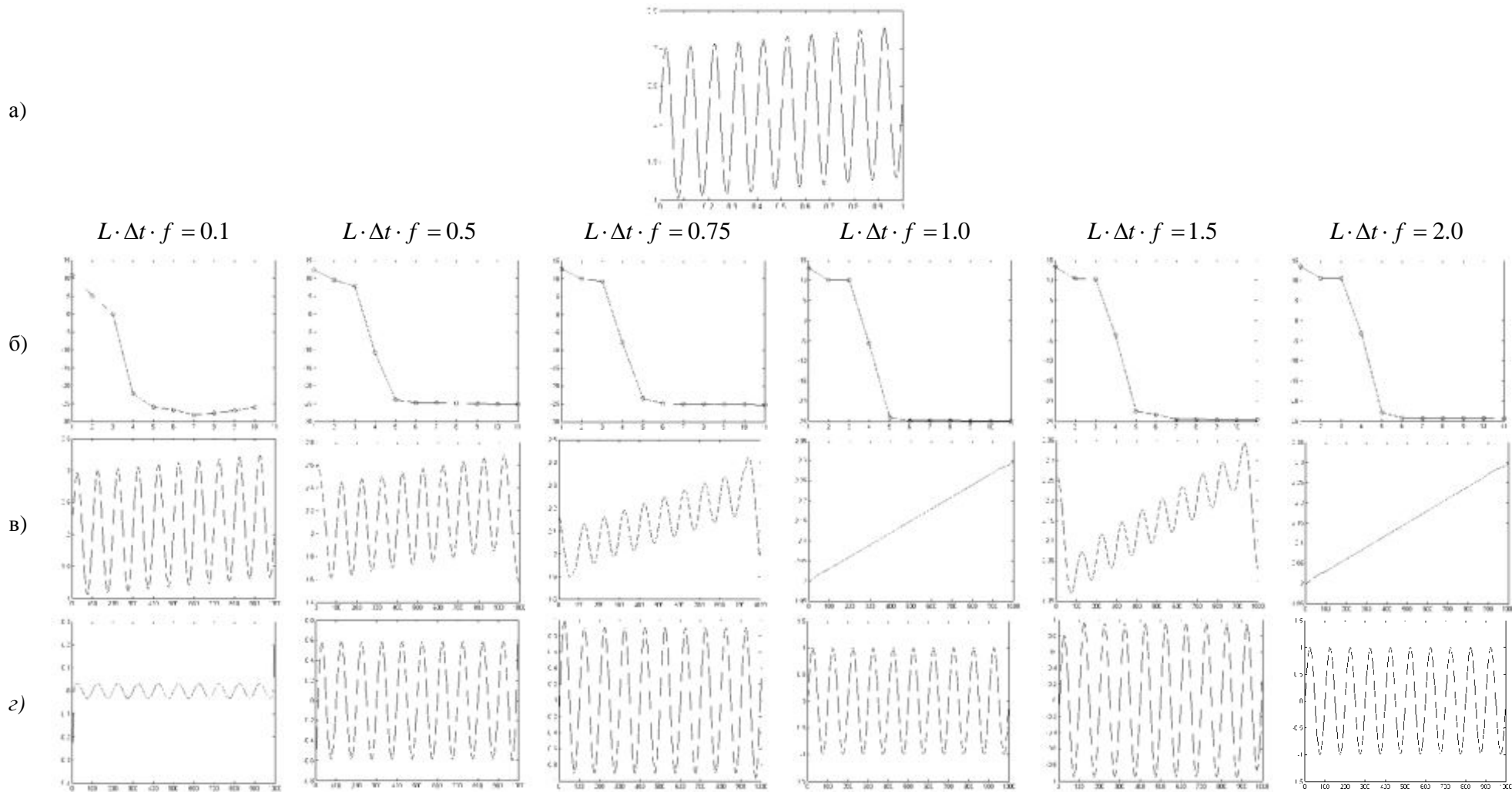


Рис. 2.43. а) анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(13)}$ ; б) зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ; г) ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

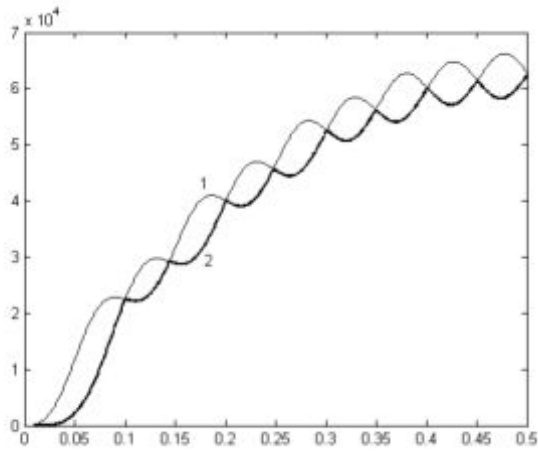


Рис. 2.44а. ВР  $F_{N_i}^{(13)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

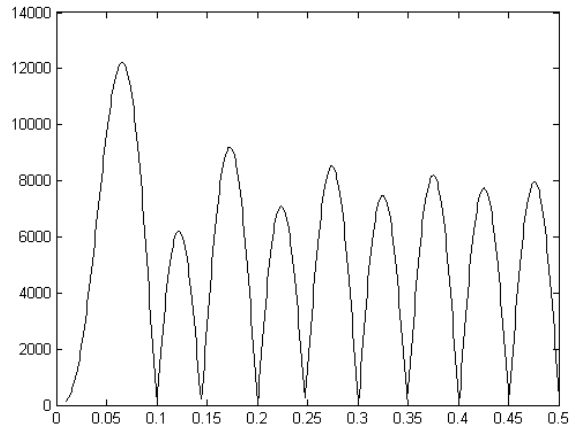


Рис. 2.44б. ВР  $F_{N_i}^{(13)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$

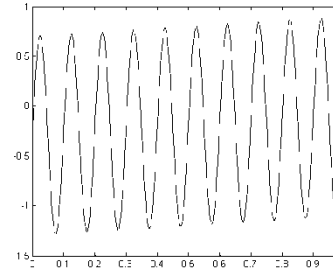
Из рис. 2.43, 2.44 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно строго разделить ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19). В связи с тем, что ГК, выделенная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(13)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.43, 2.41), данный ВР при выполнении условия (2.20) можно отнести к категории слабо  $L$ -разделимых. Отметим, что при выполнении условия (2.19) погрешность оценки амплитуды периодической составляющей ВР  $F_{N_i}^{(13)}$  не будет превосходить  $\approx 1\%$ . ВР

Из рис. 2.41, 2.42 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно строго разделить ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19). При выполнении условия (2.20) можно отнести ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых, так как ГК, выделенная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(13)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.43). Отметим, что при выполнении условия (2.19) погрешность оценки амплитуды периодической составляющей ВР  $F_{N_i}^{(13)}$  не превосходит  $\approx 2\%$ .

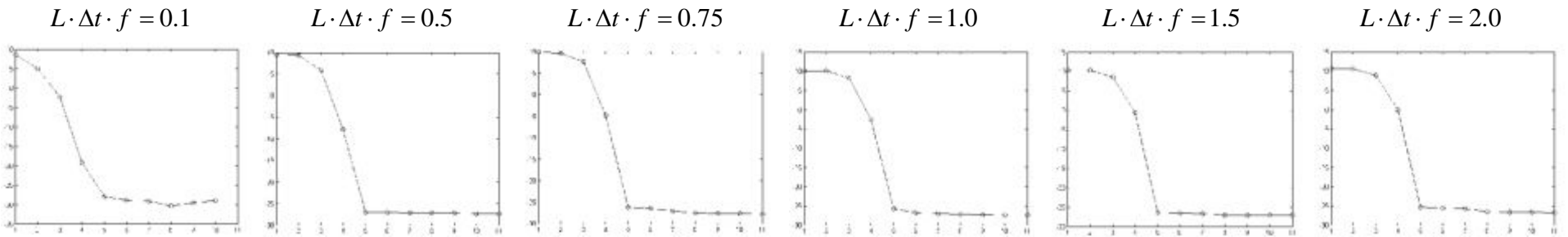
**Случай № 2.**  $\min(F_N^{(1)}) > \min(F_N^{(2)})$ ,  $\max(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(14)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.21) на ВИ длительностью 1 с для  $a = -0.3$ ,  $b = 0.2$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(14)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), и ГК, восстановленная по второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(13)}$ , представлены на рис. 2.45.

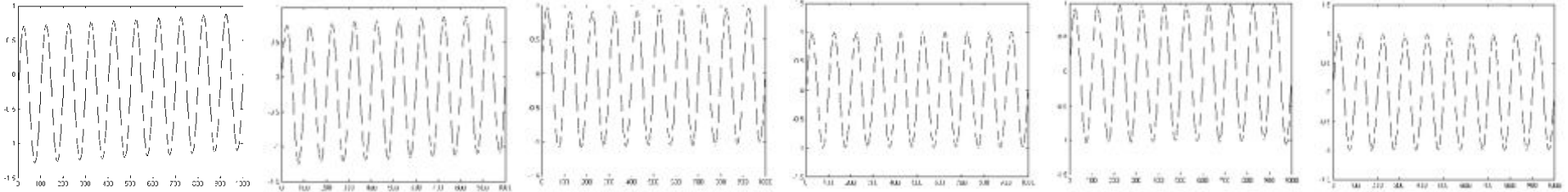
а)



б)



в)



г)

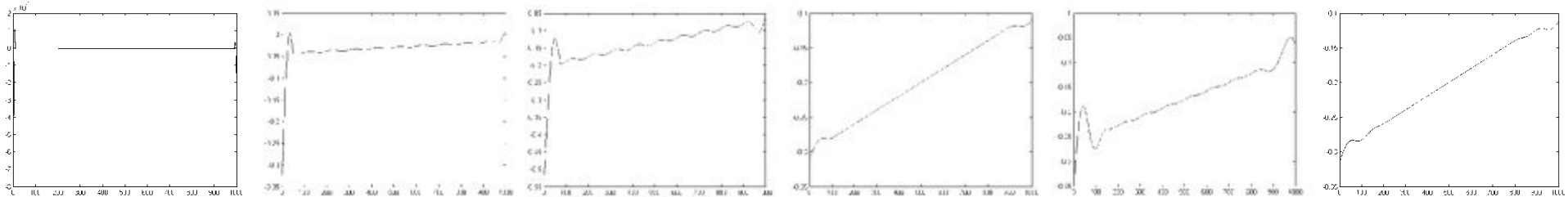


Рис. 2.45. а) анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(14)}$ ; б) зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы; г) ГК, восстановленная по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$

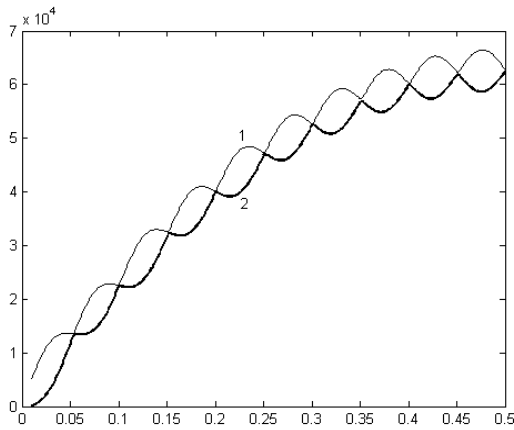


Рис. 2.46а. ВР  $F_{N_i}^{(14)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

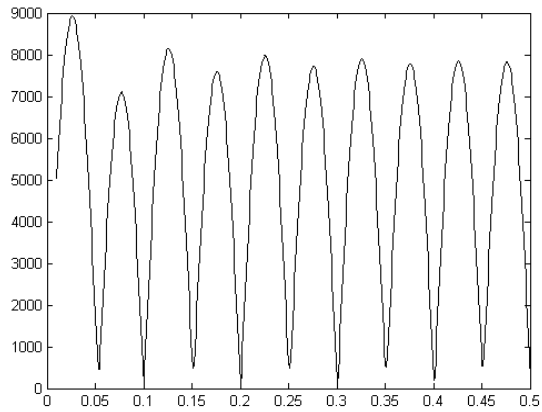


Рис. 2.46б. ВР  $F_{N_i}^{(14)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$  с

Из рис. 2.45, 2.46 видно, что здесь, как и в предыдущем случае, можно разделить ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19). В связи с тем, что ГК, восстановленная по третьей сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(14)}$  ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ), содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.45), можно отнести ряды  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Отметим, что при выполнении условия (2.19) погрешность оценки амплитуды периодической составляющей ряда  $F_N^{(2)}$  не превосходит  $\approx 1\%$ .

## 2.2.4. Анализ разделимости ВР вида «exp» + изменяющийся во времени ВР

### Анализ разделимости ВР вида «exp» + «exp»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t), \quad (2.23)$$

вычисляемые в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\ &A_1 \exp(\alpha_1 t_i) + A_2 \exp(\alpha_2 t_i) = \dots \\ &A_1 \exp(\alpha_1 \Delta t(i-1)) + A_2 \exp(\alpha_2 \Delta t(i-1)) = \dots \\ &A_1 \exp\left(\alpha_1 \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right) + A_2 \exp\left(\alpha_2 \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right). \end{aligned}$$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(15)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.23) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 1.0$ ,  $\alpha_1 = -0.4$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = 0.4$ , в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,

$\Delta t = T_s / (N - 1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке ВР  $F_{N_i}^{(15)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), и ГК, восстановленная по второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным тройкам ВР  $F_{N_i}^{(15)}$ , представлены на рис. 2.47.

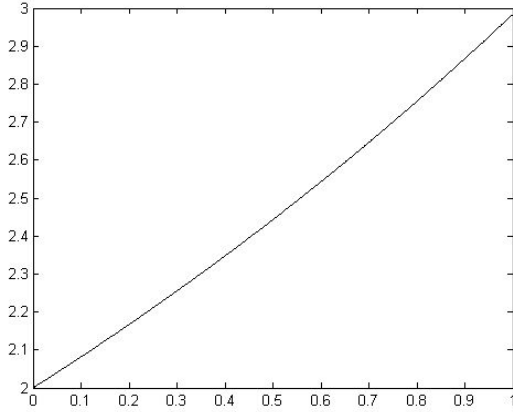


Рис. 2.47а. Анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(15)}$

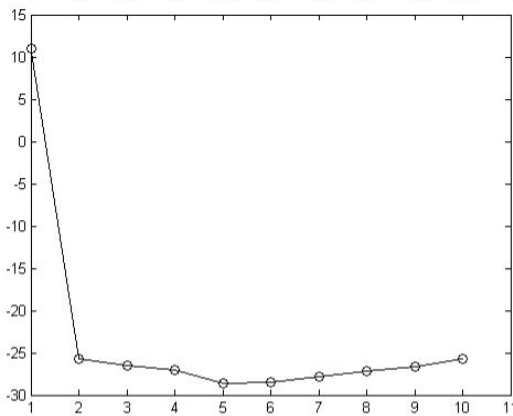


Рис. 2.47б. График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ,  $L \cdot \Delta t = 0.1$

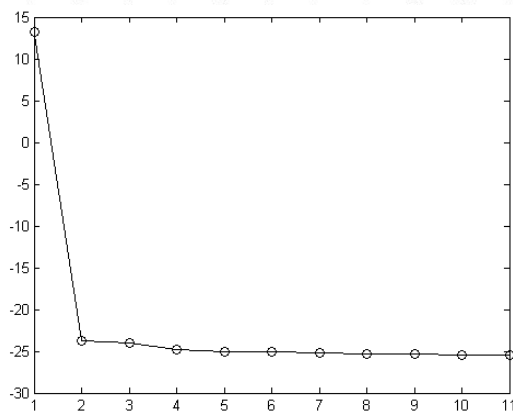


Рис. 2.47в. График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$

Из рис. 2.47, что ВР вида «exp» + «exp» неразделимы.

#### Анализ разделимости ВР вида «exp» + «exp cos»

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $x_i$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = A_1 \exp(\alpha_1 t) + A_2 \exp(\alpha_2 t) \cos(2\pi f t + \varphi). \quad (2.23)$$

здесь  $t_i = \Delta t(i - 1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N - 1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned}
F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\
&A_1 \exp(\alpha_1 t_i) + A_2 \exp(\alpha_2 t_i) \cos(2\pi f t_i + \varphi) = \dots \\
&A_1 \exp(\alpha_1 \Delta t (i-1)) + A_2 \exp(\alpha_2 \Delta t (i-1)) \cos(2\pi f \Delta t (i-1) + \varphi) = \dots \\
&A_1 \exp\left(\alpha_1 \frac{T_s}{N-1} (i-1)\right) + A_2 \exp\left(\alpha_2 \frac{T_s}{N-1} (i-1)\right) \cos\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1} (i-1) + \varphi\right).
\end{aligned}$$

**Случай № 1.**  $\min(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(16)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.23) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 1.0$ ,  $\alpha_1 = -0.4$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -1.0$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t (i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(16)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), ГК, восстановленная по второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(16)}$ , представлены на рис. 2.48.

На рис. 2.49 представлены зависимости второго  $\lambda_2$  и третьего  $\lambda_3$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(16)}$  от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , а также зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{2,3}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.48, 2.49 видно, что в рассматриваемом случае ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия:

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5n, \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.24)$$

можно разделить.

В связи с тем, что ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(16)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), содержит как трендовую, так и периодическую составляющие (см. рис. 2.48), можно отнести ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  к категории слабо  $L$ -разделимых. Также следует отметить, что вторая ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третья ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярные тройки траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(16)}$  даже при размере сдвига, обеспечивающем выполнение условия (2.24) оказываются значимо отличными друг от друга. Данный результат еще раз подтверждает недостаточность использования графика зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для идентификации сингулярных троек, соответствующих данной компоненте ВР  $F_{N_i}^{(16)}$ . В то же время, проводя измерения ВИ между последовательными локальными минимумами зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$  можно однозначно определить частоту соответствующей составляющей ВР вида (2.23) для рассматриваемого диапазона значений параметров:

$$f = 0.5 / L \Delta t.$$



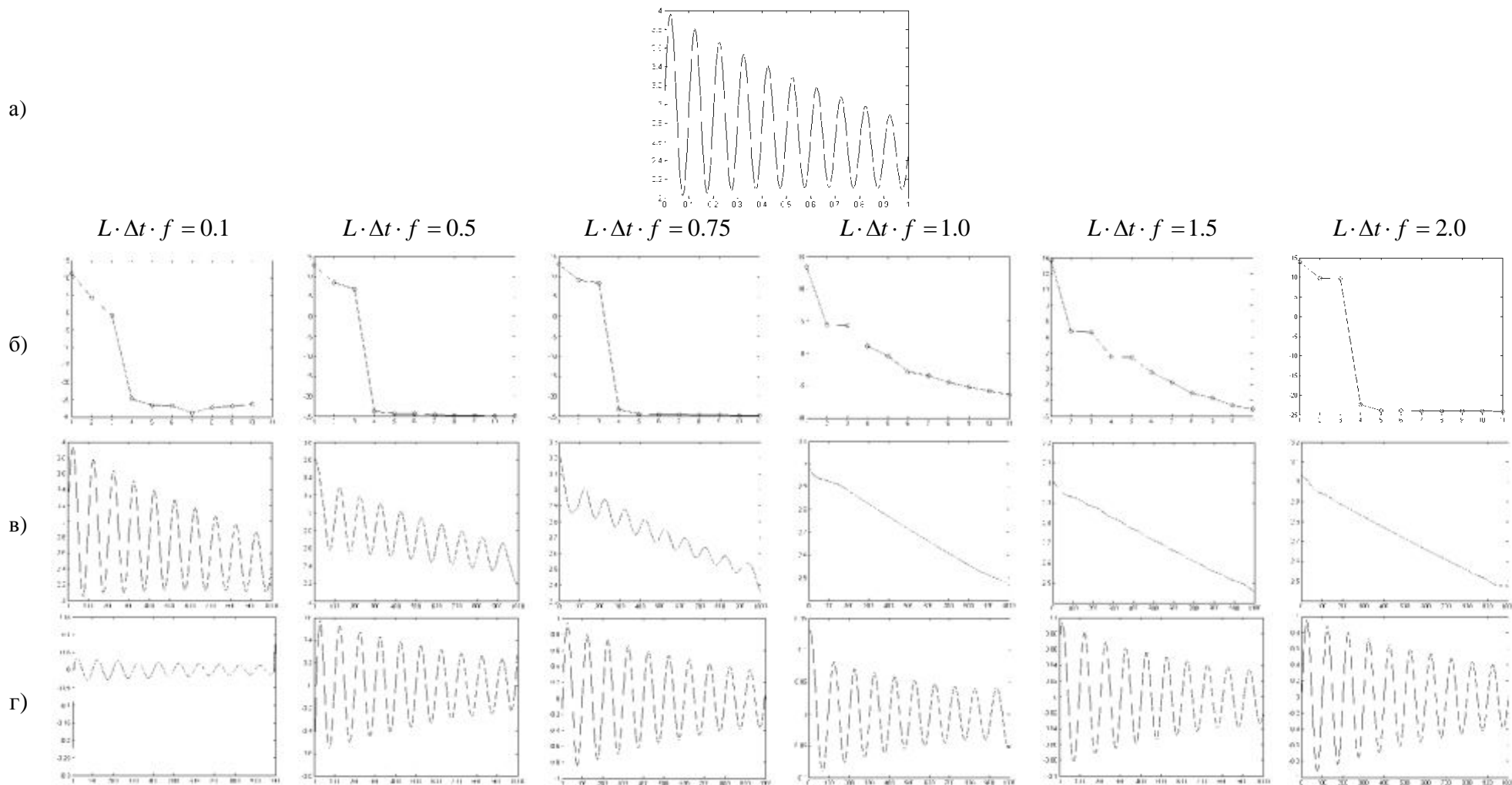


Рис. 2.45. а) анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(16)}$ ; б) зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ; г) ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

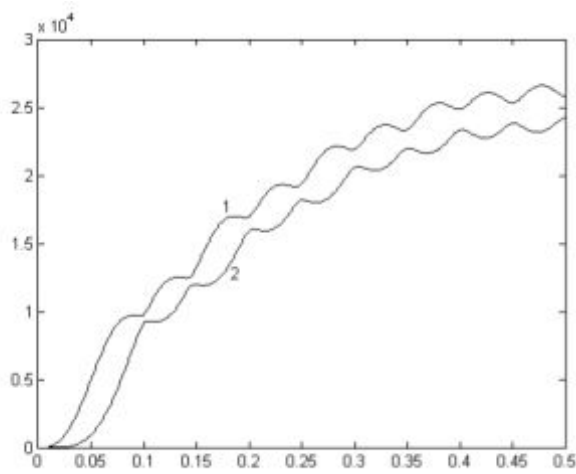


Рис. 2.49а. ВР  $F_{N_i}^{(16)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

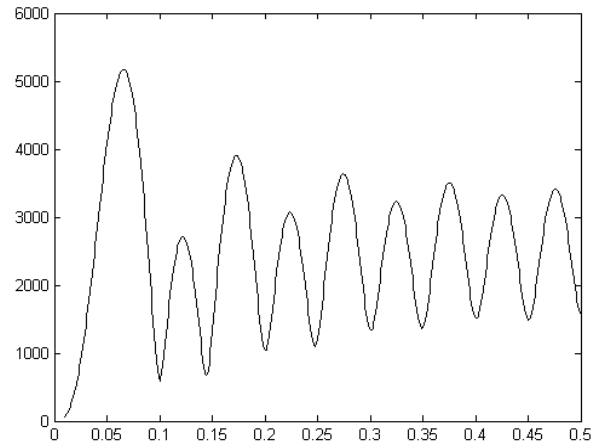


Рис. 2.49б. ВР  $F_{N_i}^{(16)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$  с

**Случай № 2.**  $\max(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$ ,  $\min(F_N^{(1)}) < \max(F_N^{(2)})$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(17)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.23) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 3.0$ ,  $\alpha_1 = -3.0$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(17)}$ , ГК, восстановленная по второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным числам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(17)}$ , представлены на рис. 2.50.

На рис. 2.51 представлены зависимости второго  $\lambda_2$  и третьего  $\lambda_3$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(16)}$  от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , а также зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.50, 2.51 видно, что в рассматриваемом случае можно строго разделить ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19). При параметрах сдвига  $L$  таких, что выполнены условия (2.20), ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  оказываются слабо  $L$ -разделимы. Из рис. 2.51 видно, что, проводя измерения ВИ между последовательными локальными минимумами зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ , соответствующих условиям (2.19), можно однозначно определить частоту соответствующей составляющей ВР вида (2.23) для рассматриваемого диапазона значений параметров:

$$f = 0.5/L\Delta t.$$

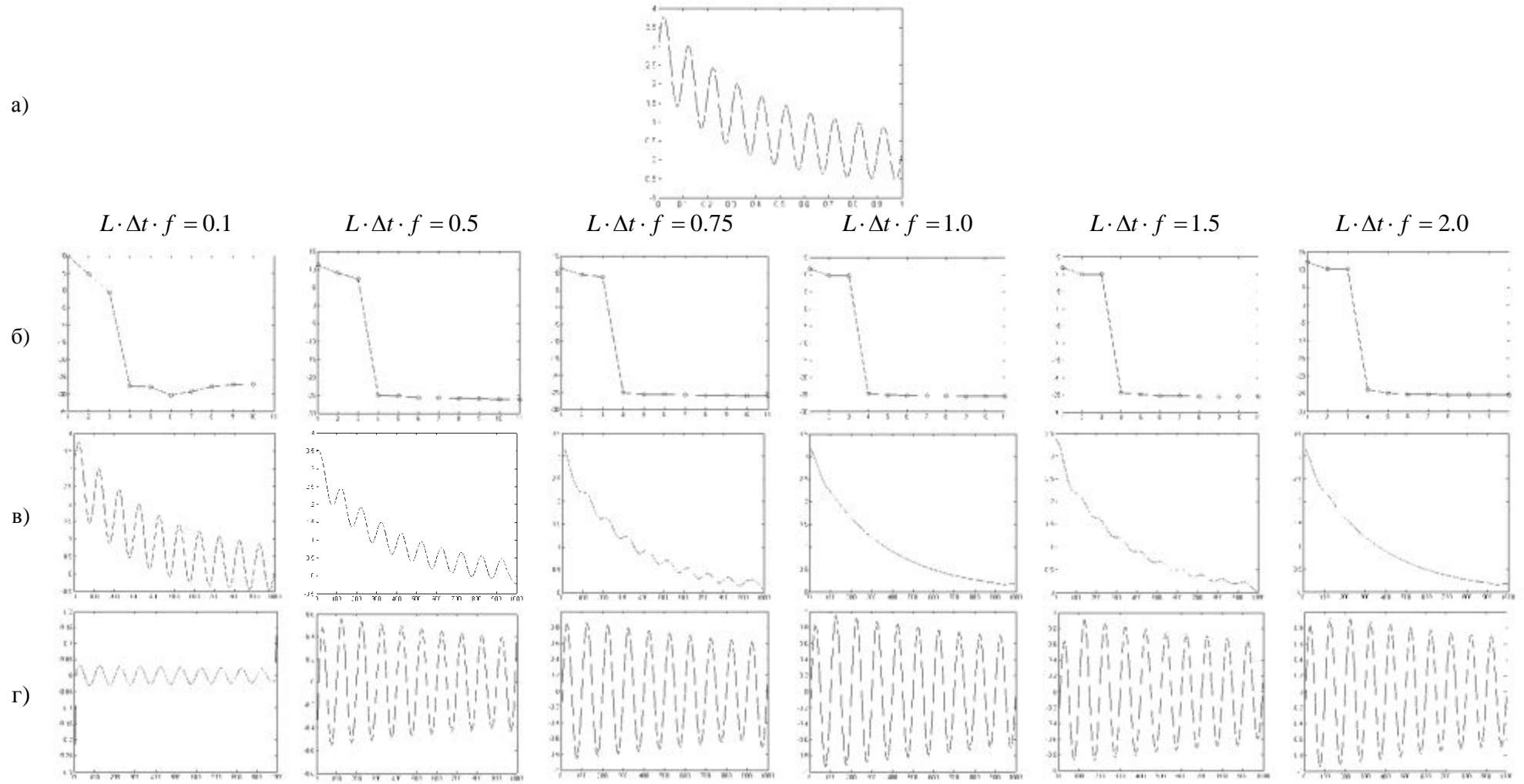


Рис. 2.50. а) анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(17)}$ ; б) зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ; г) ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

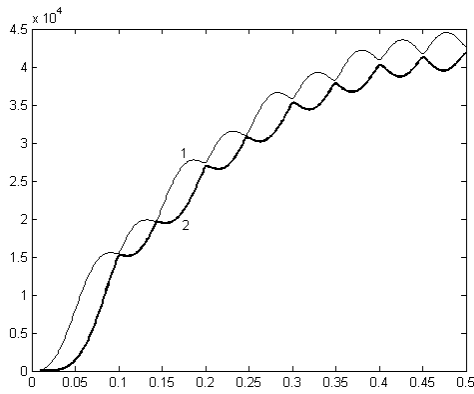


Рис. 2.51а. ВР  $F_{N_i}^{(17)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

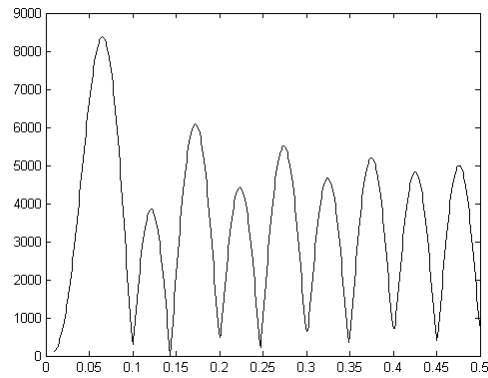


Рис. 2.51б. ВР  $F_{N_i}^{(17)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{\langle 2,3 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$  с

**Случай № 3.**  $\max(F_N^{(1)}) < \max(F_N^{(2)})$ ,  $\min(F_N^{(1)}) > \min(F_N^{(2)})$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(18)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.23) на ВИ длительностью 1 с для  $A_1 = 0.8$ ,  $\alpha_1 = -3$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(18)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), ГК, восстановленная по второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным числам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(18)}$ , представлены на рис. 2.52.

На рис. 2.53 представлены зависимости второго  $\lambda_2$  и третьего  $\lambda_3$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(16)}$  от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , а также зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{\langle 2,3 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.52, 2.53 видно, что в рассматриваемом случае ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19) ВР оказываются слабо  $L$ -разделимы. Из рис. 2.53 видно, что, проводя измерения ВИ между последовательными локальными минимумами зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{\langle 2,3 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ , соответствующих условиям (2.19), можно однозначно определить частоту соответствующей составляющей ВР вида (2.22) для рассматриваемого диапазона значений параметров:

$$f = 0.5/L\Delta t.$$

#### **Анализ разделимости ВР вида «exp cos» + «a·k + b»**

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР, который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = (a \cdot t + b) + A_2 \exp(\alpha_2 t) \cos(2\pi f t + \varphi), \quad (2.25)$$

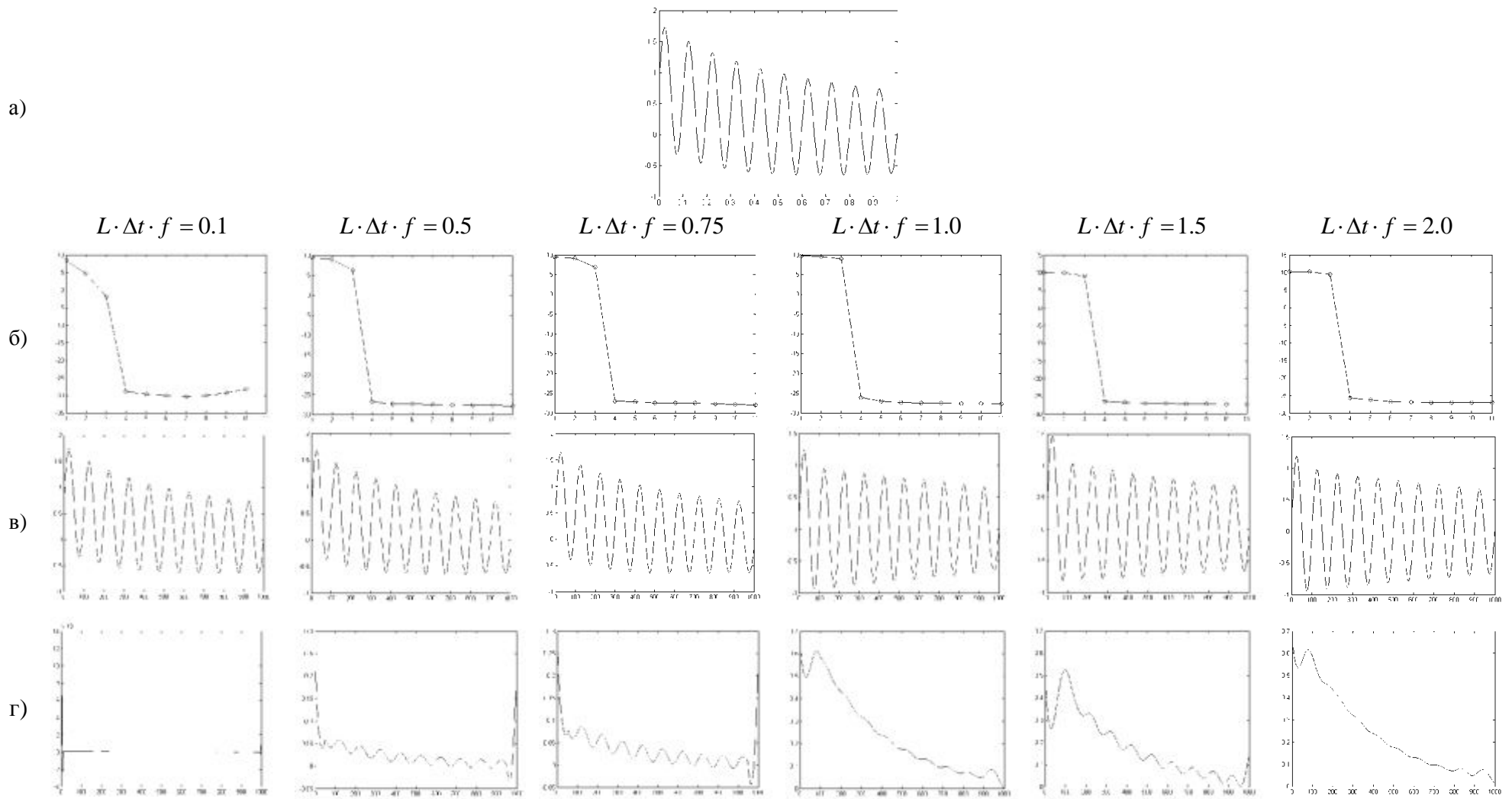


Рис. 2.52. а) анализируемый ВР  $F_N^{(18)}$ ; б) зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ; г) ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

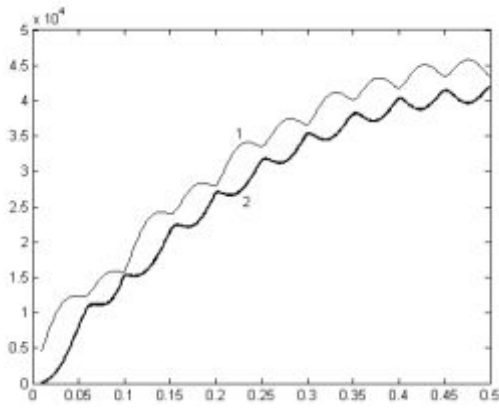


Рис. 2.53а. ВР  $F_{N_i}^{(18)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

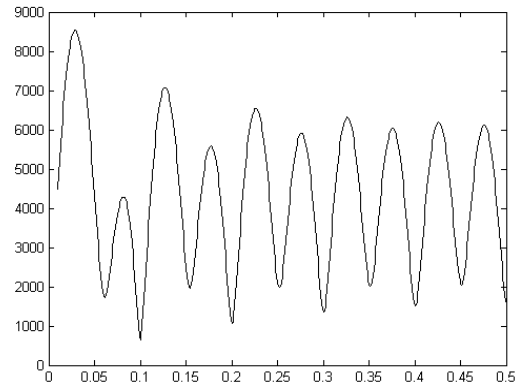


Рис. 2.53б. ВР  $F_{N_i}^{(18)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$  с

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots$$

$$(a \cdot t_i + b) + A_2 \exp(\alpha_2 t_i) \cos(2\pi f t_i + \varphi) = \dots$$

$$(a \cdot \Delta t(i-1) + b) + A_2 \exp(\alpha_2 \Delta t(i-1)) \cos(2\pi f \Delta t(i-1) + \varphi) = \dots$$

$$\left( a \cdot \frac{T_s}{N-1}(i-1) + b \right) + A_2 \exp\left( \alpha_2 \frac{T_s}{N-1}(i-1) \right) \cos\left( 2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1) + \varphi \right).$$

**Случай № 1.**  $\min(F_N^{(1)}) > \max(F_N^{(2)})$

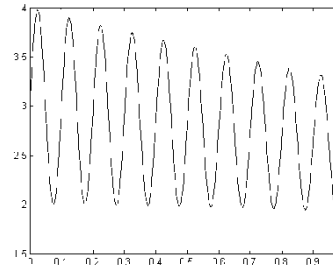
Исходный ВР  $F_{N_i}^{(19)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.25) на ВИ длительностью 1 с для  $a = -0.3$ ,  $b = 3$ ,  $A_2 = 1.0$ ,  $\alpha_2 = -0.4$ ,  $f = 10$  Гц,  $\varphi = \pi/2$  в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $F_{N_i}^{(5)}$ . ВР  $F_{N_i}^{(18)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), ГК, восстановленная по второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) и третьей ( $\lambda_3, U_3, V_3$ ) сингулярным тройкам траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(18)}$ , представлены на рис. 2.54.

На рис. 2.55 представлены зависимости второго  $\lambda_2$  и третьего  $\lambda_3$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(16)}$  от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , а также зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ .

Из рис. 2.53, 2.54 видно, что в рассматриваемом случае ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  при выполнении условия (2.19) ВР оказываются слабо  $L$ -разделимы. Из рис. 2.54 видно, что, проводя измерения ВИ между последовательными локальными минимумами разности второго и третьего сингулярными числами траекторной матрицы, соответствующих условиям (2.19), можно однозначно определить частоту соответствующей составляющей ВР вида (2.22) для рассматриваемого диапазона значений параметров:

$$f = 0.5/L\Delta t.$$

а)



б)

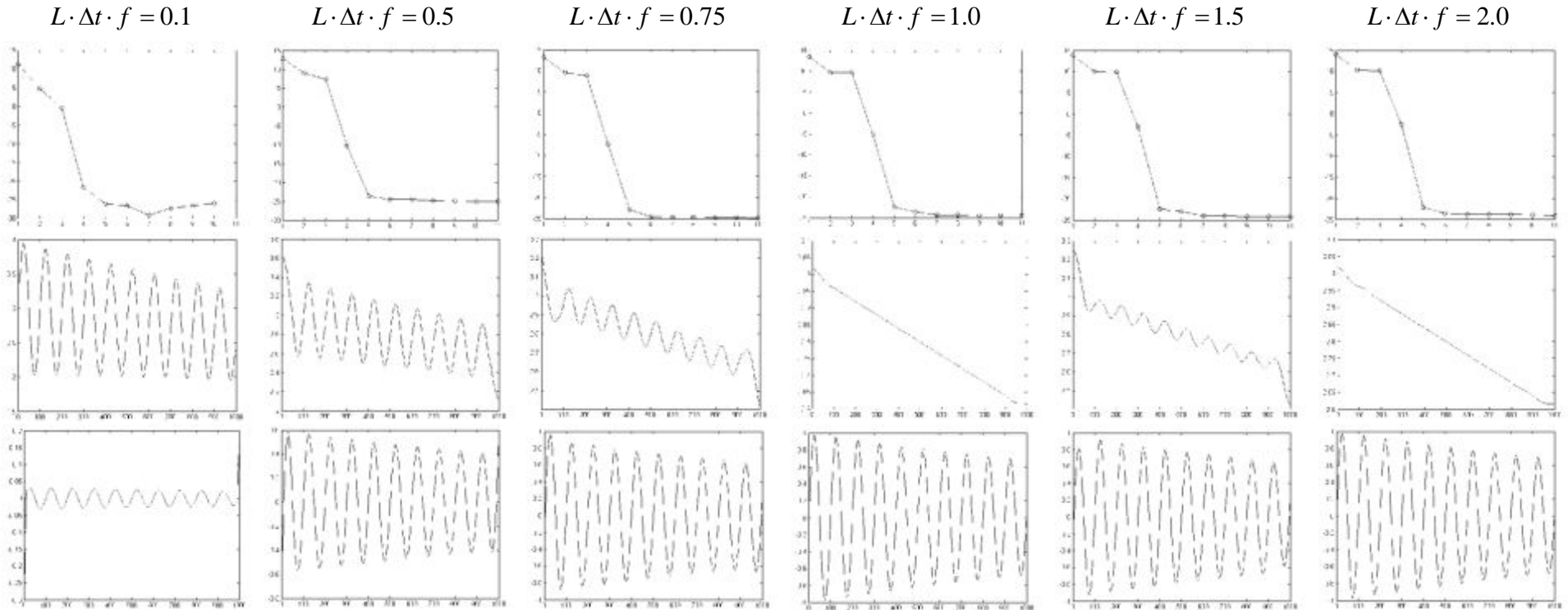


Рис. 2.54. а) анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(19)}$ ; б) зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ; в) ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ; г) ГК, восстановленная по второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьей  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы

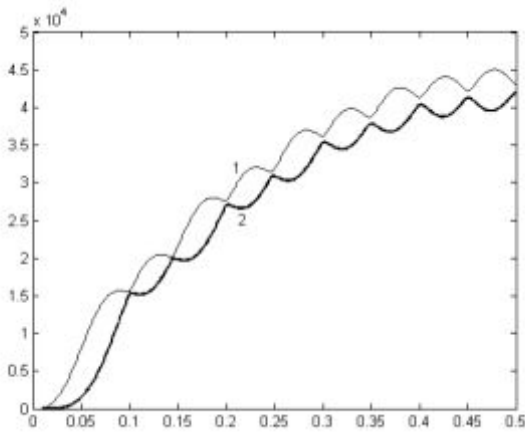


Рис. 2.55а. ВР  $F_{N_i}^{(19)}$ . Графики зависимостей второго ( $\lambda_2$ ) – 1 и третьего ( $\lambda_3$ ) – 2 сингулярных чисел от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $T_s = 1$  с

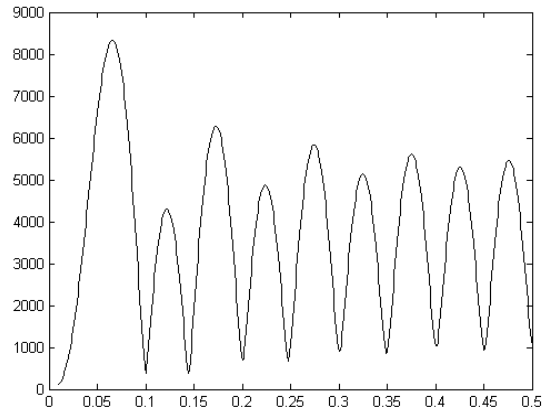


Рис. 2.55б. ВР  $F_{N_i}^{(19)}$ . График зависимости  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ,  $T_s = 1$  с

### Анализ разделимости ВР вида « $a_1 \cdot k + b_1$ » + « $a_2 \cdot k + b_2$ »

Рассмотрим результаты применения метода SSA к ВР  $F_{N_i}^{(18)}$ , который представляет собой последовательные отсчеты функции

$$u(t) = (a_1 \cdot t + b_1) + (a_2 \cdot t + b_2), \quad (2.26)$$

здесь  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$\begin{aligned} F_{N_i} &= F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)} = \dots \\ &= (a_1 \cdot t_i + b_1) + (a_2 \cdot t_i + b_2) = \dots \\ &= (a_1 \cdot \Delta t(i-1) + b_1) + (a_2 \cdot \Delta t(i-1) + b_2) = \dots \\ &= \left( a_1 \cdot \frac{T_s}{N-1}(i-1) + b_1 \right) + \left( a_2 \cdot \frac{T_s}{N-1}(i-1) + b_2 \right). \end{aligned}$$

Исходный ВР  $F_{N_i}^{(19)}$ , значения которого вычислены в соответствии с (2.26) на ВИ длительностью 1 с для  $a_1 = -0.4$ ,  $b_1 = 3$ ,  $a_2 = -0.1$ ,  $b_2 = 1.0$ , в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s / (N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 1000$ ,  $T_s = 1$  с, а также зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  для различных значений параметра  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , а также ГК, восстановленная по первому числу траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ , и ГК, восстановленная по второму  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  и третьему  $(\lambda_3, U_3, V_3)$  сингулярным тройкам траекторной матрицы, представлены на рис. 2.56.

Из рис. 2.56 видно, что ВР  $L \cdot \Delta t > 0.3$  вида « $a \cdot k + b$ » + « $a \cdot k + b$ » неотделимы друг от друга.



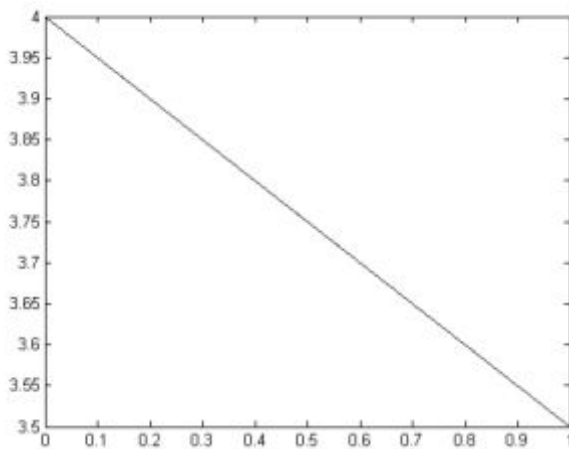


Рис. 2.56а. Анализируемый ВР  $F_{N_i}^{(19)}$

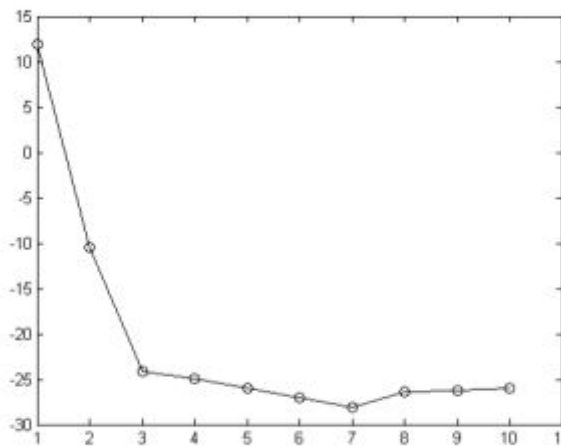


Рис. 2.56б. ВР  $F_{N_i}^{(19)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ,  $L \cdot \Delta t = 0.1$

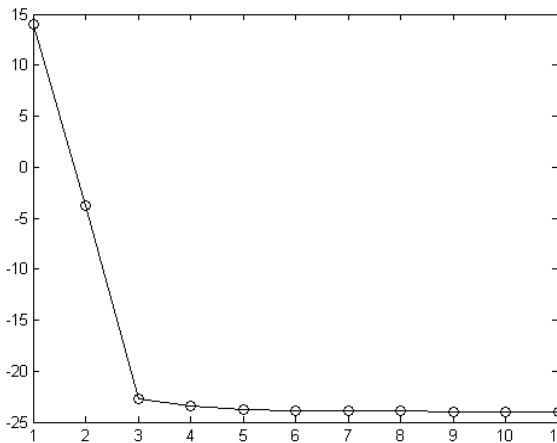


Рис. 2.56в. ВР  $F_{N_i}^{(19)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$ ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$

Подведем итоги проведенного анализа разделимости детерминированных ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  в методе SSA, результаты которого представлены в табл. 2.2.

1. Впервые предложено использовать для исследования проблемы разделимости ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$  зависимость разности между соответствующими сингулярными числами, номера которых отличаются друг от друга на единицу, от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ . (Отметим, что использование данной зависимости для анализа реальных ВР, делает возможным обоснованной выбор размера сдвига  $L$ .)

Таблица 2.2. Разделимость ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ <sup>1</sup>

	<b>const</b>	<b>cos</b>	<b>exp</b>	<b>exp cos</b>	<b><math>a \cdot k + b</math></b>
<b>const</b>	Неразделимы	Разделимы точно	Неразделимы	Разделимы точно	Неразделимы
<b>cos</b>	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы точно <sup>3</sup>	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы точно <sup>2</sup>
<b>exp</b>	Неразделимы	Разделимы точно <sup>2</sup>	Неразделимы	Разделимы слабо	Разделимы слабо
<b>exp cos</b>	Разделимы точно	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы слабо	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы слабо
<b><math>a \cdot k + b</math></b>	Неразделимы	Разделимы точно <sup>2</sup>	Разделимы слабо	Разделимы слабо	Неразделимы

2. Найдены условия точной и слабой  $L$ -разделимости ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ .

3. Показано, что по зависимости разности между соответствующими сингулярными числами, номера которых отличаются друг от друга на единицу, от значения параметра  $L \cdot \Delta t$ , позволяет ввести классификацию  $L$ -разделимости ВР  $F_N^{(1)}$ ,  $F_N^{(2)}$ , не требующую проверки критериев, приведенных в [22]:

а) Сильная разделимость имеет место, когда минимум зависимости  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f(i)$  соответствующих сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$  оказывается близким к нулю, соответственно,  $\lambda_i$ ,  $\lambda_{i+1}$  отличаются друг от друга на малую величину (менее 10% от максимального значения разности).

б) Слабая разделимость имеет место, когда минимум зависимости  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f(i)$  соответствующих сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$  оказывается значимо отличным от нуля, соответственно, соответственно,  $\lambda_i$ ,  $\lambda_{i+1}$  отличаются друг от друга на конечную величину (более 10% от максимального значения разности).

### 2.3. Исследование особенностей сингулярных троек траекторной матрицы ВР, представляющего собой смесь шума и детерминированного сигнала

При практическом использовании метода SSA для анализа ВР вида

$$F_{N_i} = \sum_m F_{N_i}^{(m)}, \quad i = \overline{1, N},$$

значения которых получены экспериментально, возникает задача оценки влияния погрешности измерений значений членов ВР, представляющей собой некоторую случайную величину  $\xi_i$ ,  $i = \overline{1, N}$ , на точность получаемых при этом результатов. Таким образом, задача исследования состоит в изучении проблемы разделимости и точности восстановления ГК ВР вида

<sup>1</sup> В данной таблице термины «Разделимы точно», «Разделимы слабо» мы понимаем в смысле данных нами определений.

<sup>2</sup> За исключением случая равных амплитуд.

<sup>3</sup> При выполнении условия (2.19).

$$F_{N_i}^{(20)} = \sum_{m=1}^{M-1} F_{N_i}^{(m)} + \xi_i, i = \overline{1, N}.$$

Отметим, что результаты исследования частного случая рассматриваемой задачи для  $\xi_i \equiv 0$ , в которой требуется разделить ВР, представляющие собой дискретные отсчеты некоторых детерминированных функций, приведены в Разделе 2.2. В этой связи представляется достаточным изучить проблемы делимости и точности восстановления ГК ВР на примере ВР  $F_N = F_N^{(1)} + F_N^{(2)}$ , где  $F_{N_i}^{(1)} = \xi_i$  – случайный ВР,  $F_N^{(2)}$  – детерминированный ВР.

Здесь уместно отметить, что строгое теоретическое обоснование существования решения рассматриваемой задачи получено только для единственного частного случая [22, с. 21]:  $F_{N_i}^{(1)}$  – гауссов белый шум (случайная величина с плотностью распределения (ПР)

$$f(x, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{x^2}{\sigma^2}\right), \sigma - \text{стандартное отклонение), } F_N^{(2)} - \text{детерминированный ВР,}$$

$L, K \rightarrow \infty$  и  $L/K \rightarrow a > 0$ , кроме того на практике далеко не всегда ВР  $F_N^{(1)}$  имеет нормальный закон распределения, а любой анализируемый ВР имеет конечную длительность. Кроме того данная теорема не решает вопроса о точности восстановления компонент анализируемого ВР. Таким образом, перечисленные выше причины определяют актуальность исследований влияния шума на результаты анализа ВР методом SSA.

В связи с тем, что аналитических оценок влияния шума на точность выделения ГК анализируемого ВР получить аналитически не представляется возможным мы использовали метод статистического моделирования (метод Монте-Карло), реализующийся следующей последовательностью действий:

1. Задание ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $\Delta t = T_s/(N-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа, в узлах которой вычисляются значения детерминированного ВР  $F_N^{(2)}$ .

2. Вычисление значений детерминированного ВР  $F_N^{(2)}$  в узлах заданной в п. 1 ВС.

3. Задание набора значений параметров сдвига  $L_k$ :

$$L_k = L_{\min} + \Delta L \cdot k, k = 1, 2, \dots, \left(\frac{N}{2} - L_{\min}\right) / \Delta L,$$

где  $\Delta L$  – шаг изменения значения параметра сдвига,  $L_{\min}$  – минимальное значение параметра сдвига  $L$ .

4. Задание вида распределения случайной величины и значений ее параметров.

5. Задание числа испытаний *Number\_of\_Trial*.

6. Инициализация счетчика числа испытаний *Counter\_of\_Trial*.

7. Генерация в соответствии с заданным распределением и его параметрами случайной последовательности  $\xi_i, i = \overline{1, N}$  ( $F_{N_i}^{(1)} \equiv \xi_i$ ).

8. Вычисление значений ВР  $F_N$ :

$$F_{N_i} = F_{N_i}^{(1)} + F_{N_i}^{(2)}.$$

9. Вычисление сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_N$  для каждого значения параметра сдвига  $L_k$ .

10. Восстановление по соответствующим тройкам сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_N$  для каждого значения сдвига  $L_k$  ГК, соответствующей  $F_N^{(2)}$ . (В результате выполнения п. 9 получают  $k$  восстановленных ВР  $\{\tilde{F}_N^{(2)}\}_k$ .)

11. Вычисление  $k$  ВР, содержащих разности между точными и восстановленными значениями ВР  $F_N^{(2)}$ :

$$\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k = F_{N_i}^{(2)} - \{\tilde{F}_{N_i}^{(2)}\}_k.$$

(В результате выполнения п. 10 получаем матрицу  $\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k$  размерности

$$\left( \left( \frac{N}{2} - L_{\min} \right) / \Delta L \right) \times N.$$

12. Вычисление среднего значения

$$\overline{\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k$$

СКО каждой строки матрицы  $\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k$ :

$$\Delta F_k^{(\text{std})} = \left( \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N \left( \{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k - \overline{\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k} \right)^2 \right)^{1/2}.$$

13. Занесение векторов  $\overline{\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k}$ ,  $\Delta F_k^{(\text{std})}$  в матрицы:

$$\Delta M_{\text{Counter\_of\_Trial},k} = \overline{\{\Delta F_{N_i}^{(2)}\}_k},$$

$$\Delta F_{\text{Counter\_of\_Trial},k} = \Delta F_k^{(\text{std})}.$$

14. Увеличение значения счетчика испытаний *Counter\_of\_Trial* на единицу:

$$\text{Counter\_of\_Trial} = \text{Counter\_of\_Trial} + 1.$$

15. Если  $\text{Counter\_of\_Trial} + 1 \leq \text{Number\_Trial}$  выполнение пп. 6–13.

16. Вычисление усредненных по ансамблю реализаций зависимостей средних значений

$$\overline{\{\Delta M\}}_k = \frac{1}{\text{Number\_of\_Trial}} \sum_{j=1}^{\text{Number\_of\_Trial}} \Delta M_{j,k}$$

среднеквадратического отклонения

$$\overline{\{\Delta F^{(\text{std})}\}}_k = \frac{1}{\text{Number\_of\_Trial}} \sum_{j=1}^{\text{Number\_of\_Trial}} \Delta F_{j,k}$$

разностей между ВР  $F_N^{(2)}$  и восстановленной по соответствующим тройкам траекторной матрицы ВР  $F_N$  ГК  $\{\tilde{F}_N^{(2)}\}_k$  от размера окна сдвига  $L_k \cdot \Delta t$ .

Блок-схема, описанного выше алгоритма, представлена на рис. 2.57.

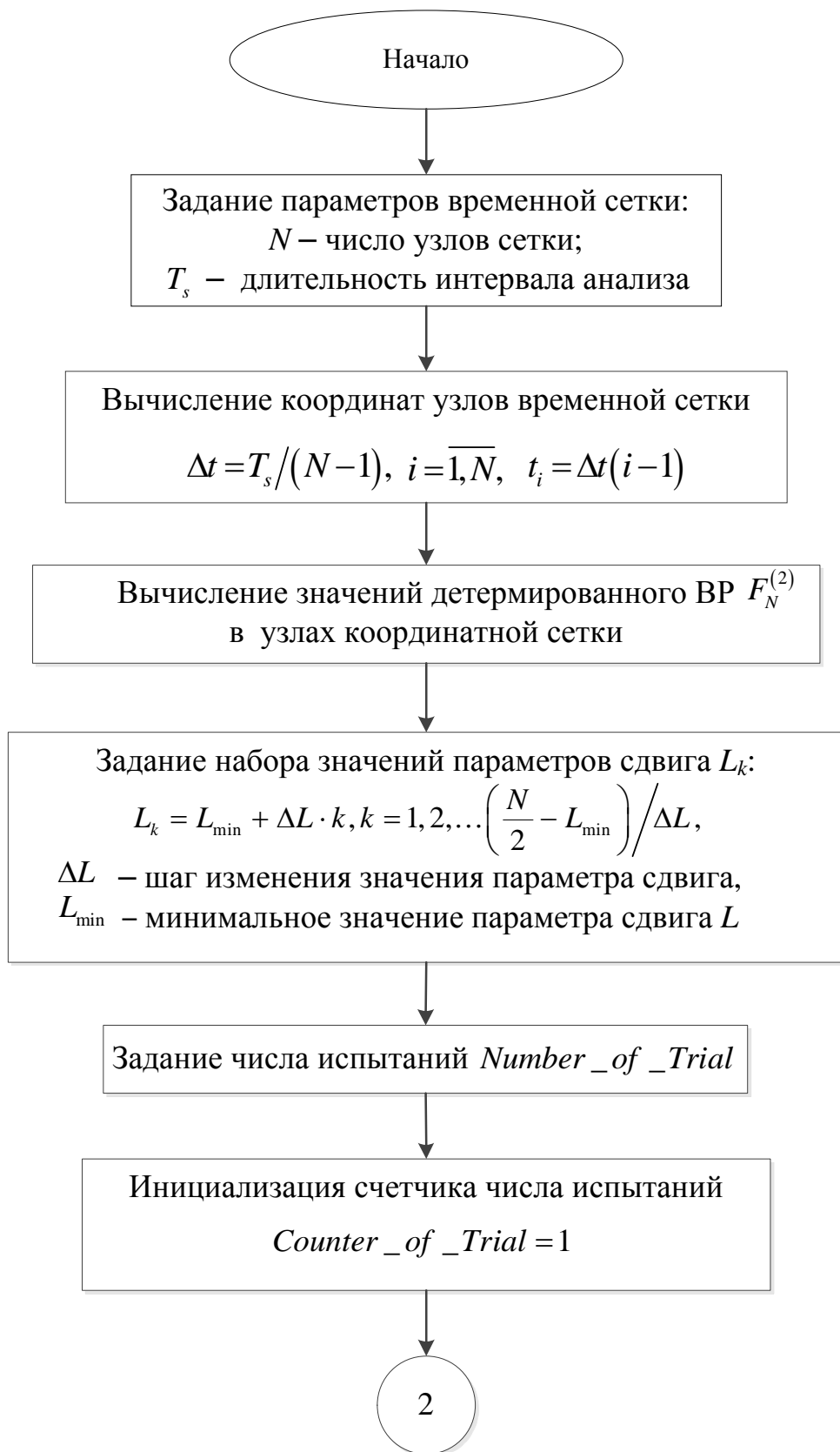


Рис. 2.57. Блок-схема алгоритма исследования точности восстановления ГК ВР  $F_N^{(2)}$ , представляющей собой смесь шума и детерминированного сигнала (начало)

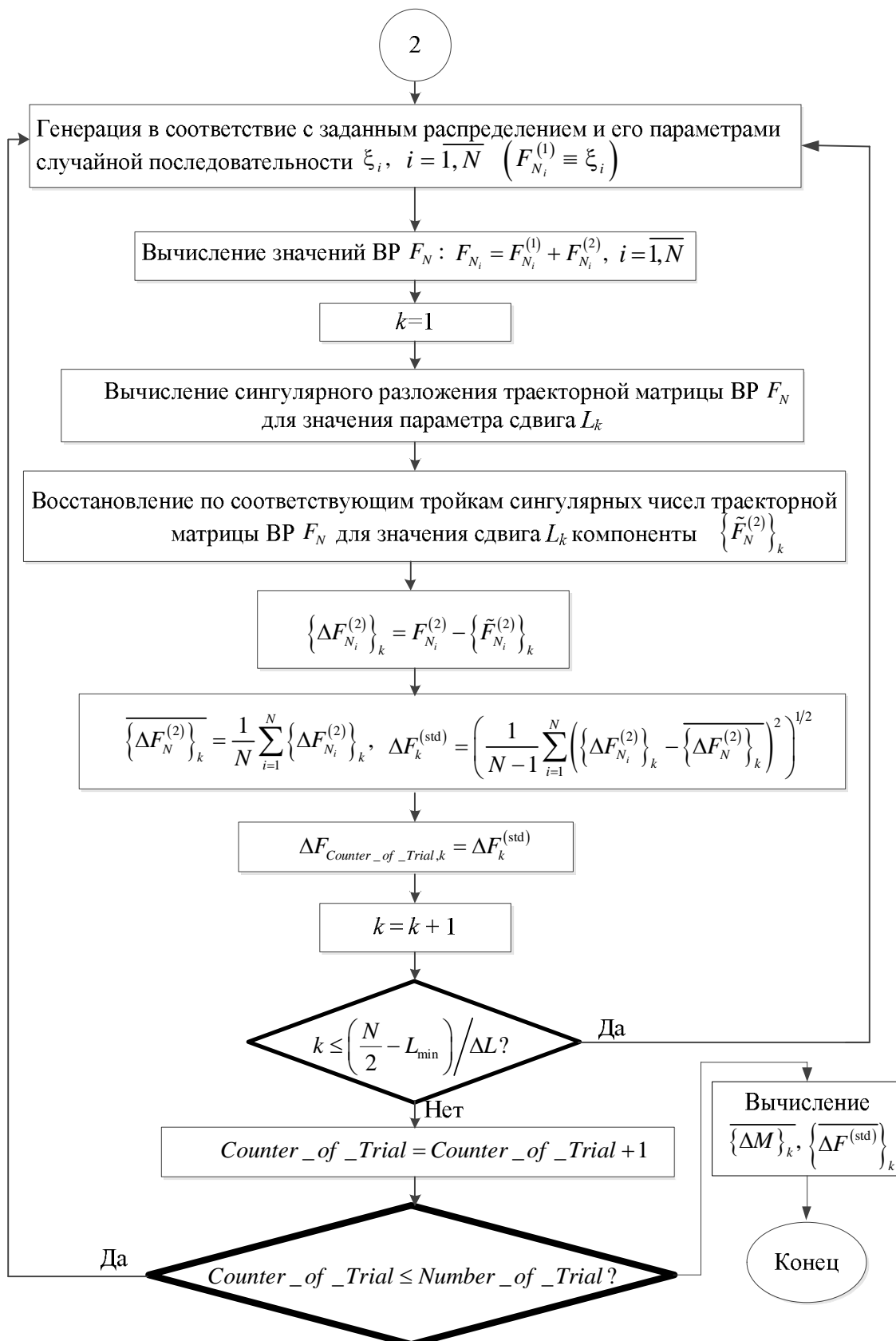


Рис. 2.57. Блок-схема алгоритма исследования точности восстановления ГК ВР  $F_N$ , представляющей собой смесь шума и детерминированного сигнала (продолжение)

### 2.3.1. Исследование разделимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и постоянной составляющей

Рассмотрим результаты, получаемые при использовании метода SSA для анализа ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ , представляющего собой смесь гауссова шума и сигнала, постоянного во времени. На рис. 2.58 представлены типичные зависимости  $\lambda_i = f(i)$  траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(20)}$  от их номера при различных SNR.

Из рис. 2.58 видно, что:

- 1) при любом из рассмотренных значений SNR первая собственная тройка сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(20)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) соответствует ВР  $F_N^{(2)}$ ;
- 2) точность восстановления ГК по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(20)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), вообще говоря, оказывается зависящей от SNR;
- 3) в качестве количественных «интегральных» показателей степени отличия между точным значением ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(20)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ),  $\tilde{F}_N^{(2)}$ , можно использовать среднее значение и среднеквадратическое отклонение (СКО) ВР  $\Delta F_N^{(2)} = F_N^{(2)} - \tilde{F}_N^{(2)}$ .

Для подтверждения данных выводов, которые основывались на анализе выборочных реализаций ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ , представляющего собой смесь шума и постоянного ВР, было проведено статистическое моделирование, в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 2.57. Зависимости усредненных по ансамблям случайных реализаций средних значений

$$\overline{\{\Delta M\}}_k = \frac{1}{\text{Number\_of\_Trial}} \sum_{j=1}^{\text{Number\_of\_Trial}} \Delta M_{j,k} \quad (2.27)$$

и СКО

$$\overline{\{\Delta F^{(\text{std})}\}}_k = \frac{1}{\text{Number\_of\_Trial}} \sum_{j=1}^{\text{Number\_of\_Trial}} \Delta F_{j,k} \quad (2.28)$$

ряда  $\Delta F_N^{(2)} = F_N^{(2)} - \tilde{F}_N^{(2)}$  от значения параметра  $L_k \cdot \Delta t$ , при различных SNR представлены на рис. 2.58.

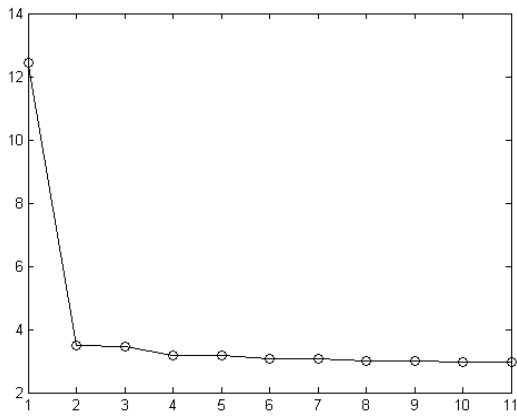


Рис. 2.58а. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . Зависимость  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR=20 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

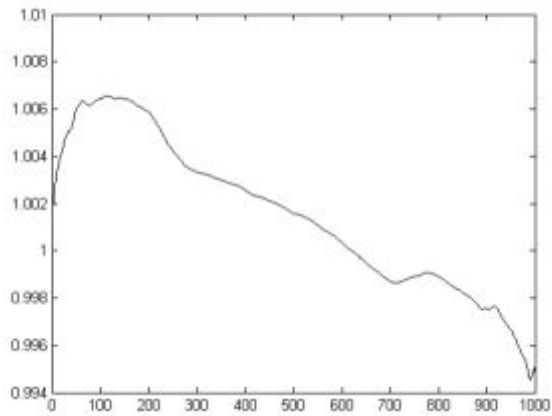


Рис. 2.58б. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR = 20 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

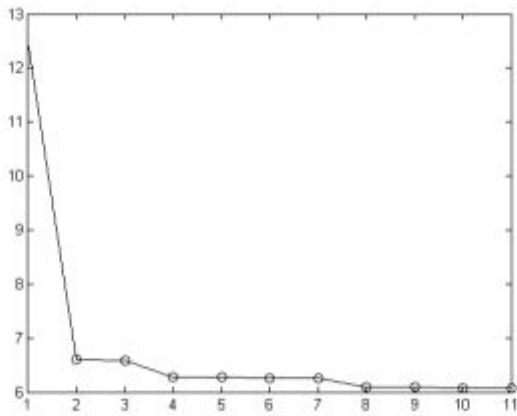


Рис. 2.58в. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = 6 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

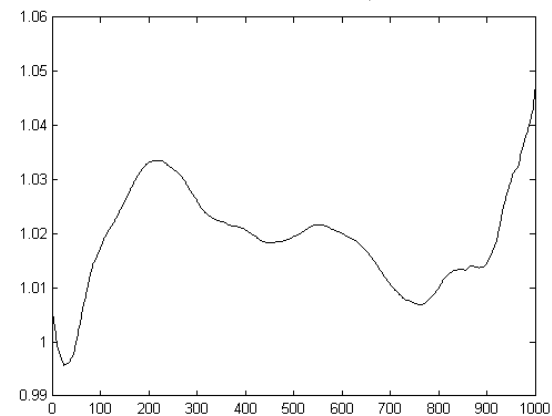


Рис. 2.58г. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR = 6 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

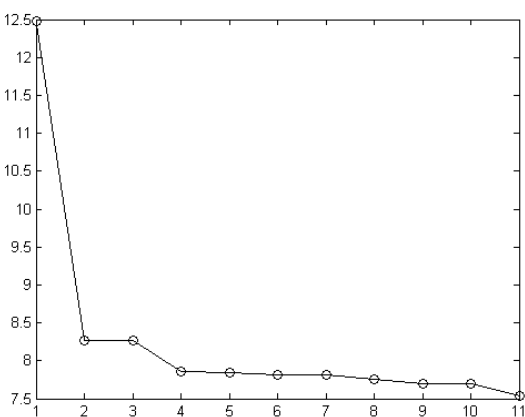


Рис. 2.58д. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = 0 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

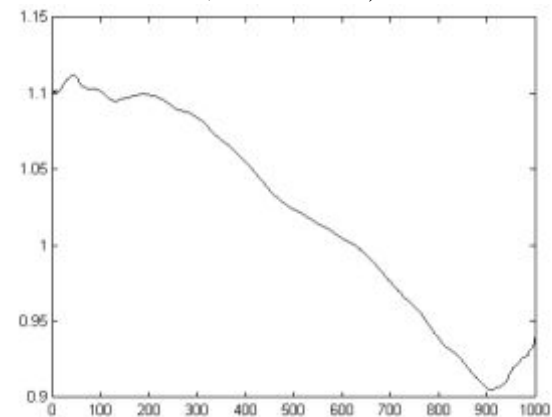


Рис. 2.58е. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR = 0 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )



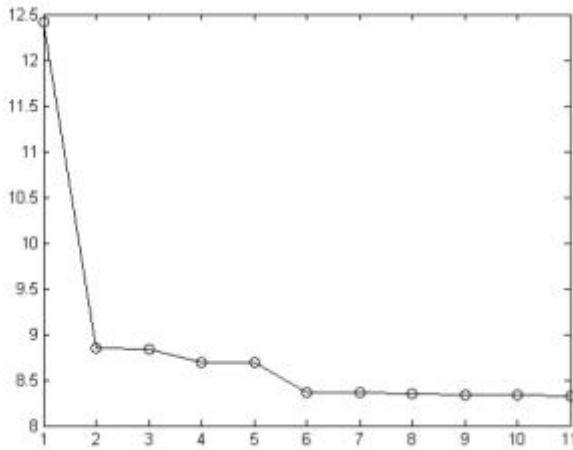


Рис. 2.58ж. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = -3.3 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

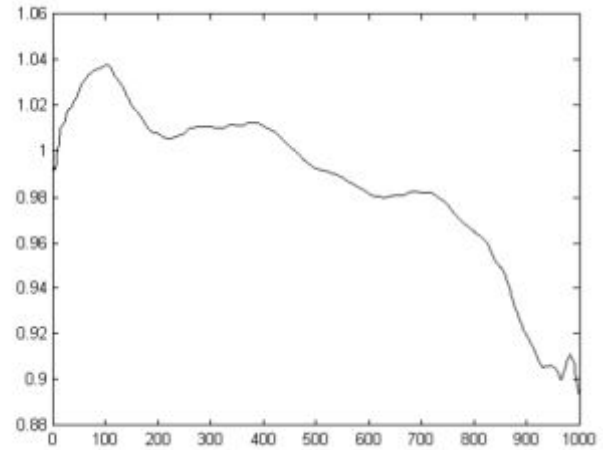


Рис. 2.58е. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR=-3.3 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

Здесь:  $N = 1000$ ,  $Number\_of\_Trial = 100$ ,  $L_k = 10, 15, \dots, 500$ . Для иллюстрации величины разброса величин  $\Delta M_{j,k}$ ,  $\Delta F_{j,k}$  внутри ансамблей реализаций на рис. 2.59 также пунктирными линиями показаны зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k \pm \sigma(\Delta M_{j,k})$ ,

$$\sigma(\Delta M_{j,k}) = \left[ \frac{1}{Number\_of\_Trial - 1} \sum_{j=1}^{Number\_of\_Trial} \left( \Delta M_{j,k} - \{\overline{\Delta M}\}_k \right)^2 \right]^{1/2}, \quad (2.29)$$

и  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k \pm \sigma(\Delta F_{j,k})$ ,

$$\sigma(\Delta F_{j,k}) = \left[ \frac{1}{Number\_of\_Trial} \sum_{j=1}^{Number\_of\_Trial} \left( \Delta F_{j,k} - \{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k \right)^2 \right]^{1/2}. \quad (2.30)$$

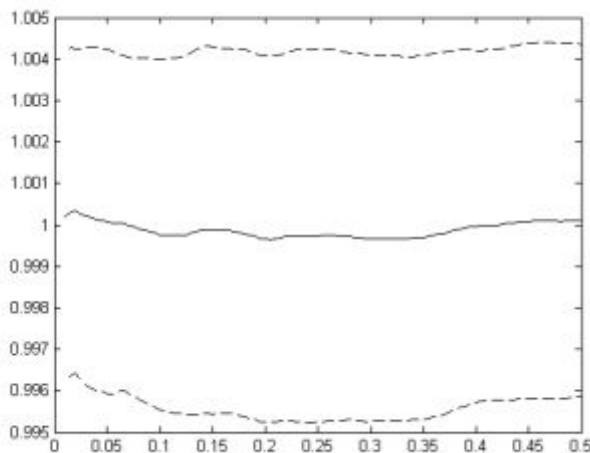


Рис. 2.59а. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR= 20 дБ)

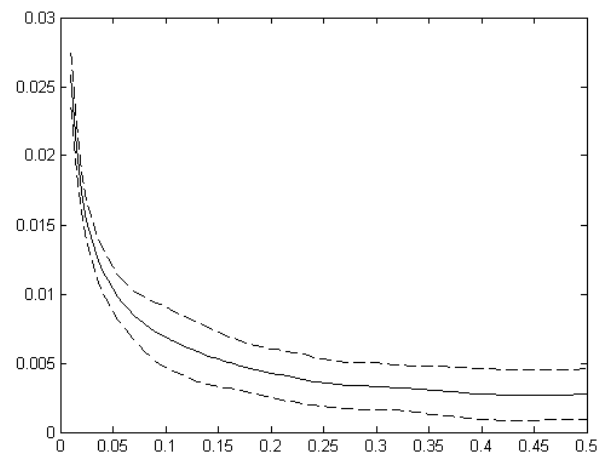


Рис. 2.59б. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 20 дБ)

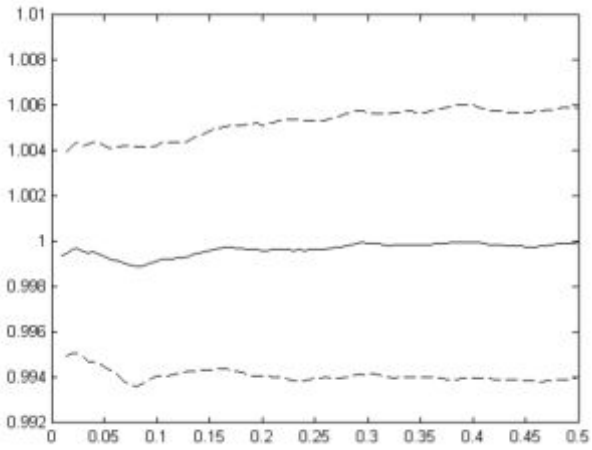


Рис. 2.59. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=12 дБ)

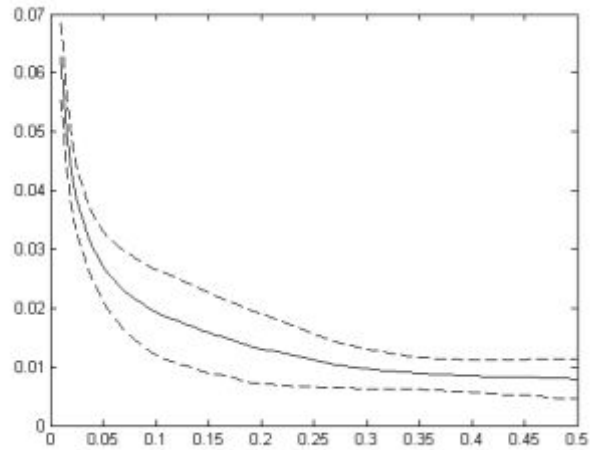


Рис. 2.58г. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 12 дБ)

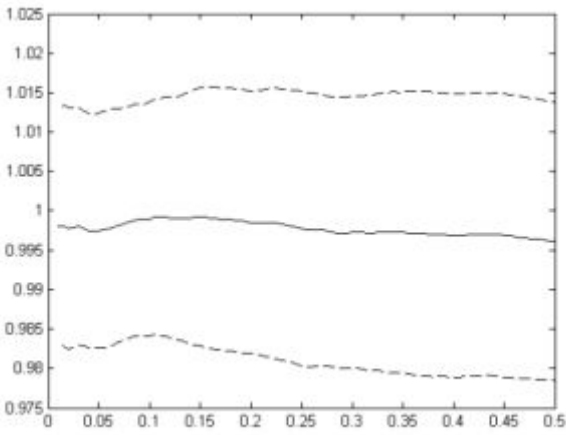


Рис. 2.59д. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=6 дБ)

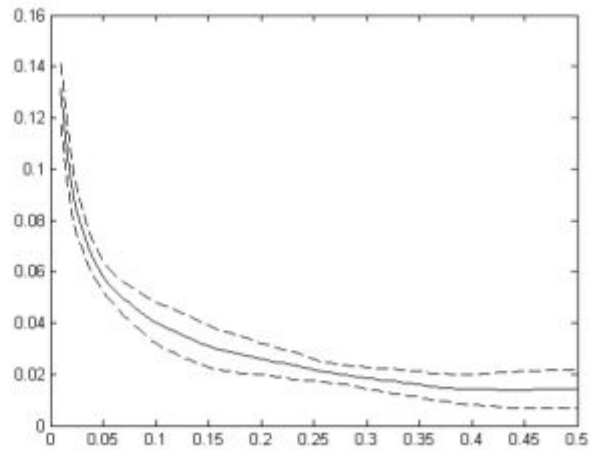


Рис. 2.59е. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 6 дБ)

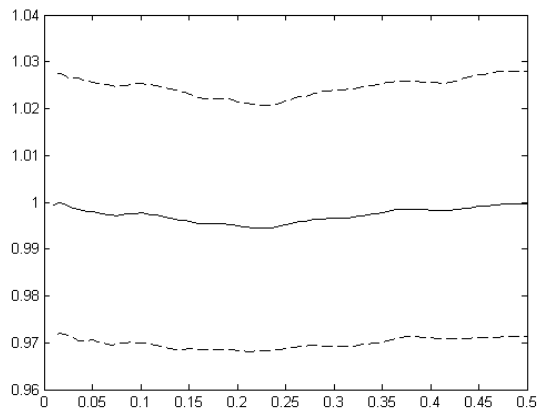


Рис. 2.59ж. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=2.5 дБ)

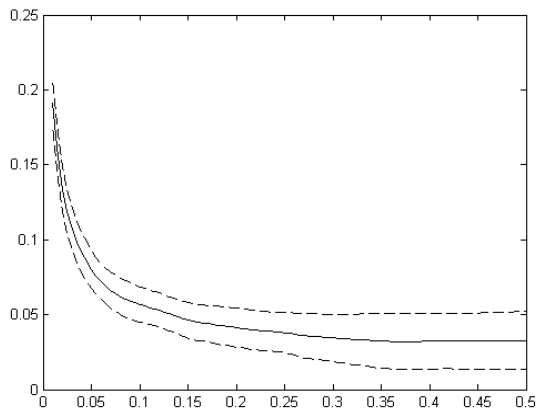


Рис. 2.59з. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 2.5 дБ)

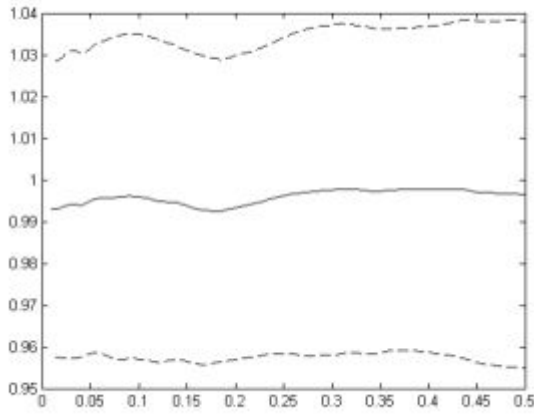


Рис. 2.59и. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=0 дБ)

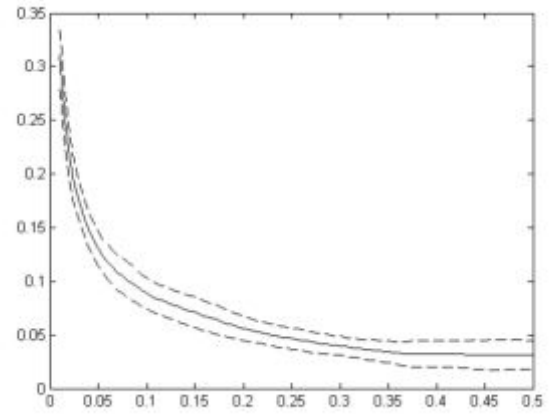


Рис. 2.59к. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 0 дБ)

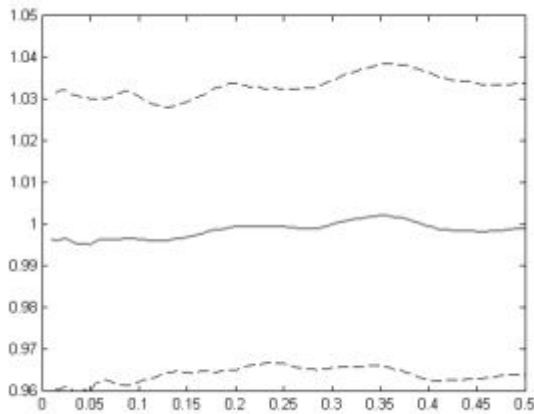


Рис. 2.59л. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=-2 дБ)

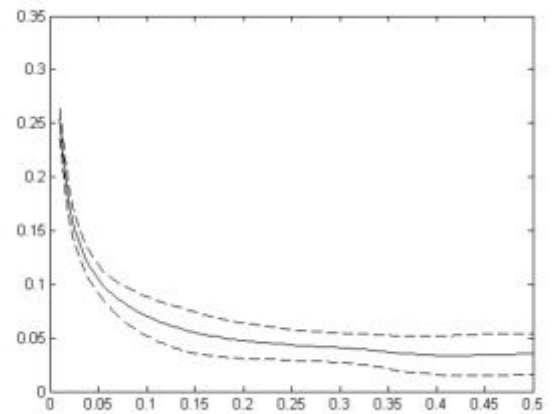


Рис. 2.59м. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = -2 дБ)

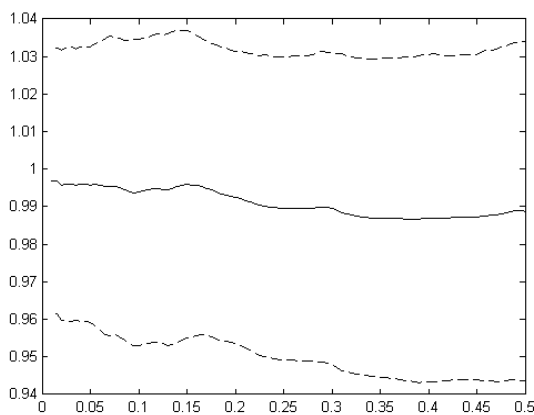


Рис. 2.59н. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=-4 дБ)

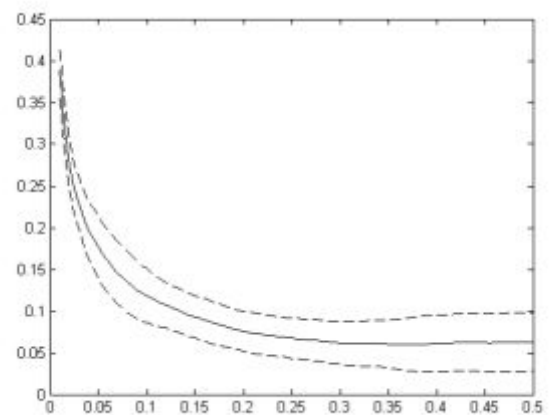


Рис. 2.59о. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = -4 дБ)

Из рис. 2.59 видно, что:

1) для каждого из рассмотренных SNR вне зависимости от значения параметра  $L_k \cdot \Delta t$  величина  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  оказывается достаточно близкой к точному значению постоянной составляющей ВР  $F_N^{(2)}$ .

2) при уменьшении SNR происходит увеличение интервалов  $[-\sigma(\Delta M_{j,k}), \sigma(\Delta M_{j,k})]$ ,  $[-\sigma(\Delta F_{j,k}), \sigma(\Delta F_{j,k})]$ ,

2) при рассмотренных SNR зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k = f(L_k \cdot \Delta t)$  оказывается одинаковым: быстрое убывание при изменении значений параметра  $L_k \cdot \Delta t$  в диапазоне  $[0; 0.25]$  с и медленное, когда  $L \cdot \Delta t \in [0.25; 0.5]$  с;

Полученные результаты позволяют сделать следующие выводы:

1. ВР, представляющие собой смесь гауссова шума и постоянной составляющей, с помощью метода SSA разделимы.

2. Для повышения оценки точности значений ВР  $F_N^{(2)}$  за счет уменьшения интервала  $[-\sigma(\Delta F_{j,k}), \sigma(\Delta F_{j,k})]$ , целесообразно использовать значения задержки  $L$  такие, что  $L \cdot \Delta t \in [0.25; 0.5]$  с.

### 2.3.2. Исследование разделимости ВР, представляющего собой смесь шума с равномерным законом распределения и постоянной составляющей

Рассмотрим результаты, получаемые при использовании метода SSA для анализа ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ , представляющего собой смесь постоянного во времени сигнала и шума с равномерным законом распределения. На рис. 2.60 представлены типичные зависимости сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(21)}$  от их номера при различных SNR.

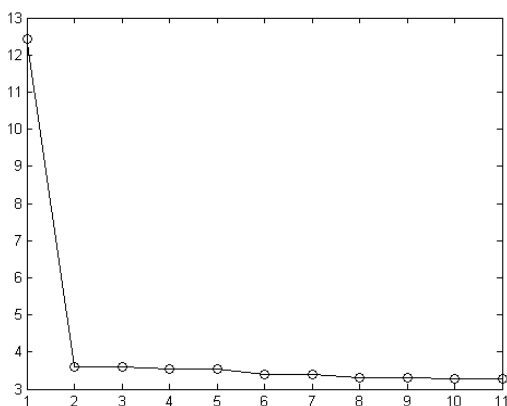


Рис. 2.60а. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = 19.0 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

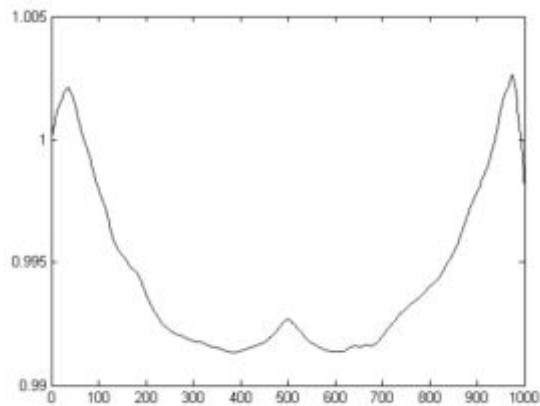


Рис. 2.60б. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR=19.0 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

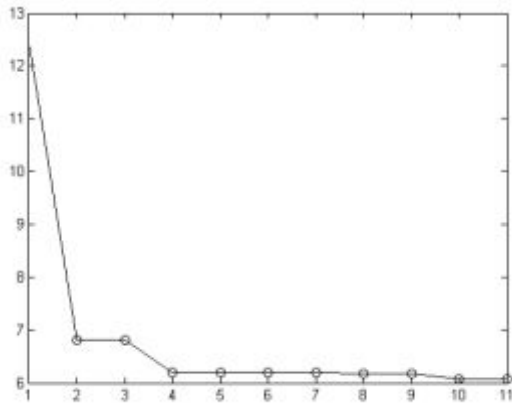


Рис. 2.60в. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = 6.7 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

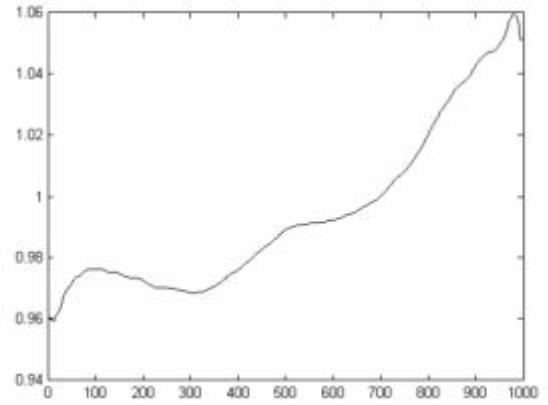


Рис. 2.60г.  $F_{N_i}^{(21)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR=6.7 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

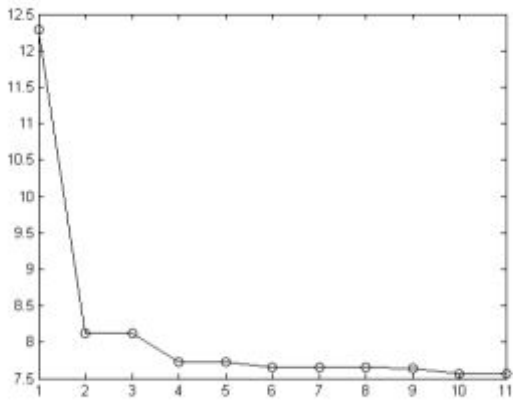


Рис. 2.60д. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = 0.3 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

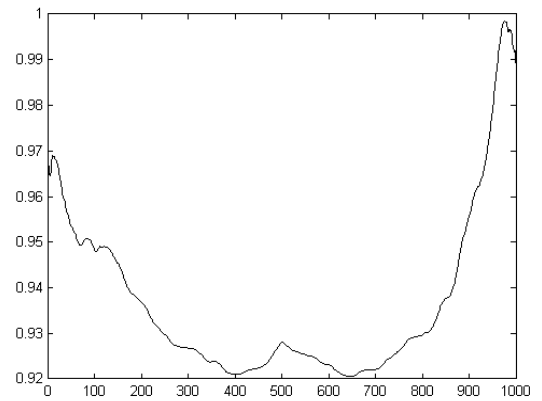


Рис. 2.60е.  $F_{N_i}^{(21)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR=0.3 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

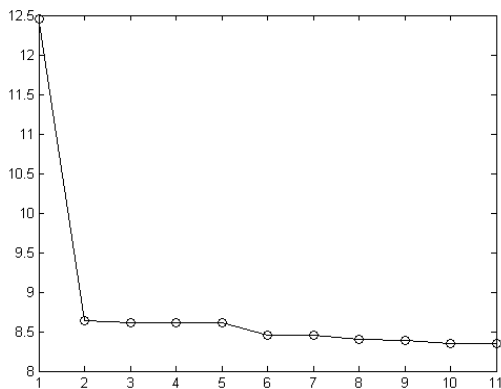


Рис. 2.60ж. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = -3.5 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

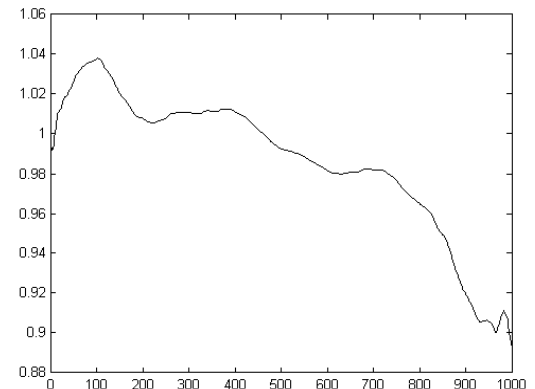


Рис. 2.60з.  $F_{N_i}^{(21)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR=-3.5 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

Из рис. 2.60 видно, что свойства сингулярных троек разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ , представляющего собой смесь шума с равномерным законом распределения и постоянной величины, оказываются аналогичными рассмотренному выше случаю ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и постоянной величины.

Для подтверждения данных выводов, которые основывались на анализе выборочных реализаций ВР, представляющего собой смесь шума и постоянного ВР, было проведено статистическое моделирование, в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 2.57. Зависимости усредненных по ансамблям случайных реализаций средних значений  $\{\overline{\Delta M}\}_k$ , вычисляемых в соответствии с (2.27), и СКО  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$ , вычисляемых в соответствии с (2.28), ВР  $\Delta F_N^{(2)} = F_N^{(2)} - \tilde{F}_N^{(2)}$  от значения параметра  $L_k \cdot \Delta t$ , при различных SNR представлены на рис. 2.61. Здесь:  $N = 1000$ ,  $Number\_of\_Trial = 100$ ,  $L_k = 10, 15, \dots, 500$ . Для иллюстрации величины разброса величин  $\Delta M_{j,k}$ ,  $\Delta F_{j,k}$  внутри ансамблей реализаций на рис. 2.60 также пунктирными линиями показаны зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k \pm \sigma(\Delta M_{j,k})$  (здесь  $\sigma(\Delta M_{j,k})$  вычисляется в соответствии с (2.29)), и  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k \pm \sigma(\Delta F_{j,k})$ , (здесь  $\sigma(\Delta F_{j,k})$  вычисляется в соответствии с (2.30)), в соответствии с (2.30)).

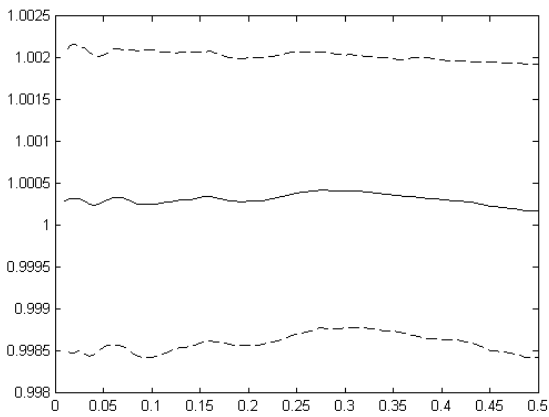


Рис. 2.61а. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta M}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=25 дБ)

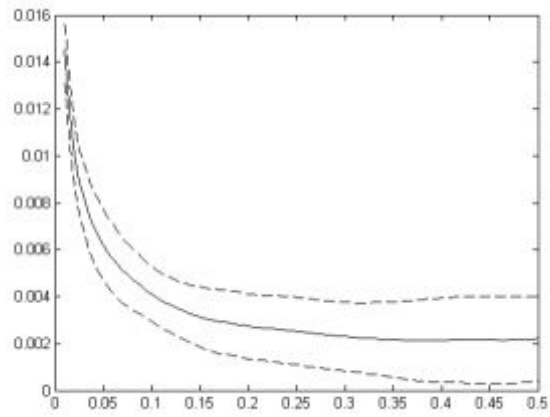


Рис. 2.61. ВР  $F_{N_i}^{(20)}$ . График зависимости  $\{\overline{\Delta F^{(std)}}\}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 25 дБ)

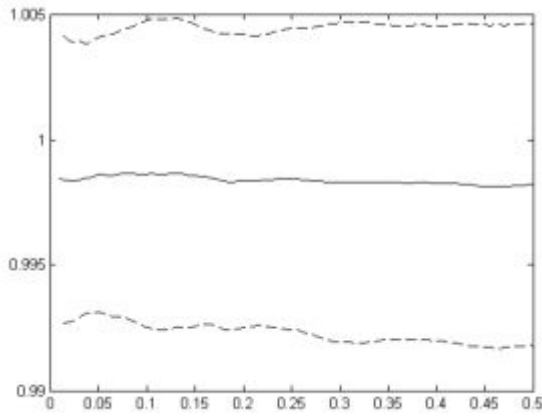


Рис. 2.61в. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=16.7 дБ)

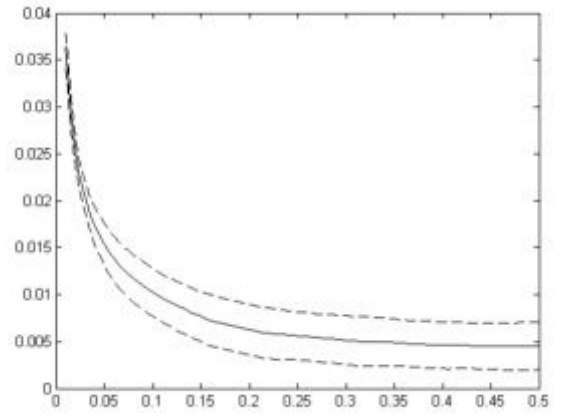


Рис. 2.61г. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 16.7 дБ))

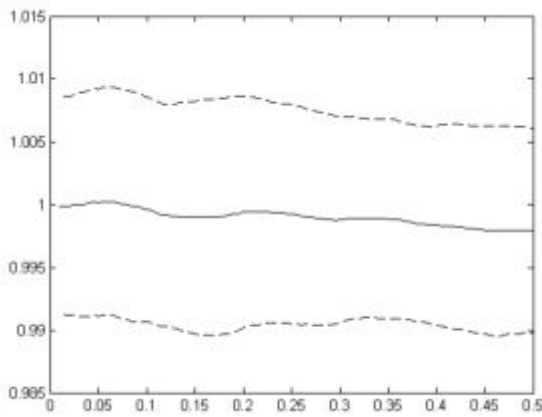


Рис. 2.61д. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=10.8 дБ)

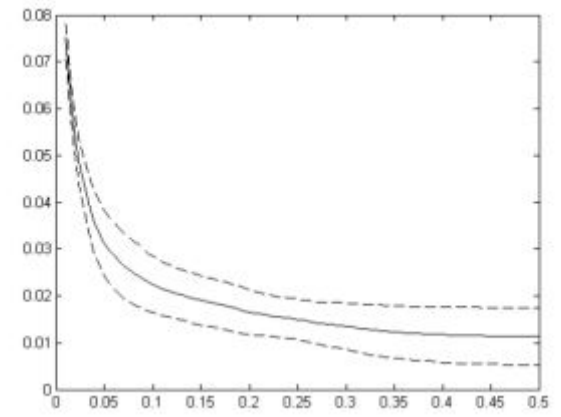


Рис. 2.61е. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 10.8 дБ))

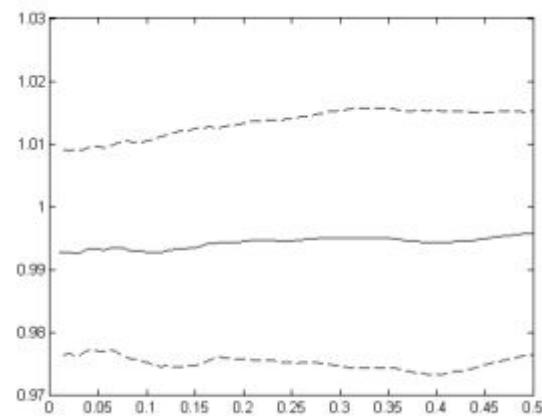


Рис. 2.61з. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=4.8 дБ)

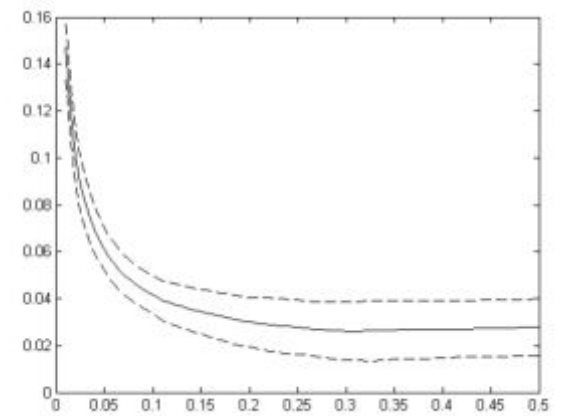


Рис. 2.61з. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 4.8 дБ))

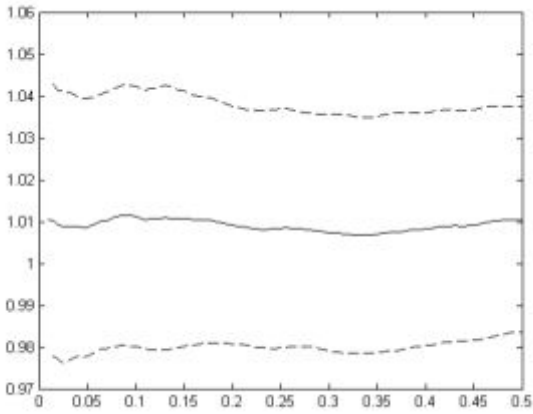


Рис. 2.61и. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=1.3 дБ)

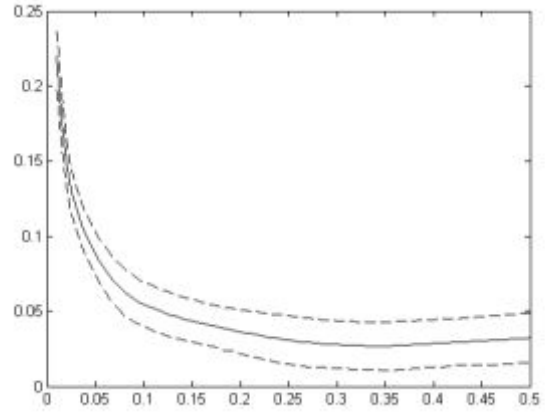


Рис. 2.61к. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = 1.3 дБ))

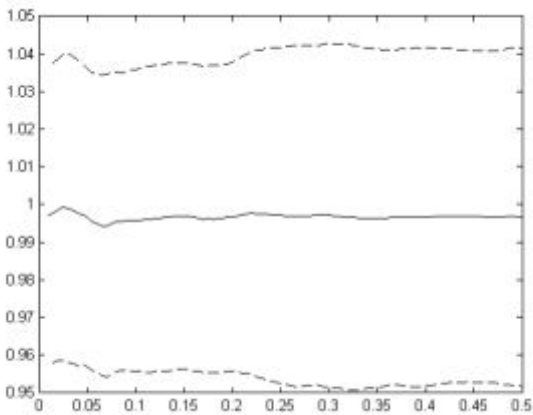


Рис. 2.61л. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=-1.2 дБ)

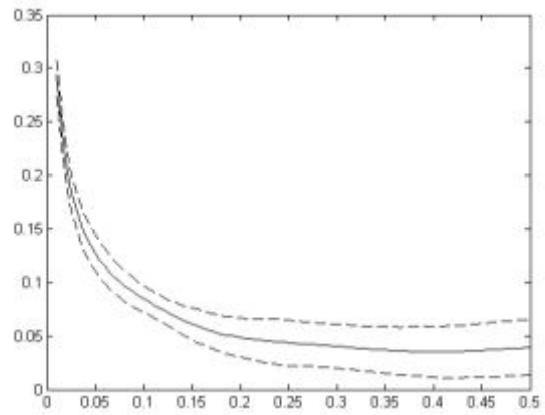


Рис. 2.61м. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = -1.2 дБ))

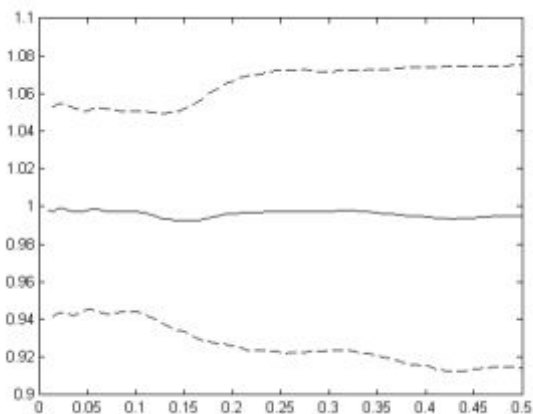


Рис. 2.61н. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta M\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR=-4.8 дБ)

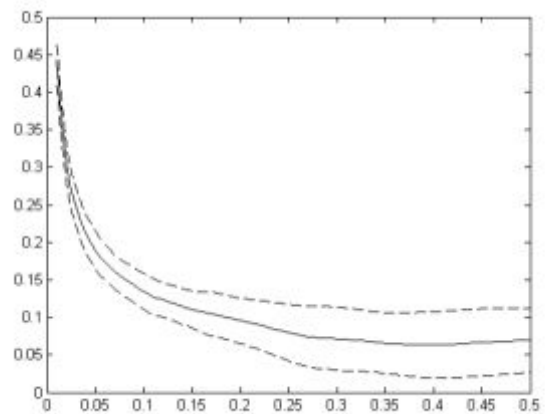


Рис. 2.61о. ВР  $F_{N_i}^{(21)}$ . График зависимости  $\overline{\{\Delta F^{(std)}\}}_k$  от  $L_k \cdot \Delta t$  (SNR = -4.8 дБ))



Сравнивая рис. 2.59, 2.61 видно, что свойства сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(21)}$  и ГК, выделяемой с помощью метода SSA, для случаев гауссова шума и шума с равномерным законом распределения оказываются подобными. Данный результат, в свою очередь, позволяет сделать вывод о том, что метод SSA оказывается не чувствительным в виду функции распределения случайной ВР  $F_N^{(1)}$  и далее при рассмотрении вопросов разделимости ВР вида «случайная составляющая» + «детерминированный ВР» рассматривать шум, например, с нормальным законом распределения.

### 2.3.3. Исследование разделимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и периодической составляющей

Рассмотрим результаты, получаемые при использовании метода SSA для анализа ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ , представляющего собой сумму независимых отсчетов шума с равномерным законом распределения и детерминированного ВР, представляющего собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = \sin(2\pi f t)$  ( $f$  – частота сигнала), вычисленные в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1), i = \overline{1, N}, \Delta t = T_s/(N-1), T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(22)} = \sin(2\pi f t_i) = \sin(2\pi f \Delta t(i-1)) = \sin\left(2\pi f \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

На рис. 2.62 представлены типичные зависимости сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  от их номера при различных SNR (здесь  $f = 10$  Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$ ).

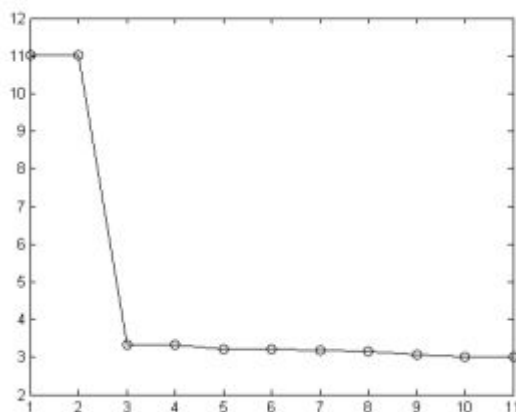


Рис. 2.62а. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = 17.0 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

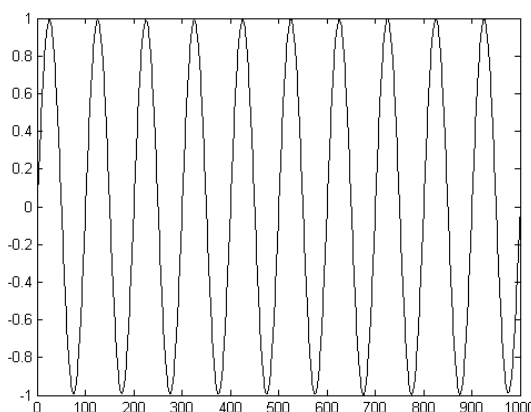


Рис. 2.62б. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR=17.0 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

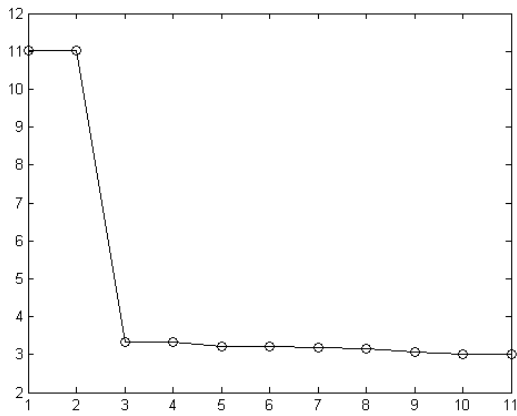


Рис. 2.62в. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = 3.0 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

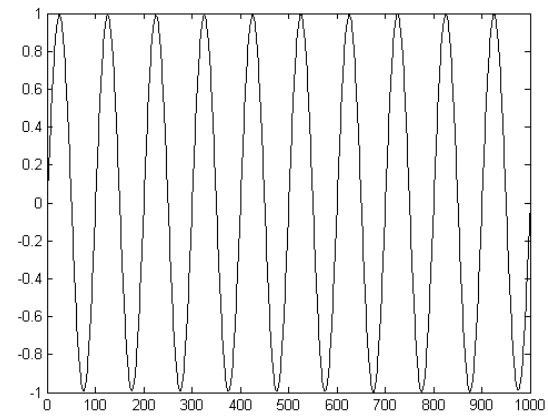


Рис. 2.62г ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR= 3.0 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

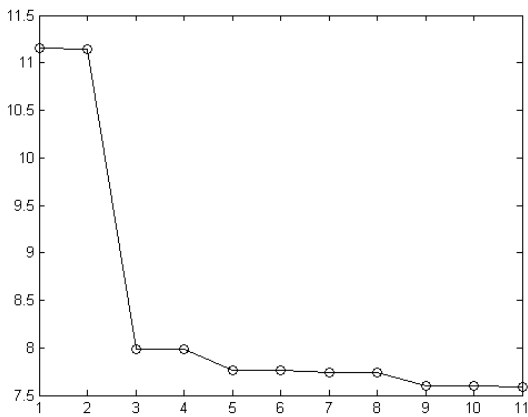


Рис. 2.62в. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = -3.0 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

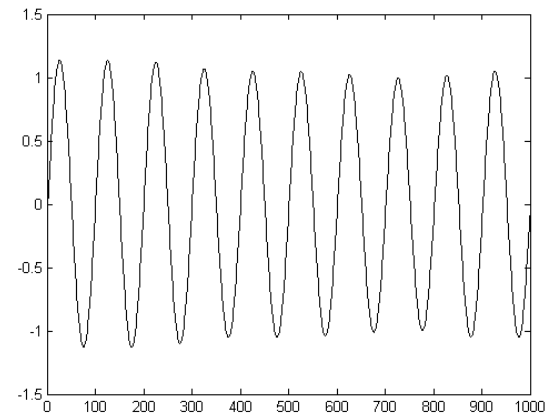


Рис. 2.62г. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR=-3.0 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

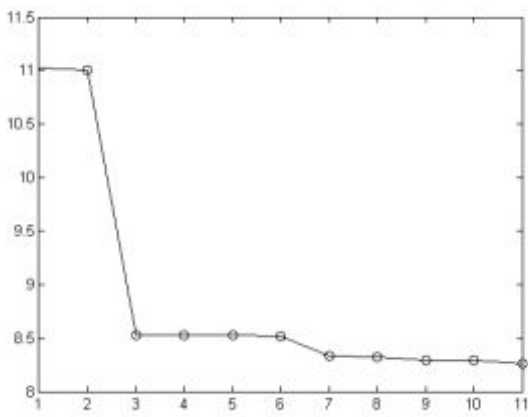


Рис. 2.62д. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости  $\log(\lambda_i) = f(i)$  (SNR = -6.4 дБ;  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

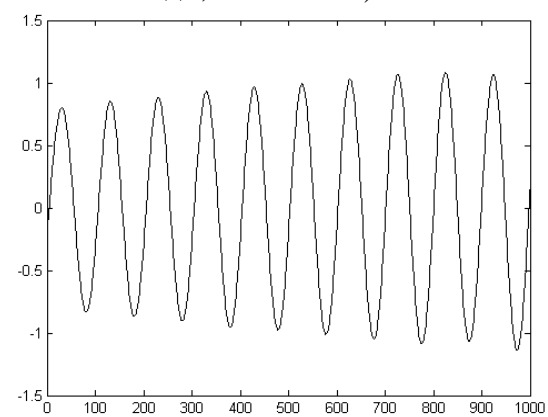


Рис. 2.62е. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . ГК, восстановленная по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR=-6.5 дБ,  $L \cdot \Delta t = 0.5$ )

Из рис. 2.61 видно, что при уменьшении SNR значения первого ( $\lambda_1$ ) и второго ( $\lambda_2$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  начинают отличаться друг от друга, кроме того происходит изменение формы ГК, восстановленной по первой ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) и второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ .

В связи с обнаружением зависимости значений сингулярных чисел траекторной матрицы и формы ГК ВР, восстановленной по первой ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) и второй ( $\lambda_2, U_2, V_2$ ) сингулярным тройкам разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ , от SNR были проведены исследования в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 2.57. В процессе моделирования при различных SNR были вычислены следующие зависимости, усредненные по ансамблям реализаций: зависимости первого ( $\lambda_1$ ) и второго ( $\lambda_2$ ) сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  от значений параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $L$  – параметр сдвига, и, соответственно, разности между ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  и ГК, восстановленной по первой и второй тройкам сингулярного разложения ВР  $F_N$ , а также зависимости СКО данных разностей от параметра  $L \cdot \Delta t$ . Полученные в ходе исследования результаты для случая  $f = 10$  Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$ ,  $N_{Trial} = 100$  представлены на рис. 2.63–2.70.

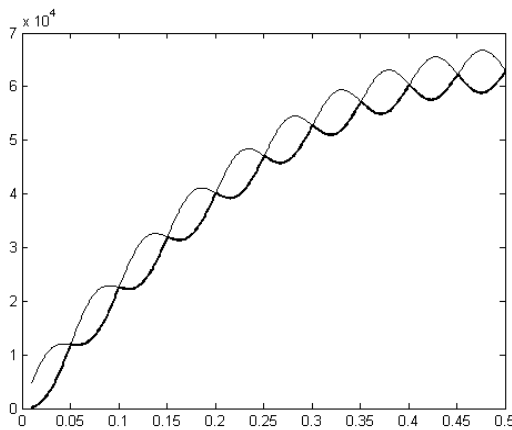


Рис. 2.63а. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Графики зависимостей усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 17.0 дБ)

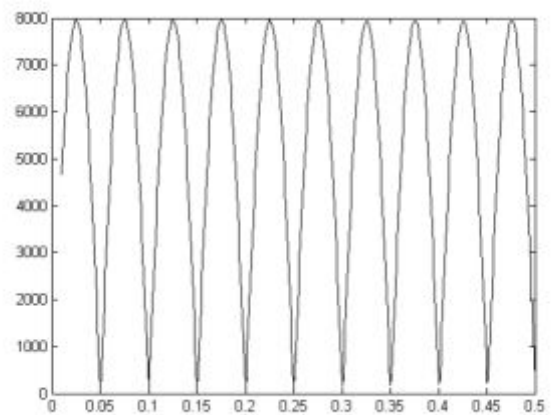


Рис. 2.63б. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости разности между усредненными по ансамблю реализациями первым  $\langle \lambda_1 \rangle$  и вторым  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярными числами траекторной матрицы  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(i)$  (SNR = 17.0 дБ)

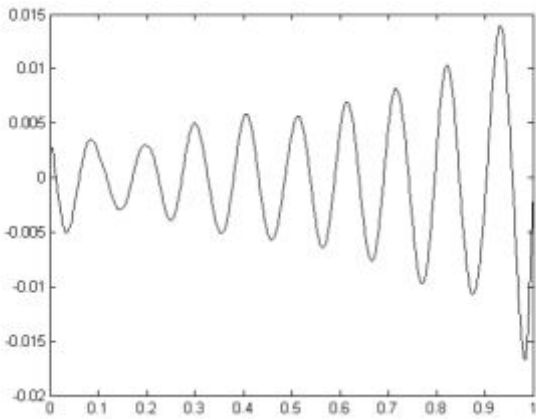


Рис. 2.63в. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = 17.0 дБ)

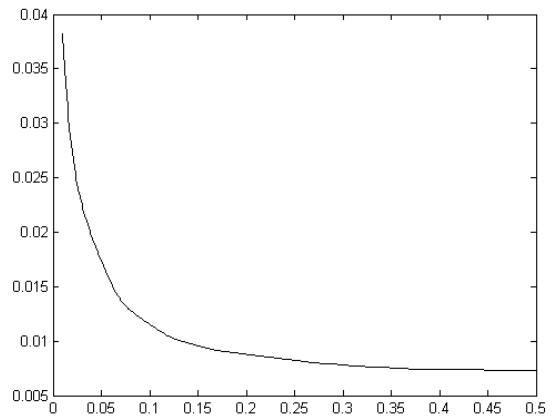


Рис. 2.63г. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Зависимость усредненно-го по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = 17.0 дБ)

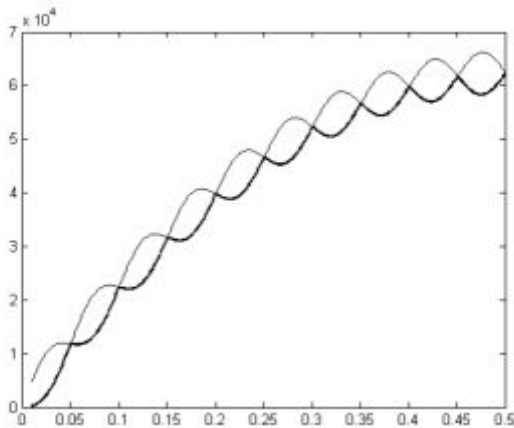


Рис. 2.64а. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 9.0 дБ)

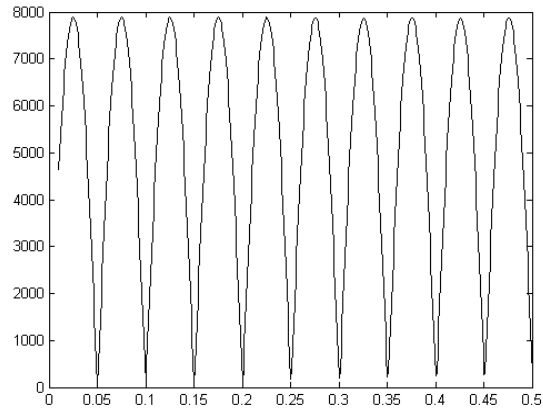


Рис. 2.64б. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым сингулярными числами траекторной матрицы  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(i)$  (SNR = 9.0 дБ)

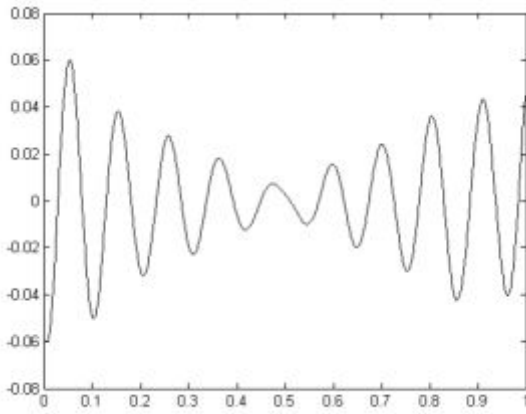


Рис. 2.64в. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  и соответствующими значениями ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = 9.0 дБ)

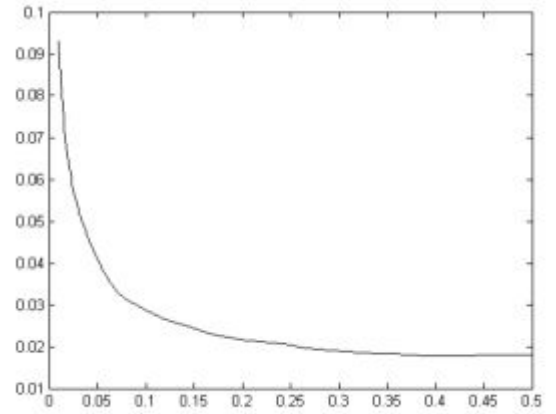


Рис. 2.64г. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = 9.0 дБ)

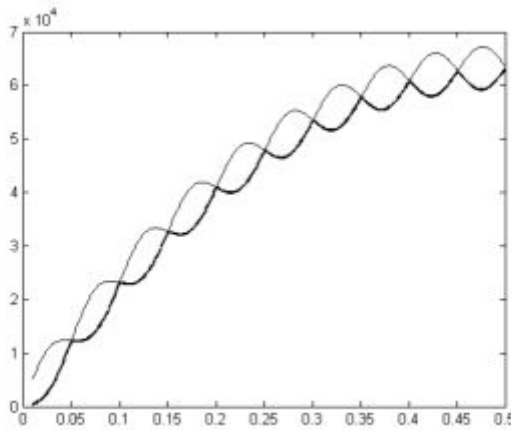


Рис. 2.65а. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 3.0 дБ)

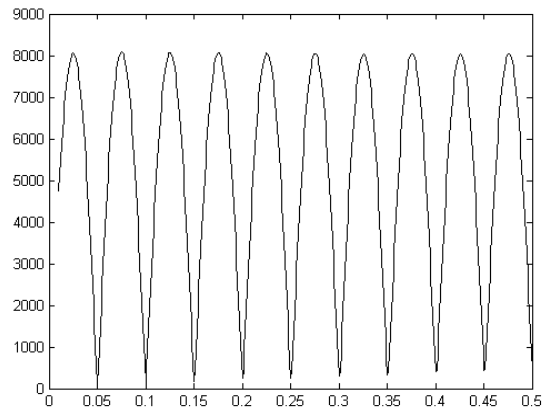


Рис. 2.65б. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости разности между усредненными по ансамблю реализаций первым  $\langle \lambda_1 \rangle$  и вторым  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярными числами траекторной матрицы  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(i)$  (SNR = 3.0 дБ)

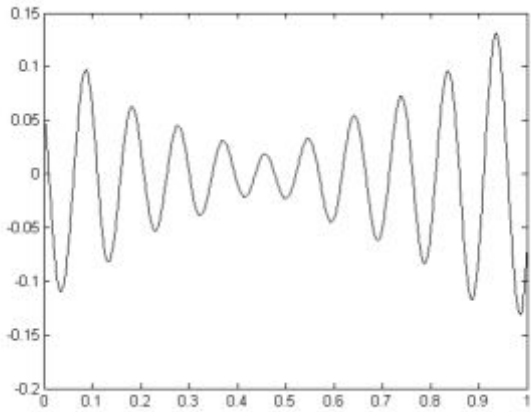


Рис. 2.65в. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  и соответствующими значениями ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = 3.0 дБ)

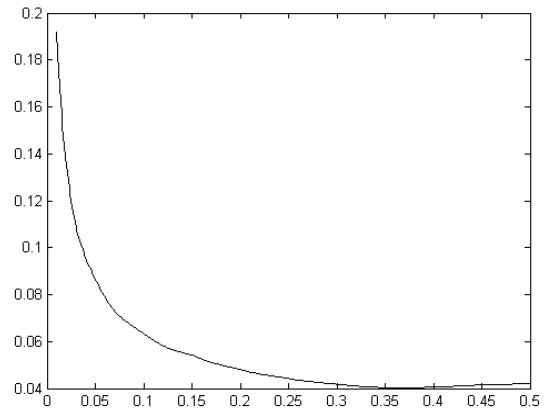


Рис. 2.65г. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = 3.0 дБ)

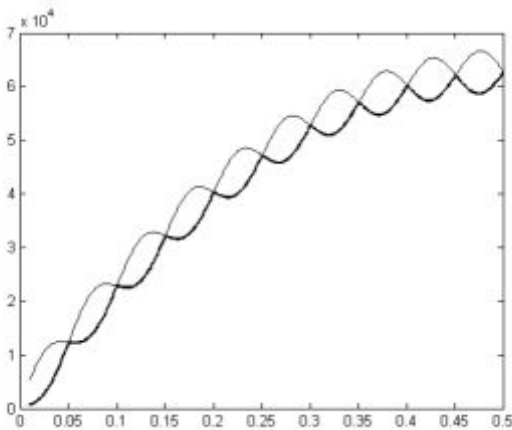


Рис. 2.66а. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 0.4 дБ)

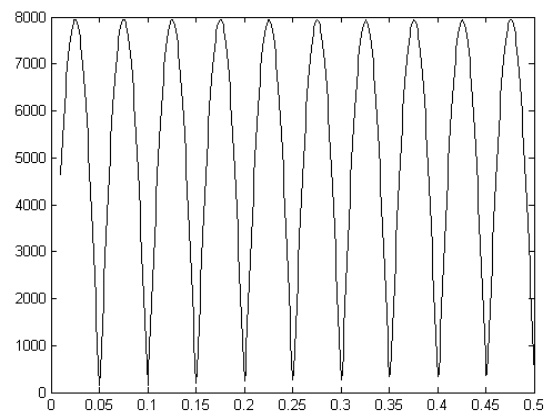


Рис. 2.66б. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым сингулярными числами траекторной матрицы  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(i)$  (SNR = 0.4 дБ)

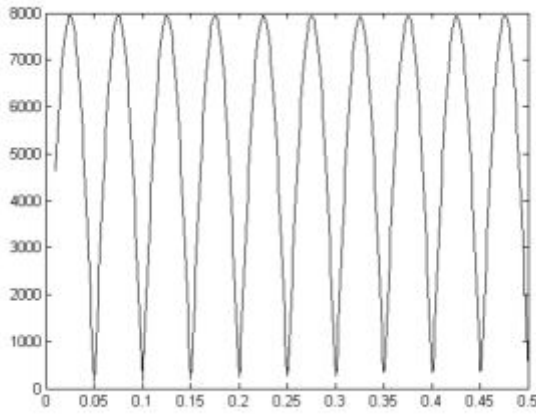


Рис. 2.66в. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  и соответствующими значениями ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = 0.4 дБ)

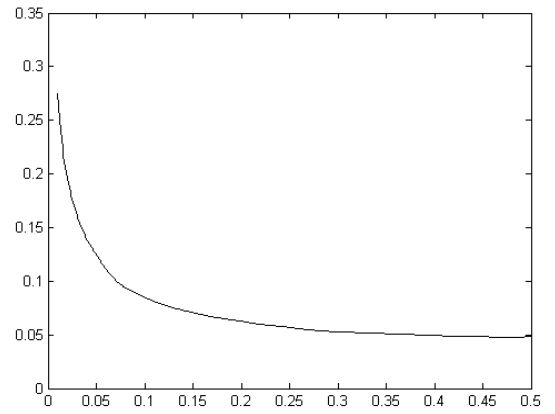


Рис. 2.66г. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = 0.4 дБ)

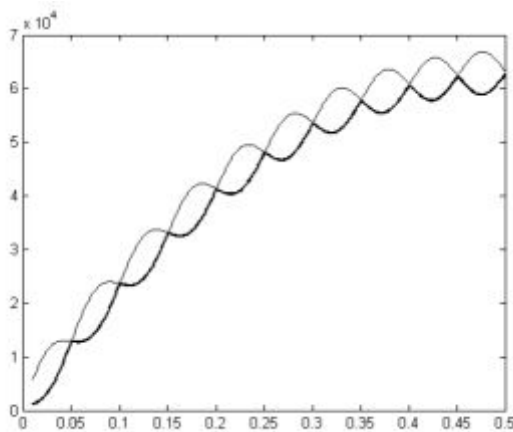


Рис. 2.67а. Зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого и второго чисел выборочной траекторной матрицы ВР  $F_N^{(2)}$  от величины  $F_N^{(1)}$  с (SNR = -0.4 дБ)

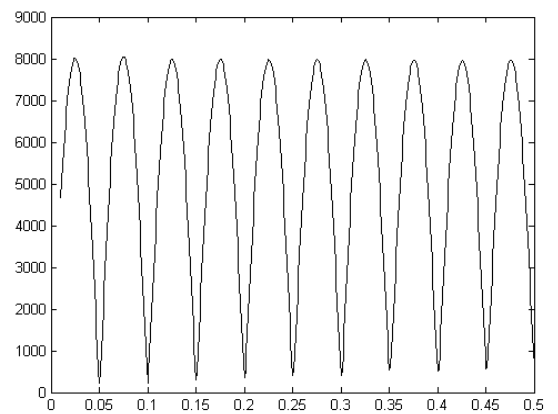


Рис. 2.67б. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым сингулярными числами траекторной матрицы  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(i)$  (SNR = -0.4 дБ)

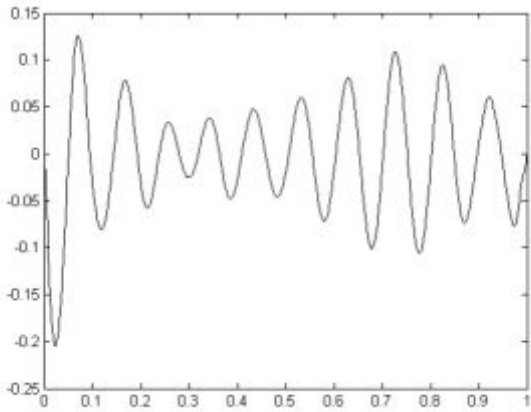


Рис. 2.67в. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . Выборочная разность между точными значениями VR  $F_{N_i}^{(22)}$  и соответствующими значениями ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = -0.4 дБ)

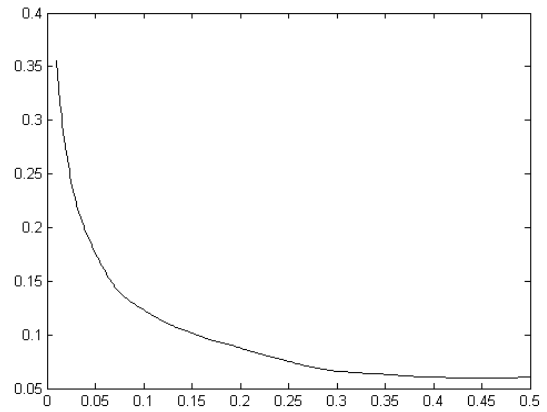


Рис. 2.67г. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между VR  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = -0.4 дБ)

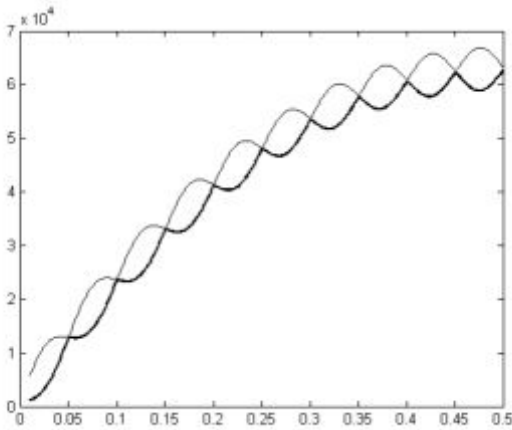


Рис. 2.68а. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -3.0 дБ)

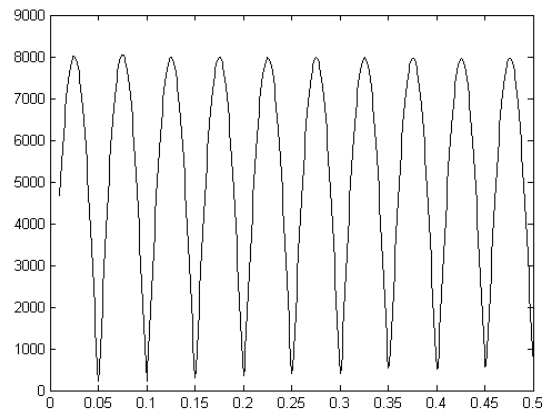


Рис. 2.68б. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым сингулярными числами траекторной матрицы  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(i)$  (SNR = -3.0 дБ)



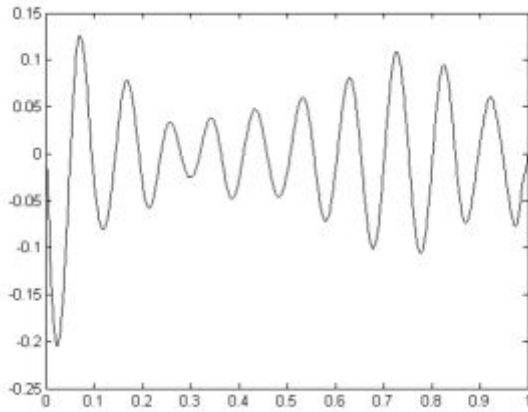


Рис. 2.68в. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . Выборочная разность между точными значениями VR  $F_{N_i}^{(22)}$  и соответствующими значениями ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = -3.0 дБ)

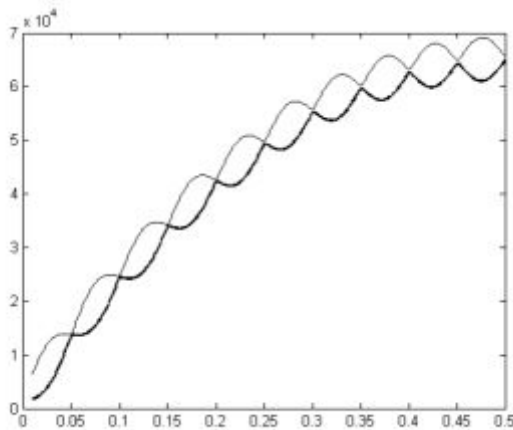


Рис. 2.69а. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -5.0 дБ)

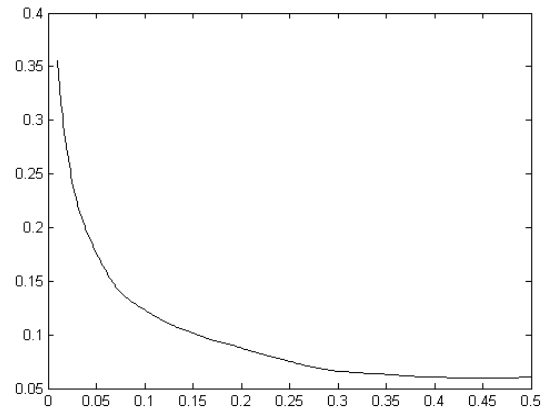


Рис. 2.68г. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между VR  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = -3.0 дБ)

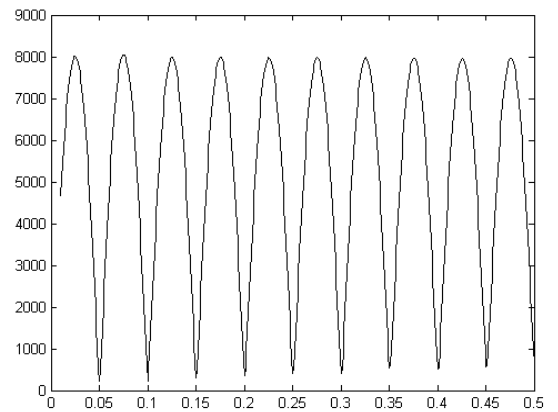


Рис. 2.69б. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости разности между усредненными по ансамблю реализаций первым и вторым сингулярными числами траекторной матрицы  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(i)$  (SNR = -5.0 дБ)

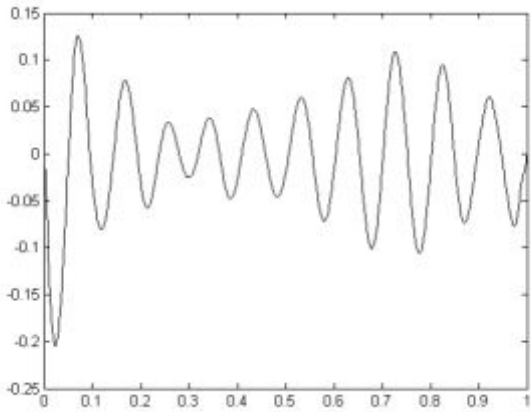


Рис. 2.69в. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . Выборочная разность между точными значениями VR  $F_{N_i}^{(22)}$  и соответствующими значениями ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = -5.0 дБ)

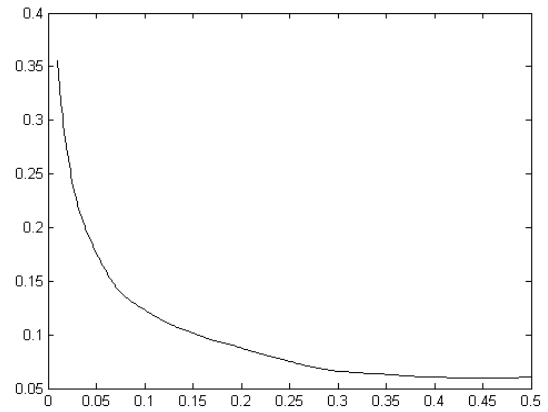


Рис. 2.69г. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между VR  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = -5.0 дБ)

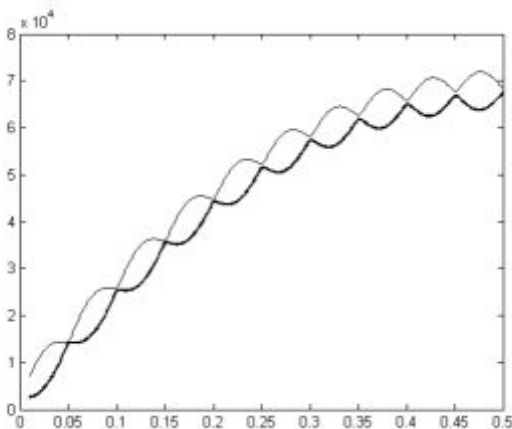


Рис. 2.70а. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -7.0 дБ)

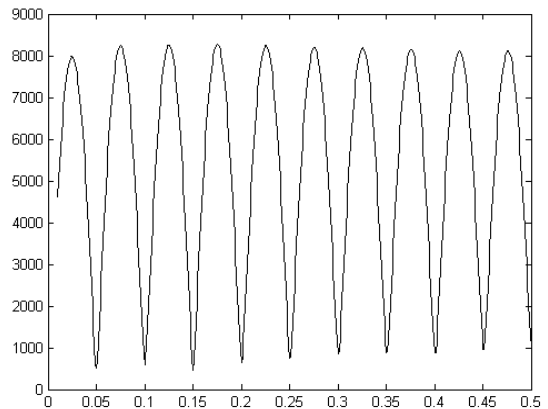


Рис. 2.70б. VR  $F_{N_i}^{(22)}$ . График зависимости разности между усредненными по ансамблю реализаций первым  $\langle \lambda_1 \rangle$  и вторым  $\langle \lambda_2 \rangle$  сингулярными числами траекторной матрицы:  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(i)$  (SNR = -7.0 дБ)

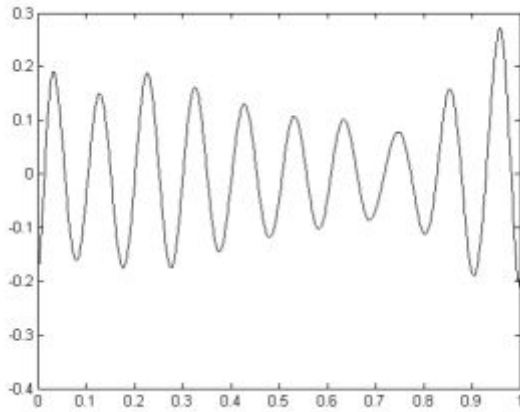


Рис. 2.70в. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Выборочная разность между точными значениями ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  и соответствующими значениями ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = -7.0 дБ)

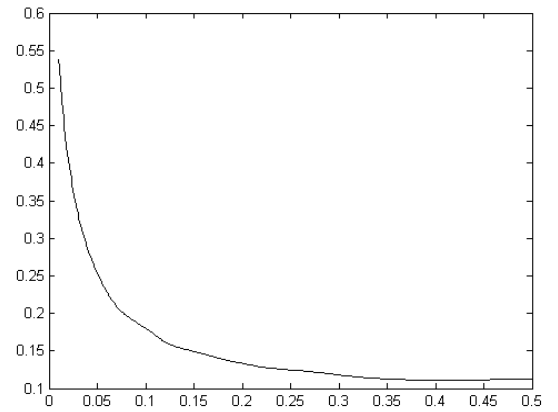


Рис. 2.70г. ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярным сингулярным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы (SNR = -7.0 дБ)

Из рис. 2.63–2.70 видно, что:

1) При уменьшении SNR для значений параметра сдвига  $L$ , при которых выполняется условие

$$L \cdot \Delta t \cdot f = 0.5 \cdot k, k = 1, 2, \dots \quad (2.31)$$

происходит увеличение разности между значениями первого  $(\lambda_1)$  и второго  $(\lambda_2)$  сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ .

2) Для всего рассмотренного диапазона значений SNR усредненная по ансамблю реализаций зависимость СКО разности между значениями ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и второй  $(\lambda_2, U_2, V_2)$  сингулярным сингулярным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  монотонно убывает при увеличении параметра  $L \cdot \Delta t$  в диапазоне  $[0, 0.3]$  с и остается практически постоянной при  $L \cdot \Delta t > 0.3$  с.

Отметим, что приведенные выше выводы, сделанные по результатам анализа зависимостей рис. 2.63–2.70, кажутся противоречащими друг другу. С одной стороны, разность между первым  $(\lambda_1)$  и вторым  $(\lambda_2)$  сингулярными числами траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$  для значений параметра  $L \cdot \Delta t$ , удовлетворяющих условию (2.31), оказывается возрастающей при увеличении данного параметра. С другой стороны, СКО разности между точными значениями ВР  $F_N^{(2)}$ , и соответствующими значениями ГК, восстановленной по первой  $(\lambda_1)$  и второй  $(\lambda_2)$  сингулярным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ , уменьшается при увеличении параметра  $L \cdot \Delta t$ . С нашей точки зрения, данный факт объясняется тем, что одновременно с увеличением абсолютного значе-

ния рассматриваемой разности первого и второго сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ , которая, как видно, из рис. 2.62г.–2.69г., может быть аппроксимирована линейной функцией ( $\sim L \cdot \Delta t$ ), происходит увеличение значений первого и второго сингулярных чисел по параболическому закону ( $\sim (L \cdot \Delta t)^2$ ). Следовательно, разность между первым ( $\lambda_1$ ) и вторым ( $\lambda_2$ ) сингулярными числами траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(22)}$ , отнесенная к значению любого из обсуждаемых сингулярных чисел будет уменьшаться ( $\sim (L \cdot \Delta t)^{-1}$ ). Соответственно, относительная погрешность вычисленных значений векторов матрицы X метода SSA ВР  $F_N$  будет меньше, что и отражено на рис. 2.63г.–2.70г.

Таким образом, для получения более точных значений периодической составляющей ВР вида «шум + периодическая составляющая» следует использовать максимально возможные для данного ВР значения параметра сдвига L.

### 2.3.3. Исследование делимости ВР, представляющего собой смесь гауссова шума и тренда

Рассмотрим результаты, получаемые при использовании метода SSA для анализа ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ , представляющего собой сумму независимых отсчетов шума с равномерным законом распределения и детерминированного ВР, представляющего собой последовательные отсчеты функции  $u(t) = \exp(-\alpha t)$ , вычисленные в узлах ВС  $t_i = \Delta t(i-1)$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $\Delta t = T_s / (N - 1)$ ,  $T_s$  – длительность интервала анализа:

$$F_{N_i}^{(2)} = \exp(-\alpha t_i) = \exp(-\alpha \Delta t(i-1)) = \exp\left(-\alpha \frac{T_s}{N-1}(i-1)\right).$$

На рис. 2.71–2.74 представлены типичные зависимости сингулярных чисел траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$  от их номера при различных SNR (здесь  $\alpha = -0.8 \text{ с}^{-1}$ ,  $T_s = 1 \text{ с}$ ,  $N = 1000$ ).

Из рис. 2.71–2.74 видно, что в не зависимости от SNR первое сингулярное число траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$   $\lambda_1$  а, соответственно, и первая тройка сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) соответствуют компоненте ВР  $F_N^{(2)}$ . Разность между ВР  $F_N^{(2)}$  и компонентой ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке сингулярного траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ), напротив, оказывается зависящей от SNR – уменьшение SNR приводит к увеличению области значений обсуждаемой разности. При этом среднее значения рассматриваемых разностей оказываются близкими к нулю, что позволяет считать смещение выделенной ГК ВР  $F_{N_i}^{(23)}$  относительно ВР  $F_N^{(2)}$  в рассмотренном диапазоне SNR близким к нулю.

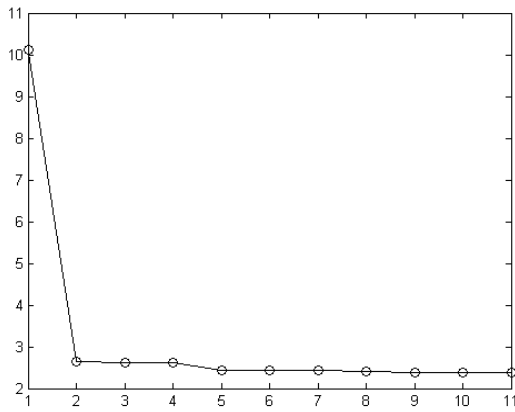


Рис. 2.71а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_1 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 17.0 дБ)

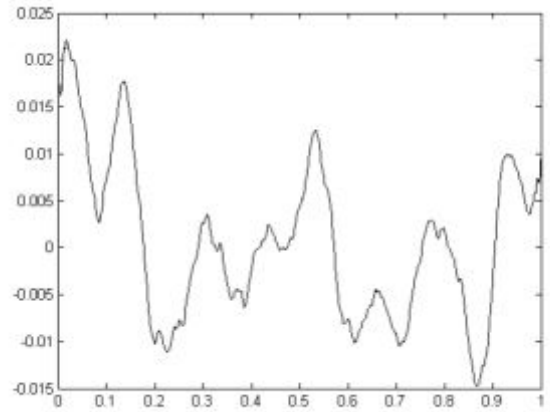


Рис. 2.71б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Выборочная разность между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ( $\lambda_1$ ) (SNR = -7.0 дБ)

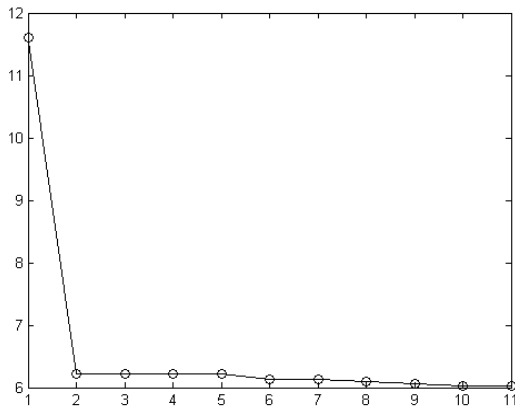


Рис. 2.72а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_1 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 3.0 дБ)

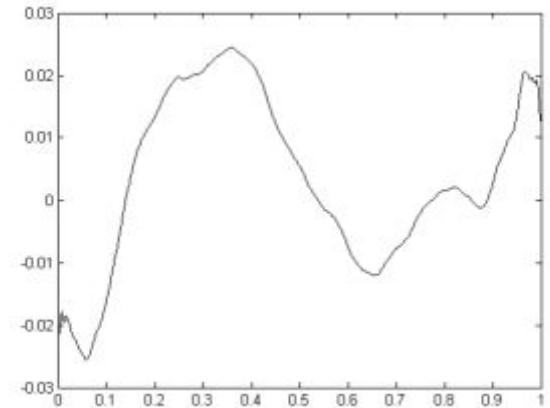


Рис. 2.72б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Выборочная разность между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$  ( $\lambda_1, U_1, V_1$ ) (SNR = 3.0 дБ)

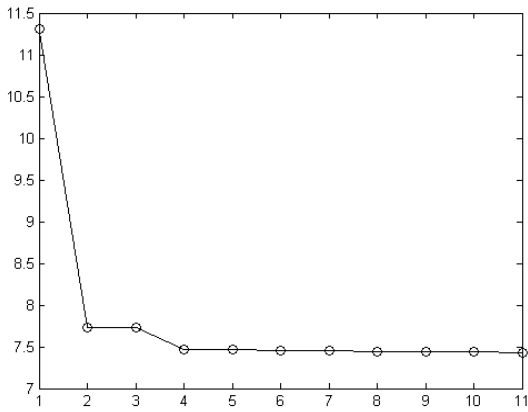


Рис. 2.73а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . График зависимости усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_1 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -3.0 дБ)

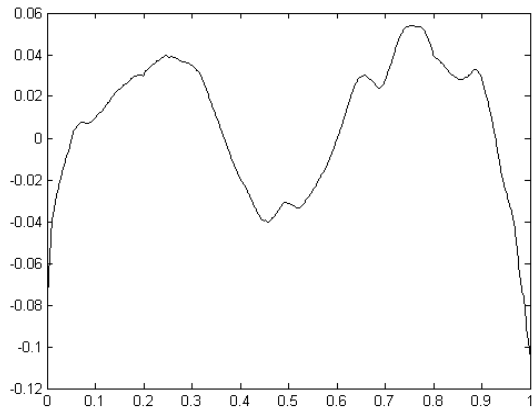


Рис. 2.73б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Выборочная разность между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR = -3.0 дБ)

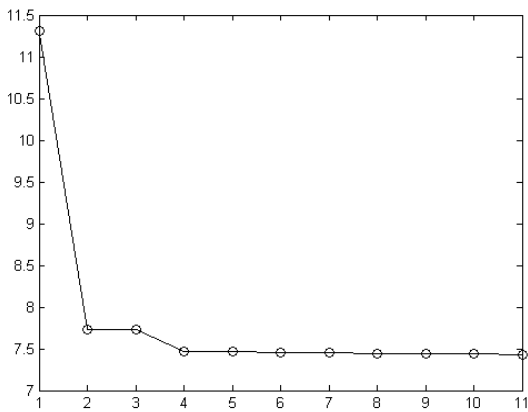


Рис. 2.74а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . График зависимость усредненных по ансамблю реализаций первого  $\langle \lambda_1 \rangle$  и второго  $\langle \lambda_1 \rangle$  сингулярных чисел траекторной матрицы от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -6.0 дБ)

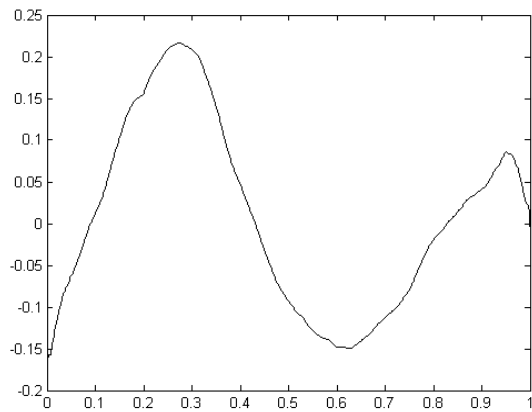


Рис. 2.74б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Выборочная разность между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой тройке сингулярного разложения траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  (SNR = -6.0 дБ)

В связи с обнаружением зависимости разности между ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$   $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и ВР  $F_N^{(2)}$ , было проведено исследование, в ходе которого выполнено статистическое моделирование в соответствии с алгоритмом, блок-схема которого приведена на рис. 2.57. В процессе моделирования при различных SNR были вычислены следующие зависимости, усреднённые по ансамблям реализаций: зависимость разности между между ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$   $(\lambda_1, U_1, V_1)$  и ВР  $F_N^{(2)}$ , от параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $L$  – параметр сдвига, и, соответственно, зависимость СКО обсуждаемой разности от

параметра  $L \cdot \Delta t$ . Полученные в ходе исследования результаты для случая  $\alpha = -0.8$ , Гц,  $T_s = 1$  с,  $N = 1000$ ,  $Number\_of\_Trial = 100$  представлены на рис. 2.75–2.80.

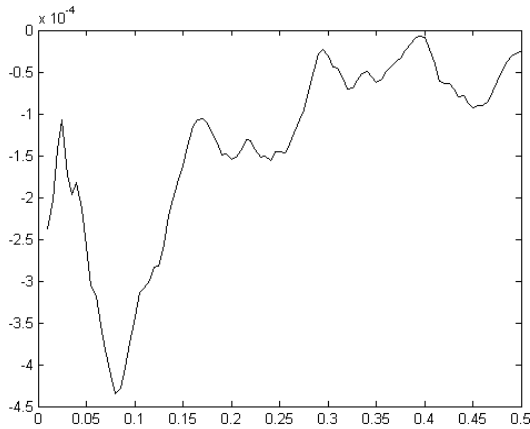


Рис. 2.75а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций среднего значения разности ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 17.0 дБ)

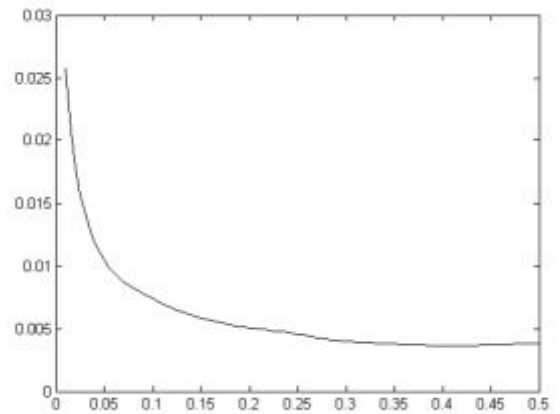


Рис. 2.75б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 17.0 дБ)

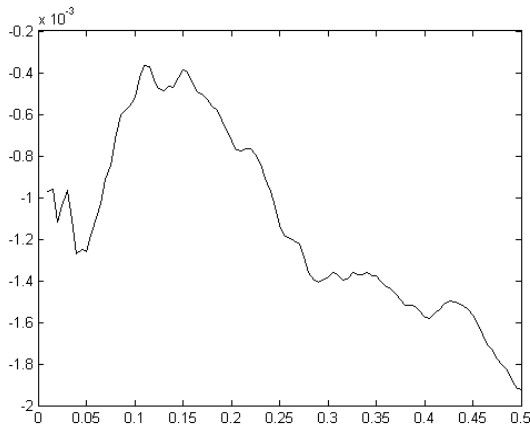


Рис. 2.76а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций среднего значения разности ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$   $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 9.3 дБ)

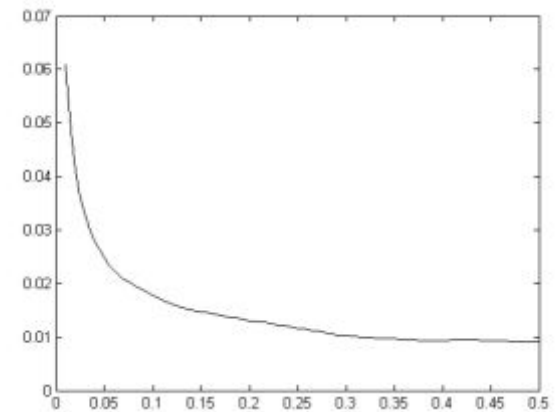


Рис. 2.76б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 9.3 дБ)

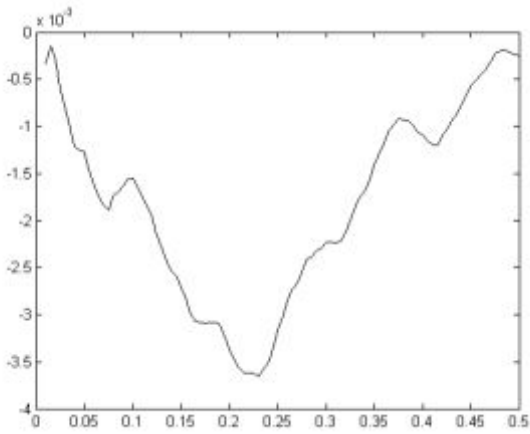


Рис. 2.77а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций среднего значения разности ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 3.4 дБ)

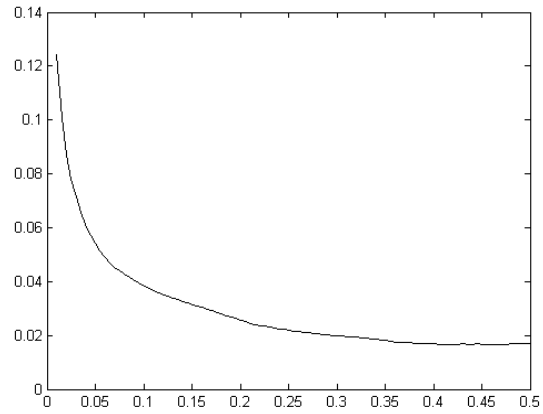


Рис. 2.77б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 3.4 дБ)

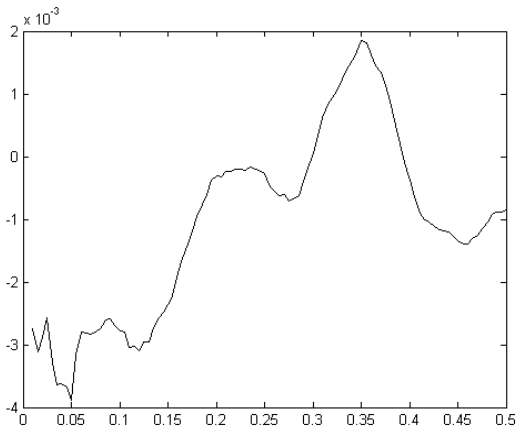


Рис. 2.78а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций среднего значения разности ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 0.3 дБ)

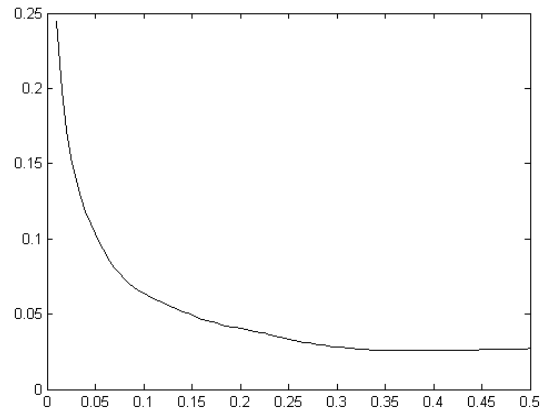


Рис. 2.78б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = 0.3 дБ)



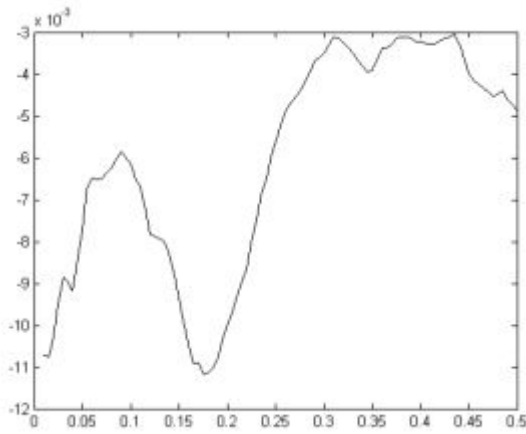


Рис. 2.79а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций среднего значения разности ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -2.9 дБ)

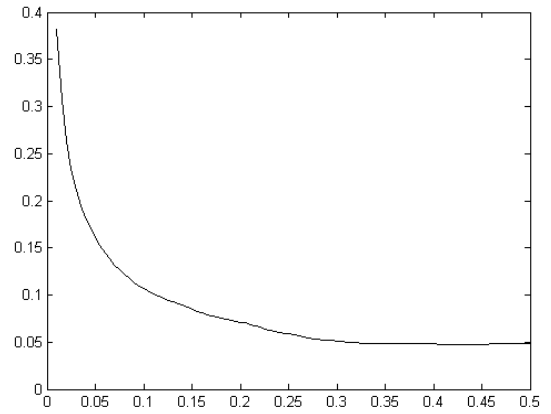


Рис. 2.79б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -2.9 дБ)

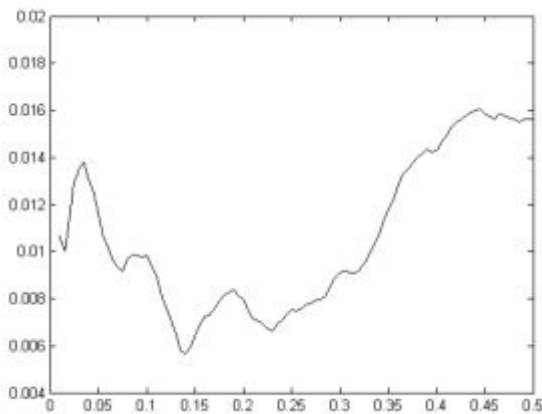


Рис. 2.80а. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненной по ансамблю реализаций среднего значения разности ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -8.7 дБ)

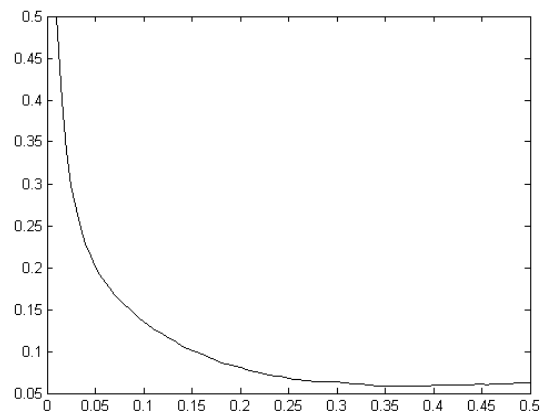


Рис. 2.80б. ВР  $F_{N_i}^{(23)}$ . Зависимость усредненного по ансамблю реализаций СКО разности между точными значениями ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$  от  $L \cdot \Delta t$  (SNR = -8.7 дБ)

Из рис. 2.75–2.80 видно, что:

1) Зависимость усредненного по ансамблю реализаций среднего значения разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке сингулярного разложения траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}$   $(\lambda_1, U_1, V_1)$ , от параметра  $L \cdot \Delta t$  не описывается детерминированной функцией.

2) При уменьшении SNR происходит увеличение диапазона возможных значений между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матри-

цы ВР  $F_{N_i}^{(23)}(\lambda_1, U_1, V_1)$ , от параметра  $L \cdot \Delta t$ . Однако, принимая во внимание, что данная величина оказывается малой в сравнении со средним значения ВР  $F_N^{(2)}$ , можно считать получаемые при этом оценки несмещенными.

3) Для всего рассмотренного диапазона значений SNR усредненная по ансамблю реализаций зависимость СКО разности между ВР  $F_N^{(2)}$  и ГК, восстановленной по первой сингулярной тройке траекторной матрицы ВР  $F_{N_i}^{(23)}(\lambda_1, U_1, V_1)$ , убывает при увеличении параметра  $L \cdot \Delta t$  в диапазоне  $[0, 0.3]$  с и остается практически постоянной при  $L \cdot \Delta t > 0.3$  с.

Следовательно, при анализе реальных ВР вида «шум + тренд» следует использовать такие параметры сдвига, чтобы выполнялось условие  $L \cdot \Delta t > 0.3$ .

## 2.4. Выводы

1. Впервые в методе SSA для исследования проблемы разделимости ВР вида «шум + детерминированная составляющая» предложено использовать статистическое моделирование.

2. Результаты статистического моделирования свидетельствуют о разделимости ВР вида «шум + const», «шум + периодическая составляющая», «шум + тренд» в не зависимости от вида функции распределения шума.

Даны научно обоснованные рекомендации по выбору для рассмотренных видов ВР значений сдвига  $L$ .

### ГЛАВА 3. АНАЛИЗ И ПРОГНОЗИРОВАНИЕ РЕАЛЬНЫХ ВР МЕТОДОМ SSA

В данной главе рассмотрен опыт применения подхода, развитого в предыдущей главе, при использовании метода SSA для анализа и прогнозирования некоторых известных ВР, в том числе: ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа [118] и ВР, содержащего среднесуточные и с среднечасовые значения цен на электроэнергию в [77].

#### 3.1. Анализ ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа

Число Вольфа  $R$  или относительное цюрихское число солнечных пятен является одним из главных индексов солнечной активности. Суточный индекс активности пятен  $R$ , определенный как

$$R = k(10g + s),$$

где  $S$  – число отдельных пятен,  $g$  – число групп пятен и  $k$  – фактор обсерватории (обычно меньший 1), учитывающий суммарный вклад условий наблюдений, тип телескопа, и приводящий наблюдаемые величины к стандартным цюрихским числам.

В настоящее время работу по созданию и распространению чисел Вольфа ведет Королевская обсерватория Бельгии (Royal Observatory of Belgium), на сайте [77] которой помещены таблицы и графики среднемесячных чисел Вольфа, начиная с 1749 г.

В связи с тем, что процессы, протекающие на Солнце, оказывают непосредственное влияние на геофизические и биологические процессы Земли [17, 35, 85, 86, 115], задача исследования ВР, описывающего динамику числа солнечных пятен, весьма актуальна. Это, в том числе подтверждается, продолжающимися в настоящее время активными поисками методов обработки данного ВР (см., например, [55, 64, 89]). Напомним, что основная трудность анализа рассматриваемого ВР обусловлена его нестационарностью. Отметим, что на сегодняшний день универсальных методов, пригодных для анализа частотно-временных характеристик нестационарных ВР, не существует.

Необходимо также отметить, особое место рассматриваемой задачи в истории развития методов спектрального оценивания [53], поскольку именно на ней проходили апробацию все известные на сегодняшний день методы частотного анализа ВР (классические, параметрические, непараметрические). Ссылки на соответствующие оригинальные работы можно найти в [53].

Отметим, что ранее метода SSA к анализу ВР, содержащего значения чисел Вольфа за период с января 1749 г. по март 2008 г. ( $N = 3111$ ) (рис. 3.1), уже применялся [64]. В данной работе автором был использован рекомендованный в [21] размер окна сдвига  $L = 1556$ , обеспечивающий, как ожидалось, наиболее детальный анализ данного ВР. Отметим, что в целом, полученные результаты оказались согласованными с результатами работы [64], в которой для исследования обсуждаемого ВР использовался вейвлет-анализ [9, 16].

В связи с необходимостью проведения сравнительного анализа результатов, полученных в [63], с соответствующими результатами, полученными при использовании методики выделения ГК на основе анализа разностей сингулярных чисел выборочной траекторной матрицы, номера которых отличаются друг от друга на единицу, от размера окна

сдвига, представляется целесообразным привести самостоятельно полученные результаты для ВР, содержащего значения чисел Вольфа за период с января 1749 г. по май 2012 г. ( $N = 3162$ ,  $L = 1581$ ).

Зависимость  $\sqrt{\lambda_i} = f(i)$ , а также первые 24-ти сингулярных векторов траекторной матрицы анализируемого ВР  $V_i$ , объясняющие 92.0% его дисперсии, представлены на рис. 3.2, 3.3, соответственно.

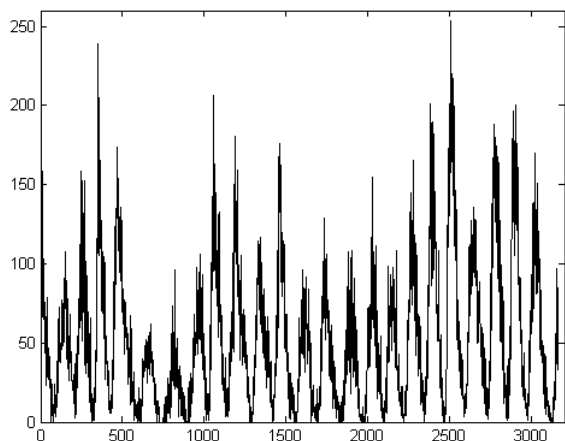


Рис. 3.1. Зависимость мгновенных средне-месячных значений чисел Вольфа от времени в период с января 1749 г. по май 2012 г.

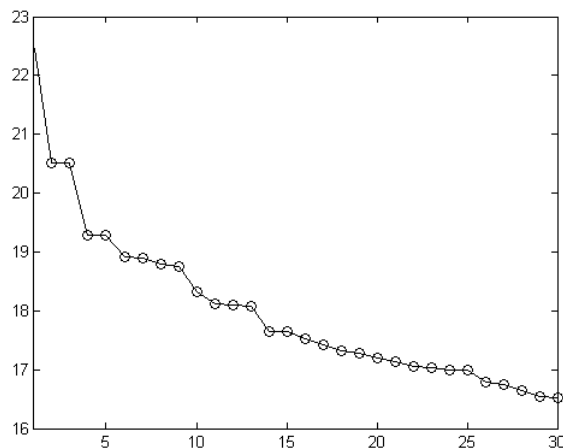


Рис. 3.2. Зависимость  $\sqrt{\lambda_i} = f(i)$  ВР, содержащего мгновенные среднемесячные значения чисел Вольфа от времени период с января 1749 г. по май 2012 г., от его номера

Из рис. 3.2, 3.3 видно, что если принимать во внимание близость последовательных значений собственных чисел (соответственно, близость дисперсий, объясняемых соответствующим вектором), а также «степень похожести» сингулярных векторов друг на друга, то становится понятно, что таковых пар оказывается весьма много, например, 2–3, 4–5, 6–7, 8–9, 11–12 и т.д. Причем, с уменьшением значения сингулярного числа появляются ГК, значения периодов которых противоречат физическим представлениям о процессах протекающих на Солнце (например, у сингулярных векторов № 20–23 период гармонической составляющей оказывается равным  $\approx 5,8$  года). Данный результат свидетельствует о том, что для обоснованного выбора сингулярных троек исследуемого ВР требуются привлечение дополнительных критериев.

Принимая во внимание результаты исследования особенностей сингулярных чисел выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР, приведенные в Главе 2, понятно, что в качестве дополнительного критерия выбора сингулярных векторов для их последующей группировки, можно использовать зависимости разностей между последовательными сингулярными числами от размера окна сдвига  $L$ . Данные зависимости, вычисленные для исследуемого ВР, представлены на рис. 3.4.

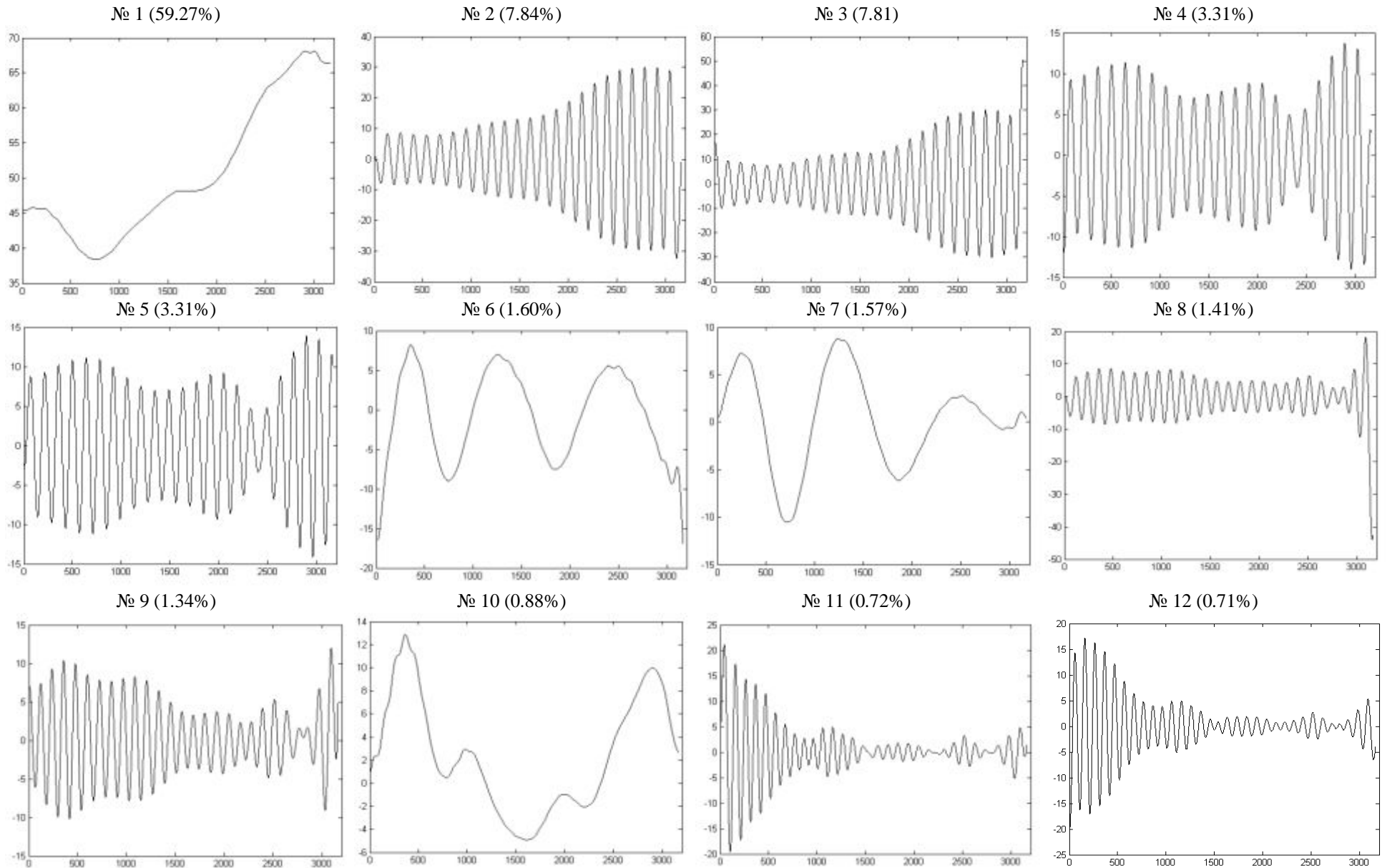


Рис. 3.3. Сингулярные векторы траекторной матрицы анализируемого ВР (начало)

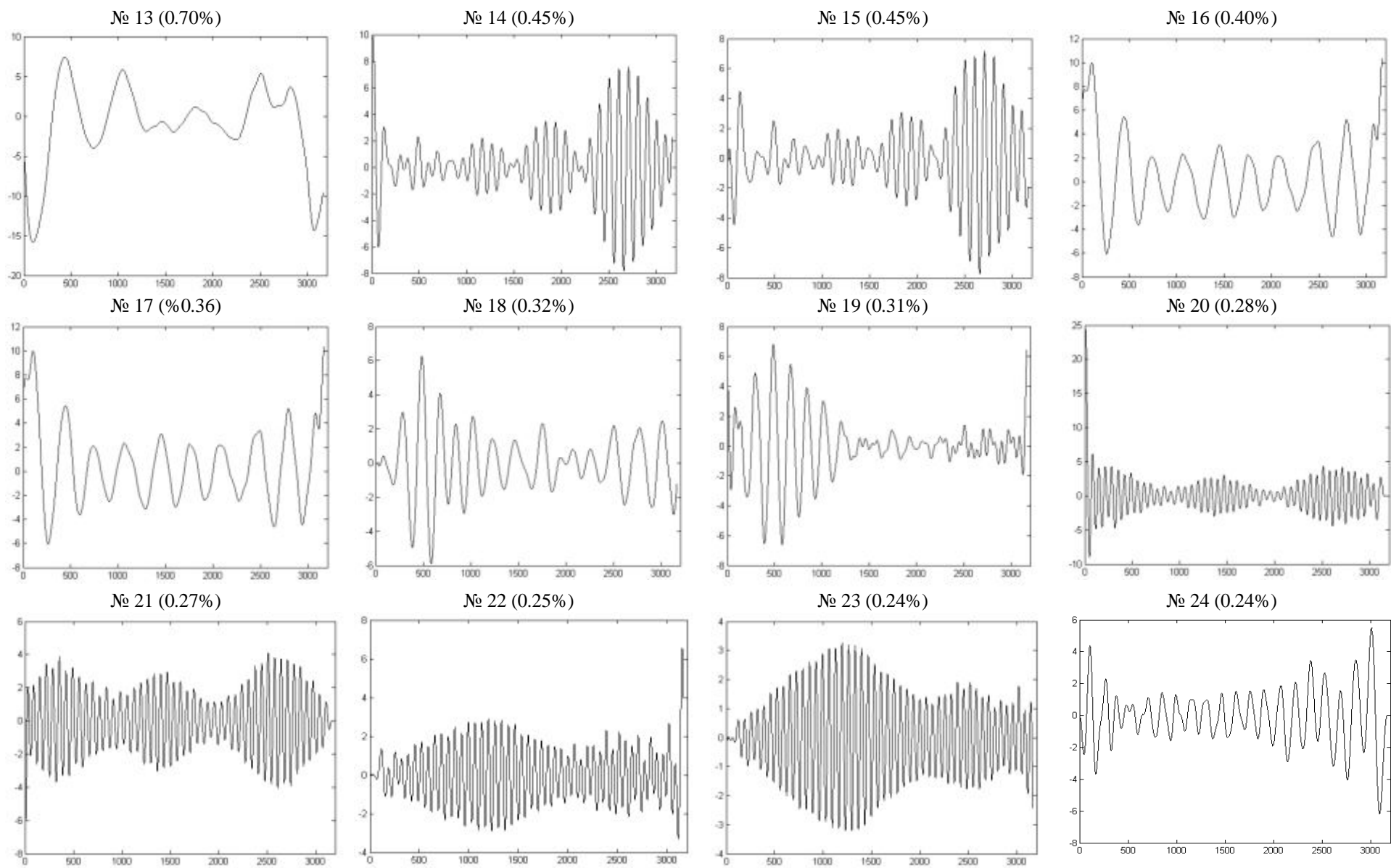


Рис. 3.3. Сингулярные векторы тракторной матрицы анализируемого ВР (окончание)

Анализ рис. 3.4 позволяет сделать вывод о том, что описанным в Главе 2 свойствам зависимостей  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{(i,i+1)}$  соответствуют следующие сингулярные числа: № 1, № 2–3, № 4–5, № 6–7; № 8–9, объясняющие  $\approx 86,8\%$  дисперсии анализируемого ВР. При этом, оказывается возможным, используя обсуждаемые зависимости, выбирать размер окна сдвига  $L$ , так чтобы оно соответствовало одному из минимальных значений зависимости разностей между последовательными сингулярными числами от размера окна сдвига  $L$ , что обеспечит, как было показано в Главе 2, наименьшую погрешность восстановления соответствующей компоненты анализируемого ВР.

Отметим, что используя предложенный в работе подход, оказывается возможным существенно сократить количество ГК, выделенных ранее в [63] (см. табл. 3.1). (Значения периодов гармоник, соответствующих максимумам спектральной плотности мощности при этом не изменяются).

Таблица 3.1. Значения периодов максимальных гармоник периодограмм ГК, выделенных в [63]

№ ГК	Период, месяц	Период, год	Доля объясняемой дисперсии, %
2,3	130	10.83	15.60
4,5	141	11.75	4.70
8,9	119	9.92	2.60
11,12,14,15	95	7.92	2.40
18,19	183	15,25	0.70
20,21,22,23	68	5.77	1.10
24,25	155	12.92	0.45
30,31	66	5.46	0.28

Так как сингулярные векторы, соответствующие сингулярным числам выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР № 6, 7, могут быть описаны медленно изменяющимися во времени функциями, поэтому их естественно объединить с трендом (собственный вектор, соответствующий собственному числу № 1) (рис. 3.5). Из рис. 3.5 видно, что в изучаемом ВР присутствует «низкочастотная» составляющая (ГК, восстановленная по сгруппированным сингулярным тройкам № 1, 6, 7), объясняющая 63,5% общей дисперсии ВР, которая может быть классифицирована как «вековая» (точнее 80–100 летняя) составляющая. Отметим, что ее период (его оценка может быть получена как длительность ВИ, между последовательными максимумами рассматриваемой зависимости) обнаруживает тенденцию к увеличению с течением времени: с 1778 г. по 1850 г. равнялся  $\approx 72$  года, а с 1850 г. по 1980 г. –  $\approx 125$  лет. Кроме того, следует отметить, что происходит изменение максимального значения рассматриваемой зависимости, равного 71 году в 1778 г., 59 – в 1850 г., и 76 – в 1980 г., соответственно. Полученные результаты позволяют сделать предположение о присутствии в рассматриваемой зависимости периодической составляющей, которая ответственна за амплитудную модуляцию. Период модулирующей функции равняется  $\approx 200$  лет.

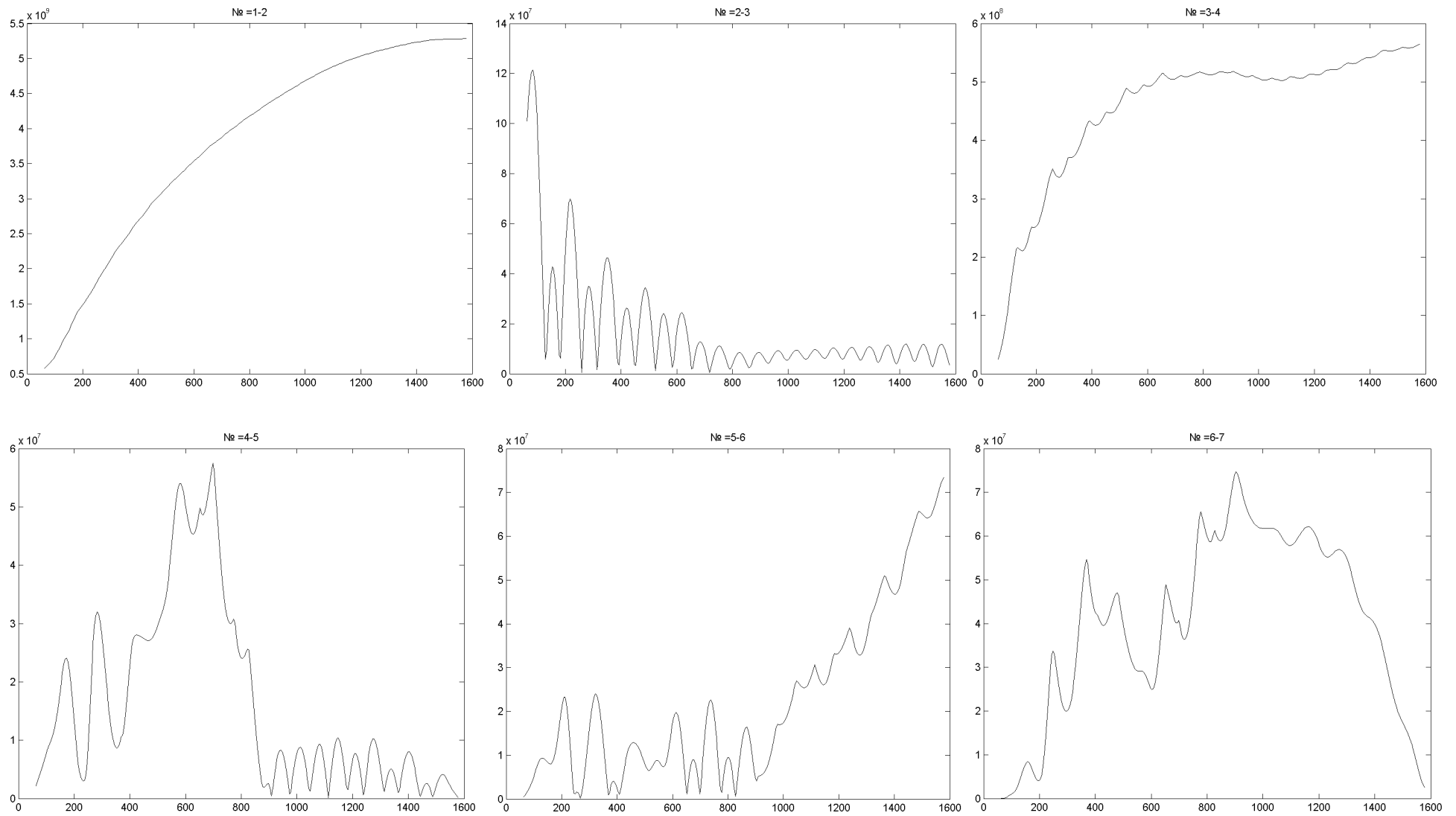


Рис. 3.4. Графики зависимостей  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{(i,i+1)}(L \cdot \Delta t)$  (начало)



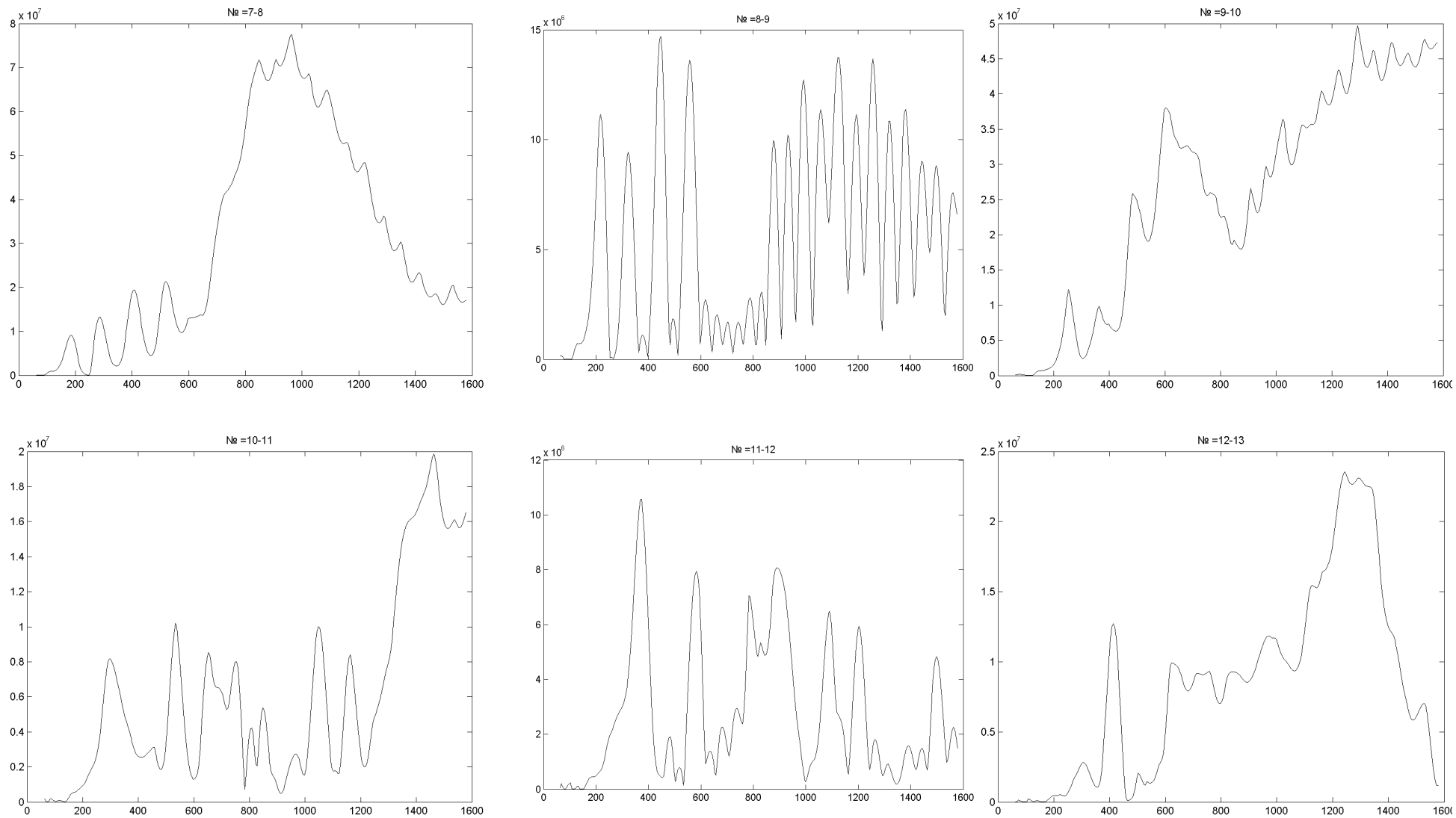


Рис. 3.4. Графики зависимостей  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{i,i+1}(L \cdot \Delta t)$  (продолжение)

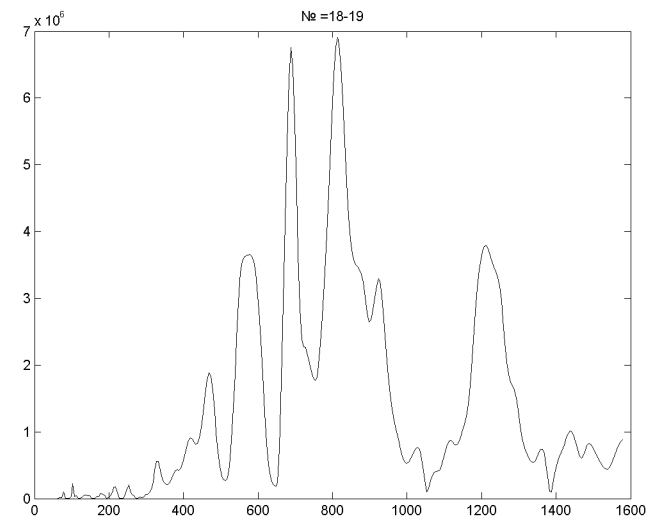
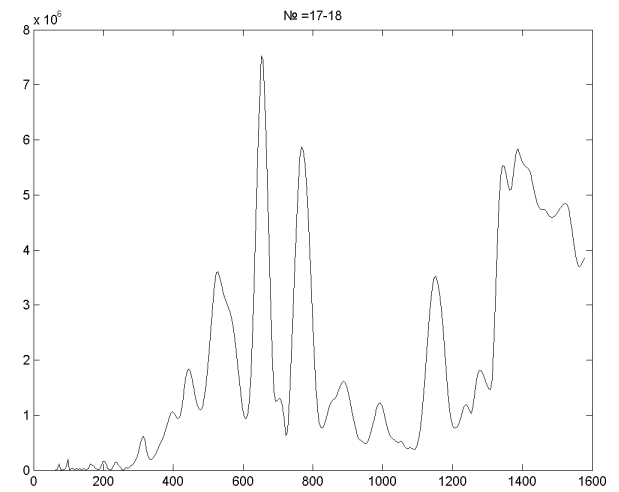
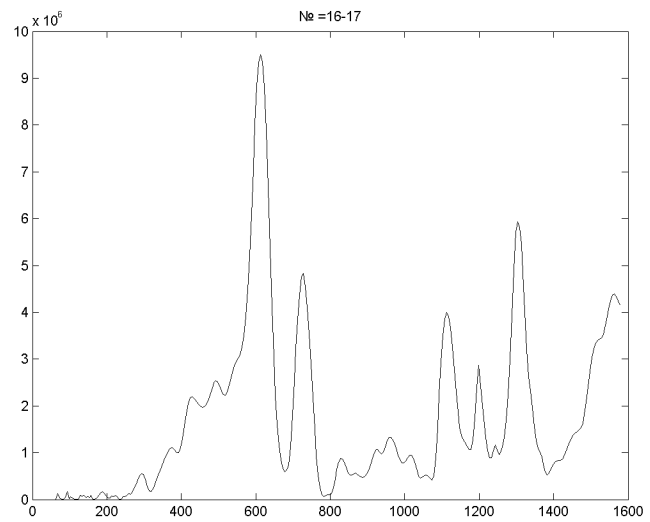
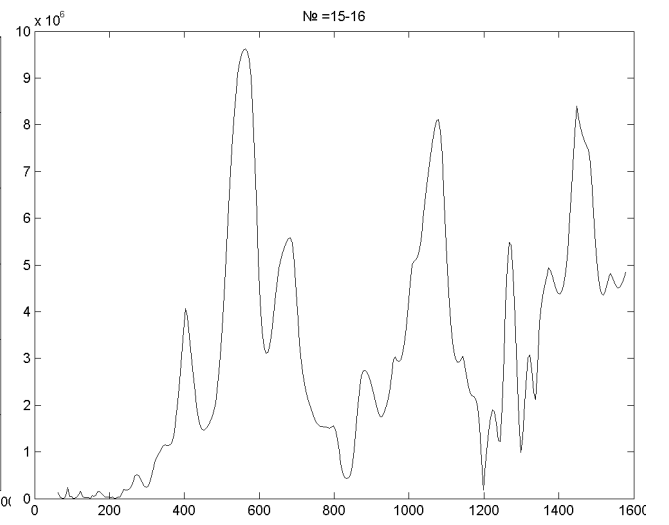
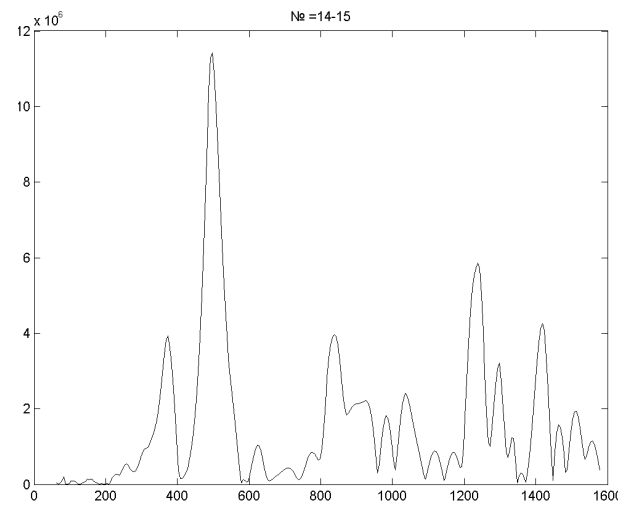
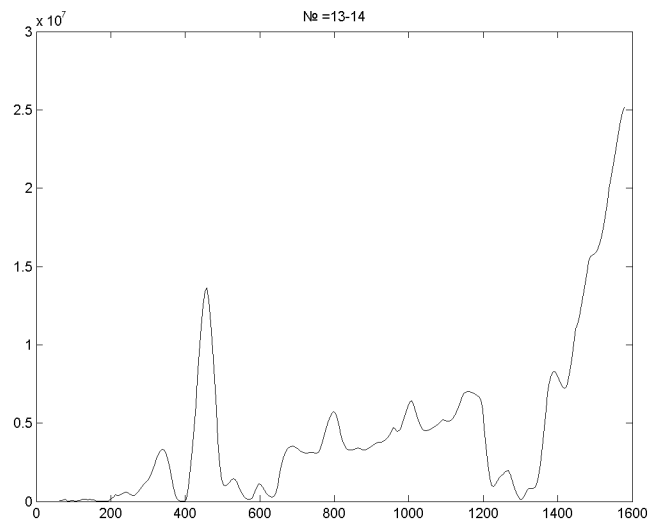


Рис. 3.4. Графики зависимостей  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{(i,i+1)}(L \cdot \Delta t)$  (продолжение)

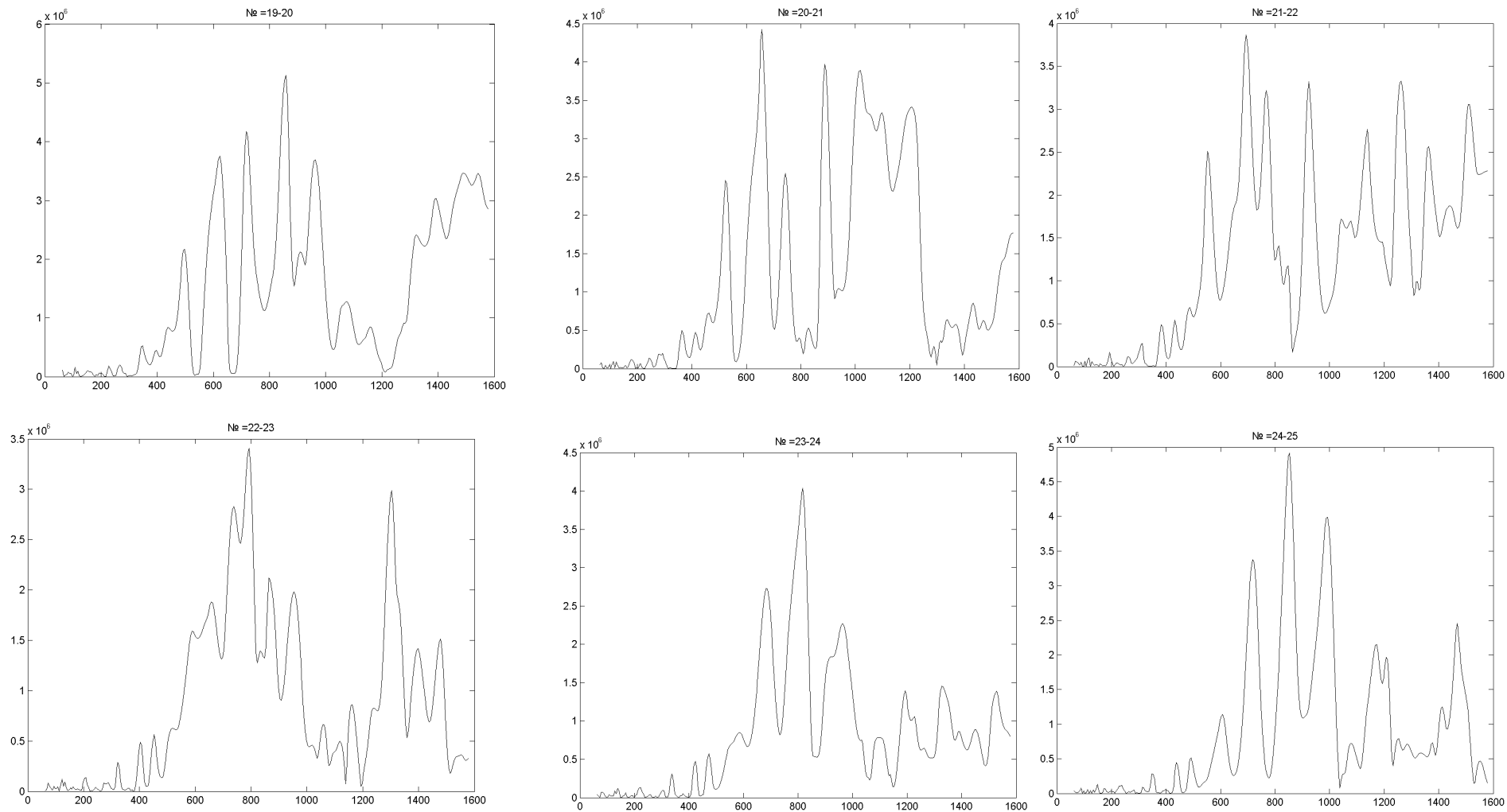


Рис. 3.4. Графики зависимостей  $\lambda_i - \lambda_{i+1} = f_{(i,i+1)}(L \cdot \Delta t)$  (окончание)

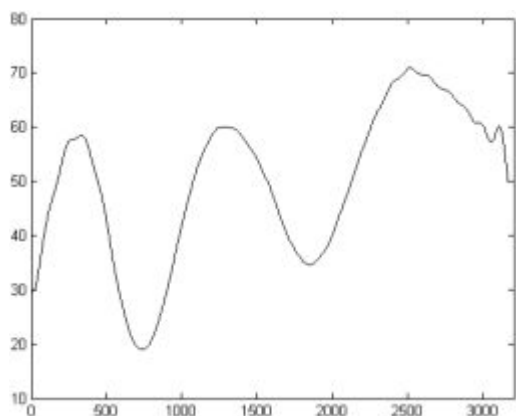


Рис. 3.5. Зависимость мгновенных значений ГК анализируемого ВР, полученная группировкой сингулярных векторов № 1, 6, 7

Отметим, что полученные результаты вполне согласуются с ранее описанными в [55] циклами солнечной активности, в частности, выделены: 200-летний цикл (цикл Зюсса), долгопериодический цикл с периодом 80–90 лет (цикл Гляйсберга), а также 11-летний цикл (Швабе-Вольфа).

Зависимость мгновенных значений составляющей анализируемого ВР от времени, полученная группировкой сингулярных троек анализируемого ВР № 2–3, 4–5, 8–9, представлены на рис. 3.6. Зависимость мгновенных значений ВР, полученного в результате группировки сингулярных троек траекторной матрицы анализируемого ВР № 1, 2–3, 4–5, 6–7, 8–9, а также разность между сгруппированным и анализируемым ВР (остатки модели) представлена на рис. 3.7.

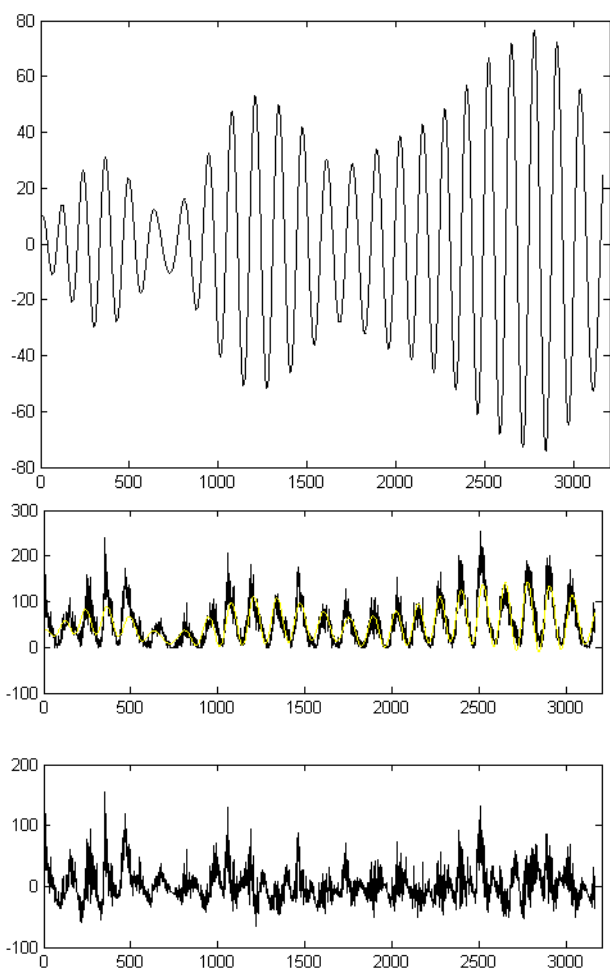


Рис. 3.6. Зависимость мгновенных значений ГК анализируемого ВР, полученная группировкой сингулярных троек № 2, 3, 4, 5, 7, 8, 9

Рис. 3.7. Зависимость мгновенных значений ВР, полученного в результате группировки сингулярных троек № 1, 2–3, 4–5, 6–7, 8–9 (вверху) от времени; разность между сгруппированным и анализируемым ВР (внизу)

Анализ ВР, представленного на рис. 3.6, позволяет предположить, что для математического описания данного ВР может быть использована следующая математическая модель, представляющая собой сигнал с одновременной амплитудной и фазовой модуляцией

$$u(t) = A(t) \cos \left( \omega_0 t + \int_0^t \Delta\omega(\xi) d\xi + \varphi_0 \right), \quad (3.1)$$

где  $A(t)$  – функция, описывающая амплитудную модуляцию;  $\omega_0$ , – циклическая частота несущей;  $\Delta\omega(\xi)$  – функция, описывающая закон изменения частоты;  $\int_0^t \Delta\omega(\xi) d\xi$  – функция, описывающая фазовую модуляцию функции  $u(t)$ ,  $\varphi_0$ , – начальная фаза.

В [75] показано, что для нахождения законов изменения частоты (периода) подобных сигналов можно использовать следующие алгоритмы:

1. Алгоритм, основанный на изменении ВИ, соответствующих изменению фазы анализируемого сигнала на  $2\pi$  радиан (периодомерный алгоритм).

2. Алгоритм, основанный на понятии мгновенная частота аналитического сигнала.

Напомним, что аналитический сигнал  $z(t)$ , соответствующий сигналу  $u(t)$ , определяется как [15,103]:

$$z(t) = u(t) + j\hat{u}(t), \quad (3.2)$$

где  $\hat{u}(t)$  – сигнал, сопряженный к исходному по Гильберту:

$$\hat{u}(t) = \frac{1}{\pi t} \otimes u(t) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u(\tau)}{t - \tau} d\tau,$$

$j$  – мнимая единица,  $\otimes$  – оператор свертки. Быстрый алгоритм вычисления аналитического сигнала обсуждался ранее в Главе 2.

Мгновенная частота аналитического сигнала  $f(t)$  определяется как производная от фазы комплекснозначной функции  $z(t)$ :

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arctan \left[ \frac{\hat{u}(t)}{u(t)} \right] = \frac{\hat{u}'(t)u(t) - \hat{u}(t)u'(t)}{u(t)^2 + \hat{u}(t)^2}. \quad (3.3)$$

Физическая содержательность МЧ сигнала, определяемой как мгновенная частота аналитического сигнала, продемонстрирована на примере дискретного частотно-модулированного сигнала конечной длительности с монотонно возрастающим законом изменения частоты в [74]. Данная величина представляет собой сумму двух детерминированных зависимостей  $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$ . Здесь  $f_1(t)$  – «истинный» закон изменения частоты, однозначно соответствующий определению мгновенной частоты сигнала, вводимой как частота, соответствующая максимуму мгновенного спектра сигнала [52];  $f_2(t)$  – некоторая периодическая составляющая, появление которой обусловлено вычислением преобразования Гильберта на ВИ конечной длительности.

Зависимости периода ВР, полученного группировкой сингулярных троек траекторной матрицы анализируемого ВР № 2–3, 4–5, 8–9, найденные с помощью описанных вы-

ше алгоритмов, представлены на рис. 3.8. (Зависимость «мгновенного» периода ГК от времени, вычисленная в соответствии с методом мгновенной частоты АС, для уменьшения шумов, возникающих в результате процедуры численного дифференцирования (см. (3.3)), была подвергнута процедуре скользящего сглаживания по 5 точкам).

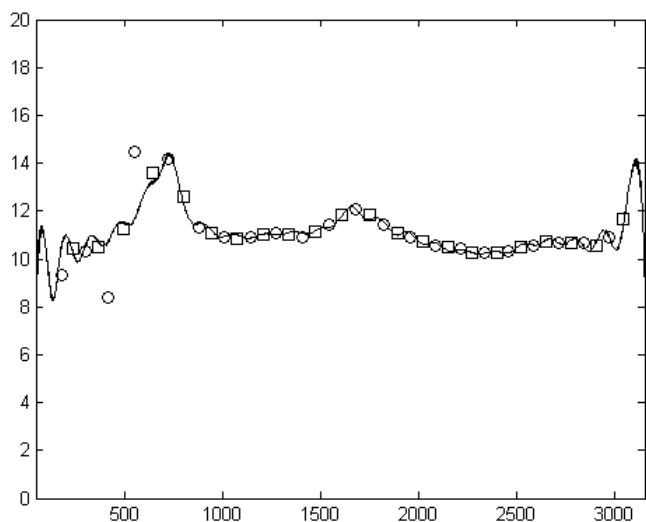


Рис. 3.8. Закон изменения частоты ВР, представленного на рис. 3.6 (○ – зависимость «мгновенного» периода ВР, оцененное как значение ВИ между последовательными максимумами ВР; □ – зависимость «мгновенного» периода ВР, оцененное как значение ВИ между последовательными минимумами ВР; сплошная линия – метод мгновенной частоты аналитического сигнала)

Из рис. 3.8 видно, что законы изменения периодов во времени, определенные с помощью описанных выше алгоритмов, достаточно хорошо согласуются друг с другом. Минимальное значение периода «одиннадцатилетнего» цикла, равное  $\approx 8$  годам, было достигнуто в 1763 г., максимальное, равное  $\approx 13.6$  года, – в 1800 г. Последующие минимумы периода «одиннадцатилетнего» цикла, равные 10.6, 10.2 и 10.5 года были достигнуты в 1842–1843 гг., 1938–1939 гг., 1995–1996 гг., соответственно. Последующие максимумы периода «одиннадцатилетнего» цикла, равные 11.8 и 10.8 года были достигнуты в 1887–1888 гг. и 1972–1973 гг., соответственно. Отметим, что имеющие место увеличения периодов «одиннадцатилетнего» цикла на концах интервала наблюдения могут оказаться «краевыми» эффектами, присущим алгоритмам, использованным для анализа рассматриваемого ВР.

Таким образом, обсуждаемый ВР, адекватно описывается с помощью математической модели (3.1). Отметим, что, используя зависимость «мгновенных» значений «одиннадцатилетнего» периода от времени, можно делать прогноз об изменении периода «одиннадцатилетнего» цикла.

В тоже время необходимо отметить, что несмотря на то, что, как видно из рис. 3.8 видно, ВР, восстановленный по сингулярным тройкам траекторной матрицы исходного ВР № 1, 2–3, 4–5, 6–7, 8–9, обеспечивает достаточно хорошее качество его аппроксимации, распределение остатков модели остатков модели оказывается отличной от нормального закона  $L \cdot \Delta t \cdot f$  (кривой Гаусса) (рис. 3.9)

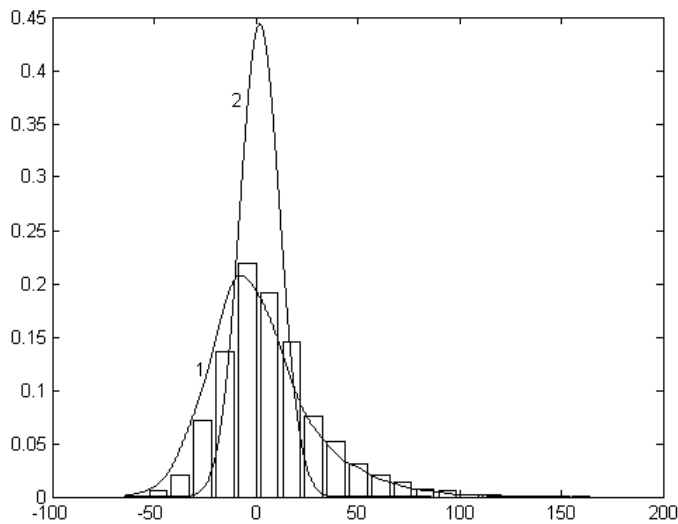


Рис. 3.9. Распределение ВР, представленного на рис. 3.7 (внизу): прямоугольники – гистограмма распределения; кривая № 1 – ПР, восстановленная с помощью аппроксимации Парзена-Розенблатта [50, 80, 84, 90]; кривая № 2 – нормальная ПР  $\lambda$ , параметры которого  $\mu, \sigma$  вычислены в соответствии с принципом максимального правдоподобия [13]

Для количественного подтверждения отличия между распределением ВР, представленного на рис. 3.7 (внизу), и нормального закона  $N(\mu, \sigma)$ , параметры которого  $\mu, \sigma$  вычислены в соответствии с принципом максимального правдоподобия, был использован критерий согласия Колмогорова, позволяющий проверить сложную гипотезу  $H_0: F(x) = F(x, \hat{\theta})$ , где вектор параметров  $\hat{\theta}$  – оценивается по той же выборке, по которой определяется согласие. Здесь мы использовали методику компьютерного анализа статистических закономерностей, хорошо зарекомендовавшую себя при моделировании распределений статистик критериев, реализующейся следующей последовательностью действий [50, 78, 79]:

1. Расчет значения критерия Колмогорова для имеющейся выборки  $S_{\text{exp}}$ .
2. Генерация в соответствии с законом распределения  $F(x, \hat{\theta})$   $N$  выборок такого же объема  $n$ , как и выборка, для которой проверяется гипотеза  $H_0: F(x) = F(x, \hat{\theta})$ .
2. Вычисление для каждой из  $N$  сгенерированных выборок значения статистики Колмогорова  $S_1, S_2, \dots, S_N$ .
3. Определение закона распределения случайной последовательности  $S_k, k = \overline{1, N}$   $G_N(S_n | H_0)$ .
4. Нахождение по распределению  $G_N(S_n | H_0)$  значения критерия для заданного уровня доверительной вероятности  $\lambda$  соответствующего значения критерия  $S_\lambda^*$ .
5. При выполнении условия  $S_{\text{exp}} < S_\lambda^*$  принятие гипотезы  $H_0: F(x) = F(x, \hat{\theta})$ , либо ее отклонение в противоположном случае.

Результаты применения данной методики к ВР, представленному на рис. 3.7 (внизу) приведены на рис. 3.10. Из рис. 3.10 видно, что  $S_{\text{exp}} > S_{0.95}^*$  (а также и  $S_{0.9995}^*$ ), что позволяет отклонить гипотезу  $H_0: F(x) = F(x, \hat{\theta})$ , о том распределение рассматриваемого ВР является нормальным.

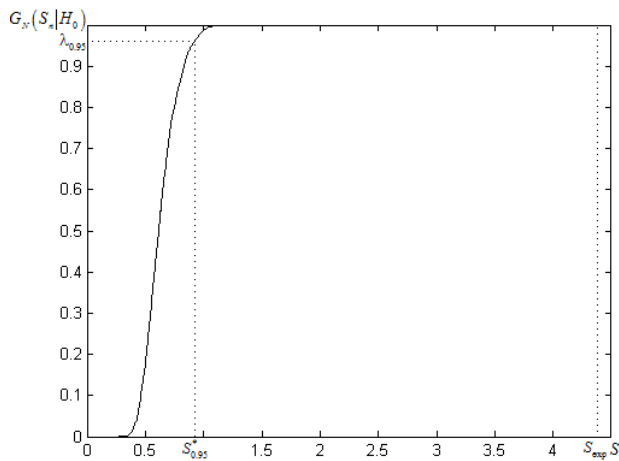


Рис. 3.10. Распределение статистики Колмогорова для ВР, представленного на рис. 3.7 (внизу), построенное по результатам статистического моделирования ( $N = 1000$ )

Таким образом, несмотря на согласованность результатов анализа ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, с современными представлениями о частотно-временных характеристиках данного ВР [63], анализ статистических свойств построенной SSA-модели анализируемого ВР, позволяет сделать вывод о том, что провести полную декомпозицию анализируемого ВР, разделив его на детерминированную и случайную составляющие, не удалось. Данный результат можно объяснить, используя результаты SSA-анализа модельных сигналов, приведенные в Главе 2, где показано, что точное разделение составляющих анализируемого ВР возможно только при выполнении соответствующих соотношений между частотой составляющей конкретной составляющей и размером величины сдвига  $L$ . В том случае, когда ВР, представляет собой мгновенные отсчеты суммы периодических функций с различными (как правило, некратными) частотами, возникает ситуация, в которой при конкретном значении сдвига  $L$  для одной или нескольких составляющих условия их строго разделения выполняться не будут. В подобных случаях часть составляющих, присутствующих в анализируемом ВР, разделение которых оказывается невозможным, будут отнесены к ВР остатков SSA-модели, как и произошло в рассмотренном в данном разделе случае.

Описанную выше особенность метода SSA следует принимать во внимание при его использовании для прогнозирования значений ВР.

### 3.2. Применение метода SSA для прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа

Теоретические обоснования возможности использования метода SSA для прогнозирования ВР рассматривались в работах многих авторов (см., например, [21, 23, 27, 34, 46, 49, 68, 70, 92, 98, 99, 107, 108] и др.), там же приведены примеры прогнозирования некоторых ВР. Здесь необходимо напомнить, что решение задачи прогнозирования ВР требует априорного задания следующих параметров метода SSA: длины отрезка ВР, используемого для прогнозирования значений ВР, размера окна сдвига  $L$ , числа ГК, используемых для прогнозирования. В тоже время конкретных рекомендаций по их выбору в научной литературе обнаружить не удастся. В этой связи представляется целесообразным провести самостоятельное изучение данного вопроса на примере ВР, имеющих практическую значимость.



Для решения поставленной задачи автором в пакете MATLAB была разработана программная реализация алгоритма прогнозирования ВР методом SSA. Ее работоспособность подтверждают результаты прогнозирования различных детерминированных ВР. В качестве примера на рис. 3.11 приведены результаты прогнозирования ВР, представляющего собой отсчеты функции

$$u(t) = \sin(t) + \sin(4t), \quad (3.4)$$

вычисленные на интервале  $[0, 4\pi]$  в узлах ВС  $t_i = 4\pi/N$ ,  $i = \overline{1, N}$ ,  $N = 160$ , на 100 точек. Для вычисления прогноза использовалось окно сдвига  $L = 80$  и, следуя результатам, полученным в Главе 2, сингулярные тройки сингулярного разложения траекторной матрицы № 1–4.

### 1. Выбор длины окна сдвига $L$ , используемого в задаче прогнозирования ВР, содержащего значения чисел Вольфа

Предваряя анализ полученных результатов, отметим, что наряду с известными методами рекуррентного и векторного прогнозирования [21], оказывается возможным предложить использовать в рассматриваемой задаче еще один альтернативный алгоритм прогнозирования, реализуемый следующей последовательностью действий:

1. Получить ВР  $(F_{N_i}^{(1)} = 0.2, i = \overline{1, 1000})$ , аппроксимирующий анализируемый ВР  $L \cdot \Delta t \cdot f$ , используя набор сингулярных троек сингулярного разложения траекторной матрицы  $F_{N_i}^{(1)} = 0.2, i = \overline{1, 1000}$ , из которого исключены сингулярные тройки, соответствующие шумовой составляющей исходного ВР.
2. Вычислить коэффициенты сплайна, аппроксимирующего ВР  $T_s = 1$ .
3. Вычислить, используя соответствующие коэффициенты сплайна, прогнозируемые значения анализируемого ВР.

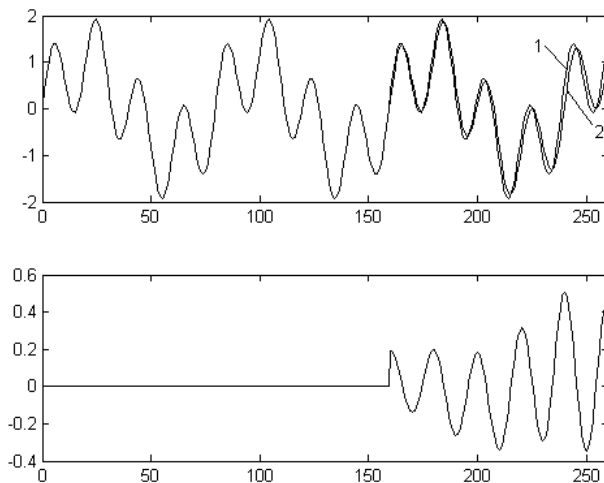


Рис. 3.11. К иллюстрации работоспособности программной реализации алгоритма прогнозирования методом SSA (сверху: 1 – исходный ВР; 2 – прогнозируемые значения; снизу: разность между исходными и прогнозируемыми значениями)

В связи с тем, что алгоритм векторного прогнозирования оказывается более чувствительным чем рекурсивный алгоритм прогнозирования к качеству разделения ВР  $F_N^{(1)}$  на информативную и шумовую составляющие [23], которая для ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, оказывается недостаточно высокой, далее мы проводим

сравнение спрогнозированных значений ВР с помощью рекуррентного и предложенного нами алгоритмами.

Рассмотрим результаты прогнозирования изучаемого ВР, полученные при исследовании проблемы выбора размера окна  $N_{wind}$  (части ВР, используемого для прогнозирования), представленные на рис. 3.12–3.16 и в табл. 3.2. Здесь правый конец отрезка ВР  $F_N^{(1)}$ , использованного для прогнозирования был зафиксирован в произвольно выбранной точке ( $N_{end} = 1800$ ), и варьировались значения параметра  $N_{wind}$  и параметра сдвига  $L = N_{wind}/2$ . (Здесь для вычисления прогнозируемых значений на основе аппроксимирующего ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$  использовался кубический полином.)

Анализ зависимостей представленных на рис. 3.12–3.16 и в табл. 3.2 показывает:

1) увеличение размера числа собственных троек, используемых для вычисления значений аппроксимирующего полинома, приводит к увеличению точности прогнозируемых значений;

2) погрешности прогнозируемых значений, вычисляемые как с помощью рекурсивного алгоритма, так и с помощью алгоритма прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома при  $N_{wind} \geq 200$  оказываются практически независимыми от размера окна  $L$ , поэтому в дальнейшем анализе мы используем следующие значения параметров методов SSA  $N_{wind} > 200$ ,  $L = N_{wind}/2$ .

Затем для трех произвольно выбранных точек ВР, содержащего значения среднемесячных чисел Вольфа, были вычислены погрешности первых пяти прогнозируемых с помощью рекурсивного алгоритма и алгоритма прогнозирования по восстановленному ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$ . Также были вычислены значения критерия согласия Колмогорова ( $S_{exp}$ ) (табл. 3.3–3.5) и соответствующие распределения статистики, примеры которых представлены рис. 3.17. (Здесь было принято во внимание, что одним из показателей качества аппроксимации ВР  $F_N^{(1)}$  ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$  является соответствие распределения остатков (ряда  $F_N^{(1)} - \tilde{F}_N^{(1)}$ ) нормальному закону распределения  $N(\mu, \omega)$  для каждого из рассмотренного набора собственных троек.)

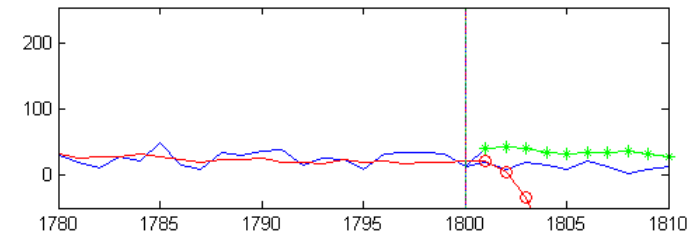
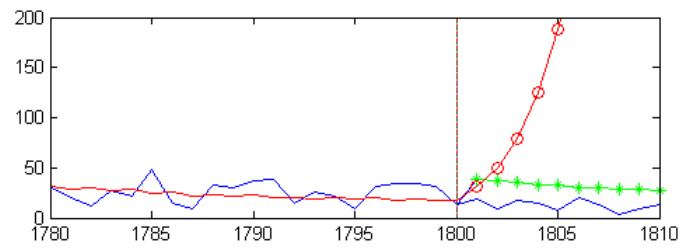
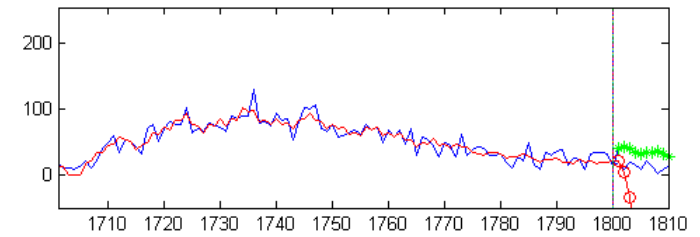
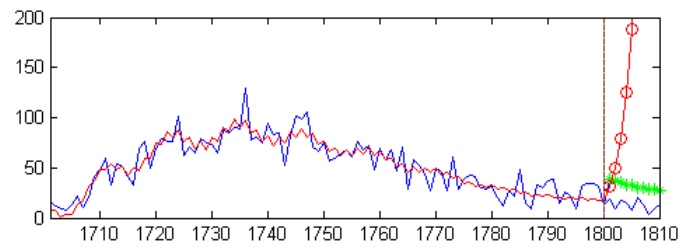
Из табл. 3.3–3.5 видно, что в каждом из рассмотренных случаев погрешность прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, оказывается меньше, чем при использовании рекурсивного алгоритма прогнозирования. Кроме того, из табл. 3.3–3.4 видно, что минимальному значению погрешности прогноза первой прогнозируемой точки по аппроксимирующему ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$  соответствует минимальное значение критерия Колмогорова  $S_{exp}$ . Это позволяет предположить, что выявленное свойство можно использовать для выбора собственных троек, обеспечивающих наименьшую погрешность прогноза первой прогнозируемой точки по аппроксимирующему ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$ . Однако данные, представленные в табл. 3.5, не подтверждают сформулированной выше гипотезы. В тоже время понятно, что поскольку в рассматриваемом случае речь идет о прогнозировании ВР, представляющего собой смесь детерминированной и случайной составляющих,

для подтверждения или отклонения данной гипотезы требуется проведение более тщательного анализа.

Таблица 3.2. Погрешности первых трех прогнозируемых значений ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа

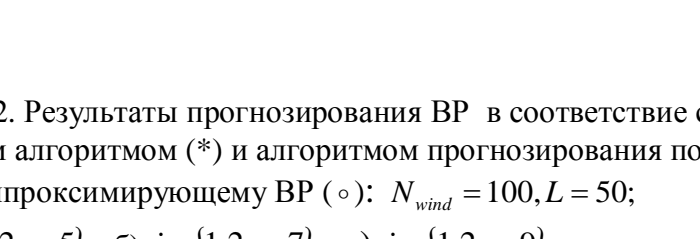
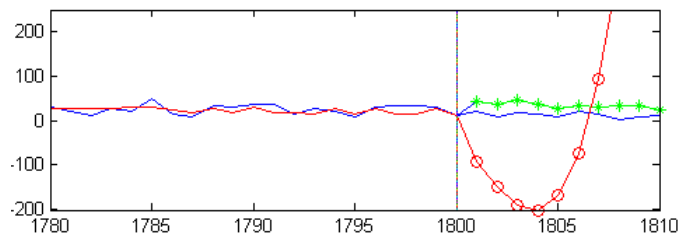
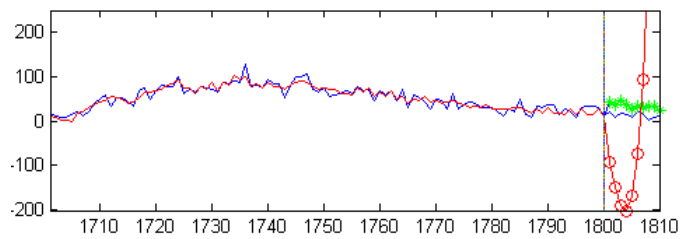
Группируемые компоненты	$L$	$N_{wind}$	Погрешность рекуррентного алгоритма метода SSA			Погрешность прогноза по аппроксимирующему ВР $F_N^{(1)}$ .		
			Номер прогнозируемой точки			Номер прогнозируемой точки		
			1	2	3	1	2	3
1–5	50	100	18	27	17	11	40	61
1–7	50	100	22	34	22	2	5	52
1–9	50	100	22	29	27	113	160	210
1–5	100	200	7	20	14	3	15	11
1–7	100	200	9	19	11	7	1	9
1–9	100	200	9	17	9	12	6	15
1–5	150	300	16	26	16	13	4	13
1–7	150	300	11	19	8	3	23	35
1–9	150	300	7	16	4	2	10	10
1–5	200	400	47	59	52	12	0	7
1–7	200	400	38	49	41	4	7	3
1–9	200	400	7	16	4	2	10	10

Из табл. 3.3–3.5 видно, что в каждом из рассмотренных случаев погрешность прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, оказывается меньше, чем при использовании рекурсивного алгоритма прогнозирования. Кроме того, из табл. 3.3–3.4 видно, что минимальному значению погрешности прогноза первой прогнозируемой точки по аппроксимирующему ВР  $T_s = 1$ , соответствует минимальное значение критерия Колмогорова  $S_{exp}$ . Это позволяет предположить, что выявленное свойство можно использовать для выбора сингулярных троек, обеспечивающих наименьшую погрешность прогноза первой прогнозируемой точки по аппроксимирующему ВР  $\tilde{F}_N^{(1)}$ . Однако данные, представленные в табл. 3.5, не подтверждают сформулированной выше гипотезы. В то же время понятно, что поскольку в рассматриваемом случае речь идет о прогнозировании ВР, представляющего собой смесь детерминированной и случайной составляющих, для подтверждения или отклонения данной гипотезы требуется проведение более тщательного анализа.



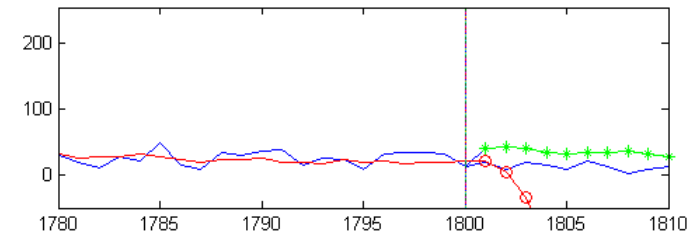
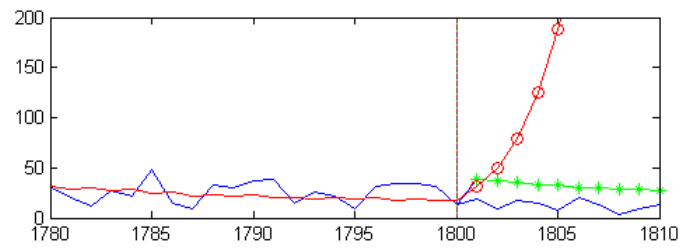
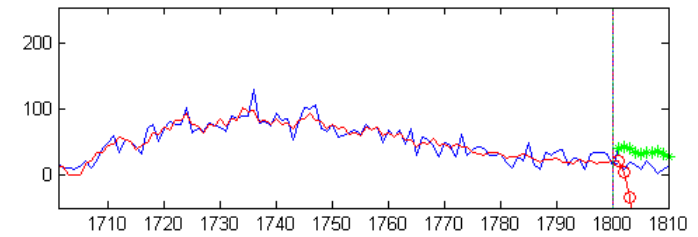
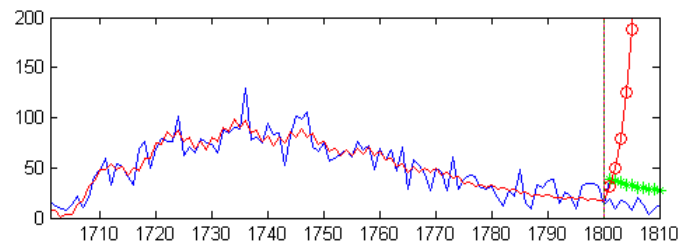
*a)*

*б)*



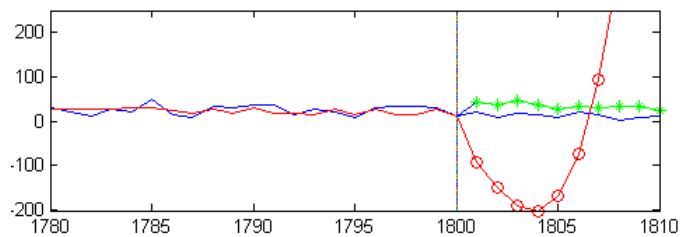
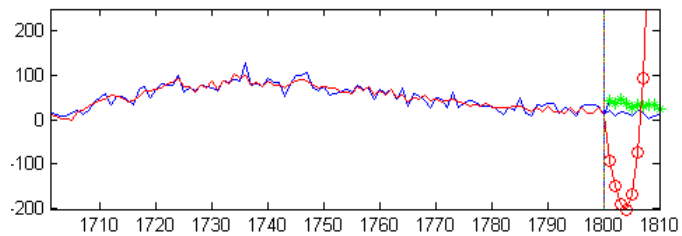
*в)*

Рис. 3.12. Результаты прогнозирования ВР в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по полиному, аппроксимирующему ВР (o):  $N_{wind} = 100, L = 50$ ;  
 а)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ; в)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$



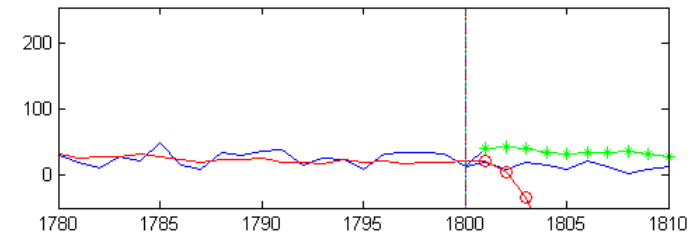
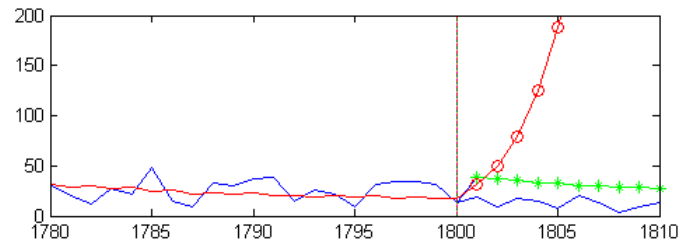
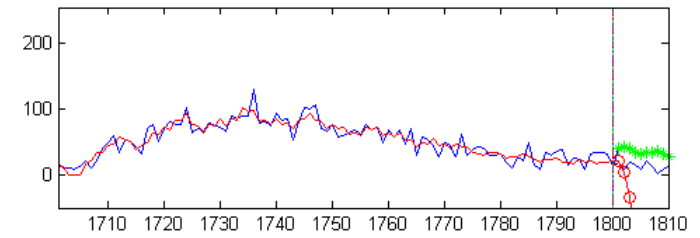
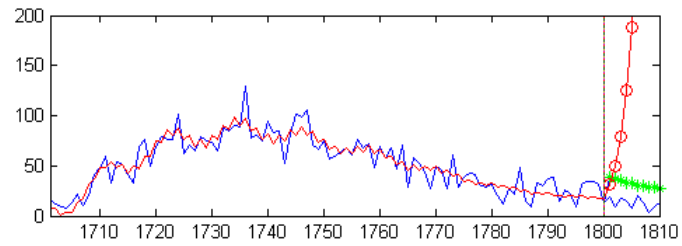
*a)*

*б)*



*в)*

Рис. 3.13. Результаты прогнозирования ВР в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по полиному, аппроксимирующему ВР (o):  $N_{wind} = 200, L = 100$ ;  
 а)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ; в)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$



*a)*

*б)*

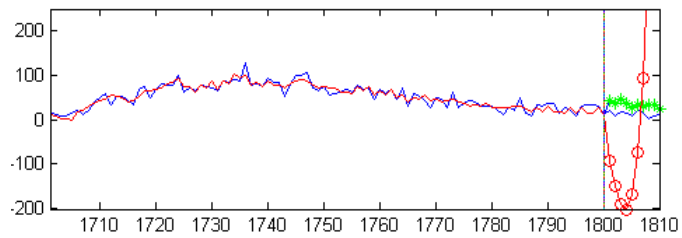
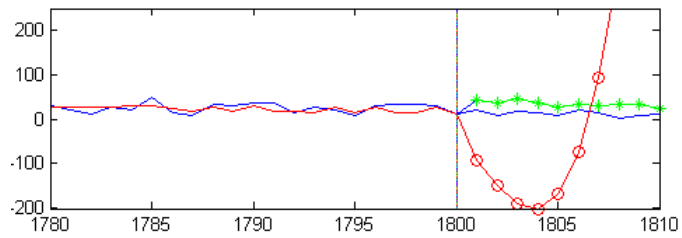


Рис. 3.14. Результаты прогнозирования ВР  $F_N^{(1)}$  в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по полиному, аппроксимирующему ВР ( $\circ$ ):  $N_{wind} = 200, L = 100$ ;  
 а)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ; в)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$



*в)*

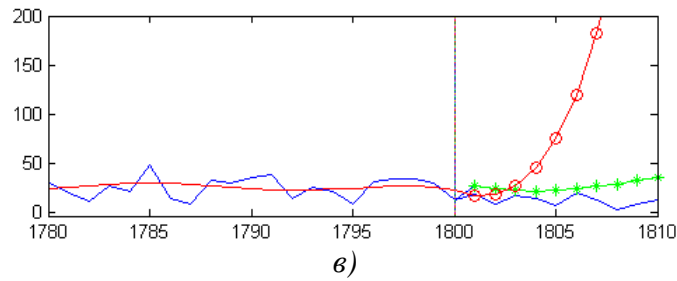
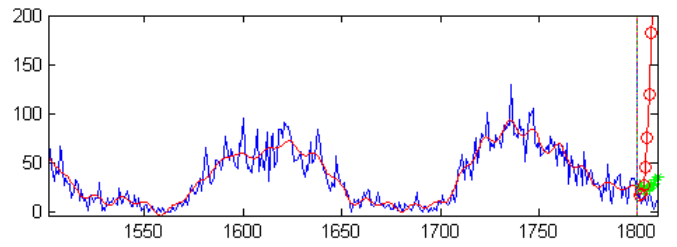
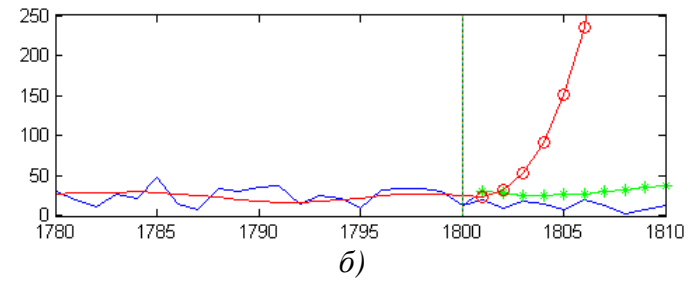
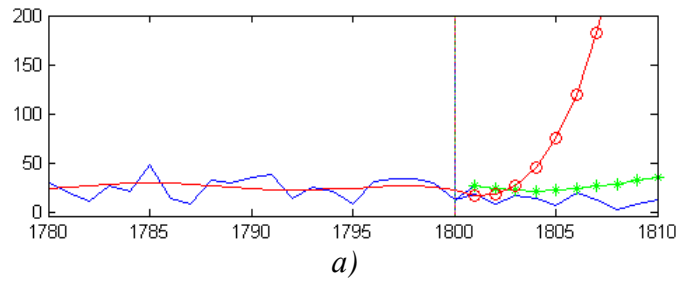
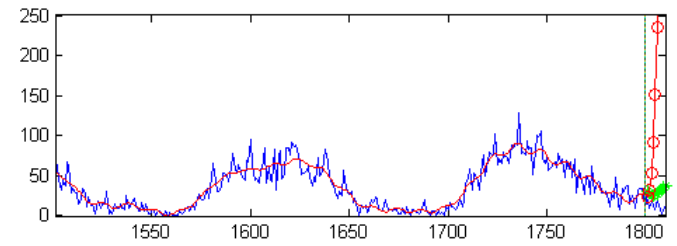
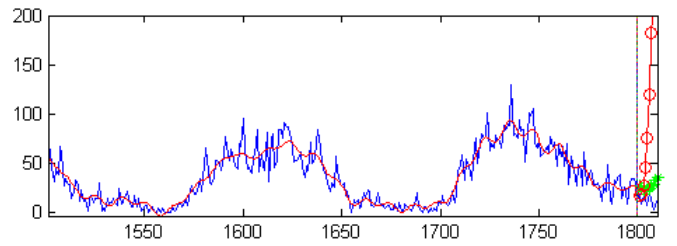
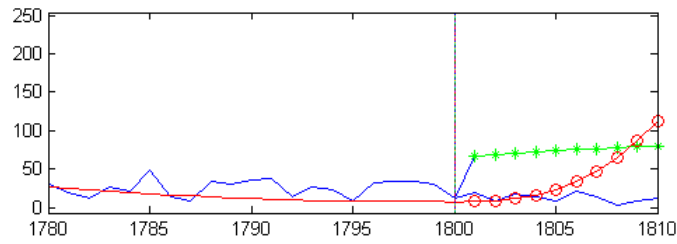
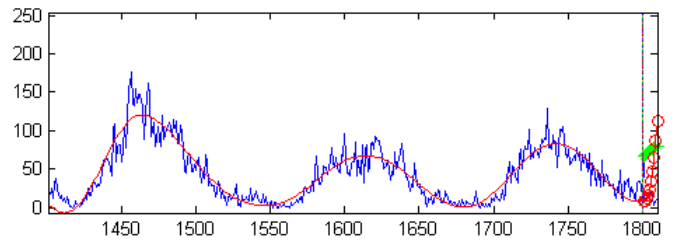
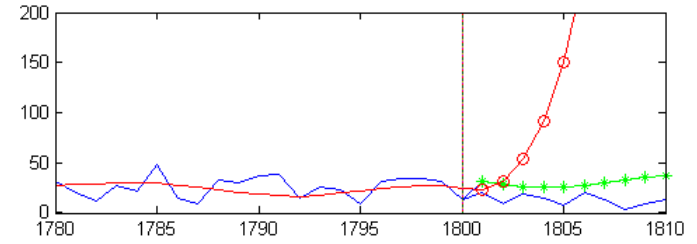
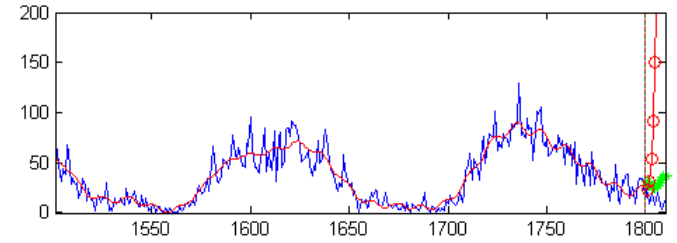


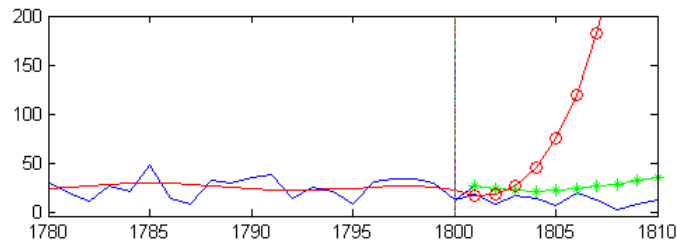
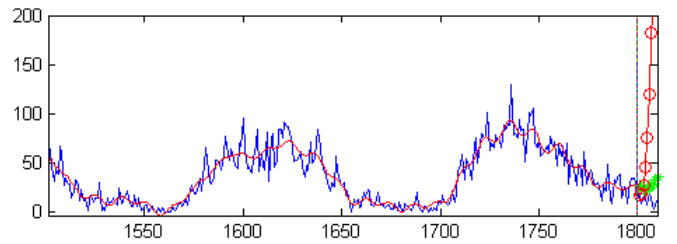
Рис. 3.15. Результаты прогнозирования ВР в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по аппроксимирующему ВР полиному (o) :  $N_{wind} = 300, L = 150$ ;  
 а)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ; в)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$



a)



б)



в)

Рис. 3.16. Результаты прогнозирования ВР в соответствии с рекуррентным алгоритмом (\*) и алгоритмом прогнозирования по аппроксимирующему ВР полиному (o) :  $N_{wind} = 400, L = 200$ ;

а)  $i \in \{1, 2, \dots, 5\}$ ; б)  $i \in \{1, 2, \dots, 7\}$ ; в)  $i \in \{1, 2, \dots, 9\}$



Таблица 3.3. Погрешности прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа ( $F_{N_i}^{(1)} = 1.0,$ )

Группируемые компоненты	$i = 1, 100$	Погрешность рекурсивного алгоритма метода SSA					Погрешность прогноза по аппроксимирующему полиному				
		Номер прогнозируемой точки					Номер прогнозируемой точки				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1-5	1.45	118	167	117	141	131	47	4	52	45	84
1-7	1.22	120	177	134	163	155	10	79	48	91	99
1-9	1.29	109	173	136	168	162	20	89	60	106	120
1-11	1.41	103	167	130	163	158	16	84	54	98	111
1-13	1.25	111	176	140	174	169	14	82	51	94	105
1-15	1.36	88	150	111	145	142	17	86	56	100	109
1-17	1.33	97	154	103	128	121	19	32	128	312	654

Таблица 3.4. Погрешности прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа ( $T_s = 0.95$ )

Группируемые компоненты	$T_s$	Погрешность рекурсивного алгоритма метода SSA					Погрешность прогноза по аппроксимирующему полиному				
		Номер прогнозируемой точки					Номер прогнозируемой точки				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1-5	1.44	2	20	11	3	9	10	30	19	7	9
1-7	1.56	0	22	13	5	11	10	29	18	5	7
1-9	1.11	1	21	13	4	10	9	27	14	1	3
1-11	1.02	9	27	14	2	4	1	23	14	5	12
1-13	1.07	0	22	13	5	11	9	26	10	9	16
1-15	1.50	0	22	14	6	13	12	29	15	3	9
1-17	1.51	1	22	14	6	12	13	32	19	4	2

Таблица 3.5. Погрешности прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа ( $F_N^{(2)}$ )

Группируемые компоненты	$T_s$	Погрешность рекурсивного алгоритма метода SSA					Погрешность прогноза по аппроксимирующему полиному				
		Номер прогнозируемой точки					Номер прогнозируемой точки				
		1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1-5	1.07	15	50	28	11	33	10	22	1	19	4
1-7	1.06	14	48	26	8	30	12	24	6	4	29
1-9	1.19	14	49	27	10	32	11	23	2	14	12
1-11	1.16	14	48	27	10	33	10	20	6	28	10
1-13	1.11	9	41	19	6	33	22	5	26	51	38
1-15	0.96	10	39	18	6	33	24	1	34	64	55
1-17	1.02	10	40	19	8	35	20	5	23	43	18

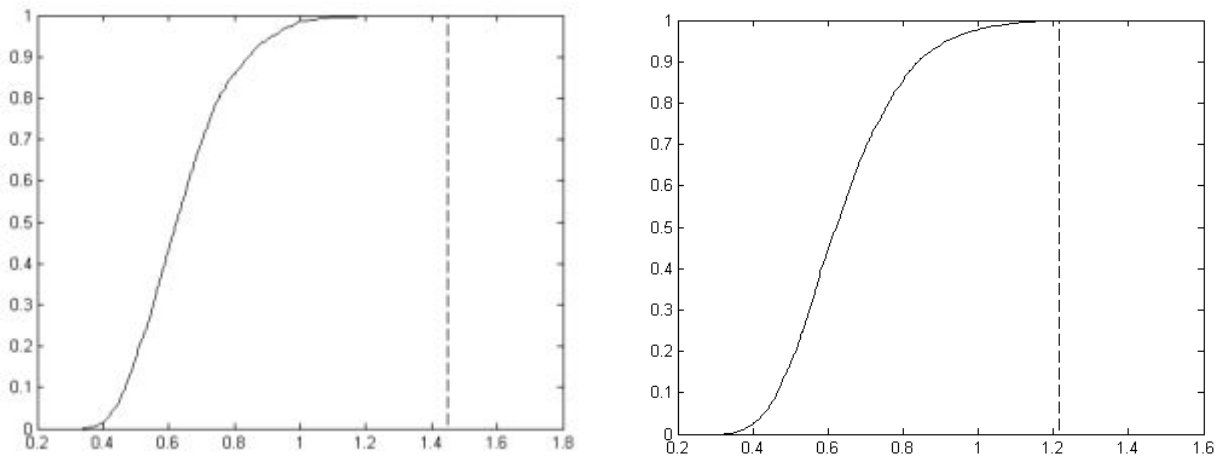


Рис. 3.17. Распределение статистики Колмогорова  $S_{\text{exp}}$  для следующих значений параметров аппроксимации ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа:  $N_{\text{wind}} = 300, L = 150, N_{\text{start}} = 360$ , собственные тройки № 1–5 (слева) и № 1–7 (справа)

## 2. Исследование погрешностей прогноза ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа

Для изучения зависимости точности прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа в соответствии с рекурсивным алгоритмом и алгоритмом прогнозирования по полиному, аппроксимирующему анализируемый ВР (ряд  $\Delta t = T_s / (N - 1)$ ), был использован алгоритм, описанный ниже на псевдокоде.

### Алгоритм 3.1

**Назначение:** Исследование точности прогнозирования ВР

**Вход:**

F (вектор, содержащий значения анализируемого ВР)

$N_p$  (длина вектора F)

$N_{\text{wind}}$  (размер отрезка анализируемого ВР, используемого для прогнозирования)

Start (точка начального положения окна прогнозирования)

$x_{\text{Start}} = \text{Start}$  (номер начальной точки скользящего окна)

$x_{\text{End}} = x_{\text{Start}} + \text{Start} - 1$  (номер последней точки скользящего окна)

$x = F(x_{\text{Start}}:x_{\text{End}})$  (вектор, содержащий значения, на основе которых вычисляются значения аппроксимирующего полинома)

In (вектор, содержащий номера группируемых троек сингулярных сингулярного разложения траекторной матрицы вектора)

$N_i$  (длина вектора In)

L (размер сдвига)

$L_p$  (число прогнозируемых точек)

**Выход:**

матрица Zz размерности  $(N_p - \text{End} - L_p) \cdot N_i \times 2 \cdot L_p$

**Инициализация:**

$Km1 = N_p - \text{End} - L_p$ ;

```

Km = (Np - End - Lp) · Ni;
k = 1;
for j = 1 : Km1
    for i = 1 : Ni
        m = In(i);
        % вызов функции, возвращающую вектор-строку, содержащую
        % LP спрогнозированных значений в соответствие с рекурсивным
        % алгоритмом
        Z1 = SSA_rekurs(x, L, x_Start, x_End, Lp, 1:m);
        % вызов функции, возвращающую вектор-строку, содержащую
        % LP спрогнозированных значений
        % по аппроксимирующему ВР  $i = \overline{1, N}$ , в соответствие
        % с рекурсивным алгоритмом
        Z2 = SSA_appr(x, L, x_Start, x_End, Lp, 1:m);
        % вызов функции, возвращающую вектор-строку, содержащую
        % LP спрогнозированных значений
        % по аппроксимирующему ВР  $N = 1000$ , в соответствие
        % с новым алгоритмом
        Zz(k, 1:2·Lp) = augment(Z1, Z2);
        k = k + 1;
    end;
    x_Start = x_Start+1;
    x_End = x_End+1;
end;

```

---

Для представления зависимостей, о вычисленных в соответствие с алгоритмом 3.1, на рис. 3.17–3.18 приведены абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями первой прогнозируемой точки (остатки) и их распределения (гистограммы и аппроксимирующая кривая, построенная по Парзену-Розенблатту [80, 84]). Здесь для прогнозирования в соответствие с рекурсивным алгоритмом использовались сингулярные тройки № 1–5. Эти же сингулярные тройки были использованы для вычисления значений аппроксимирующего полинома, значения которого далее экстраполировались с помощью кубического сплайна. Из рис. 3.17–3.18 видно, что у обоих алгоритмов точность прогнозирования оказывается зависящей от локальных особенностей анализируемого ВР, которые априори неизвестны. В тоже время в рассматриваемом случае качество прогнозирования на основе использования аппроксимирующего полинома оказывается выше, так как максимальные значения отклонений между истинными и спрогнозированными значениями, у данного алгоритма оказываются более чем в два раза меньше, а отсчетов с малыми значениями погрешностей, напротив, почти в два раза больше.

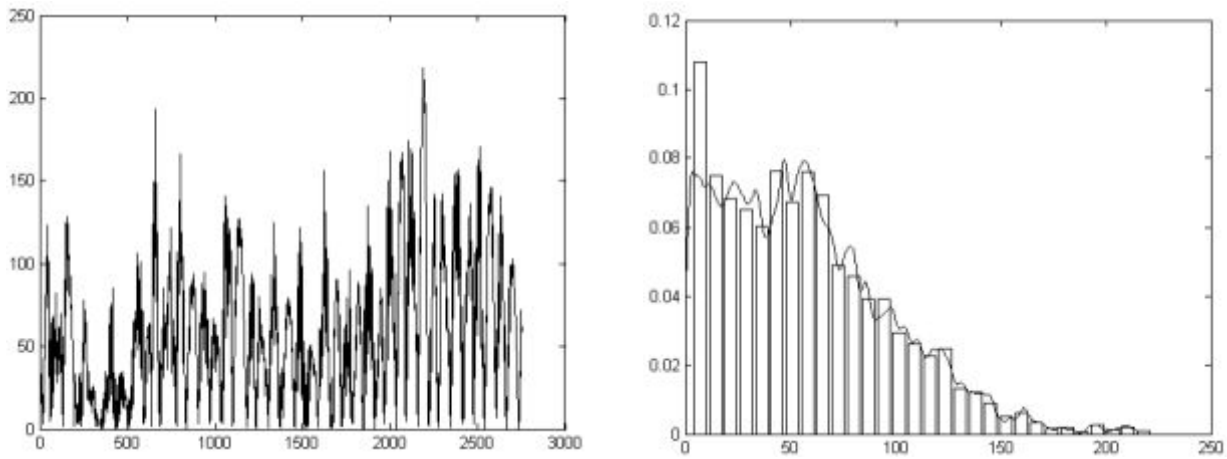


Рис. 3.17. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями в соответствии с рекурсивным алгоритмом (слева) и их распределение (справа)

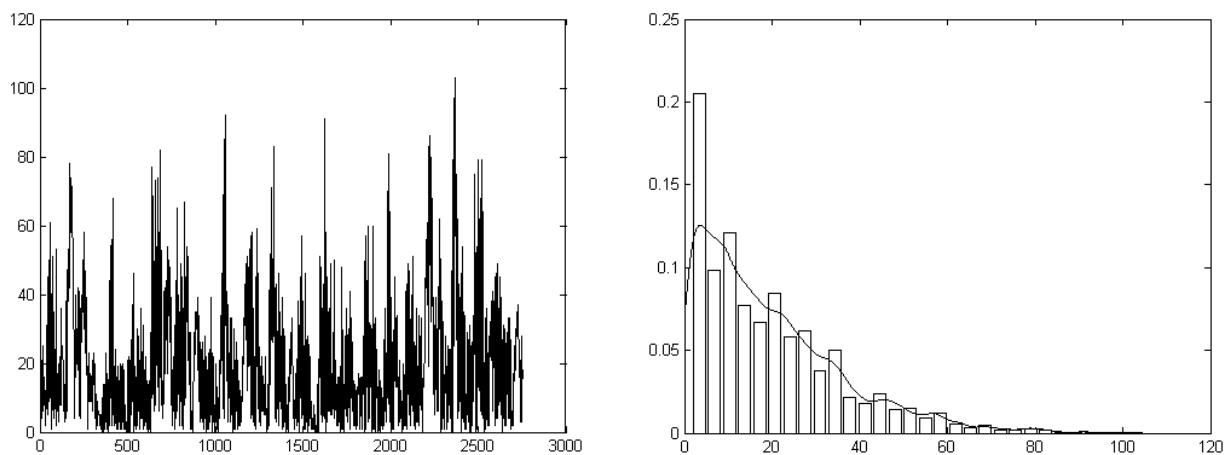


Рис. 3.18. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями спомощью аппроксимирующего полинома (слева) и их распределение (справа)

Для удобства дальнейшего анализа для каждой из пяти прогнозируемых точек и заданным значениям номеров группируемых сингулярных троек были вычислены средние и среднеквадратические отклонения ВР, содержащих абсолютные значения разностей между истинными и спрогнозированными значениями ВР (остатков) (табл. 3.6).

Из табл. 3.6 видно:

1) алгоритм прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома при прогнозировании вперед на 1–3 точки оказывается в два-три раза точнее рекурсивного алгоритма;

2) при прогнозировании на 4–5 точек вперед увеличение числа сингулярных троек, используемых для вычисления значений аппроксимирующего полинома метод прогнозирования, приводит к увеличению погрешности прогноза данного метода;

3) для практического использования метода прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома требуются рекомендации по выбору числа сингулярных троек;

4) погрешность рекурсивного алгоритма в рассмотренном диапазоне параметров оказывается независимой от количества группируемых сингулярных троек и числа прогнозируемых точек.

Таблица 3.6. Средние значения и среднеквадратические отклонения остатков спрогнозированных значений

Группируемые компоненты	Погрешность рекурсивного алгоритма метода SSA					Погрешность прогноза по аппроксимирующему полиному				
	Номер прогнозируемой точки					Номер прогнозируемой точки				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
1–5	58±40	59±40	59±40	59±40	60±40	20±16	21±17	22±18	23±21	25±26
1–7	60±41	59±41	60±40	60±40	60±40	18±14	20±17	23±22	28±33	36±53
1–9	60±41	60±41	60±40	60±40	60±40	17±14	20±18	26±24	36±50	52±84
1–11	60±41	60±41	60±40	60±40	60±40	17±15	22±21	31±39	47±71	63±95
1–13	60±42	60±41	60±40	60±40	60±41	18±16	24±25	37±49	60±93	78±120
1–15	60±42	60±41	60±41	60±41	59±41	19±17	27±29	45±60	76±115	98±135

Таким образом, полученные результаты позволяют дать обоснованные рекомендации по выбору метода прогнозирования: при краткосрочном прогнозировании следует использовать алгоритм, основанный на использовании аппроксимирующего полинома, при долгосрочном – рекурсивный алгоритм метода SSA. В тоже время следует отдавать отчет в том, что точность прогнозирования может оказаться относительно не высокой, на основании подобных прогнозов можно давать скорее качественные нежели количественные прогнозы о долговременных тенденциях изменения анализируемого ВР.

### 3. Выбор количества сингулярных троек при прогнозировании на основе аппроксимирующего полинома

Для обоснованного выбора числа сингулярных троек, используемых для группировки и, соответственно, вычисления значений аппроксимирующего полинома (ряд  $\tilde{F}_N^{(1)}$ ) был использован алгоритм, описанный ниже на псевдокоде.

#### Алгоритм 3.2

**Назначение:** Нахождение набора сингулярных троек, рекомендуемых для прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома

**Вход:**

F (вектор, содержащий значения анализируемого ВР)

Np (длина вектора F)

Nwind (размер отрезка анализируемого ВР, используемого для прогнозирования)

Start (точка начального положения окна прогнозирования)

x\_Start = Start (номер начальной точки скользящего окна)

x\_End = x\_Start + Start – 1 (номер последней точки скользящего окна)

x=F(x\_Start:x\_End:) (вектор, содержащий значения, на основе которых вычисляются значения аппроксимирующего полинома)

In (вектор, содержащий номера группируемых троек сингулярных сингулярного разложения траекторной матрицы вектора)

Ni (длина вектора In)

L (размер сдвига)

Lp (число прогнозируемых точек)

**Выход:**

матрица  $Zz$  размерности  $(Np - End - Lp) \cdot Ni \times 2 \cdot Lp$

**Инициализация:**

```
Km1=Np - End- Lp;
Km = (Np - End - Lp)·Ni;
k = 1;
for j = 1 : Km1
    for i = 1 : Ni
        m = In(i);
        % вызов функции, возвращающую вектор-строку, содержащую
        % разности между исходным и аппроксимирующим его ВР
        Z = SSA_res(x, L, x_Start, x_End, Lp, 1:m);
        % вычисление критерия Колмогорова в предположении, что
        % остатки распределены по нормальному закону для каждого
        % сочетания сингулярных троек
        [mu,sigma] = normfit(Z); % вычисление параметров
                                % нормального распределения

        z=sort(Z);
        Nn=length(z);
        S=std(z);
        S=sqrt((Nn-1)/Nn)*S;
        Dn_plus=[];
        Dn_minus=[];
        for is=1:Nn
            Dn_plus(is)=is/Nn-normcdf(z(is),mu,sigma);
            Dn_minus(is)=normcdf(z(is),mu,sigma) - (is-1)/Nn;
        end;
        D1=max(Dn_plus);
        D2=max(Dn_minus);
        Dn=max(D1,D2);
        Sk(i,1)=m;
        Sk(i,2)=(6*Nn*Dn+1)/(6*sqrt(Nn));
        k = k + 1;
    end;
    [Smin I]=min(Sk(:,2),[],1);
    Z2=SSA_appr(x,L,x_Start,x_End,Lp,1:In(I),false);
    Zz2(j,1:Lp)=Z2;
    Zz2(j,Lp+1)=In(I);
    Zz2(j,Lp+2)=Smin;
    x_Start=x_Start+1;
    x_End=x_End+1;
end;
```

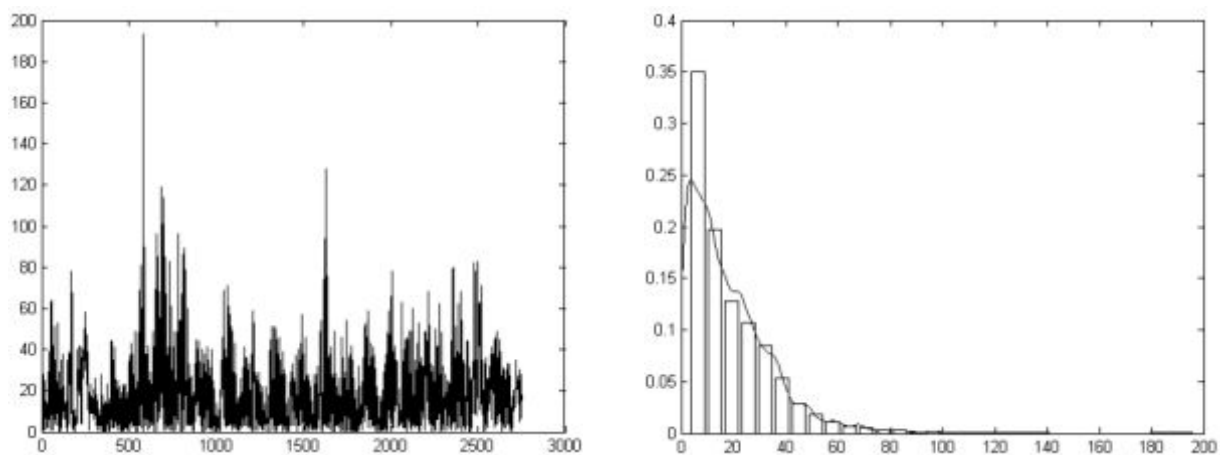


Рис. 3.19. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (первая прогнозируемая точка)

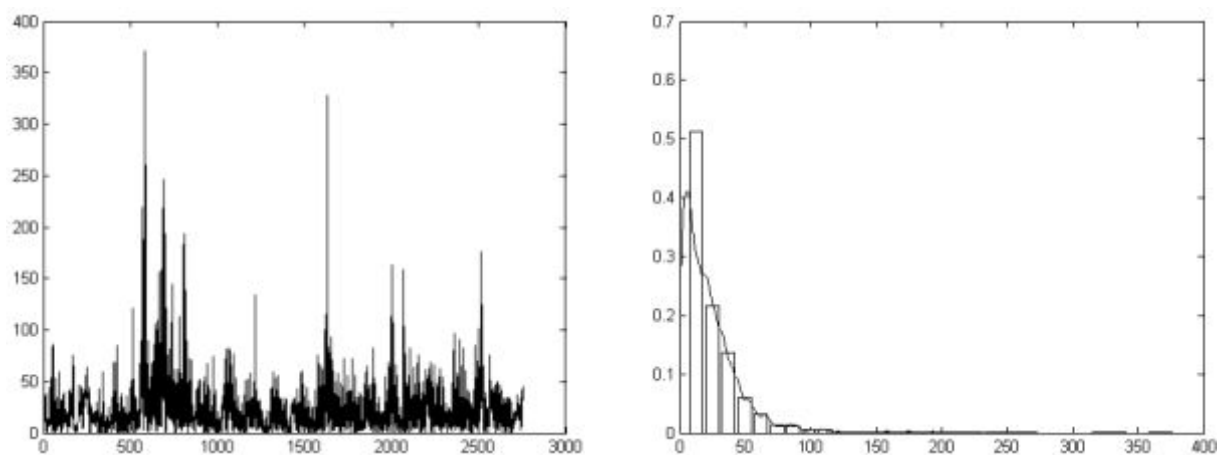


Рис. 3.20. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (вторая прогнозируемая точка)

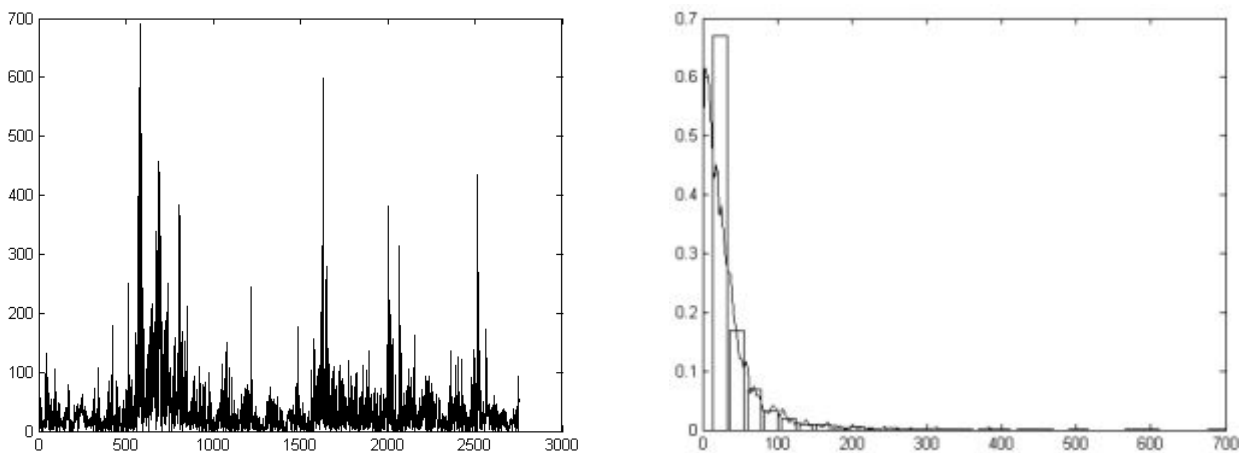
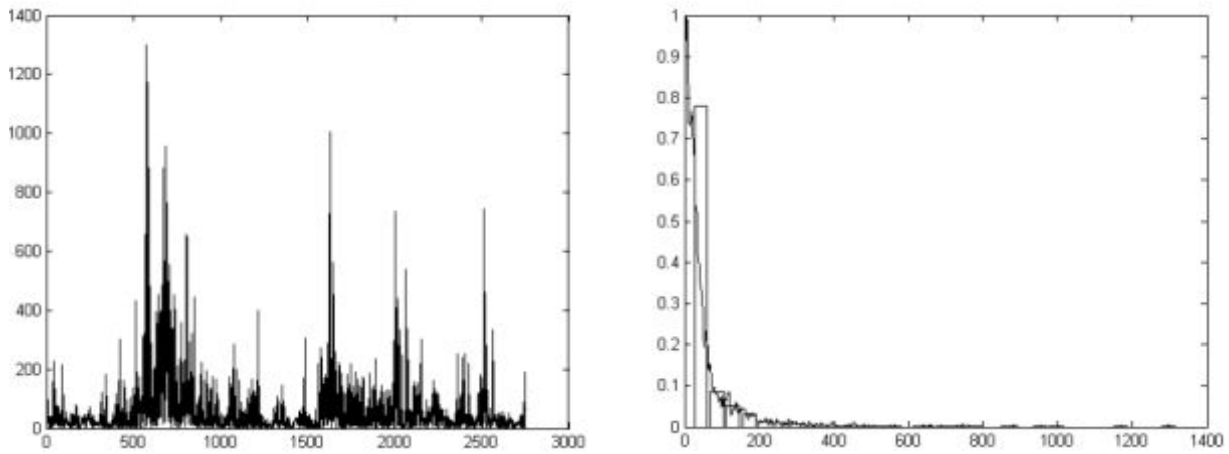
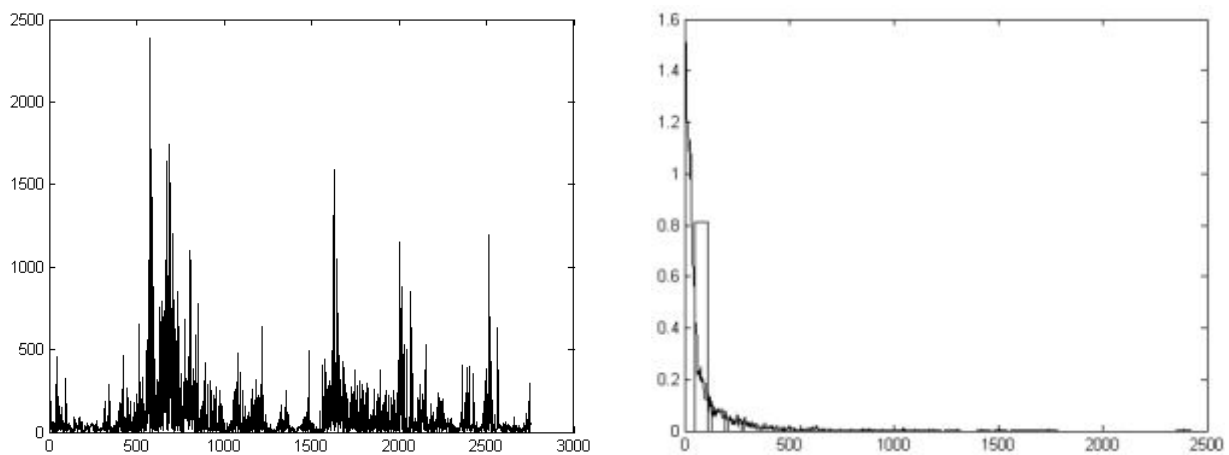


Рис. 3.21. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (третья прогнозируемая точка)



*Рис. 3.22. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (четвертая прогнозируемая точка)*



*Рис. 3.23. Абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными в соответствии с алгоритмом прогнозирования с использованием аппроксимирующего полинома (слева) и распределение остатков (справа) (пятая прогнозируемая точка)*

Для представления о зависимостях, вычисленных в соответствии с алгоритмом 3.1, на рис. 3.19–3.23 приведены абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями первой прогнозируемой точки (остатки) и их распределения (гистограммы и аппроксимирующая кривая, построенная по Парзену-Розенблатту [84]). Здесь для вычисления значений аппроксимирующего полинома и далее прогнозирования сего использовались сингулярные тройки, соответствующие минимальному значению критерия Колмогорова.

Средние значения разностей между истинными и спрогнозированными значениями анализируемого ВР, в рассматриваемых случаях для первой, второй, третьей, четвертой, и пятой прогнозируемых точек составили: 19, 24, 36, 57, 86, соответственно. Сравнивая эти результаты с данными табл. 3.6, видим, что отклонения прогнозных значений для первой и второй спрогнозированных точек оказываются близкими к аналогичным величинам табл. 3.6. Данный результат позволяет сделать вывод о том, что для рассматриваемого ВР предложенный критерий выбора сингулярных троек, используемых для вычисления значений аппроксимирующего полинома, позволяет получать достоверные результаты. Так-



же следует отметить, работоспособность предложенного критерия для двух первых прогнозируемых точек подтверждает ранее сделанный вывод о том, что алгоритм прогнозирования на основе аппроксимирующего полинома следует использовать для краткосрочных прогнозов.

В заключение рассмотрения проблем, возникающих при использовании метода SSA прогнозирования ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, отметим, что оценки точности прогнозируемых значений, полученные на основе сравнения известных и спрогнозированных значений, можно использовать для оценки погрешности прогнозируемых значений, в тех случаях, когда соответствующие им значения анализируемых ВР неизвестны.

### **3.3. Применение метода SSA для прогнозирования ВР, содержащих часовые значения цен на оптовом рынке электроэнергии и мощности**

Современный рынок оптовый рынок электрической мощности (ОРЭМ) имеет следующую структуру: часть электроэнергии покупается по регулируемым договорам, цены и объемы по которым фиксируются на весь год в начале года. Эти цены регулируются администратором торговой системы (АТС). (В 2007 г. данный вид закупок составлял 80–90% общего объема рынка ОРЭМ.) В настоящее время доля данного вида закупок последовательно уменьшается. Предусмотрено, что в 2012 г. она должна упасть до нуля. Оставшиеся объемы электроэнергии и мощности покупаются на рынке на сутки вперед (РВС). Отмеченные обстоятельства являются экономическим стимулом более качественного планирования энергопотребления и энергопроизводства на сутки вперед, являющегося необходимым условием извлечения максимальной прибыли из краткосрочных договоров.

Дополнительный интерес к статистическим и частотно-временным свойствам ВР, содержащих среднесуточные и почасовые цены на ОРЭМ, вызваны их практической важностью для оптимизации стратегии управления и снижения рисков реально функционирующих производственных систем.

Однако обсуждаемые ВР оказываются трудно прогнозируемыми вследствие большого количества факторов, оказывающих на них влияние: объемов производства и потребления электроэнергии, графиков ремонтов генерирующего и сетевого оборудования, погодных условия, состава генерирующего оборудования, уровня водности, ценовых стратегий участников и т.п. (Например, совместная генерация тепловой и электрической энергии на ТЭЦ непрямо зависит от температуры окружающего воздуха [65], определяющей, в соответствие с нормативными требованиями, количество сжигаемого топлива и режимы работы турбин.)

Как следствие, точность результатов прогнозирования среднесуточных и часовых значений цен на рынке ОРЭМ, размещенных на сайте [77] оказывается относительно невысокой. Например, в 2010 г., как показывает анализ разности между спрогнозированными и фактическими значениями, представленной на рис. 3.23: 40% часовых прогнозов имели точность ниже 10%, 28% часовых прогнозов – 5–10%, 32% часовых прогнозов – выше 5% (рис. 3.24).

Данный результат оказывается несколько неожиданным, в особенности, принимая во внимание, что почасовые цены на электроэнергию в конкретной энергосистеме, наряду со случайной составляющей, определяется большим количеством детерминированных процессов, которые потенциально, могут быть описаны в рамках тех или иных математических моделей. В этой связи представляется целесообразным проведение целенаправленных исследований особенностей рассматриваемых ВР, без учета которых дальнейшее совершенствование прогностических моделей представляется невозможным.

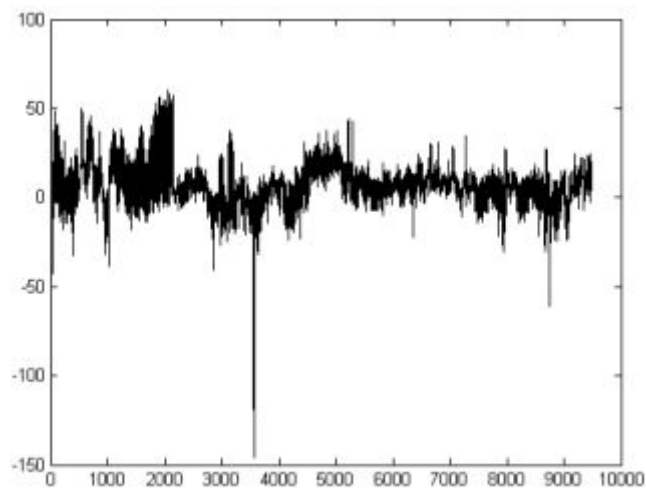


Рис. 3.24. Визуализация ВР, содержащего значения относительной погрешности прогноза часовых значений цены на электроэнергию (в %) в 2010 г. от времени (начало отсчета – 0 час. 1 января 2010 г., период дискретизации ВР – 1 час)

### 1. Частотный анализ ВР, содержащих часовые значения цен на ОРЭМ

Рассмотрим ВР, образованные из индексов часовых цен на ОРЭМ по европейской ценовой зоне России в период с 1 марта 2009 г. по 25 марта 2011 г., сформированных по данным [77] (рис. 3.25). Количество членов ВР  $N = 18981$ .

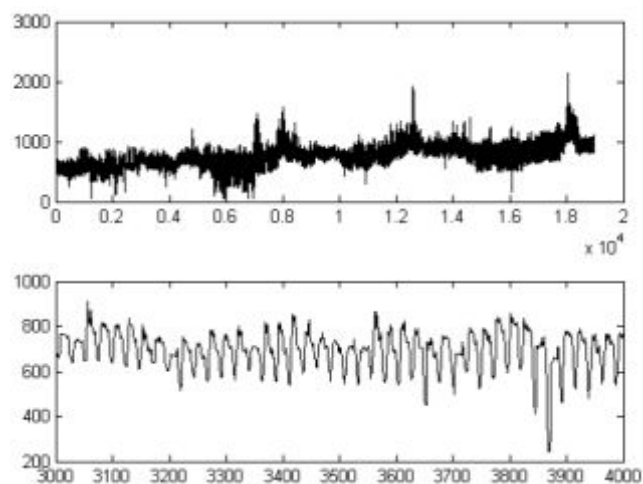


Рис. 3.25. Визуализация ВР, содержащий значения часовых цен на электроэнергию (руб./Мвт·час) в период с 1.03.2009 по 31.05.2011 гг. от времени (начало отсчета – 0 час. 1 марта 2009 г., период дискретизации ВР – 1 час) (сверху – исходный ВР, снизу – фрагмент ВР)

Анализ зависимостей, представленных на рис. 3.25, позволяет предположить, что они представляют собой некоторую линейную комбинацию тренда ( $f_1(t)$ ), нескольких

периодических составляющих  $f_2(t) = \sum_{i=1}^K f_{2i}(t)$ , а также случайных составляющих  $f_3(t)$ :

$$u_i = f_1(t_i) + \sum_{i=1}^K f_{2i}(t_i) + f_3(t_i). \quad (3.5)$$

Для подтверждения данного предположения на первом шаге была проверена гипотеза о возможности описания тренда линейной зависимостью. Для этого с помощью метода наименьших квадратов была найдена линейная аппроксимация рассматриваемого ФВР:

$$u(t) = 0,018074 \cdot t + 585,304209,$$

который далее был удален из ВР. ВР, получившийся после удаления линейного тренда, и его гистограмма представлены на рис. 3.26.

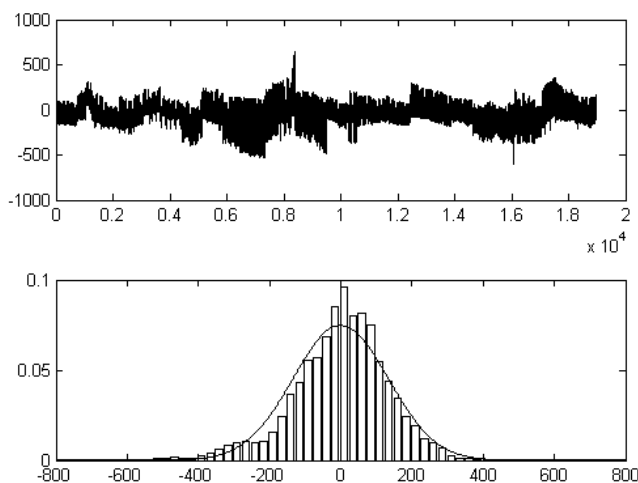


Рис. 3.26. Визуализация ВР с исключенным линейным трендом (сверху – анализируемый ВР, снизу – гистограмма данного ВР)

Проверка распределения остатков по критериям Колмогорова-Смирнова (значение критерия 0.04905) и Лиллиеформа показала, что вероятность ошибки при отклонении гипотезы о согласии данного распределения нормальному распределению не превышает 0.01 (соответственно, критический уровень равен 0.05). Следовательно, распределение остатков ВР с удаленным линейным трендом оказывается отличным от нормального. Данный результат, с нашей точки зрения, объясняется следующими причинами:

- 1) функция  $f_1(t)$  оказывается нелинейной;
- 2) в ФВР с удаленным линейным трендом присутствуют детерминированные периодические составляющие  $f_2(t) = \sum_{i=1}^K f_{2i}(t)$ .

Для проверки предположения о наличии в рассматриваемом ВР детерминированных периодических составляющих было использовано оконное преобразование Фурье, предложенное Д. Габором [103]. (Напомним, что данное преобразование зависит от следующего набора параметров: размера скользящего окна  $W$ , величины перекрытия текущего и предыдущего окон  $W_0$ , а также количества точек  $Nf$ , по которым вычисляются коэффициенты ряда Фурье.) Применение данного преобразования к ВР позволяет получить на последовательных ВИ набор спектров (следуя [52], «мгновенных» спектров). Для стационарного ВР форма данных спектров, как очевидно, будет одинаковой.

Для нестационарного ВР наличие набора мгновенных спектров позволяет вычислить средний спектр

$$|\bar{S}_n| = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K \left[ |S_{k,n}| / \max(|S_{k,n}|) \right],$$

где  $n$  – номер спектральной гармоники,  $n = \overline{1, N}$ ,  $N$  – число спектральных гармоник,  $k = \overline{1, K}$ ,  $K$  – число мгновенных спектров, и использовать в качестве количественно показателя «степени стационарности» ВР максимальное отклонение между средним и мгновенными спектрами:

$$\max \left[ \left( \left| \bar{S}_n \right| - |S_{n,k}| \right) \right].$$

На рис. 3.27 представлены усредненные мгновенные спектры ФВР для различных значений скользящего окна  $W$  (величина перекрытия соседних окон  $W_0 = 0.8W$ , длина преобразования Фурье  $Nf = 4W$ ). Здесь выбор размера окна выбирался кратным количеству отсчетов ВР, приходящихся на ВИ длительностью 31 день.

Значения выбранного количественного показателя «степени нестационарности» ФВР представлены в табл. 3.6.

Из рис. 3.27 видно, что форма мгновенных спектров ФВР с удаленным линейным трендом при изменении в выбранном диапазоне размера окна оказывается подобной – основной вклад в энергию спектра вносят гармоники, частоты кратны  $24/m$  час,  $m = 1, 2, \dots$ . Увеличение размера окна  $W$ , с одной стороны, приводит к появлению дополнительных спектральных составляющих (в том числе, удается выделить составляющую с периодом, равным 1 неделя) и уменьшает, как видно, из табл. 3.6, вариабельность мгновенных спектров, с другой.

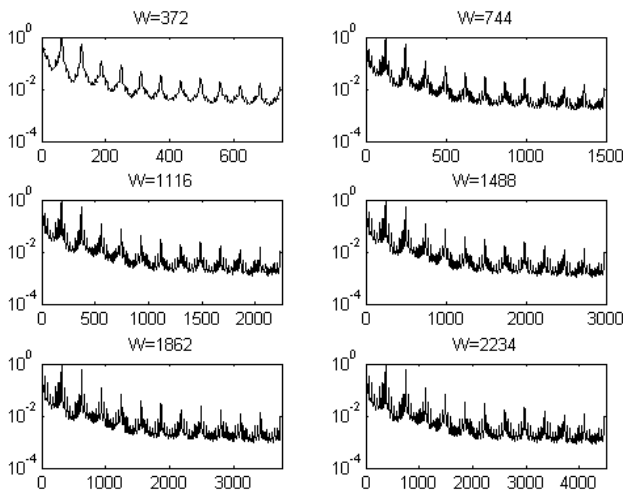


Рис. 3.27 Усредненные мгновенные спектры ФВР с удаленным линейным трендом (ось абсцисс – номер гармоники  $n$ , ось ординат –  $N = 1000$ )

Таблица 3.6 К оценке устойчивости мгновенных спектров ФВР с удаленным линейным трендом

$W$	372	744	1116	1488	1862	2234
Критерий, %	4.9	3.5	2.6	2.3	2.1	1.9

Таким образом, полученные результаты позволяют классифицировать ФВР на ВИ длительностью от полумесяца до трех месяцев как «квазистационарный» и использовать

для его описания математическую модель (3.5). При этом для оценки параметров линейного тренда целесообразно использовать ВИ длительностью один год и более. Полученные оценки длительности интервалов «квазистационарности» анализируемого ВР будем использовать при прогнозировании его значений.

## 2. Анализ результатов обработки ВР, содержащего часовые значения цен на ОРЭМ, методом SSA

Рассмотрим результаты анализа и прогнозирования ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию в период с 1 марта 2009 г. по 31 декабря 2011 г. (длина анализируемого ВР  $N = 18831$ ). Далее, основываясь на результатах, полученных в Главе 2, мы будем использовать:

- 1) зависимости разностей сингулярных значений выборочной траекторной матрицы анализируемого ВР от размера окна сдвига  $L$ ;
- 2) также зависимости мгновенных значений восстановленных ГК по сингулярным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР  $(\lambda_i, U_i, V_i)$  ( $L = 300$ );
- 3) зависимость нормированной спектральной плотности мощности ГК, восстановленных по сингулярным тройкам сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР  $(\lambda_i, U_i, V_i)$  ( $L = 300$ ) от частоты.

Выбранные характеристики для изучаемого ВР представлены на рис. 3.28–3.36. Из рис. 3.28 видно, что периодическими оказываются ГК, полученные группировкой следующих сингулярных троек сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР: № 2–3, № 4–5. Периоды данных ГК и объясняемые ими дисперсии анализируемого ВР, приведены в табл. 3.7.

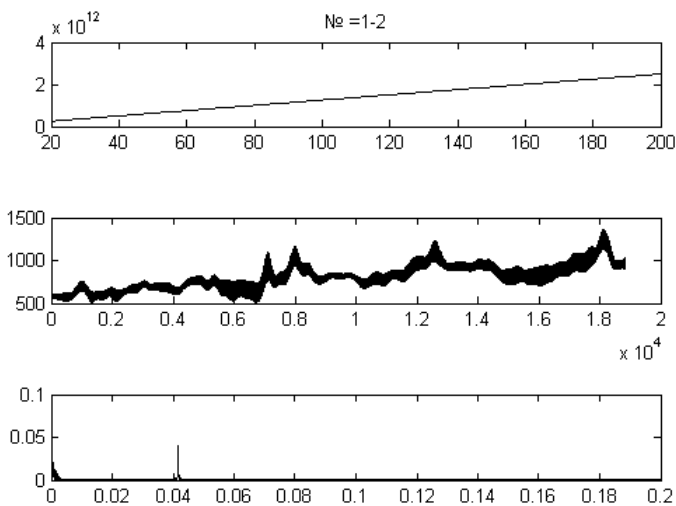


Рис. 3.28. Сверху: зависимость  $\lambda_1 - \lambda_2 = f_{(1,2)}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ,  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ ; снизу: нормированная СПМ (СПМ): ГК, восстановленной по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_1, U_1, V_1)$ ,  $(\lambda_2, U_2, V_2)$

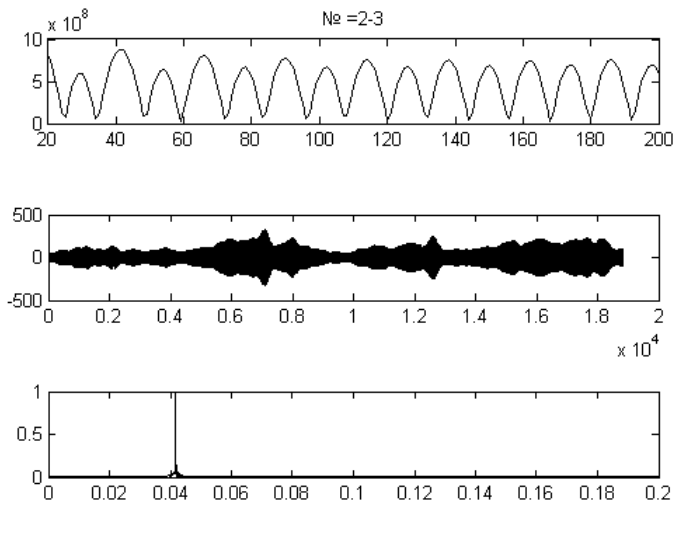


Рис. 3.29. Сверху: зависимость  $\lambda_2 - \lambda_3 = f_{(2,3)}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ ,  $(\lambda_3, U_3, V_3)$ ; снизу: нормированная СПМ: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_2, U_2, V_2)$ ,  $(\lambda_3, U_3, V_3)$

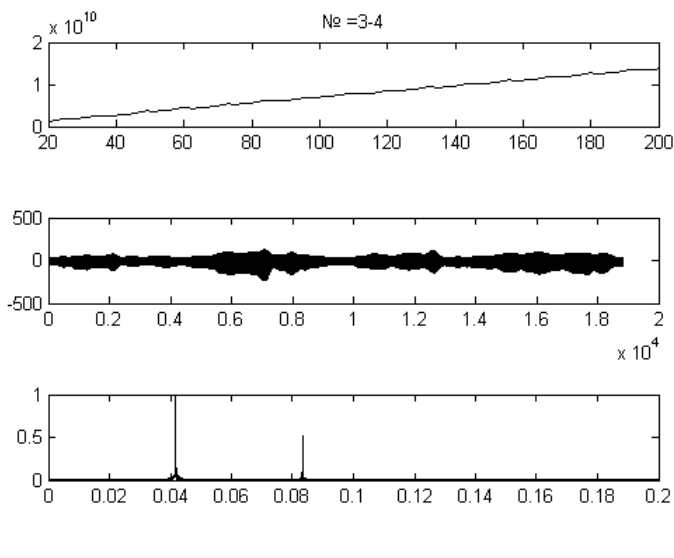


Рис. 3.30. Сверху: зависимость  $\lambda_3 - \lambda_4 = f_{(3,4)}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$ ,  $(\lambda_4, U_4, V_4)$ ; снизу: нормированная СПМ: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_3, U_3, V_3)$ ,  $(\lambda_4, U_4, V_4)$

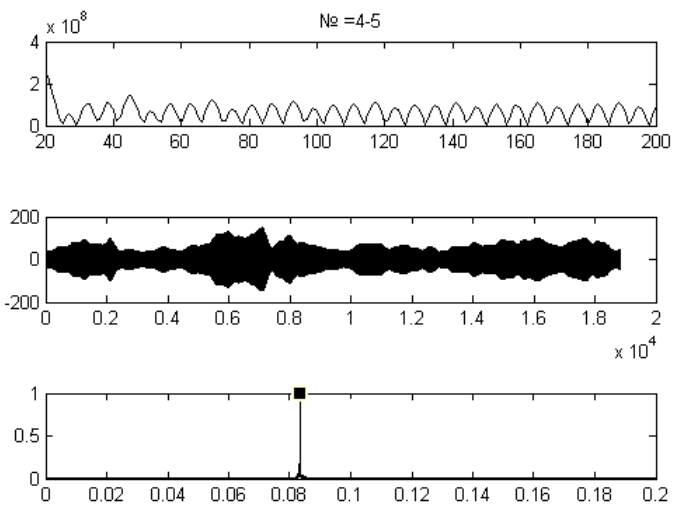


Рис. 3.31. Сверху: зависимость  $\lambda_4 - \lambda_5 = f_{(4,5)}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_4, U_4, V_4)$ ,  $(\lambda_5, U_5, V_5)$ ; снизу: нормированная СПМ: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_4, U_4, V_4)$ ,  $(\lambda_5, U_5, V_5)$

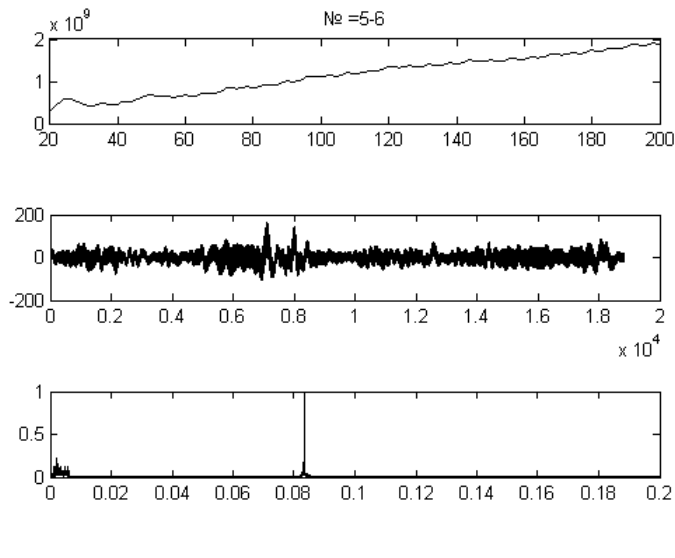


Рис. 3.32. Сверху: зависимость  $\lambda_5 - \lambda_6 = f_{\langle 5,6 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_5, U_5, V_5)$ ,  $(\lambda_6, U_6, V_6)$ ; снизу: нормированная спектральная плотность мощности : ГК, по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_5, U_5, V_5)$ ,  $(\lambda_6, U_6, V_6)$

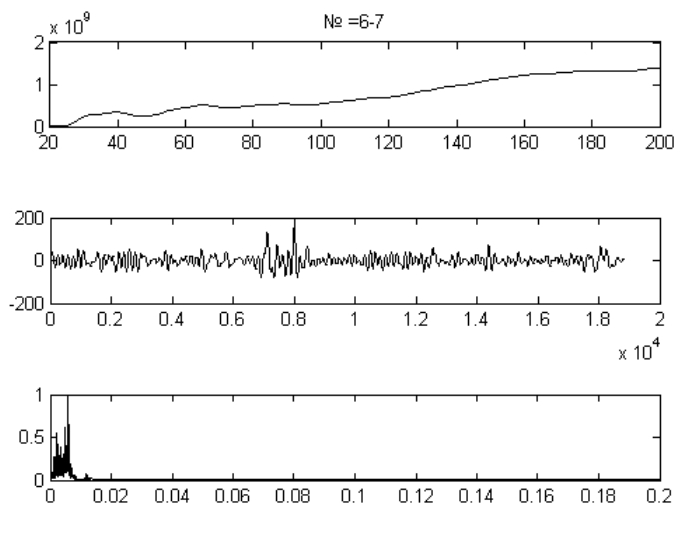


Рис. 3.33. Сверху: зависимость  $\lambda_6 - \lambda_7 = f_{\langle 6,7 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_6, U_6, V_6)$ ,  $(\lambda_7, U_7, V_7)$ ; снизу: нормированная СПМ: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_6, U_6, V_6)$ ,  $(\lambda_7, U_7, V_7)$

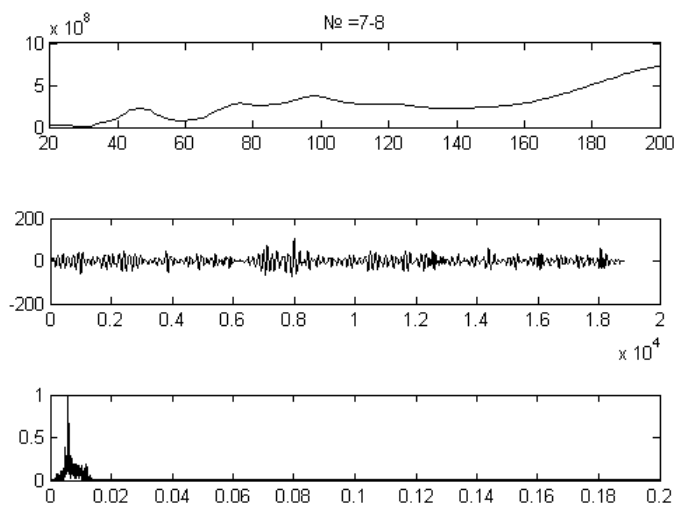


Рис. 3.34. Сверху: зависимость  $\lambda_7 - \lambda_8 = f_{\langle 7,8 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_7, U_7, V_7)$ ,  $(\lambda_8, U_8, V_8)$ ; снизу: нормированная СПМ: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_7, U_7, V_7)$ ,  $(\lambda_8, U_8, V_8)$

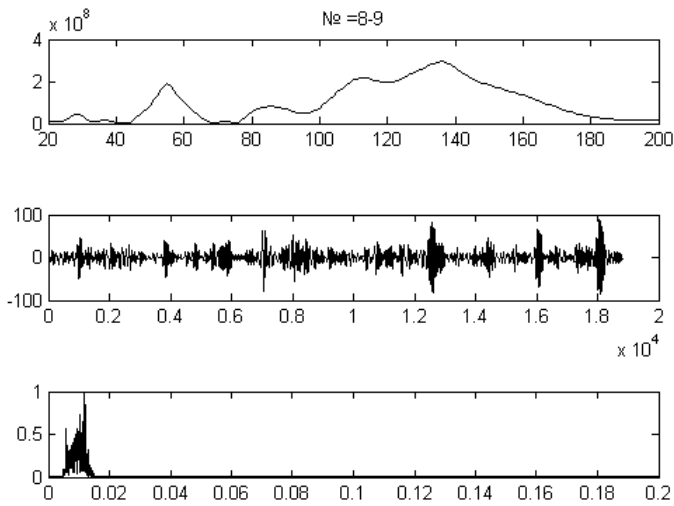


Рис. 3.35. Сверху: зависимость  $\lambda_8 - \lambda_9 = f_{\langle 8,9 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_8, U_8, V_8)$ ,  $(\lambda_9, U_9, V_9)$ ; снизу: нормированная СПМ: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_8, U_8, V_8)$ ,  $(\lambda_9, U_9, V_9)$

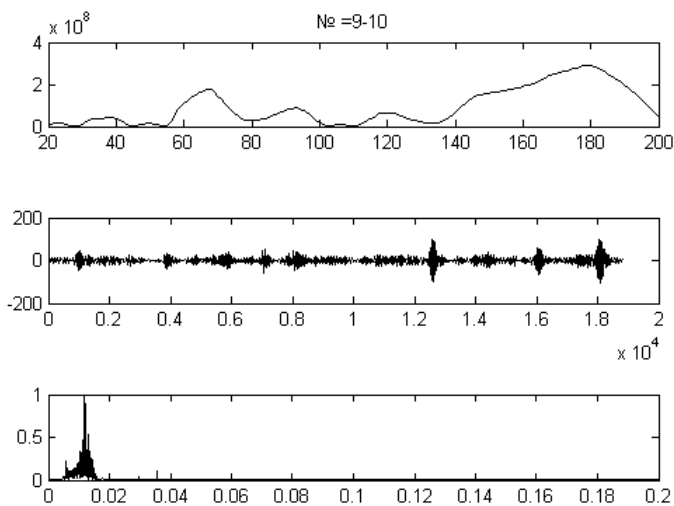


Рис. 3.36. Сверху:  $\lambda_9 - \lambda_{10} = f_{\langle 9,10 \rangle}(L \cdot \Delta t)$ ; в середине: ГК, восстановленная по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_9, U_9, V_9)$ ,  $(\lambda_{10}, U_{10}, V_{10})$ ; снизу: нормированная СПМ: ГК, восстановленная по по сингулярным тройкам траекторной матрицы  $(\lambda_9, U_9, V_9)$ ,  $(\lambda_{10}, U_{10}, V_{10})$

Таблица 3.7. Количественные характеристики сгруппированных ГК, оказывающихся периодическими

Номера сгруппированных сингулярных троек	Период	Объясняемая дисперсия
2–3	24 час	1,46%
4–5	12 час	0,39%

Первая ГК, объясняющая 97,31% дисперсии анализируемого ВР, является трендом, представленным на рис. 3.37. Из рис. 3.37 видно, что данный тренд является сложной функцией времени, устранить которую из исходного ВР с помощью процедуры вычисления первых и т.д. разностей не представляется возможной.

Следует отметить, что ГК, восстановленная по сингулярным тройкам сингулярного разложения № 1–5 анализируемого ВР, объясняют 99,1% его дисперсии. Разности между исходным ВР и данной ГК (остатки модели), а также распределение остатков и нормальное распределение  $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma})$ , где  $\tilde{\mu}, \tilde{\sigma}$  оцениваются по ряду остатков в соответствие прин-



ципом максимального правдоподобия и предположением о нормальности их распределения, представлены на рис. 3.38.

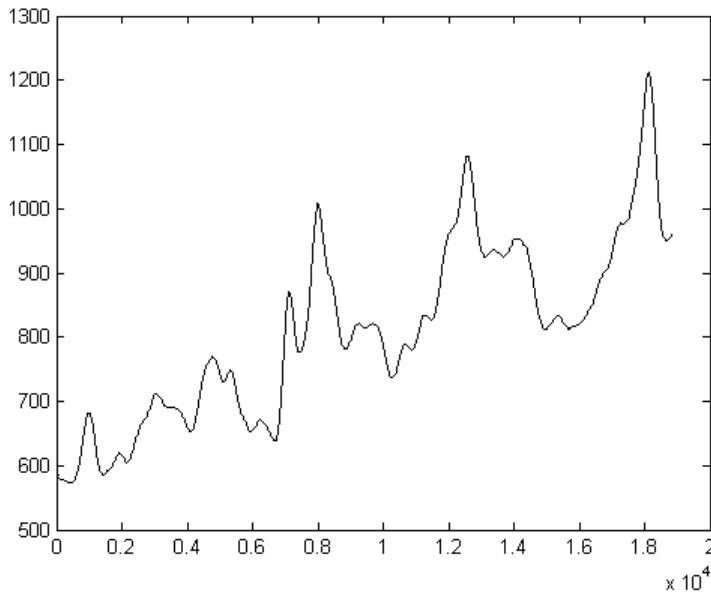


Рис. 3.37. ГК, восстановленная по первой сингулярной тройке траекторной матрицы анализируемого ВР № 1 ( $\lambda_1, U_1, V_1$ )

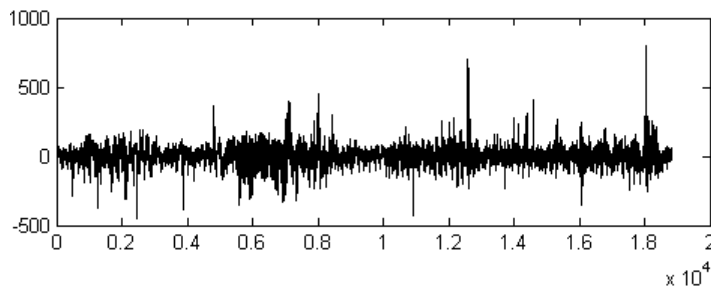
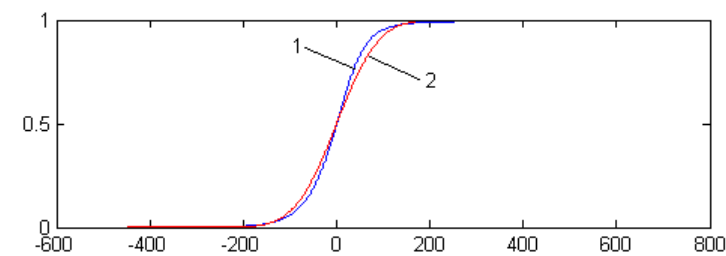


Рис. 3.38. Вверху: разность между исходным ВР и ГК, восстановленной по сингулярным тройкам сингулярного разложения № 1–5 анализируемого ВР (остатки); внизу: распределение остатков модели (1 – экспериментальная функция распределения; 2 – распределение  $N(\tilde{\mu}, \tilde{\sigma})$ )



Анализ форм экспериментального и теоретического распределений, представленных на рис. 3.38, позволяет выдвинуть гипотезу о том, что остатки модели распределены по нормальному закону  $\alpha$  являющаяся сложной. Для ее проверки, как и ранее было использовано статистическое моделирование, результаты которого позволили получить для рассматриваемого случая значение статистики Колмогорова  $c > 1$ , оказавшееся равным 9.68, и ее распределение (рис. 3.39).

Из рис. 3.39, видно, что  $c = 0.3$ , поэтому гипотеза о  $\alpha = -0.2$  отклоняется. Данный результат свидетельствует о том, что математическая модель, построенной группировкой ГК сингулярных троек сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР № 1–5 анализируемого ВР, не является совершенной, поэтому вопрос о их выборе требует дополнительного исследования.

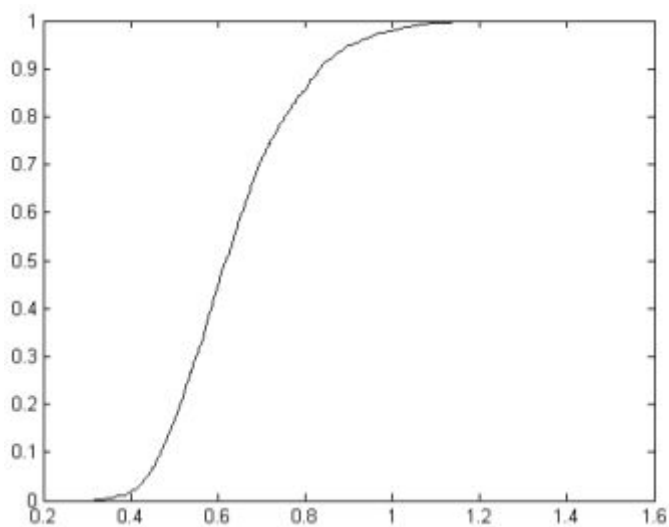


Рис. 3.39. Распределение статистики критерия Колмогорова для ряда остатков

### 3. Исследование точности прогнозирования ВР, содержащего часовые значения цен на ОРЭМ

В связи с тем, что на сайте [77], выкладываются как фактические часовые значения часовых цен на электроэнергию на ОРЭМ, так и соответствующие прогнозируемые значения, представляется целесообразным провести сравнение абсолютных значений разностей между известными и точными значениями анализируемого ВР (остатков) с помощью следующих алгоритмов прогнозирования:

- 1) алгоритм, используемый компанией, поддерживающий сайт [77] (который, однако, посетителям сайта остается неизвестным);
- 2) рекурсивный алгоритм прогнозирования метода SSA;
- 3) алгоритм прогнозирования, основанный на использовании аппроксимирующего исходный ВР полинома, значения которого вычисляются в соответствии с методом SSA.

Далее, для краткости, будем обозначать данные алгоритмы прогнозирования АлПр № 1, № 2, № 3, соответственно.

ВР, содержащий абсолютные мгновенные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями в соответствии с АлПр № 1, а также гистограмма их распределения представлены на рис. 3.40. Здесь среднее значение ряда остатков оказалось равным 89, среднеквадратическое отклонение – 90.

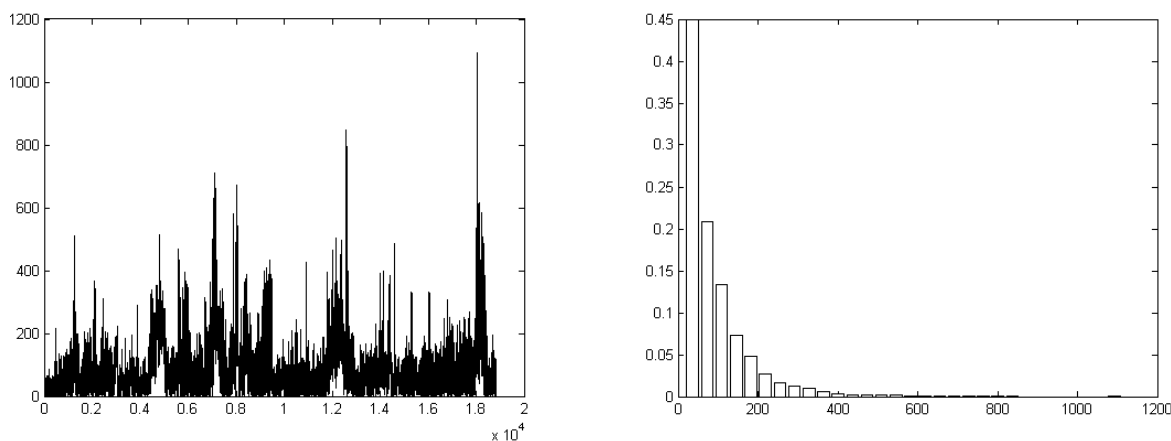


Рис. 3.40. Абсолютные значения разностей между фактическими значениями анализируемого ВР и значениями, спрогнозированными в соответствии с АлПр № 2

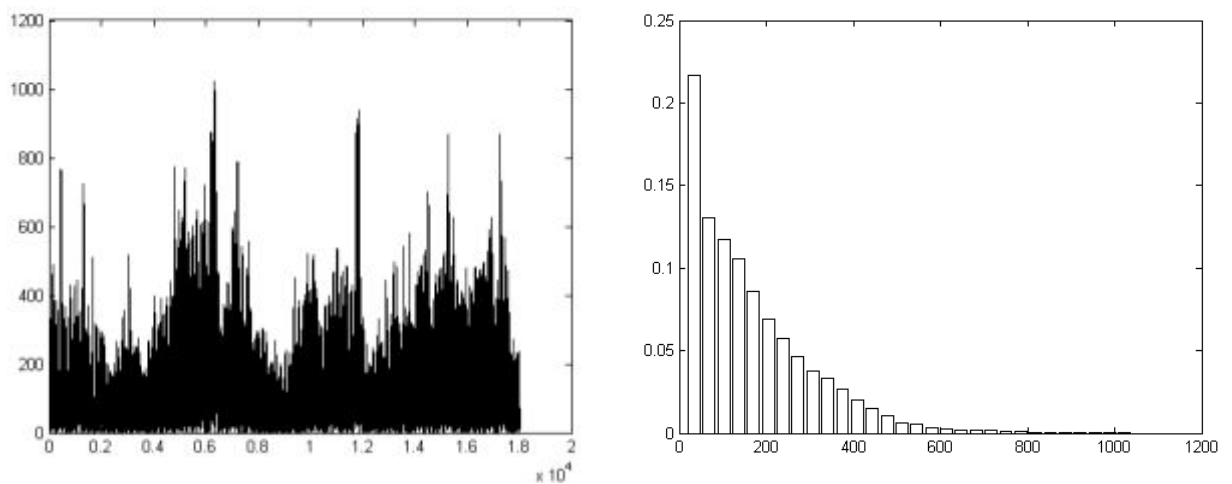


Рис. 3.41. Абсолютные значения разностей между фактическими значениями анализируемого ВР и значениями, спрогнозированными в соответствии с АлПр № 3

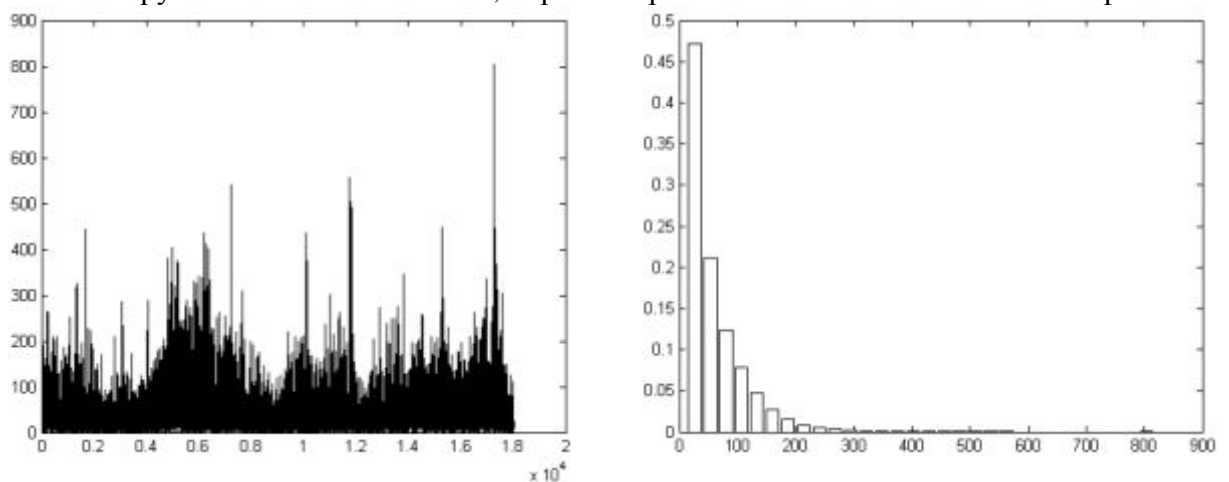


Рис. 3.42. Абсолютные значения разностей между фактическими значениями анализируемого ВР и значениями, спрогнозированными в соответствии с АлПр № 3

Для изучения зависимостей точности прогнозирования ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ, с помощью рекурсивного алгоритма и с помощью алгоритма прогнозирования по полиному, аппроксимирующему анализируемый ВР (ряд  $\tilde{F}_N^{(1)}$ ), был использован алгоритм 3.1. Для представления о погрешностях прогнозирования, вычисленных в соответствии с АлПр № 1, на рис. 3.41–3.42 приведены абсолютные значения разностей между фактическими и спрогнозированными значениями первой прогнозируемой точки (остатки). Здесь для прогнозирования в соответствии с АлПр № 2 использовались собственные тройки № 1–5. Эти же собственные тройки были использованы для вычисления прогнозируемых значений с помощью АлПр № 3. Из рис. 3.40–3.42 видно, что у обоих алгоритмов погрешность прогнозирования оказывается зависящей от локальных особенностей анализируемого ВР, которые априори неизвестны. Средние значения и среднеквадратические отклонения остатков, представленных на рис. 3.41, 3.42, составили 158 и 139, 58 и 55, соответственно. Таким образом, в рассматриваемом случае качество прогнозирования на основе АлПр № 3 оказывается наилучшим из всех рассмотренных алгоритмов, а точность АлПр № 2, напротив оказывается ниже, чем у АлПр № 1.

Таблица 3.8. Средние значения и среднеквадратические отклонения остатков спрогнозированных значений в соответствии с алгоритмом № 2

Группируемые компоненты	Номер прогнозируемой точки				
	1	2	3	4	5
1–5	165±139	164±137	165±138	167±140	169±141
1–7	167±142	173±147	180±151	185±155	189±158
1–9	168±142	175±148	179±152	181±154	181±154
1–11	171±142	167±140	165±140	165±140	166±141
1–13	171±142	182±152	185±155	182±152	180±151
1–15	171±143	179±151	180±154	178±152	178±151

Таблица 3.9. Средние значения и среднеквадратические отклонения остатков спрогнозированных значений в соответствии с алгоритмом № 3

Группируемые компоненты	Номер прогнозируемой точки				
	1	2	3	4	5
1–5	58±55	94±93	94±93	295±350	479±593
1–7	51±51	93±98	93±98	308±382	502±648
1–9	53±55	101±112	101±112	343±443	559±752
1–11	57±62	114±134	114±134	390±533	636±906
1–13	61±68	125±148	125±148	433±586	708±996
1–15	66±76	135±162	135±162	470±638	774±1086

Для удобства дальнейшего анализа для каждой из пяти прогнозируемых точек и заданным значениям номеров группируемых сингулярных троек были вычислены средние и среднеквадратические отклонения ВР, содержащих абсолютные значения остатков для АлПр № 2 и № 3 (табл. 3.8, 3.9).

Из табл. 3.8, 3.9 видно:

- 1) наибольшую точность прогнозирования точки № 2 из рассмотренных алгоритмов имеет АлПр № 3;
- 2) точность прогнозирования первой точки в соответствии с АлПр № 3 оказывается максимальной, когда значения аппроксимирующего полинома вычисляются на основе группировки ГК № 1–7;
- 3) точность АлПр № 3 для второй и далее прогнозируемых точек оказывается ниже, чем у алгоритма № 1;
- 4) точность прогнозирования в соответствии с АлПр № 2 оказывается минимальной из всех рассмотренных выше алгоритмов прогнозирования.

Таким образом, можно рекомендовать использовать для прогнозирования значений часовых цен на электроэнергию на ОРЭМ на один час вперед алгоритм, основанный на использовании аппроксимирующего полинома, значения которого вычисляются группи-

ровкой ГК № 1–7, вычисляемых для отрезка анализируемого ВР длина  $L \cdot \Delta t = 0.05$  и значении сдвига  $L \cdot \Delta t = 0.1$

### 3.4. Выводы

1. Результаты применения метода SSA для анализа ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ, содержащие 3161 и 18981 отсчет, соответственно, показывают эффективность, предложенного в Главе 2 подхода к идентификации сингулярных троек траекторной матрицы данных ВР, с помощью зависимости разности сингулярных чисел, номера которых отличаются друг от друга на единицу.

2. Результаты анализа данных ВР, полученные с помощью метода SSA, не противостоят результатам, полученным другими известными методами анализа ВР, в том числе спектрального анализа и вейвлет-анализа.

3. Результаты применения метода SSA для прогнозирования изученных ВР, показывают, что данный метод является скорее инструментом краткосрочного прогнозирования, чем долгосрочного прогнозирования.

4. Продемонстрирована целесообразность использования для краткосрочного прогнозирования ВР аппроксимирующего полинома, значения которого вычисляются в соответствии с методом SSA.

5. Показано, что при прогнозировании ВР, содержащего среднемесячные значения чисел Вольфа, на основе использования значений аппроксимирующего полинома, следует выбирать сингулярные тройки сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемого ВР  $(\lambda_i, U_i, V_i)$  из условия обеспечения минимального значения критерия Колмогорова ряда остатков (разностей между исходным ВР и аппроксимирующим полиномом), а при прогнозировании ВР, содержащего часовые значения цен на электроэнергию на ОРЭМ, следует использовать сингулярные тройки № 1–7.

6. На основе анализа экспериментальных данных даны рекомендации по выбору параметров метода SSA в задаче прогнозирования изученных ВР: размера скользящего окна  $L \cdot \Delta t = 0.5$  размера окна сдвига  $L$ , количества используемых сингулярных троек сингулярного разложения траекторной матрицы анализируемых ВР.

8. Предложенные подходы к анализу и прогнозированию являются универсальными и могут быть использованы для любых ВР.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1) Исследованы особенности сингулярных чисел траекторной матрицы метода SSA ВР вида  $F_N^{(1)} = 0.2$ , (как для детерминированных, так и случайных ВР), результаты которого свидетельствуют о целесообразности использования при выборе параметров метода SSA зависимостей  $\lambda_i - \lambda_{i+1}$  от значений параметра  $L \cdot \Delta t$ ,  $L$  – параметр сдвига,  $\Delta t$  – шаг ВС, в узлах которой заданы значения анализируемого ВР.

2) Проведена экспериментальная апробация предложенных рекомендаций по выбору параметров метода SSA при анализе и прогнозировании реальных ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности.

3) Предложено использовать при прогнозирования нестационарных ВР сплайны, аппроксимирующие низкочастотную составляющую анализируемого ВР, выделенную в соответствие с методом SSA.

4) Предложен алгоритм оценки точности прогнозирования нестационарных ВР методом SSA.

5) Получены оценки точности прогнозирования нестационарных ВР, содержащих среднемесячные значения чисел Вольфа, а также часовые значения цен на электроэнергию на оптовом рынке электрической мощности, подтверждающие преимущества предложенного в работе метода краткосрочного прогнозирования нестационарных ВР.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Айвазян С.А. Прикладная статистика и основы эконометрики. Т. 1. [Текст] / С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян // М.: Юнити, 1998. – 656 с.
2. Айвазян С.А., Мхитарян В.С. Прикладная статистика и основы эконометрики. Т 2. [Текст]/ С. А. Айвазян, В. С. Мхитарян // М.: Юнити, 1998. – 432 с.
3. Айвазян С.А. Прикладная статистика: Основы моделирования и первичная обработка данных: Справ. изд. [Текст] / С. А. Айвазян, И. С. Енюхов, Д. Ж. Мешалкин // М.: Финансы и статистика, 1983. –471 с.
4. Александров Ф.И. Разработка программного комплекса выделения и прогноза аддитивных компонент временных рядов в рамках подхода «Гусеница». Автореф. дисс.... канд. физ.-мат. наук. –СПб, 2006. –150 с.
5. Андерсон Т. Статистический анализ временных рядов. Пер. с англ. [Текст] / Т. Андерсон // М.: Мир, 1976. – 757 с.
6. Афанасьев В.Н. Анализ временных рядов и прогнозирование [Текст] / В.Н. Афанасьев, М.М. Юзбашев // М.: Финансы и статистика; Инфра-М, 2012. –320 с.
7. Барлетт С. Введение в теорию случайных процессов. [Текст] / С. Барлетт // М.: Иностранная литература, 1958. –384 с.
8. Бендат Дж., Пирсол А. Прикладной анализ случайных данных. [Текст] / Дж. Бендат, А. Пирсол // М.: Мир, 1989. –540 с.
9. Блаттер К. Вейвлет-анализ. Основы теории. [Текст] / К. Блаттер // М.: Техносфера, 2004. –280 с.
10. Боровиков В.П. Прогнозирование в системе STATISTICA в среде WINDOWS. Основы теории и интенсивная практика на компьютере [Текст] : учеб. пособие / В. П. Боровиков, Г. И. Ивченко // М. : Финансы и статистика, 2000. – 384 с.
11. Боровков А.А. Математическая статистика. [Текст] / А.А. Боровков// М.: Физматлит, 2007. –704 с.
12. Боровков А.А. Теория вероятностей. [Текст] / А. А. Боровков // М.: Наука, 1974. –432 с.
13. Бриллинджер Д. Временные ряды: обработка и теория. [Текст] / Д. Бриллинджер // М.: Мир, 1980. –536 с.
14. Ван дер Варден Б.Л. Математическая статистика. [Текст] / Б. Л. Ван дер Варден // М.: Иностранная литература, 1960. –435 с.
15. Вайнштейн Л.А., Разделение частот в теории колебаний и волн. [Текст] / Л. А. Вайнштейн, Д. Е. Вакман // М.: Наука, 1983. –288 с.
16. Вейвлет-анализ в примерах. [Текст] / О.В. Нагорнов и др. // М.: НИЯУ МИФИ, 2010. –120 с.
17. Виноградов Е.С. Колебания рождаемости одаренных людей в 11-летнем солнечном цикле. [Текст] / Е. С. Виноградов // Психол. журн., 1990. –Т. 11. –№ 2. –С.142–144.
18. Вольф Д.А. Модель, численная и программная реализация оценивания частоты основного тона речевого сигнала с помощью сингулярного спектрального анализа. [Текст] / Д.А. Вольф// Канд. дис.... техн. наук. Томск, 2015. 148 с.

19. Вохмянин С.В. Испытание алгоритма метода «Гусеница-SSA» для восстановления временного ряда. [Текст] / С. В. Вохмянин // Вестник Сибирского государственного аэрокосмического университета имени академика М. Ф. Решетнева, 2010. –№ 2. – С. 59–62.
20. Галактионов Ю.К. Опыт анализа методом главных компонент динамики численности животных [Текст] / Ю. К. Галактионов // Научн.-техн. бюл. СО ВАСХНИЛ: Прогноз и учет вредителей сельскохозяйственных культур. –Вып. 22. –Новосибирск, 1984. – С. 13–24.
21. Главные компоненты временных рядов. [Текст] / Под редакцией Д.Л. Данилова и А.А. Жиглявского // СПб.: Пресском, 2007. –308 с.
22. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: анализ временных рядов: Учеб. пособие. [Текст] / Н. Э. Голяндина // –СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. – 76 с.
23. Голяндина Н.Э. Метод «Гусеница»-SSA: прогноз временных рядов: Учеб. пособие. [Текст] / Н. Э. Голяндина // – СПб: Изд-во СПбГУ, 2004. – 52 с.
24. Грешилов А.А. Математические методы построения прогнозов [Текст] / А.А. Грешилов, В.А. Стакун, А.А. Стакун. – М. : Радио и связь, 1997. –112 с.
25. Джонсон Н. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы планирования эксперимента. [Текст] / Н. Джонсон, Ф. Лион // М.: Мир, 1980. –516 с.
26. Дубровская Л.И. Прогнозирование временных рядов в пакете STATISTICA [Текст] : метод. указания / Л.И. Дубровская // Томск : ТГУ, 2004. – 32 с.
27. Жданов В.Ю. Прогнозирование акций Газпрома с помощью сингулярного спектрального анализа. [Электронный ресурс] / В. Ю. Жданов // URL: <http://beintrend.ru/2010-11-22-15-35-42>
28. Елисеева И.И. Общая теория статистики. [Текст] / И. И. Елисеева, М. М. Юзбашев // –М.: Финансы и статистика, 2004. – 656 с.
29. Ефимов В.М. Анализ и прогноз временных рядов методом главных компонент. [Текст] / В. М. Ефимов, Ю. К. Галактионов, Н. Ф. Шушпанова // Новосибирск: Наука, Сибирское отделение, 1988. –71 с.
30. Ефимов В.М. Некоторые закономерности динамики урожайности зерновых культур в Новосибирской области. [Текст] / В. М. Ефимов, Ю. К. Галактионов, С. М. Гусев // Доклады ВАСХНИЛ. –1983. –№ 4. –С. 10–11.
31. Ефимов В.М. Исследование ритмической структуры геофизических рядов методом главных компонент. [Текст] / В. М. Ефимов, Д. В. Речкин // Научн.-техн. бюл. СО ВАСХНИЛ: Долгосрочное прогнозирование гидрометеорологических условий. –Вып. 36. –Новосибирск, 1985. –С. 29–31.
32. Ефимов В.М. Обработка временных рядов методом главных компонент. [Текст] / В. М. Ефимов // Научн.-техн. бюл. СО ВАСХНИЛ: Прогноз и учет вредителей сельскохозяйственных культур. –Вып. 22. –Новосибирск, 1984. –С. 32–40.
33. Ефимов В.М. Разложение на главные компоненты динамики заготовок шкур млекопитающих и их интерпретация. [Текст] / В. М. Ефимов, Ю. К. Галактионов // –Экология горных млекопитающих: Информационные материалы. –Свердловск: УНЦ АН СССР, 1982. С. 41–43.



34. Захарова О.В. Методы прогнозирования динамики экспортных процессов. [Текст] / О. В. Захарова // ВІСНИК Донбаської державної машинобудівної академії, 2006. –№ 1Е (6). –С. 311–316.
35. Зотов Л.В. Вращение Земли: анализ вариаций и прогнозирование. Дисс. канд....физ.-мат. наук. –М., 2005. –182 с.
36. Каган А.М. Характеризационные задачи математической статистики. [Текст] / А. М. Каган, Ю. В. Линник, С. Р. Рао // М.: Наука, 1972. –656 с.
37. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 1–4. [Текст] /Г. Г. Канторович // Экономический журнал ВШЭ, 2002. № 1. – С. 85–115.
38. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 5–7. [Текст] /Г. Г. Канторович // –Экономический журнал ВШЭ, 2002. –№ 2. –С. 251–273.
39. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 5–9. [Текст] /Г. Г. Канторович // –Экономический журнал ВШЭ, 2002. –№ 3. –С. 379–401.
40. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 10–13. [Текст] /Г. Г. Канторович // –Экономический журнал ВШЭ, 2002. –№ 4. –С. 498–523.
41. Канторович Г.Г. Анализ временных рядов: Лекционные и методические материалы. Лекции № 14–16. [Текст] /Г. Г. Канторович // –Экономический журнал ВШЭ, 2002. –№ 1. –С. 79–103.
42. Кендалл М. Дж. Временные ряды. [Текст] / М. Дж. Кендалл // М.: Финансы и статистика, 1981. – 199 с.
43. Кендалл М. Дж. Многомерный статистический анализ и временные ряды. [Текст] / М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт // М.: Наука, 1976. – 736 с.
44. Кендалл М. Дж., Статистические выводы и связи. [Текст] / М. Дж. Кендалл, А. Стьюарт // М.: Наука, 1973. – 900 с.
45. Колмогоров А.Н. Основные понятия теории вероятностей. [Текст] / А.Н. Колмогоров // М.: Наука, 1974. –120 с.
46. Коломейко Ф.В., Сердобинцев С.П. Автоматизированная система прогнозирования пространственно-временного распределения объектов промышленного лова. [Текст] / Ф. В. Коломейко, С. П. Сердобинцев // Информационные технологии, 2009. –№ 3. – С. 82–85.
47. Компьютерный анализ и интерпретация эмпирических зависимостей. [Текст] / С. В. Поршнева и др. // М.: ООО «Бином-Пресс», 2009. –336 с.
48. Кремер Н.Ш. Эконометрика. [Текст] / Н.Ш. Кремер, Б.А. Путко // М.: Юнити-Данта, 2002. –311 с.
49. Лабунец Н.Л., Лабунец Л.В. Прогнозирование объемов продаж компании методами структурного анализа данных. [Электронный ресурс] / Н. Л. Лабунец, Л. В. Лабунец // URL: [www.labnet.ru/docs/retail/Reail\\_Tez\\_2009.pdf](http://www.labnet.ru/docs/retail/Reail_Tez_2009.pdf) (дата доступа 31.07.2012)

50. Лемешко Б.Ю. Статистический анализ данных, моделирование и исследование вероятностных закономерностей. Компьютерный подход. / Б.Ю. Лемешко, С.Б. Лемешко, С.Н. Постовалов, Е.В. Чимитова [Текст] // Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2011. –888 с.
51. Лукашин Ю.П. Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования временных рядов. [Текст] / Ю.П. Лукашин // – М.: Статистика, 2003. –415 с.
52. Макс Ж. Методы и техника обработки сигналов при физических измерениях: В 2-х томах. Пер. с франц. [Текст] / Ж. Макс // М.: Мир, 1983. –Т. 2. –256 с.
53. Марпл-мл. С.Л. Цифровой спектральный анализ и его приложения. [Текст] / С. Л. Марпл // М.: Мир, 1990. –584 с.
54. Миллер Н.О. Сопоставление изменений широты Пулкова с международными наблюдениями за 1904–2006 годы. [Текст] / Н. О. Миллер, Е. Я. Прудникова // Известия ГАО, 2009. –№ 219. –С. 223–231.
55. Наговицин Ю.А. Глобальная активность солнца на длительных временах. [Текст] /Ю. А. Наговицин // Астрофизический бюллетень, 2008. –Т. 63. –№ 1. –С. 45–48.
56. Осминин К.П. Алгоритмы построения статистик для анализа и прогнозирования нестационарных временных рядов. [Текст] / К. П. Осминин // Информационные технологии вычислительные системы, 2009. – № 1. С. 3–15.
57. Орлов А.И. Прикладная статистика. [Текст] / А. И. Орлов// М.: Издательство «Экзамен», 2006. – 672 с.
58. Орлов Ю.Н. Методика определения оптимального объема выборки для прогнозирования нестационарного временного ряда. [Текст] / Ю. Н. Орлов, К. П. Осминин // Информационные технологии и вычислительные системы. – 2008. – № 3. – С. 3–13.
59. Осминин К.П. Нестационарные временные ряды: Методы прогнозирования с примерами анализа финансовых и сырьевых рынков. [Текст] / Ю. Н. Орлов, К. П. Осминин // М.: Книжный дом «ЛИБРОКОМ», 2011. –384 с.
60. Орлов Ю.Н. Построение выборочной функции распределения для прогнозирования нестационарного временного ряда [Текст] / Ю.Н. Орлов // Математическое моделирование, 2008. – № 9. – С. 23–33.
61. Отнес Р. Прикладной анализ временных рядов. [Текст] / Р. Отнес, Л. Эноксон // М.: Мир, 1982. –432 с.
62. Поллард Дж. Справочник по вычислительным методам статистики. [Текст] / Дж. Поллард // –М.: Финансы и статистика, 1982. –344 с.
63. Поршнев С.В. Анализ динамики среднемесячных чисел Вольфа с помощью метода главных компонент. [Текст] / С. В. Поршнев // Электромагнитные волны и электронные системы, 2009. – № 6. – С. 21–29.
64. Поршнев С.В. Вейвлет-анализ динамики чисел Вольфа. [Текст] / С.В. Поршнев // Вестник ГОУ ВПО УГТУ-УПИ. Проектирование и анализ радиотехнических и информационных систем: Серия радиотехническая. Екатеринбург: ГОУ ВПО УГТУ-УПИ, 2004. № 18 (48). – С. 63–73.
65. Поршнев С.В. Исследование методов анализа и прогнозирования технологической информации, собираемой информационными системами тепловых электрических станций [Текст]/ С. В. Поршнев, И. В. Соломаха // – Екатеринбург: УрФУ, 2011. –208 с.

66. Поршнеv С.В. Исследование особенностей временных рядов, содержащих часовые значения цен на оптовом рынке электроэнергии и мощности. [Текст] / С. В. Поршнеv, Фуад Рабайа // Естественные и технические науки, 2012. – № 2. – С. 361–367.
67. Поршнеv С.В. Исследование особенностей временных рядов, содержащих часовые значения цен на оптовом рынке электроэнергии и мощности. [Текст] / С. В. Поршнеv, Фуад Рабайа // Современные телекоммуникационные системы и компьютерные сети: перспективы развития: Труды международной. научн. конф. – СПб.: СПбГАСУ, 2011. – С. 109–123.
68. Поршнеv С.В. Исследование особенностей прогнозирования временных рядов с помощью метода главных компонент: анализ устойчивости состава главных компонент при изменении длины временного ряда [Текст] / И. В. Соломаха, К. Э. Аронсон, С. В. Поршнеv // Естественные и технические науки, 2009. – № 4 (42). – С. 416–425.
69. Поршнеv С.В. Применение метода SSA для анализа технологической информации, собираемой информационным комплексом ТЭЦ [Текст] / С. В. Поршнеv, И. В. Соломаха, К. Э. Аронсон // Новые информационные технологии в исследовании сложных структур: Тезисы докладов Седьмой Российской конференции с международным участием. – Томск : Изд-во НТЛ, 2008. – С. 23.
70. Поршнеv С.В. Прогнозирование методом главных компонент. Проблемы выбора начальных данных для построения прогноза [Текст] / И. В. Соломаха, С. В. Поршнеv // Научные труды международной научно-практической конференции «СВЯЗЬ-ПРОМ 2009» в рамках 6-го Международного форума «СВЯЗЬПРОМЭКСПО 2009», посвященного 150-летию со дня рождения изобретателя радио А.С. Попова. – Екатеринбург: УрТИСИ ГОУ ВПО «СибГУТИ», 2009. – С. 75–77.
71. Поршнеv С.В. Об особенностях сингулярных чисел и сингулярных векторов выборочной корреляционной матрицы в методе SSA. [Текст] / С. В. Поршнеv, Фуад Рабайа // Научно-технический вестник Поволжья, 2012. – № 3. – С. 146–150.
72. Поршнеv С.В. О разделимости аддитивных составляющих в методе SSA. [Текст] / С. В. Поршнеv, Фуад Рабайа // Наука и образование в XXI веке: сборник научных трудов по материалам Международной заочной научно-практической конференции 31 мая 2012 г.: в 5 частях. Мин. образования и науки Российской Федерации. Часть 2. – Тамбов: Изд-во ТРОО «Бизнес-Наука-Общество», 2012. – С. 113–115.
73. Поршнеv С.В. Применение метода SSA для анализа технологической информации, собираемой информационным комплексом ТЭЦ [Текст] / С. В. Поршнеv И. В. Соломаха, К. Э. Аронсон // Известия Томского политехнического университета. 2008. –Т. 313. –№ 5. –С. 161–168.
74. Поршнеv С.В. Физическое содержание понятий «огibaющая» и «мгновенная частота широкополосного аналитического сигнала» [Текст] / С.В. Поршнеv // Электромагнитные волны и электронные системы. 2001. – Т. 6. – № 1. – С. 48–55.
75. Поршнеv С.В. Радиолокационные методы измерений экспериментальной баллистики. [Текст] / С. В. Поршнеv // Екатеринбург: УрО РАН, 1999. –208 с.
76. Поршнеv С.В. Теория и алгоритмы аппроксимации эмпирических зависимостей и распределений. [Текст] / С. В. Поршнеv, Е. В. Овечкина, В. Е. Каплан // –Екатеринбург: УрО РАН, 2006. –166 с.

77. Прогноз цен оптового рынка электроэнергии России по первой ценовой зоне. Прогноз потребления. [Электронный ресурс] // URL: <http://www.preprice.ru/> (дата обращения: 31.07.2012)
78. Р 50.1.033-2001. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть I. Критерии типа хи-квадрат. –М.: Изд-во стандартов. 2002. –87 с.
79. Р 50.1.037-2002. Рекомендации по стандартизации. Прикладная статистика. Правила проверки согласия опытного распределения с теоретическим. Часть II. Непараметрические критерии. –М.: Изд-во стандартов. 2002. –64 с.
80. Расин Дж. Непараметрическая эконометрика: вводный курс. [Текст] / Дж. Расин // Квантиль, 2008. –№ 4. –С. 7–56.
81. Симахин В.А. Робастные непараметрические оценки. [Текст] / В. А. Симахин// –Саарбрюкен: LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co, 2011. – 292 с.
82. Справочник по прикладной статистике. В 2-х тт. [Текст] / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина // –М. Финансы и статистика, 1989. –Т. 1. –510 с.
83. Справочник по прикладной статистике. В 2-х тт. [Текст] / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина // –М. Финансы и статистика, 1990. –Т. 2. –528 с.
84. Сызранцев В.Н. Расчет прочностной надежности изделий на основе непараметрической статистики. [Текст] / В. Н. Сызранцев, Я. П. Невелев, С. Л. Голофаст // Новосибирск: Наука, 2008. –218 с.
85. Сытинский А.Д. О зависимости глобальной и региональной сейсмичностей Земли от фазы 11-летнего цикла солнечной активности. [Текст] / А. Д. Сытинский // ДАН СССР. –1982. –Т. 265. –№ 6. –С. 1350–1356.
86. Сытинский А.Д. О связи землетрясений с солнечной активностью. [Текст] / А. Д. Сытинский // Изв. АН СССР. Физ. Земли. –1989. –№ 2. –С. 13–30.
87. Тарсенко Ф.П. Непараметрическая статистика. [Текст] / Ф. П. Тарасенко // Томск: Изд-во Томского гос. ун-та, 1976. –292 с.
88. Уилкс С. Математическая статистика. [Текст] / С. Уилкс // М.: Наука, 1967. – 574 с.
89. Храмова М.Н. Прогнозирование солнечной активности методом фазовых средних. [Электронный ресурс] / М. Н. Храмова, С. А. Красоткин, Э. В. Кононович // Исследовано в России: электрон. многопр. научн. журн, 2001. –С. 1169–1176. URL: <http://zhurnal.apc.relarn.ru/articles/2001/107.pdf> (обращения 31.07.2012)
90. Холлендер М. Непараметрические методы статистики. [Текст] / М. Холлендер // М.: Финансы и статистика, 1983. –518 с.
91. Цветков Э.И. Нестационарные случайные процессы и их анализ. [Текст] / Э. И. Цветков // М.: Энергия, 1973. –127 с.
92. Щелкалин В.Н. От идей методов «Гусеница»-SSA и Бокса-Дженкинса до декомпозиционного метода прогнозирования и декомпозиционной ИНС. [Текст] / В. Н. Щелкалин // Восточно-Европейский журнал передовых технологий, 2011. –№ 4/4 (52). –с. 59–69.
93. Эфрон Б. Нетрадиционные методы многомерного статистического анализа. [Текст] / Б. Эфрон // М.: Финансы и статистика, 1988. –263 с.

94. Юзбашев М.М. Статистический анализ тенденций и колеблемости. [Текст] / М.М. Юзбашев, А.И. Манелля // М.: Финансы и статистика, 1983. –207 с.
95. Alonso, F.J., Del Castillo, J.M, Pintado, P., (2005), Application of singular spectrum analysis to the smoothing of raw kinematic signals. *J. Biomech.* 38, P. 1085–1092.
96. Akaike H. A New Look at the Statistical Model Identification, *IEEE Transactions on Automatic Control*, AC-19. 1974. P. 716–723.
97. Bachelier L. «Theorie de la Speculation», *Annales de l'Ecole Normal Superieure.* 1900. Series 3, 17, 21–86.
98. Box G. E. P. and Jenkins G. M. *Time Series Analysis, Forecasting and Control*, rev. Ed., San Francisco: Holden-Day, 1976. 784 p.
99. Brown R.G. *Smoothing, forecasting and prediction of discrete time series*, New Jersey: Prentice–Hall, 1963. 397 p.
100. Davidson R. and MacKinnon J. G. *Estimation and Inference in Econometrics.* New York: Oxford University Press, 1992. 871 p.
101. EISNRr J., Tsonis A. *Singular Spectrum Analysis: A New Tool in Time Series Analysis.* New York: Plenum Press, 1996. 164 p.
102. Franses P.H. *Periodicity and Stochastic Trends in Economic Time Series.* Oxford University Press, USA, 1996. 248 p.
103. Gabor D. *Theory of communication.* *Jour. Inst. Elect. Eng.*, v. 93 (1946). PP. 429–457.
104. Golyandina N., Nekrutkin V., and Zhigljavsky A. *Analysis of Time Series Structure: SSA and Related Techniques.* Boca Raton: Chapman & Hall/CRC, 2001. 320 p.
105. Hassani H. *Singular Spectrum Analysis: Methodology and Comparison*, *Journal of Data Science* 5(2007), p. 239–257.
106. Hassani H. and Zhigljavsky A. (2009) *Singular Spectrum Analysis: Methodology and Application to Economics Data*, *Journal of Systems Science and Complexity*, v. 22, No. 3, p. 372-394.
107. Hassani H., Heravi S. and Zhigljavsky A. (2009) *Forecasting European Industrial Production with Singular Spectrum Analysis*, *International Journal of Forecasting*, 25, No. 1, p. 103-118.
108. Hassani H., and Soofi A. and Zhigljavsky A. (2010) *Predicting Daily Exchange Rate with Singular Spectrum Analysis*, *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, v. 11, No 3, p. 2023–2034.
109. Judge G. G., Griffiths W. E., Hill R. C., Lutkepohl H., Lee Tsoung-Chao. *The Theory and Practice of Econometrics.* Second edition. NY: John Willey and Sons, 1985. 1045 p.
110. Mills T. C. *The Econometric Modelling of Financial Time Series.* Third edition. Cambridge: Cambridge University Press, 2008. 472 p.
111. Quenouille M. H. *The Analysis of Multiple Time Series.* New York: Hafner, 1957. 105 p.
112. Nelson C. R. and Kang H. *Pitfalls in the Use of Time as an Axplanatory Variable in Regression* // *Journal of Business and Economic Statistics.* Vol. 2. January 1984. . 73–82.

113. Nelson C. R. and Plosser C. I. Trends and Random Walks in Macroeconomic Time Series: Some Evidence and Implication // Journal of Monetary Economics. 1982. 10. p. 139–62.
114. Patterson K. An Introduction to Applied Econometrics. New York : St. Martin's Press, 2000. 795 p.
115. Schoellhamer D.H. Singular spectrum analysis for time series with missing data. Geophysical Research Letters, v. 28, No. 16, 2001. P. 3187–3190.
116. Schöve D.J. Sunspot cycles. Hutchinson Ross. Publ., Stroudsburg, 1983. 400 p.
117. Sunspot Data [Электронный ресурс] URL: <http://sidc.oma.be/html/sunspot.html>
118. URL: <http://www.gistatgroup.com/gus/books.html> (дата обращения: 31.07.2013)
119. Wold H. A Study in the Analysis of Stationary Time Series. Stockholm: Almqvist and Wiksel, 1938.

Научное издание

**Сергей Владимирович Поршнеv  
Фуад Рабайя**

**ИССЛЕДОВАНИЕ ОСОБЕННОСТЕЙ ПРИМЕНЕНИЯ МЕТОДА  
СИНГУЛЯРНОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА В ЗАДАЧЕ АНАЛИЗА  
И ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ**

монография

*В авторской редакции*

Подписано в печать 05.02.2016. Формат 60x84/16  
Печать оперативная. Усл. п.л. 9,7  
Тираж 500 экз. Заказ № 05-18-02

Отпечатано с готового оригинал-макета в издательстве ЗЕБРА  
432072, Россия, г. Ульяновск, ул. Жуковского, 83.