На правах рукописи

Коврижных Антон Юрьевич

СТОХАСТИЧЕСКИЙ ПРОГРАММНЫЙ СИНТЕЗ В КОНФЛИКТНОМ УПРАВЛЕНИИ С ОПТИМИЗАЦИЕЙ ПОЗИЦИОННЫХ И КВАЗИПОЗИЦИОННЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ

01.01.02 – дифференциальные уравнения

Автореферат

диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук

Екатеринбург
2002

Работа выполнена на кафедре вычислительной математики Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Научный руководитель: - академик РАН, доктор физико-математических наук Н.Н. Красовский

Официальные оппоненты: — член-корреспондент РАН, доктор физико-математических наук А.Г. Ченцов

— кандидат физико-математических наук, доцент М.Д. Локшин

Ведущая организация: — Челябинский государственный университет

Защита диссертации состоится "27" ноября 2002 г. в 15 ч. 00 м. на заседании диссертационного Совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук в Уральском государственном университете им. А.М.Горького по адресу: 620083, г. Екатеринбург, проспект Ленина 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке Уральского госуниверситета.

Автореферат разослан "25" октября 2002 года.

Ученый секретарь
диссертационного Совета
доктор физ.-мат. наук,
доцент Пименов В.Г.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность темы. Предлагаемая работа посвящена задаче управления динамической системой, которая описывается дифференциальными уравнениями. Задача рассматривается в случае неполной информации о помехе. Предполагается, что помимо разумно организуемого управления на систему действуют силы, которые заранее можно лишь грубо оценить. Качество процесса оценивается подходящим функционалом (показателем качества) на реализациях движения системы. Возникает задача конфликтного управления, т.е. задача об управлении по принципу обратной связи, которое гарантиирует оптимально значение заданного показателя качества. Названная задача включается в круг антагонистических дифференциальных игр.

В настоящее время теория дифференциальных игр представляет собой самостоятельную дисциплину, имеющую прочные связи со многими разделами механики и математики. Существенный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли работы Р. Айзекса, Э.Г. Альбрехта, В.Д. Батухтина, Т. Башара, Р.Беллмана, В.Г. Болтянского, А. Брайсона, Р.Ф. Габасова, Р.В. Гамкрелидзе, В.И. Жуковского, М.И. Зеликина, Н. Калтона, Ф.М. Кирилловой, А.Ф. Клейменова, А.Н. Красовского, Н.Н. Красовского, М.Г. Крендала, А.В. Кряжимского, А.Б. Куржанского, Дж. Лейтмана, Дж. Лина, П.Л. Лионса, М.Д. Локшина, Н.Ю. Лукоянова, А.А. Меликяна, Е.Ф. Мищенко, М.С. Никольского, Ж.П. Обена, Г. Ольсдера, Ю.С. Осипова, В.С. Пацко, Н.Н. Петрова, Л.А. Петросяна, В.Г. Пименова, Г.К. Пожарицкого, Е.С. Половинкина, Л.С. Понтрягина, Б.Н. Пшеничного, Н.Ю. Сатимова, А.И. Субботина, Н.Н. Субботиной, А.М. Тарасьева, В.Е. Третьякова, В.И. Ухоботова, В.Н. Ушакова, У. Флеминга, А. Фридмана, Хо Ю–ши, А.Г. Ченцова, Ф.Л. Черноусько, А.А. Чикрия, Р. Эллиотта и многих других ученых.

Диссертация базируется на концепции дифференциальных игр, развиваемой в Екатеринбурге [1 – 4]. В основе этой концепции лежат понятия стабильных функций и множеств, метод экстремального прицеливания на стабильные множества (мосты) или на сопутствующие точки, определяемые по функции цены игры, методы построения величины цены игры на базе вспомогательных программных конструкций. В регулярных случаях эти конструкции являются детерминированными и тесно связаны с конструкциями из теории оптимального программного управления. В нерегулярных случаях для вычисления цены игры (оптимального гарантированного результата) в рамках принятой концепции был предложен метод стохастического программного синтеза [3, 5] и идейно связанный с ним метод выпуклых сверху оболочек [4, 6, 7]. В тоже время для многих задач минимаксного управления, в том числе, для задач с нетерминальным показателем качества процесса управления, когда следует учитывать информацию об истории этого процесса, остается ряд невыясненных вопросов. Прежде всего, это вопросы, связанные с построением и обоснованием процедур стохастического программного синтеза, а также вопросы, касающиеся прояснения взаимосвязи таких процедур с другими известными процедурами вычисления цены игры. Исследование названных проблем является целью представляемой работы.

Рассматривается следующая задача конфликтного управления. Динамическая система, подверженная воздействиям управления и неконтролируемой помехи описывается обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями. Ограничения на мгновенные воздействия управления и помехи носят геометрический характер. Промежуток времени процесса управления зафиксирован. Показатель качества выбран как функционал от реализации движения, типа некоторой нормы, оценивающей совокупность фазовых состояний системы, реализовавшихся в наперед заданные моменты времени. Такой показатель может быть задан изначально, либо такой функционал вводится в качестве аппроксимирующего для исходного показателя, который оценивает континуум значений фазовых состояний системы. Ставится задача об управлении, которое доставляет показателю качества оптимальный гарантированный результат. Подобная задача возникает, например, когда требуется в условиях неопределенно действующей помехи с гарантией провести движение объекта в наперед заданные моменты времени как можно ближе к началу координат, или же вблизи заданной траектории. Исследуются два случая. В первом случае показатель качества обладает позиционной структурой [8], поэтому информационным образом, который определяет управление по принципу обратной связи, является текущее состояние объекта. Во втором случае показатель качества уже не является позиционным. Здесь информационным образом в текущий момент времени является история движения системы от начала движения до текущего момента.

Цель работы. Разработка и обоснование стохастических программных процедур для вычисления цены игры, анализ их взаимосвязи с другими процедурами вычисления цены игры.

Методика исследований. Методы исследования опираются на достижения теории дифференциальных уравнений, теории устойчивости движения, теории оптимального управления, выпуклого анализа. Используются идеи стохастического программного синтеза и связанного с ним метода выпуклых сверху оболочек для вычисления цены игры; метод экстремального сдвига на сопутствующие движения для построения оптимальных стратегий.

Научная новизна. Все существенные результаты работы являются новыми. Приведем основные из них.

1. Для задачи конфликтного управления динамической системой с нетерминальным но позиционным показателем качества, оценивающем либо суммарное, либо максимальное, либо среднее отклонение от начала координат фазовой точки системы в выбранные моменты времени, предложена и обоснована стохастическая программная процедура для вычисления оптимального гарантированного результата (цены игры). Подчеркнем, что функционалы от реализации движения оценивают совокупность отклонений фазовой точки системы, поэтому построение стохастических процедур представляет здесь более сложную задачу, чем, например, для случая дифференциальных игр с терминальной платой.

2. Разработаны и детально обоснованы стохастические конструкции для решения задачи конфликтного управления с непозиционным функционалом – представляющим сумму двух слагаемых, которые оценивают соответственно суммарное и максимальное отклонение фазовой точки системы в выбранные моменты времени.

3. В данных задачах дано прямое доказательство предельного равенства цены игры стохастическому программному максимину от математического ожидания функционала качества на случайных движениях вспомогательной стохастической модели. Доказано, также, что стохастический максимин совпадает с величиной, вычисляемой на основе построения выпуклых сверху оболочек для вспомогательных детерминированных функций. Таким образом, установлена естественная связь общих теоретических конструкций метода стохастического программного синтеза в данных позиционных и квазипозиционных играх с известными детерминированными процедурами вычисления цены игры.

4. Полученные общие конструкции для вычисления цены игры проиллюстрированы на примере задачи конфликтного управления с эллиптическими ограничениями на управляющие воздействия. Возникающая при этом процедура вычисления оптимального гарантированного результата является по сути предельной схемой дискретных конструкций, получаемых для рассматриваемой задачи на основе метода стохастического программного синтеза и связанного с ним метода выпуклых сверху оболочек. Приведены результаты симулирования процесса управления на ЭВМ.

Теоретическая и практическая ценность. Основные общие утверждения о цене игры обоснованы по стандартам математики. Результаты диссертации носят конструктивный характер и применимы к достаточно широкому кругу задач. Предлагаемые конструкции и процедуры могут быть положены в основу для разработки эффективных алгоритмов и программ, реализуемых на ЭВМ, для решения типичных задач управления.

Апробация работы. Материал по теме диссертации докладывался на следующих научных конференциях: III Международный семинар "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации и их приложения" (Санкт–Пертербург, 1995); Международный семинар "Негладкие и разрывные задачи управления и оптимизации" (Челябинск, 1998); 26-30 Региональные молодежные конференции "Проблемы теоретической и прикладной математики" (Екатеринбург, 1995–1999 гг.). Работа обсуждалась на научных семинарах кафедры теоретической механики и кафедры вычислительной математики Уральского госуниверситета, отдела динамических систем Института математики и механики УрО РАН.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 4 статьи и 10 тезисов докладов на научных конференциях. Все работы написаны без соавторов. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав, приложения и списка цитированной литературы. Нумерация параграфов сквозная. Общий объем диссертации 112 страниц. Библиография содержит 86 названий.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Первая глава состоит из шести разделов. В разделе 1 дается постановка рассматриваемой задачи игрового управления. Пусть система описывается уравнением

$$dx/dt = A(t)x + B(t)u + C(t)v, \; t \in [t_0, \vartheta], \tag{1}$$
$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R^r, \quad v \in Q \subset R^s,$$

где x фазовый вектор, u и v – векторы управления и помехи соответственно, $A(t)$, $B(t)$, $C(t)$ - непрерывные матрицы-функции; t_0 и ϑ – фиксированные моменты времени ($t_0 < \vartheta$); P и Q – выпуклые компакты. В момент t_0 состояние системы $x[t_0] = x_0$ удовлетворяет соотношению $|x_0| \leq R_0$, где R_0 – достаточно большое число. Обозначим

$$R(t) = (1 + R_0)\exp\{\lambda^*(t - t_0)\} - 1,$$
$$\lambda^* = \max\{\lambda_A, \lambda_{BC}\}, \quad \lambda_A = \max_{t_0 \leq t \leq \vartheta} |A(t)|_*,$$
$$\lambda_{BC} = \max_{t_0 \leq t \leq \vartheta}\Big[|B(t)|_* \max_{u \in P}|u| + |C(t)|_* \max_{v \in Q}|v|\Big].$$

Символ $|\cdot|$ означает евклидову норму соответствующего вектора, $|D(t)|_* = \max_{|d| \leq 1} |D(t)d|$.

Назовем позицией системы (1) пару $\{t, x\}$. Введем множество K возможных позиций [3]:

$$K = \Big\{\{t, x\} : t_0 \leq t \leq \vartheta, \; |x| \leq R(t)\Big\}. \tag{2}$$

Пусть выбрана некоторая исходная позиция $\{t_*, x_*\} \in K$. Допустимы измеримые по Борелю реализации $u[t_*[\cdot]\vartheta) = \{u[t] \in P, \; t_* \leq t < \vartheta\}$ и

$v[t_*[\cdot]\vartheta) = \{v[t] \in Q,\ t_* \le t < \vartheta\}$. Такие реализации из позиции $\{t_*, x_*\}$ в согласии с (1) (при $u = u[t]$, $v = v[t]$) порождают единственным образом абсолютно непрерывные движения $x[t_*[\cdot]\vartheta] = \{x[t],\ t_* \le t \le \vartheta,\ x[t_*] = x_*\}$, для которых справедливо включение $\{t, x[t]\} \in K$ при всех $t \in (t_*, \vartheta]$.

Пусть выбраны N моментов времени $t^{[i]} \in [t_0, \vartheta]$, $t^{[i]} < t^{[i+1]}$, $i = 1, \ldots, N-1$, $t^{[N]} = \vartheta$ и нормы $\chi^{[i]}(x)$, $x \in R^n$, $i = 1, \ldots, N$. Показатель качества движений является функционалом $\gamma = \gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta])$, который имеет одно из следующих строений:

$$\gamma_{(1)} = \gamma_{(1)}(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \sum_{i=g(t_*)}^{N} \chi^{[i]}(x[t^{[i]}]), \tag{3}$$

$$\gamma_{(2)} = \gamma_{(2)}(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \max_{g(t_*) \le i \le N} \{\chi^{[i]}(x[t^{[i]}])\}, \tag{4}$$

$$\gamma_{(3)}^{(p)} = \gamma_{(3)}^{(p)}(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \left(\sum_{i=g(t_*)}^{N} (\chi^{[i]}(x[t^{[i]}]))^p \right)^{\frac{1}{p}},\ 1 < p < \infty. \tag{5}$$

Здесь

$$g(t_*) = \min\{i\ :\ t^{[i]} \ge t_*\}. \tag{6}$$

Показатель качества γ (3) (5) может быть задан априори, либо он вводится [4] как аппроксимирующий для исходного показателя γ^*, который оценивает континуум значений $x[t]$, реализовавшихся в процессе движения системы:

$$\gamma_{(1)}^* = \gamma_{(1)}^*(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \int_{t_*}^{\vartheta} \chi(t, x[t])dt,$$

$$\gamma_{(2)}^* = \gamma_{(2)}^*(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \sup_{t_* \le t \le \vartheta} \chi(t, x[t]),$$

$$\gamma_{(3)}^{*(p)} = \gamma_{(3)}^{*(p)}(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \left(\int_{t_*}^{\vartheta} (\chi(t, x[t]))^p \right)^{\frac{1}{p}},\ 1 < p < \infty,$$

где $\chi(t, x)$ – кусочно-непрерывная по t норма-функция ($\chi(t, \cdot)$ – норма в пространстве n-мерных векторов при каждом фиксированном t). Функционал γ из (3)–(6) является позиционным [4, 8, 9], т.е. может быть представлен в виде

$$\gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta]) = \sigma(x[t_*[\cdot]t^*), \beta),\ \beta = \gamma(x[t^*[\cdot]\vartheta]),\ t_* \in [t_0, \vartheta),\ t^* \in (t_*, \vartheta],$$

где функционал $\sigma(x[t_*[\cdot]t^*), \beta)$ (при каждой допустимой фиксированной истории $x[t_*[\cdot]t^*) = \{x[\tau],\ t_* \le \tau < t^*\}$) является непрерывным и неубывающим по β.

Задача требует найти управление (или помеху), нацеленное минимизировать (максимизировать) показатель качества $\gamma(\cdot)$. Задача построения таких управлений формализуется [3, 4] как антагонистическая дифференциальная игра двух лиц (управление – трактуется как действие первого игрока, а помеха – как действие второго) в классе чистых позиционных универсальных стратегий $u(t,x,\varepsilon)$, $v(t,x,\varepsilon)$, где $\{t,x\}\in K$, а $\varepsilon>0$ – параметр точности [3]. Для каждой исходной позиции $\{t_*,x_*\}\in K$ данная игра имеет цену $\rho^0(t_*,x_*)$ и седловую точку, которая складывается из оптимальных стратегий $u^0(t,x,\varepsilon)$, $v^0(t,x,\varepsilon)$. Известно, что оптимальные стратегии могут быть определены методом экстремального сдвига [3, 4] по значениям цены игры в окрестности текущей позиции. Следующие разделы главы 1 посвящены вопросам вычисления цены игры (1) – (6) для возможных текущих позиций, как исходных.

Замечание. Укажем общие черты [10] в строении функционалов (3) – (5). Каждый из функционалов можно записать в виде

$$\gamma=\gamma(x[t_*[\cdot]\vartheta])=\mu^{[g(t_*)]}\left(\{x[t^{[g(t_*)]}],\ldots,x[t^{[N]}]\}\right), \tag{7}$$

где – $\mu^{[i]}\left(\{y^{[i]},\ldots,y^{[N]}\}\right)$, $i=g(t_*),\ldots,N$ – заданные нормы в пространстве $n\times N$-мерных векторов наборов $\{y^{[i]},\ldots,y^{[N]}\}$ из n-мерных векторов $y^{[s]}$ $(s=i,\ldots,N)$; (при $i=N$ символ $\{y^{[i]},\ldots,y^{[N]}\}$ означает просто вектор $y^{[N]}$). Кроме того, можно указать функции $\sigma^{[i]}(y^{[i]},\beta)$, $y^{[i]}\in R^n$, $\beta\in R$, $\beta\geq 0$, для которых справедливы равенства

$$\mu^{[i]}\left(\{y^{[i]},\ldots,y^{[N]}\}\right)=\sigma^{[i]}(y^{[i]},\beta), \tag{8}$$

$$\beta=\mu^{[i+1]}\left(\{y^{[i+1]},\ldots,y^{[N]}\}\right),\quad i=g(t_*),\ldots,N-1$$

Функции $\sigma^{[i]}(y^{[i]},\beta)$ можно без ограничения общности доопределить при $\beta<0$ равенствами $\sigma^{[i]}(y^{[i]},\beta)=\sigma^{[i]}(y^{[i]},-\beta)$. Теперь $\sigma^{[i]}(y^{[i]},\beta)$ – четные по β и в силу (8) являются нормами в пространстве $n+1$-мерных векторов.

В разделе 2 на основе метода стохастического синтеза [3, 4] предлагается программная стохастическая процедура для вычисления цены игры. По сравнению с каноническим случаем (см. например [3]) особенность данной задачи составляет многомерная по времени структура показателя качества. Это в свою очередь усложняет возникающие здесь стохастические максиминные конструкции. Рассмотрим w-модель, описываемую дифференциальным уравнением

$$dw/d\tau=A(\tau)w+B(\tau)u+C(\tau)v,\ \tau\in[t_0,\vartheta], \tag{9}$$

$$w\in R^n,\ u\in P,\ v\in Q.$$

Пусть $\{\tau_*, w_*\} \in K$, $\tau_* < \vartheta$ – исходная позиция для модели (9). Назначим разбиение

$$\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\} = \{\tau_j : \ \tau_1 = \tau_*, \ \tau_j < \tau_{j+1}, \ \tau_{k+1} = \vartheta\}, \tag{10}$$

в которое включим все моменты $t^{[i]} \geq \tau_*$. Рассмотрим вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$, элементарные события которого $\omega = \{\xi_1, \ldots, \xi_k\}$. Здесь $\xi_j \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, k$ – равномерно распределенные случайные величины, связанные с моментами τ_j разбиения (10), $\Omega = \{\omega\}$ – единичный куб в k-мерном пространстве, $\mathcal{B}$ – борелевская σ-алгебра для этого куба, $\mathrm{P}=\mathrm{P}(\mathrm{B})$ – лебегова мера, $\mathrm{B} \in \mathcal{B}$. Введем стохастические неупреждающие [3] программы

$$u[\cdot] = \{u[\tau, \omega] = u[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j] \in P, \ \tau_j \leq \tau < \tau_{j+1}, \ j = 1, \ldots, k, \ \omega \in \Omega\}, \tag{11}$$

$$v[\cdot] = \{v[\tau, \omega] = v[\tau, \xi_1, \ldots, \xi_j] \in Q, \ \tau_j \leq \tau < \tau_{j+1}, \ j = 1, \ldots, k, \ \omega \in \Omega\}, \tag{12}$$

которые по совокупности аргументов являются измеримыми по Борелю функциями. Символами $D_u(T \times \Omega)$ и $D_v(T \times \Omega)$ (здесь $T = [\tau_*, \vartheta)$) обозначим множества всех допустимых программ (11) и (12) соответственно. Из исходной позиции $\{\tau_*, w_* = w[\tau_*]\}$ программы $u(\cdot) \in D_u(T \times \Omega)$ и $v(\cdot) \in D_v(T \times \Omega)$ порождают случайные движения [3, 11] w-модели

$$w[\tau, \omega] = w[\tau, \omega; v[\cdot], u[\cdot]] =$$

$$= X[\tau, \tau_*]w_* + \int_{\tau_*}^{\tau} X[\tau, \eta](B(\eta)u[\eta, \omega] + C(\eta)v[\eta, \omega])d\eta, \tag{13}$$

где $\tau \in [\tau_*, \vartheta]$, $\omega \in \Omega$, $X[\tau, \eta]$ – фундаментальная матрица решений уравнения $dx/d\tau = A(\tau)x$. Функции $w[\tau, \omega; v[\cdot], u[\cdot]]$ измеримы по совокупности переменных τ, ω. На базе $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$ определим линейные пространства $\mathbf{L}_i^{(1)}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, N$, элементами которых будут $\mathrm{s}(\cdot) = \{\mathrm{s}(\omega), \ \omega \in \Omega\}$, $\mathrm{s}(\omega) = \{s^{[i]}(\omega), \ldots, s^{[N]}(\omega)\}$, где компоненты $s^{[d]}(\omega)$, $d = i, \ldots, N$ – n-мерные случайные величины, определенные на $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$, для которых $M\{\mu^{[i]}(\{s^{[i]}(\omega), \ldots, s^{[N]}(\omega)\})\} < \infty$. Здесь и далее символ $M\{\ldots\} = \int_\Omega \ldots \mathrm{P}(d\omega)$ означает математическое ожидание (интеграл Лебега [11]). Определим также норму в $\mathbf{L}_i^{(1)}(\Omega)$ равенством

$$\|\mathrm{s}(\cdot)\|_i = M\{\mu^{[i]}(\{s^{[i]}(\omega), \ldots, s^{[N]}(\omega)\})\}. \tag{14}$$

Заметим, что $\{w[t^{[g(\tau_*)]}, \omega], \ldots, \ w[t^{[N]}, \omega]\} \in \mathbf{L}_{g(\tau_*)}^{(1)}(\Omega)$.

Следуя методу стохастического программного синтеза и принимая во внимание вид рассматриваемого функционала качества γ (7), введем величину стохастического программного максимина

$$\rho(\tau_*, w_*, \Delta_k) = \sup_{v[\cdot]\in D_v(T\times\Omega)} \inf_{u[\cdot]\in D_u(T\times\Omega)} M\left\{\mu^{[g]}\left(w[t^{[g]},\omega],\ldots,w[t^{[N]},\omega]\right)\right\}, \quad (15)$$

$$g = g(\tau_*), \quad t_0 \le \tau_* < \vartheta.$$

Удобно перейти к двойственному описанию величины (15). Через $\mathbf{L}_i^{(\infty)}(\Omega)$, $i = 1,\ldots,N$ обозначим пространства случайных величин $\mathbf{l}(\cdot) = \{\mathbf{l}(\omega) = \{l^{[i]}(\omega),\ldots,l^{[N]}(\omega)\},\ \omega \in \Omega\}$, где компоненты $l^{[d]}(\omega)$, $d = i,\ldots,N$ - n-мерные случайные величины, определенные на $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$, для которых $\mathrm{vraimax}_{\omega\in\Omega}\,\mu^{*[i]}\left(\{l^{[i]}(\omega),\ldots,l^{[N]}(\omega)\}\right) < \infty$. Здесь $\mu^{*[i]}(\cdot)$ – норма, сопряженная с нормой $\mu^{[i]}(\cdot)$. Норму в $\mathbf{L}_i^{(\infty)}(\Omega)$ введем по формуле

$$\|\mathbf{l}(\cdot)\|_i^* = \operatorname*{vraimax}_{\omega\in\Omega} \mu^{*[i]}\left(\{l^{[i]}(\omega),\ldots,l^{[N]}(\omega)\}\right). \quad (16)$$

Пусть

$$h(\tau) = \max\{i\ : t^{[i]} \le \tau\},\ \tau \in [\tau_*, \vartheta). \quad (17)$$

(Если нет ни одного номера i такого, что $t^{[i]} \le \tau$, полагаем $h(\tau) = 0$). Обозначим

$$m_{\tau_*}(\mathbf{l}(\cdot)) = \sum_{i=g(\tau_*)}^{N} X^T[t^{[i]},\vartheta] M\{l^{[i]}(\omega)\}, \quad (18)$$

$$m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot);\xi_1,\ldots,\xi_j) = \sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]},\vartheta] M\{l^{[i]}(\omega)|\xi_1,\ldots,\xi_j\},\ j = 1,\ldots,k. \quad (19)$$

Здесь $M\{\ldots \mid \ldots\}$ – условное математическое ожидание; $\mathbf{l}(\cdot) \in \mathbf{L}_{g(\tau_*)}^{(\infty)}(\Omega)$. Определим величину программного экстремума

$$e(\tau_*, w_*, \Delta_k) = \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|_g^* \le 1} \kappa(\tau_*, w_*, \Delta_k, \mathbf{l}(\cdot)),\ \mathbf{l}(\cdot) \in \mathbf{L}_g^{(\infty)}(\Omega),$$
$$g = g(\tau_*), \quad t_0 \le \tau_* < \vartheta. \quad (20)$$

Здесь

$$\kappa(\tau_*, w_*, \Delta_k, \mathbf{l}(\cdot)) =$$
$$= \langle m_{\tau_*}(\mathbf{l}(\cdot)), X[\vartheta,\tau_*]w_*\rangle + M\left\{\sum_{j=1}^{k} \Delta\psi_j(\tau_*; m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot);\xi_1,\ldots,\xi_j))\right\}, \quad (21)$$

$$\Delta\psi_j(\tau_*; m) = \int_{\tau_j}^{\tau_{j+1}} \max_{v\in Q} \min_{u\in P} \langle m, X[\vartheta,\tau](B(\tau)u + C(\tau)v)\rangle d\tau,$$
$$m \in R^n, \quad j = 1,\ldots,k, \quad (22)$$

где $\langle \ldots, \ldots \rangle$ – скалярное произведение векторов.

Лемма 2.1. Для всякой исходной позиции $\{\tau_*, w_*\} \in K$, $\tau_* \in [t_0, \vartheta)$ при всяком разбиении Δ_k (10) справедливо равенство

$$\rho(\tau_*, w_*, \Delta_k) = e(\tau_*, w_*, \Delta_k). \tag{23}$$

Обратимся теперь к случаю, когда $\{\tau_*, w_*\} \in K$, $\tau_* = \vartheta$. В этом случае величины $\rho(\cdot)$ и $e(\cdot)$ определим равенством $\rho(\vartheta, w_*, \Delta_k) = e(\vartheta, w_*, \Delta_k) = \mu^{[N]}(w_*)$, в котором теперь символом Δ_k обозначено множество, состоящее из одной точки $\{\tau_1 = \tau_* = \vartheta\}$.

В разделе 3 устанавливаются используемые в дальнейшем свойства стохастической программной конструкции. Доказывается, что программный максимин $\rho(\tau_*, w_*, \Delta_k)$ удовлетворяет условию Липшица по w_* для всех позиций из K. Рассматриваются свойства максимизирующих последовательностей $\{\mathbf{l}_{(s)}(\cdot),\ s = 1, 2, \ldots\}$ $\mathbf{l}_{(s)}(\cdot) \in \mathbf{L}_g^{(\infty)}(\Omega)$, $\|\mathbf{l}_{(s)}(\cdot)\|_g^* \leq 1$, $g = g(\tau_*)$, которые отвечают верхней грани в (20).

В разделе 4 приводится обоснование свойства u-стабильности [3, 4] величины $\rho(\cdot) = e(\cdot)$ (лемма 4.1). Доказательство базируется на теореме Какутани о неподвижной точке многозначного отображения и на свойствах конструкции, установленных в предыдущем разделе.

Разделы 5 и 6 являются основными в главе 1. Содержанием раздела 5 является обоснование предельного равенства цены рассматриваемой игры $\rho^0(\tau_*, w_*)$ стохастическому программному максимину $\rho(\tau_*, w_*, \Delta_k)$. Рассмотрим предельный переход в обсуждаемых конструкциях при измельчении шага Δ_k. Используя лемму 2.1, лемму 4.1. и определения (15), (20), приходим к оценкам цены игры $\rho^0(t_*, x_*)$ через стохастический программный максимин $\rho(t_*, x_*, \Delta_k)$ сверху и снизу. Именно, для любой начальной позиции $\{\tau_*, w_*\} = \{t_*, x_*\}$, и последовательности разбиений $\{\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j^{(k)}\}\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$ отрезка $[t_*, \vartheta]$, $\tau_1^{(k)} = t_*$, $\tau_{k+1}^{(k)} = \vartheta$ с шагом $\delta_k = \max_j(\tau_{j+1}^{(k)} - \tau_j^{(k)}) \to 0$ при $k \to \infty$, (при этом все точки $t^{[i]}$, $t^{[i]} \geq t_*$ включены в каждое разбиение Δ_k) справедливы соотношения

$$\varliminf_{k\to\infty} \rho(t_*, x_*, \Delta_k) = \varliminf_{k\to\infty} e(t_*, x_*, \Delta_k) \geq \rho^0(t_*, x_*), \tag{24}$$

$$\varlimsup_{k\to\infty} \rho(t_*, x_*, \Delta_k) = \varlimsup_{k\to\infty} e(t_*, x_*, \Delta_k) \leq \rho^0(t_*, x_*). \tag{25}$$

Из (24) и (25) вытекает справедливость следующего утверждения.

Теорема 5.1 Каковы бы ни были исходная позиция $\{\tau_*, w_*\} = \{t_*, x_*\}$ и последовательность разбиений $\{\Delta_k\}$, $(k = 1, 2, \ldots)$, $(\lim \delta_k = 0,\ k \to \infty)$ справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \rho(t_*, x_*, \Delta_k) = \lim_{k\to\infty} e(t_*, x_*, \Delta_k) = \rho^0(t_*, x_*),$$

где $\rho^0(t_*, x_*)$ — цена рассматриваемой дифференциальной игры (1)–(6).

В разделе 6 решается задача о вычислении программного экстремума (20). Доказывается, что стохастический экстремум совпадает с величиной [4, 6, 10], вычисляемой на основе построения выпуклых сверху оболочек для вспомогательных детерминированных функций. Пусть реализовалась позиция $\{t_*, x_*\}$ и выбрано разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ (10) отрезка $[t_*, \vartheta]$. Для каждого номера $j = 1, \ldots, k$ определим области $G_j(t_*) \subset R^n$

$$G_j(t_*) = \{m_{(j)} :\ m_{(j)} = m(\mathbf{l}(\cdot)),\ \mathbf{l}(\cdot) \in \mathbf{L}_h^{(\infty)}(\Omega),\ \|\mathbf{l}(\cdot)\|_h^* \le 1,\ h = h(\tau_j) + 1\}, \tag{26}$$

где

$$m(\mathbf{l}(\cdot)) = \sum_{i=h(\tau_j)+1}^{N} X^T[t^{[i]}, \vartheta] M\{l^{[i]}(\omega)\}.$$

Множества $G_j(t_*)$ — непустые выпуклые компакты в R^n. Пусть $\Delta\psi_j(t_*; m)$ —функции (22). Построим рекуррентную последовательность функций $\varphi_j(t_*; m_{(j)})$, $m_{(j)} \in G_j(t_*)$. При $j = k$ полагаем

$$\psi_k(t_*; \cdot) = \Delta\psi_k(t_*; \cdot),\ \varphi_k(t_*; m_{(k)}) = \{\psi_k(t_*; \cdot)\}^*_{G_k(t_*)},\ m_{(k)} \in G_k(t_*). \tag{27}$$

Символом $\varphi(m) = \{\psi(\cdot)\}^*_{G_*}$ здесь обозначена выпуклая сверху оболочка функции $\psi(\cdot)$ в области G_*, т.е. функция, минимальная из всех вогнутых функций, мажорирующих $\psi(m)$, $m \in G_*$. Далее по индукции. Пусть для $1 < j \le k$ уже построена функция $\varphi_j(t_*; m_{(j)})$, $m_{(j)} \in G_j(t_*)$. Для $j - 1$ определяем

$$\varphi_{j-1}(t_*; m_{(j-1)}) = \{\psi_{j-1}(t_*; \cdot)\}^*_{G_{j-1}(t_*)},\ m_{(j-1)} \in G_{j-1}(t_*), \tag{28}$$

где в случае $h(\tau_j) = h(\tau_{j-1})$, $(t^{[h(\tau_j)]} \le \tau_{j-1} < \tau_j)$, полагаем

$$\psi_{j-1}(t_*; m_{(j-1)}) = \Delta\psi_{j-1}(t_*; m_{(j-1)}) + \varphi_j(t_*; m_{(j-1)}), \tag{29}$$

а в случае $h(\tau_j) = h(\tau_{j-1}) + 1$, $(\tau_{j-1} < \tau_j = t^{[h(\tau_j)]})$, определяем

$$\psi_{j-1}(t_*; m_{(j-1)}) = \Delta\psi_{j-1}(t_*; m_{(j-1)}) + \varphi_j'(t_*; m_{(j-1)}). \tag{30}$$

Здесь

$$\varphi_j'(t_*; m_{(j-1)}) = \max_{\{m_{(j)}; \nu\}} \nu\varphi_j(t_*; m_{(j)}), \tag{31}$$

где максимум берется при условии

$$\nu m_{(j)} + X^T[t^{[h(\tau_j)]}, \vartheta] l = m_{(j-1)},\ \sigma^{*[h(\tau_j)]}(l, \nu) \le 1,\ \nu \in [0, 1],\ m_{(j)} \in G_j(t_*). \tag{32}$$

Введем

$$e^*(t_*, x_*, \Delta_k) = \sup_{m_{(1)} \in G_1(t_*)} [\langle m_{(1)}, X[\vartheta, t_*] x_* \rangle +$$

$$+\sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|_h^*\le 1,\ m(\mathbf{l}(\cdot))=m_{(1)}} M\{\sum_{j=1}^{k}\Delta\psi_j(t_*,m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot);\xi_1,\dots,\xi_j))\}],\ h=h(t_*)+1. \quad (33)$$

Лемма 6.1. Каковы бы ни были позиция $\{t_*,w_*\}\in K$, $t_*<\vartheta$ и разбиение Δ_k (10) отрезка времени $[t_*,\vartheta]$, имеем

$$e(t_*,w_*,\Delta_k)=\begin{cases} e^*(t_*,w_*,\Delta_k), \text{ если } & t_*\ne t^{[g(t_*)]},\\ \sigma^{[g(\tau_*)]}(w_*,e^*(t_*,w_*,\Delta_k)), \text{ если } & t_*=t^{[g(t_*)]}. \end{cases} \quad (34)$$

Далее доказывается справедливость равенства

$$\sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|_h^*\le 1,\ m(\mathbf{l}(\cdot))=m_{(1)}} M\{\sum_{j=1}^{k}\Delta\psi_j(t_*,m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot);\xi_1,\dots,\xi_j))\}=\varphi_1(t_*,m_{(1)}),$$

$$h=h(t_*)+1. \quad (35)$$

Таким образом, вычисление программного экстремума $e(\cdot)$ (20) в силу леммы 6.1 и равенства (35) сводится к решению задачи о нахождении стохастических вектор-функций, доставляющих максимальное значение некоторому вспомогательному функционалу. При этом доказывается, что максимум достигается на конечнозначной случайной векторной величине, построение которой базируется на каратеодориевых точках и весах, отвечающих рекуррентной последовательности выпуклых сверху оболочек из вспомогательной программной конструкции (26) – (32) для вычисления цены игры (1) – (6).

Вторая глава состоит из четырех разделов. Рассматривается задача конфликтного управления с квазипозиционным функционалом [4].

В разделе 7 дается постановка задачи. Пусть система описывается уравнением (1) и имеются два разбиения отрезка времени $[t_0,\vartheta]$:

$$\Delta_{t_\alpha^{[i_\alpha]}}=\{t_\alpha^{[i_\alpha]}:t_\alpha^{[1]}\ge t_0,\ t_\alpha^{[i_\alpha+1]}>t_\alpha^{[i_\alpha]},\ i_\alpha=1,\dots,N_\alpha-1\},\ \alpha=1,2 \quad (36)$$

$$t_1^{[i_1]}\ne t_2^{[i_2]},\ i_1=1,\dots,N_1,\ i_2=1,\dots,N_2,\ \max\{t_1^{[N_1]},t_2^{[N_2]}\}=\vartheta.$$

Заданы нормы $\chi_\alpha^{[i_\alpha]}(x)$, $x\in R^n$, $i_\alpha=1,\dots,N_\alpha$, $\alpha=1,2$. Такие реализации порождают единственным образом абсолютно непрерывные движения $x[t_0[\cdot]\vartheta]=\{x[t],\ t_0\le t\le\vartheta,\ x[t_0]=x_0\}$ системы (1) (x_0 – задано). Показатель качества движений дан в виде функционала

$$\gamma_{(4)}=\gamma_{(4)}(x[t_0[\cdot]\vartheta])=\sum_{i_1=1}^{N_1}\chi_1^{[i_1]}(x[t_1^{[i_1]}])+\max_{1\le i_2\le N_2}\{\chi_2^{[i_2]}(x[t_2^{[i_2]}])\}. \quad (37)$$

Функционал $\gamma_{(4)}$ (37) состоит из аддитивной комбинации позиционных функционалов $\gamma_{(1)}$ (3) и $\gamma_{(2)}$ (4), но не является позиционным. Задача теперь формализуется как антагонистическая дифференциальная игра [4] на базе стратегий, для которых информационным образом служит история движения $x[t_0[\cdot]t] = \{x[\tau], \ t_0 \le \tau \le t\}$, сложившаяся к текущему моменту времени t $(t_* \le t < \vartheta)$. Для всякой исходной истории $x[t_0[\cdot]t_*]$, $(t_0 \le t_* < \vartheta)$ эта игра имеет цену $\rho^0_{(4)}(x[t_0[\cdot]t_*])$ и седловую точку $\{u^0_{(4)}(x[t_0[\cdot]t], \varepsilon), \ v^0_{(4)}(x[t_0[\cdot]t], \varepsilon)\}$. Здесь $\varepsilon > 0$ — некоторый параметр точности [3, 4]. Оптимальные стратегии $\{u^0_{(4)}(\cdot), \ v^0_{(4)}(\cdot)\}$, строятся как экстремальные [4] к функционалу $\rho^0_{(4)}(\cdot)$. Для такого построения оптимальных стратегий достаточно уметь эффективно вычислять цену игры. Вторая глава посвящена вопросам вычисления цены игры (1), (37) для каждой возможной текущей истории $x[t_0[\cdot]t]$, как исходной.

В разделе 8 обсуждаются изменения, которые вносятся в стохастическую программную конструкцию по сравнению с позиционным случаем. В данном случае w-модель, описывается также дифференциальным уравнением (9). Пусть реализовалась история $w[t_0[\cdot]\tau_*]$ движения модели (9), $t_0 \le \tau_* < \vartheta$. Назначим разбиение Δ_k (10) отрезка времени $[t_*, \vartheta]$, в которое теперь включим все моменты $t^{[i_\alpha]}_\alpha \ge \tau_*$ разбиений $\Delta_{t^{[i_\alpha]}_\alpha}$, $\alpha = 1, 2$. Снова рассмотрим вероятностное пространство $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$ и введем стохастические неупреждающие программы $u[\cdot]$ (11) и $v[\cdot]$ (12). Из исходной позиции $\{\tau_*, w_* = w[\tau_*]\}$ программы $u[\cdot] \in D_u(T \times \Omega)$ и $v[\cdot] \in D_v(T \times \Omega)$ порождают случайные движения w-модели, $w[\tau, \omega]$ (13), $\tau \in [\tau_*, \vartheta], \omega \in \Omega$. На базе $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$ определим линейное пространство $\mathbf{L}^{(1)}(\Omega)$ с элементами $\mathbf{s}(\cdot) = \{\mathbf{s}(\omega), \omega \in \Omega\}$, $\mathbf{s}(\omega) = \{s^{[1]}_1(\omega), \dots, s^{[N_1]}_1(\omega), s^{[1]}_2(\omega), \dots, s^{[N_2]}_2(\omega)\}$, где компоненты $s^{[i_\alpha]}_\alpha(\omega)$ $(i_\alpha = 1, \dots, N_\alpha \ \alpha = 1, 2)$ — n-мерные случайные величины, определенные на $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$, для которых $M\{\chi^{[i_\alpha]}_\alpha(s^{[i_\alpha]}_\alpha(\omega))\} < \infty$. Определим также норму в $\mathbf{L}^{(1)}(\Omega)$ равенством

$$\|\mathbf{s}(\cdot)\| = M\left\{\sum_{i_1=1}^{N_1} \chi^{[i_1]}_1(s^{[i_1]}_1(\omega)) + \max_{1 \le i_2 \le N_2}\{\chi^{[i_2]}_2(s^{[i_2]}_2(\omega))\}\right\}.$$

Пусть

$$g_\alpha(\tau) = \min\{i_\alpha \ : t^{[i_\alpha]}_\alpha \ge \tau\}, \ \tau \in [t_0, \vartheta], \ \alpha = 1, 2. \tag{38}$$

Реализовавшаяся история $w[t_0[\cdot]\tau_*]$ и пара стохастических программ (11), (12) порождают в силу (13) элемент

$$\mathbf{y}(\cdot) = \mathbf{y}(\cdot; w[t_0[\cdot]\tau_*], v[\cdot], u[\cdot], \Delta_k)$$

из $\mathbf{L}^{(1)}(\Omega)$ с компонентами $y^{[i_\alpha]}_\alpha(\omega) = w[t^{[i_\alpha]}_\alpha]$, $i_\alpha = 1, \dots, g_\alpha(\tau_*) - 1$, $y^{[i_\alpha]}_\alpha(\omega) = w[t^{[i_\alpha]}_\alpha, \omega; v[\cdot], u[\cdot]]$, $i = g_\alpha(\tau_*), \dots, N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Введем величину стохастического программного максимина

$$\rho_{(4)}(w[t_0[\cdot]\tau_*], \Delta_k\{\tau_j\}) = \sup_{v[\cdot] \in D_v(T \times \Omega)} \inf_{u[\cdot] \in D_u(T \times \Omega)} \|\mathbf{y}(\cdot)\|, \ t_0 \le \tau_* < \vartheta, \tag{39}$$

Через $\mathbf{L}^{(\infty)}(\Omega)$ обозначим пространство случайных величин $\mathbf{l}(\cdot) = \{\mathbf{l}(\omega), \omega \in \Omega\}$, $\mathbf{l}(\omega) = \{l_1^{[1]}(\omega), \ldots, l_1^{[N_1]}(\omega), l_2^{[1]}(\omega), \ldots, l_2^{[N_2]}(\omega)\}$, где компоненты $l_\alpha^{[i_\alpha]}(\omega)$ – n-мерные случайные величины, определенные на $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$, для которых $\mathrm{vraimax}_{\omega\in\Omega}\, \chi_\alpha^{*[i_\alpha]}(l_\alpha^{[i_\alpha]}(\omega)) < \infty$. Здесь $\chi_\alpha^{*[i_\alpha]}(\cdot)$ – норма, сопряженная с нормой $\chi_\alpha^{[i_\alpha]}(\cdot)$, $i_\alpha = 1, \ldots, N_\alpha$, $\alpha = 1, 2$. Норму в $\mathbf{L}^{(\infty)}(\Omega)$ введем по формуле

$$\|\mathbf{l}(\cdot)\|^* = \max\Big\{\max_{1\le i_1\le N_1} \operatorname*{vraimax}_{\omega\in\Omega} \chi_1^{*[i_1]}(l_1^{[i_1]}(\omega))\},$$

$$\operatorname*{vraimax}_{\omega\in\Omega} \sum_{i_2=1}^{N_2} \chi_2^{*[i_2]}(l_2^{[i_2]}(\omega))\Big\}.$$

Пусть

$$h_\alpha(\tau) = \max\{i_\alpha \ : t_\alpha^{[i_\alpha]} \le \tau\}, \ \tau \in [t_0, \vartheta], \ \alpha = 1, 2. \tag{40}$$

(Если нет ни одного номера i_α такого, что $t_\alpha^{[i_\alpha]} \le \tau$, полагаем $h_\alpha(\tau) = 0$). Обозначим

$$m_{(\tau_*)}(\mathbf{l}(\cdot)) = \sum_{i_1=g_1(\tau_*)}^{N_1} X^T[t_1^{[i_1]}, \vartheta] M\{l_1^{[i_1]}(\omega)\} + \sum_{i_2=g_2(\tau_*)}^{N_2} X^T[t_2^{[i_2]}, \vartheta] M\{l_2^{[i_2]}(\omega)\}, \tag{41}$$

$$m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j) = \sum_{i_1=h_1(\tau_j)+1}^{N_1} X^T[t_1^{[i_1]}, \vartheta] M\{l_1^{[i_1]}(\omega)|\xi_1, \ldots, \xi_j\} +$$

$$+ \sum_{i_2=h_2(\tau_j)+1}^{N_2} X^T[t_2^{[i_2]}, \vartheta] M\{l_2^{[i_2]}(\omega)|\xi_1, \ldots, \xi_j\}, \ j = 1, \ldots, k. \tag{42}$$

Определим величину программного экстремума

$$e_{(4)}(w[t_0[\cdot]\tau_*], \Delta_k\{\tau_j\}) = \sup_{\|\mathbf{l}(\cdot)\|^*\le 1} \kappa_{(4)}(w[t_0[\cdot]\tau_*], \Delta_k\{\tau_j\}, \mathbf{l}(\cdot)), \ t_0 \le \tau_* < \vartheta. \tag{43}$$

Здесь

$$\kappa_{(4)}(w[t_0[\cdot]\tau_*], \Delta_k, \mathbf{l}(\cdot)) = \lambda(w[t_0[\cdot]\tau_*], \mathbf{l}(\cdot)) +$$

$$+ \langle m_{(\tau_*)}(\mathbf{l}(\cdot)), X[\vartheta, \tau_*] w[\tau_*]\rangle + M\{\sum_{j=1}^{k} \Delta\psi_j(\tau_*, m^{(\tau_j)}(\mathbf{l}(\cdot); \xi_1, \ldots, \xi_j))\}, \tag{44}$$

$$\lambda(w[t_0[\cdot]\tau_*], \mathbf{l}(\cdot)) = \sum_{i_1=1}^{g_1(\tau_*)-1} \langle M\{l_1^{[i_1]}(\omega)\}, w[t_1^{[i_1]}]\rangle + \sum_{i_2=1}^{g_2(\tau_*)-1} \langle M\{l_2^{[i_2]}(\omega)\}, w[t_2^{[i_2]}]\rangle. \tag{45}$$

При этом в (45) результат суммирования по убывающему индексу полагаем равным нулю. Справедливо следующее утверждение.

Лемма 8.1. Для всякой исходной истории $w[t_0[\cdot]\tau_*]$, $\tau_* \in [t_0, \vartheta)$ при всяком разбиении Δ_k (9) справедливо равенство

$$\rho_{(4)}(w[t_0[\cdot]\tau_*], \Delta_k) = e_{(4)}(w[t_0[\cdot]\tau_*], \Delta_k). \tag{46}$$

В случае, когда $\tau_* = \vartheta$ величины $\rho_{(4)}(\cdot)$ и $e_{(4)}(\cdot)$ определим формально равенствами $\rho_{(4)}(w[t_0[\cdot]\vartheta], \Delta_k) = e_{(4)}(w[t_0[\cdot]\vartheta], \Delta_k) = \gamma_{(4)}(w[t_0[\cdot]\vartheta])$, где теперь символом Δ_k обозначено множество, состоящее из одной точки $\{\tau_1 = \tau_* = \vartheta\}$.

Содержанием раздела 9 является прямое доказательство свойства u–стабильности величины $\rho_{(4)}(\cdot) = e_{(4)}(\cdot)$ (лемма 9.1). Это доказательство по сути уточняет и развивает доказательство аналогичного свойства из раздела 4 теперь для квазипозиционного случая.

Раздел 10 являтся основным в главе 2. Пусть реализовалась история $x[t_0[\cdot]t_*]$ $(t_* < \vartheta)$ и выбрано разбиение $\Delta_k\{\tau_j\}$ (10) отрезка $[t_*, \vartheta]$. Перейдем теперь к задаче о вычислении $e_{(4)}(x[t_0[\cdot]t_*], \Delta_k)$ (43). Для этого на вероятностном пространстве $\{\Omega, \mathcal{B}, \mathrm{P}\}$ для каждого $j = 1, \ldots, k$ определим вспомогательные случайные n - мерные величины

$$q^{[i_\alpha]}_{[j],\alpha}(\omega) = q^{[i_\alpha]}_{[j],\alpha}(\xi_j, \ldots, \xi_k), \quad i_\alpha = h_\alpha(\tau_j) + 1, \ldots, N_\alpha, \quad \alpha - 1, 2$$

и случайную скалярную величину

$$q_{[j],0}(\omega) = q_{[j],0}(\xi_j, \ldots, \xi_k),$$

которые при почти всех $\omega \in \Omega$ удовлетворяют условиям

$$0 \le q_{[j],0}(\omega) \le 1, \tag{47}$$

$$\chi_1^{[i_1]*}(q^{[i_1]}_{[j],1}(\omega)) \le 1, \ i_1 = h_1(\tau_j) + 1, \ldots, N_1, \tag{48}$$

$$\sum_{i_2 = h_2(\tau_j)+1}^{N_2} \chi_2^{[i_2]*}(q^{[i_2]}_{[j],2}(\omega)) \le q_{[j],0}(\omega). \tag{49}$$

Через $\mathbf{Q}_j(\Omega)$ обозначим множества всех многомерных случайных величин

$$\mathbf{q}_{[j]}(\cdot) = \Big\{\mathbf{q}_{[j]}(\omega) = \{q_{[j],0}(\omega), q^{[h_1(\tau_j)+1]}_{[j],1}(\omega), \ldots, q^{[N_1]}_{[j],1}(\omega),$$

$$q^{[h_2(\tau_j)+1]}_{[j],2}(\omega), \ldots, q^{[N_2]}_{[j],2}(\omega)\}, \omega \in \Omega\Big\},$$

удовлетворяющих (47)–(49). Множествам $\mathbf{Q}_j(\Omega)$ поставим в соответствие множества $G_j^{(4)}(t_*)$ детерминированных векторов $(m_{(j)}, \nu_{(j)}) \in R^n \times R$:

$$G_j^{(4)}(t_*) = \Big\{(m_{(j)}, \nu_{(j)}) \in R^n \times R :$$

$$\nu_{(j)} = M\{q_{[j],0}(\omega)\},\ m_{(j)} = m(\mathbf{q}_{[j]}(\cdot)),\ \mathbf{q}_{[j]}(\cdot) \in \mathbf{Q}_j(\Omega)\Big\}, \tag{50}$$

где

$$m(\mathbf{q}_{[j]}(\cdot)) = \sum_{i_1=h_1(\tau_j)+1}^{N_1} X^T[t_1^{[i_1]},\vartheta]M\{q_{[j],1}^{[i_1]}(\omega)\}+$$

$$+\sum_{i_2=h_2(\tau_j)+1}^{N_2} X^T[t_2^{[i_2]},\vartheta]M\{q_{[j],2}^{[i_2]}(\omega)\}.$$

Множества $G_j^{(4)}(t_*)$ – непустые выпуклые компакты в R^{n+1}. Из (40) – (45), (47) – (49) (при $j=1$) и определения области $G_1^{(4)}(t_*)$ (50) следует равенство

$$e_{(4)}(x[t_0[\cdot]t_*],\Delta_k) = \sum_{i_1=1}^{h_1(t_*)} \chi_1^{[i_1]}(x[t_1^{[i_1]}])+$$

$$+\sup_{(m_{(1)},\nu_{(1)})\in G_1^{(4)}(t_*)} \Big[(1-\nu_{(1)}) \max_{1\le i_2\le h_2(t_*)} \chi_2^{[i_2]}(x[t_2^{[i_2]}]) + \langle m_{(1)}, X[\vartheta,t_*]x_*\rangle+$$

$$+\sup_{\mathbf{q}_{[1]}(\cdot)\in \mathbf{Q}_{[1]}(\Omega)|(m_{(1)},\nu_{(1)})} M\{\sum_{j=1}^{k}\Delta\psi_j(\tau_*,m^{(\tau_j)}(\mathbf{q}_{[1]}(\cdot);\xi_1,\ldots,\xi_j))\}\Big] \tag{51}$$

где внутренний sup вычисляется по случайным вектор-функциям $\mathbf{q}_{[1]}(\cdot) \in \mathbf{Q}_{[1]}(\Omega)$, таким, что $m(\mathbf{q}_{[1]}(\cdot)) = m_{(1)}$, $M\{q_{[1],0}(\omega)\} = \nu_{(1)}$. Далее показано, что решение задачи поиска точной верхней грани функционала из (51) на множестве случайных вектор-функций $\mathbf{q}_{[1]}(\cdot)\in\mathbf{Q}_{[1]}(\Omega)$: $m(\mathbf{q}_{[1]}(\cdot)) = m_{(1)}$, $M\{q_{[1],0}(\omega)\} = \nu_{(1)}$ приводит к известной процедуре построения выпуклых сверху оболочек для вспомогательных функций из детерминированной программной конструкции [7]. Приведем здесь эту конструкцию. Определим рекуррентную последовательность функций $\varphi_j(t_*;m_{(j)},\nu_{(j)})$, $(m_{(j)},\nu_{(j)})\in G_j^{(4)}(t_*)$. При $j=k$ полагаем

$$\psi_k(t_*;m_{(k)},\nu_{(k)}) = \Delta\psi_k(t_*;m_{(k)}),$$

$$\varphi_k(t_*;m_{(k)},\nu_{(k)}) = \{\psi_k(t_*;\cdot,\cdot)\}^*_{G_k^{(4)}(t_*)},\ (m_{(k)},\nu_{(k)})\in G_k^{(4)}(t_*). \tag{52}$$

Символом $\varphi(t_*;m,\nu) = \{\psi(t_*;\cdot,\cdot)\}^*_{G_*^{(4)}}$ здесь обозначена выпуклая сверху оболочка функции $\psi(t_*;\cdot,\cdot)$ в области $G_*^{(4)}$. Далее по индукции. Пусть для j $(1<j\le k)$ уже построена функция $\varphi_j(t_*;m_{(j)},\nu_{(j)})$, $(m_{(j)},\nu_{(j)})\in G_j^{(4)}(t_*)$. Для $j-1$ определяем

$$\varphi_{j-1}(t_*;m_{(j-1)},\nu_{(j-1)}) = \{\psi_{j-1}(t_*;\cdot,\cdot)\}^*_{G_{j-1}^{(4)}(t_*)},\ (m_{(j-1)},\nu_{(j-1)})\in G_{j-1}^{(4)}(t_*), \tag{53}$$

где

$$\psi_{j-1}(t_*;m_{(j-1)},\nu_{(j-1)}) = \Delta\psi_{j-1}(t_*;m_{(j-1)}) + \varphi_j'(t_*;m_{(j-1)},\nu_{(j-1)}). \tag{54}$$

Здесь в первом случае (когда $h_1(\tau_j) = h_1(\tau_{j-1})$, $h_2(\tau_j) = h_2(\tau_{j-1})$) полагаем

$$\varphi_j'(t_*;m_{(j-1)},\nu_{(j-1)}) = \varphi_j(t_*;m_{(j-1)},\nu_{(j-1)}). \tag{55}$$

Во втором в случае (когда $h_1(\tau_j) = h_1(\tau_{j-1}) + 1$, $h_2(\tau_j) = h_2(\tau_{j-1})$) определяем

$$\varphi_j'(t_*;m_{(j-1)},\nu_{(j-1)}) = \max_{m_{(j)}} \varphi_j(t_*;m_{(j)},\nu_{(j-1)}), \tag{56}$$

при этом максимум вычисляется при условии

$$m_{(j)} + X^T[t_1^{[h_1(\tau_j)]},\vartheta]l = m_{(j-1)}, \quad \mu_1^{*[h_1(\tau_j)]}(l) \le 1, \quad (m_{(j)},\nu_{(j-1)}) \in G_j^{(4)}(t_*). \tag{57}$$

В третьем случае (когда $h_1(\tau_j) = h_1(\tau_{j-1})$, $h_2(\tau_j) = h_2(\tau_{j-1}) + 1$) полагаем

$$\varphi_j'(t_*;m_{(j-1)}.\nu_{(j-1)}) = \max_{(m_{(j)},\nu_{(j)})} \varphi_j(t_*;m_{(j)},\nu_{(j)}), \tag{58}$$

где максимум вычисляется при условии

$$m_{(j)} + X^T[t_2^{[h_2(\tau_j)]},\vartheta]l = m_{(j-1)},$$

$$\mu_2^{*[h_2(\tau_j)]}(l) \le \nu_{(j-1)} - \nu_{(j)}, \quad \nu_{(j-1)} \ge \nu_{(j)}, \quad (m_{(j)},\nu_{(j)}) \in G_j^{(4)}(t_*). \tag{59}$$

Справедливо равенство

$$\sup_{\mathbf{q}_{[1]}(\cdot)\in\mathbf{Q}_{[1]}(\Omega)|(m_{(1)}.\nu_{(1)})} M\{\sum_{j=1}^{k} \Delta\psi_j(\tau_*, m^{(\tau_j)}(\mathbf{q}_{[1]}(\cdot);\xi_1,\ldots,\xi_j))\} =$$

$$\varphi_1(t_*;m_{(1)},\nu_{(1)}), \quad (m_{(1)},\nu_{(1)}) \in G_1^{(4)}(t_*). \tag{60}$$

Величина $e_{(4)}(x[t_0[\cdot]t_*],\Delta_k)$ (43) согласно равенствам (51) и (60) совпадает с величиной [7], вычисляемой на основе построения выпуклых сверху оболочек вспомогательных функций в детерминированной конструкции (52)-(59), и поэтому обладает свойством v-стабильности [7]. Используя лемму 8.1, свойства u-стабильности (лемма 9.1) и v-стабильности величины (43) приходим к следующему утверждению.

Теорема 10.1. Каковы бы ни были исходная история $w[t_0[\cdot]\tau_*] = x[t_0[\cdot]t_*]$, и последовательность разбиений (10) $\{\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}\}$, $(k = 1,2,\ldots)$ отрезка $[t_*,\vartheta]$, $\tau_1 = t_*$, $\tau_{k+1} = \vartheta$ с шагом $\delta_k = \max_j(\tau_{j+1} - \tau_j) \to 0$ при $k \to \infty$, справедливо равенство

$$\lim_{k\to\infty} \rho_{(4)}(x[t_0[\cdot]t_*],\Delta_k) = \lim_{k\to\infty} e_{(4)}(x[t_0[\cdot]t_*],\Delta_k) = \rho^0_{(4)}(x[t_0[\cdot]t_*]),$$

где $\rho^0_{(4)}(x[t_0[\cdot]t_*])$ – цена игры (1), (36), (37).

Рассматриваемые стохастические или детерминированные процедуры вычисления величин, аппроксимирующих цену игры являются дискретными, так как базируются на выбранном (достаточно мелком) разбиении отрезка времени процесса управления. Естественным представляется вопрос о переходе от данной дискретной по времени схеме, к некоторой предельной (при измельчении шага разбиения отрезка времени) схеме вычисления цены игры. В главе 3 такой переход осуществляется на примере одной задачи конфликтного управления с эллиптическими ограничениями на управляющие воздействия игроков [4] и терминальным показателем качества.

Третья глава содержит четыре раздела. В разделе 11 дается постановка задачи. Движение объекта описывается уравнением (1), при этом $x \in R^n$, $n \geq 2$, $u \in R^2$, $v \in R^2$. Величины u и v стеснены ограничениями

$$u \in P = \left\{(u_1, u_2) : \frac{u_1^2}{a_1^2} + \frac{u_2^2}{b_1^2} \leq 1, \quad a_1^2 > b_1^2\right\}, \tag{61}$$

$$v \in Q = \left\{(v_1, v_2) : \frac{v_1^2}{a_2^2} + \frac{v_2^2}{b_2^2} \leq 1, \quad a_2^2 < b_2^2\right\}. \tag{62}$$

Здесь a_1, b_1, a_2, b_2 – заданные действительные числа. Показатель качества – терминальный, является частным случаем функционалов (7), (37) и имеет вид

$$\gamma(x[\vartheta]) = (x_1^2[\vartheta] + x_2^2[\vartheta])^{1/2}. \tag{63}$$

Предположим, что для матриц $X[\vartheta, t]$, $B(t)$, $C(t)$ выполняются равенства

$$\Big\{X[\vartheta, t]\Big(B(t)u + C(t)v\Big)\Big\}_i = g(t)u_i + f(t)v_i, \ i = 1, 2, \tag{64}$$

где символ $\{\ \}_i$ означает i-тую компоненту матричного произведения; $g(t)$ и $f(t)$ – достаточное число раз дифференцируемые скалярные функции. Обозначим

$$\chi(\tau, m_1, m_2) = \min_{u\in P}\max_{v\in Q}\langle m, (g(\tau)u + f(\tau)v)\rangle =$$

$$= -|g(\tau)|\sqrt{m_1^2a_1^2 + m_2^2b_1^2} + |f(\tau)|\sqrt{m_1^2a_2^2 + m_2^2b_2^2} \tag{65}$$

$\tau \in [t_0, \vartheta]$, $m \in S$, $S = \{m = (m_1, m_2) \in R^2 : \ |m| \leq 1\}$. Определим функцию $\Phi(\tau, m_2)$, $\tau \in [t_0, \vartheta]$, $m_2 \in [0, 1]$ из соотношения

$$\frac{\partial\chi}{\partial m_2}(\tau, m_1, m_2)\Big|_{m_1^2 = 1 - m_2^2} = m_2\Phi(\tau, m_2). \tag{66}$$

В дальнейшем предполагаем, что выполняются следующие условия:

1) существует $\bar{\tau} \in [t_0, \vartheta]$, такой, что для любых $s \in (\bar{\tau}, \vartheta]$ $m_2 \in [0,1]$ $\Phi(s, m_2) > 0$;

2) для любых $s \in (t_0, \bar{\tau}]$ $\Phi(s,1) < 0$, $\Phi(s,0) > 0$;

3) существует $\tilde{\tau} \in (t_0, \bar{\tau}]$, такой, что для любых $m_2 \in [0,1]$ $\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s, m_2)\big|_{s=\tilde{\tau}} = 0$, $\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s, m_2) > 0$ при $s \in (\tilde{\tau}, \vartheta]$ и $\frac{\partial\Phi}{\partial s}(s, m_2) < 0$ при $s \in [t_0, \tilde{\tau}]$.

Пусть реализовалась позиция $\{t_*, x_* = x[t_*]\} \in K$ и выбрано разбиение $\Delta_k = \Delta_k\{\tau_j\}$ (10) отрезка $[t_*, \vartheta]$ в которое вклчены моменты времени $\bar{\tau}$ и $\tilde{\tau}$ из свойств 1) – 3). Области $G_j(t_*)$ (26) удовлетворяют равенствам $G_j(t_*) = S$, $j = 1, \dots, k$. Величина, аппроксимирующая цену для реализовавшейся позиции $\{t_*, x_* = x[t_*]\}$ и выбранного разбиения Δ_k имеет вид

$$e(t_*, x_*, \Delta_k) = \max_{m \in S}(\langle m, y_* \rangle + \varphi_1(t_*, m)), \tag{67}$$

где в согласии с принятыми обозначениями $y_* = \{y_{*1}, y_{*2}\}^T \in R^2$, $y_{*i} = \{X[\vartheta, t_*]x_*\}_i$, $i = 1, 2$.

В разделе 12 предлагается и далее (в разделе 13) обосновывается предельная (при стремлении диаметра разбиения Δ_k (10) к нулю) схема вычисления цены игры (1), (61) – (64). При таком предельном переходе соответствующая последовательность выпуклых сверху оболочек $\varphi_j(t_*; m)$ $j = 1, ..., k$ (26) – (32) трансформируется в непрерывную по времени функцию $\varphi^{(\alpha)}(\tau, m)$, $\tau \in [t_*, \vartheta]$, $m \in S$ конструкция которой описывается с помощью системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

Лемма 13.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдутся числа $\delta(\varepsilon) > 0$ и $\alpha(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$, $0 \le \alpha(\varepsilon, \delta(\varepsilon)) \le \delta(\varepsilon)$, такие, что для любого разбиения $\Delta_k \subset \{\Delta_k,\ k = 1, 2, ...\}$ с диаметром $\delta_k \le \delta(\varepsilon)$ справедлива оценка

$$|\varphi_1(t_*; m) - \varphi^{(\alpha)}(t_*, m)| < \varepsilon, \tag{68}$$

равномерная по всем $\{t_*, m\} \in [t_0, \vartheta] \times S$, если только $0 < \alpha \le \alpha(\varepsilon, \delta(\varepsilon))$.

Рассмотрим величину

$$e^{(\alpha)}(t_*, x_*) = \sup_{m \in S}(\langle m, y_* \rangle + \varphi^{(\alpha)}(t_*, m)), \quad \{t_*, x_*\} \in K. \tag{69}$$

Теперь из равенства (67) и леммы 13.1 в силу теоремы 5.1 заключаем, что величина $e^{(\alpha)}(t_*, x_*)$ (69) аппроксимирует цену игры $\rho^0(t_*, x_*)$, т.е верно утверждение.

Теорема 13.1. Для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется число $\alpha^0 > 0$, такое, что для любой исходной позиции $\{t_*, x_*\} \in K$ справедлива оценка

$$|e^{(\alpha)}(t_*, x_*) - \rho^0(t_*, x_*)| < \varepsilon,$$

если $0 < \alpha \le \alpha^0$.

В разделе 14 приводится пример симуляции процесса управления на ЭВМ.

Автор глубоко признателен своему научному руководителю академику Н.Н. Красовскому.

СПИСОК ЦИТИРОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

[1]*Красовский Н.Н., Субботин А.И.* Позиционные дифференциальные игры. М.:Наука, 1974. 456 с.

[2]*Субботин А.И., Ченцов А.Г.* Оптимизация гарантии в задачах управления. М.:Наука, 1981. 288 с.

[3]*Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. М.:Наука. 1985. 518 с.

[4]*Krasovskii A.N., Krasovskii N.N.* Control under Lack of Information. Birkhauser, Boston, 1994. 319 p.

[5]*Красовский А.Н., Красовский Н.Н., Третьяков В.Е.* Стохастический программный синтез для детерминированной позиционной дифференциальной игры // Прикл. математика и механика, 1981. Т.45, вып.4. С. 579 - 586.

[6]*Krasovskii N.N., Reshetova T.N.* On the program Synthesis of a guarenteed control // Problem of Control and Information Theory. 1988. Vol.17, N 6. P. 333 - 343.

[7]*Красовский Н.Н., Лукоянов Н.Ю.* Задача конфликтного управления с наследственной информацией // Прикл. математика и механика, 1996. Т.60, вып.6. С. 885 - 900.

[8]*Красовский А.Н.* О позиционном минимаксном управлении // Прикл. математика и механика, 1980. Т.44, вып.4. С. 602 - 610.

[9]*Лукоянов Н.Ю.* О построении цены позиционной дифференциальной игры // Дифференц. уравнения, 2001. Т.37, N 1. С. 18 - 26.

[10]*Лукоянов Н.Ю.* К вопросу вычисления цены дифференциальной игры для позиционного функционала // Приклад. математика и механика. 1998. Т.62, вып.2. С. 188 - 198.

[11]*Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов. М.:Наука, 1974. 696 с.

РАБОТЫ АВТОРА ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

[12] *Коврижных А.Ю.* Об одной игровой задаче с геометрическими ограничениями эллиптического типа // Молодеж. конф. "Проблемы теорет. и прикл. математики": Тез. докл. конф. N 25 - 26, сост. в 1994 - 1995 годах. Екатеринбург: УрО РАН, 1995. С. 47.

[13] *Kovrizhnykh A.Y.* Limit scheme of the game value calculation= Предельная схема вычисления цены игры // 3 Междунар. семин. "Негладк. и разрыв. задачи упр. Оптимиз. и мх прил.", Санкт- Пертербург, 1995: Тез. докл. СПб., 1995. Ч.1. С. 57 - 58.

[14] *Коврижных А.Ю.* Об одной задаче конфликтного управления с позиционным показателем качества // Молодеж. конф. "Проблемы теорет. и прикл. математики": Тез. докл. конф. N 27, сост. в 1996 году. Екатеринбург: УрО РАН, 1996. С. 35 – 36.

[15] *Коврижных А.Ю.* К задаче конфликтного управления с позиционным показателем качества. //Украинская конференция "Моделирование и исследование устойчивости систем":Тез. докл. Киев, 1996. С. 64.

[16] *Kovrizhnykh A.Yu.* On the game value calculation with a nonterminal quality index // The Fourth International Workshop "Multiple Criteria and Game Problems under Uncertainty". Orekhovo – Zuevo, 1996.:Book of Abstracts. Moskow, 1996. C. 144.

[17] *Коврижных А.Ю.* Об одной дифференциальной игре на минимакс позиционного функционала // Молодеж. конф. "Проблемы теорет. и прикл. математики": Тез. докл. конф. N 28. – Екатеринбург: УрО РАН, 1997. С. 55.

[18] *Коврижных А.Ю.* Предельная схема вычисления цены игры // Изв. РАН. Сер. Теория и системы упр. 1997. N 1. С. 95 – 99.

[19] *Kovrizhnykh A.Yu.* On the Construction of the Value of the Game with Some Quality Indices // Nonsmooth and Discontinuous Problems of Control and Optimiz., Chelyabinsk, June, 17-20, 1998: Proc. Intern. Workshop / IFAC. Chelyabinsk, 1998. P. 117 – 118.

[20] *Коврижных А.Ю.* О построении цены игры для некоторых показателей качества // Проблемы теорет. и прикл. математики: Тез. докл. 29-ой Регион. молодеж. конф., 26-30 янв. 1998 г. Екатеринбург: УрО РАН, 1998. С. 44.

[21]*Коврижных А.Ю.* Об одной дифференциальной игре на минимакс квазипозиционного функционала. // Проблемы теорет. и прикл. математики: Тез. докл. 30-ой Регион. молодеж. конф. Екатеринбург: УрО РАН, 1999. С. 58 – 59.

[22] *Коврижных А.Ю.* О вычислении цены дифференциальной игры на минимакс позиционного функционала // Изв. УрГУ. 1999. N 14. С. 47 – 64.

[23] *Kovrizhnykh A.Yu.* On the Problem of Conflict with a Quasipositional Functional// Proceedings of the Steclov Institute of Mathematics, Suppl. 2, 2000, p. S79 – S93.

[24] *Коврижных А.Ю.* Об одной квазипозиционной дифференциальной игре // Современные методы в теории краевых задач. "Понтрягинские чтения – XI":Тез. докл. ВВМШ. Воронеж: 2000, с. 84.

[25] *Коврижных А.Ю.* О построении цены дифференциальной игры с позиционным функционалом качества // Дифференц. уравнения, 2001. Т.37. N 5. С. 638 – 647.

Подписано в печать 18.10.02 г. Формат 60x84/16.
Усл. печ. л. 1,25. Бумага офсетная.
Заказ № 289. Тираж 100.

Отпечатано с готового оригинал-макета
в ИПЦ «Издательство УрГУ».
г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.