

## О ФОРМЕ ОБЛАКА ЧАСТИЦ, ВЫБРОШЕННЫХ С ПОВЕРХНОСТИ НЕБЕСНОГО ТЕЛА

Выбросы значительной массы вещества в космос с поверхности тела, обращающегося вокруг притягивающего центра по эллиптической орбите, регулярно наблюдаются в Солнечной системе. Типичные примеры: истечение пыли и газа с поверхности кометы, выброс реголита с малого спутника после метеоритного удара, взрыв ИСЗ. Ограничимся рассмотрением относительно крупных частиц с массами более  $10^{-4}$  г. Поведение более мелких в значительной степени определяется электромагнитным взаимодействием с фотонным и корпускулярным солнечным излучением и магнитным полем планеты. Через время  $\Delta t$  после выброса частицы заполняют некоторую область  $\mathcal{D}$ . Время  $\Delta t$  выберем достаточно малым, чтобы можно было пренебречь возмущениями элементов орбит частиц, и достаточно большим, чтобы частицы, в силу неравенства орбитальных периодов, заполнили область  $\mathcal{D}$ , *окружающую орбиту родительского тела*. Мы получили аналитическое описание  $\mathcal{D}$ . Точнее, найдены параметрические уравнения поверхности  $\mathcal{S}$ , граничной для  $\mathcal{D}$ . В важнейшем частном случае изотропного выброса проведено полное исследование вида поверхности  $\mathcal{S}$  и ее дифференциально-геометрических свойств.

Ejections into space of considerable masses from the surface of a body revolving around an attracting centre on an elliptic orbit are observed in the Solar System regularly. Typical examples: outflow of gas and dust from a comet, ejection of a regolith mass after a meteoroid impact on a small satellite, artificial satellite explosion. We restrict ourselves with studying relatively large particles having masses more than  $10^{-4}$  g. Behaviour of more tiny ones are controlled by electromagnetic interaction with photon and corpuscular solar radiation. Particles fill a certain domain  $\mathcal{D}$  within a time interval  $\Delta t$  after the ejection. We choose  $\Delta t$  sufficiently short to neglect perturbations of orbital elements of particles, and sufficiently long for particles fill the domain  $\mathcal{D}$  *enveloping the orbit of the parent body* due to inequality of their orbital periods. We find an analytic description of  $\mathcal{D}$ . More exactly, parametric equations of the surface  $\mathcal{S}$  bounding  $\mathcal{D}$  are deduced. Complete analysis of the shape of the surface  $\mathcal{S}$  and its differential-geometric properties is carried on in a most important case of an isotropic ejection.

## Введение

Пылевые комплексы образуют одну из составляющих Солнечной системы. Существует множество способов их образования: выброс вещества с поверхности спутников при метеоритной бомбардировке; столкновения нерегулярных спутников и астероидов; извержения с таких спутников, как Ио и Энцелад; истечение вещества из кометных ядер в околосолнечной окрестности; взрывы и столкновения ИСЗ и др. Какова форма образующегося облака частиц? Несмотря на разную физику процессов, определение области, заполняемой частицами, требует исследования и решения если не одинаковых, то однотипных уравнений. Различным аспектам феномена в последние четверть века посвящено множество работ. Перечислим лишь некоторые.

Первая четкая постановка вопроса применительно к гипотетическим кольцам Марса (до сих пор не обнаруженным) содержится в [1], но развитие темы наступило много позже. Большинство работ использовало численный анализ, см., например, работы [2–4] об околосолнечных комплексах и [5–7] о продуктах взрывов ИСЗ.

Работы [8, 9] и др., посвященные метеорным потокам, порожденным кометными выбросами, используют полуаналитические методы.

Чисто аналитический подход использован в наших работах [10–17] об усложнении задачи от плоской круговой до пространствен-

ной с изотропным выбросом из произвольной точки эллиптической орбиты. Здесь мы откажемся и от изотропности. Перечислим основные допущения, при которых решение применимо к реальным телам Солнечной системы:

- а) орбита материнского тела — произвольный кеплеров эллипс;
- б) в произвольный момент времени  $t_0$  происходит выброс вещества по всевозможным направлениям. Относительные скорости выброшенных частиц в общем случае зависят от их направления (анизотропный выброс). В частном случае изотропного выброса задача упрощается. Важно, что замена реального выброса изотропным с наибольшей по всем направлениям относительной скоростью расширяет реальную область, заполненную частицами. Следовательно, можно гарантировать, что рой заполнит часть модельной области и ни одна частица не выйдет за ее пределы;
- в) орбиты частиц — эллипсы, движение всех частиц по ним — прямое (обратные орбиты отсутствуют). Соответствующие условия, связывающие скорость выброса, элементы орбиты материнского тела и положение точки выброса, будут сформулированы ниже;
- г) возмущения в движении частиц не учитываются. Это значит, во-первых, что мы рассматриваем лишь относительно крупные частицы с массами более  $10^{-4}$  г. Поведение более мелких в значительной степени определяется взаимодействием с магнитным полем и с фотонным и корпускулярным излучением Солнца [18, 19], а в некоторых случаях с потоками межзвездного газа [20]. Во-вторых, мы рассматриваем не слишком большой промежуток времени  $t - t_0$ , за который возмущения не успевают накопиться [21, 22]. Так, возмущения узлов и перигелиев достигают  $10\text{--}20^\circ$  для ИСЗ типа «Молния» за месяц, для астероида 3200 Фаэтон — за 600 лет. Однако играют роль лишь дифференциальные возмущения: поворот всей системы на любой угол вокруг любой оси не меняет вида заполненной частицами области. Поэтому наши рассмотрения годятся на больший срок: для указанных ИСЗ — примерно на год, а для Фаэтона — на 5 000 лет;
- д) промежуток времени  $t - t_0$  не должен быть и слишком малым, чтобы частицы успели заполнить область за счет неравенства орбитальных периодов. На это обычно требуется десяток оборотов материнского тела. Например, нужна неделя для обломков

геостационарного спутника при относительной скорости частиц 10—100 м/с, и от года до 2—3 десятков лет при выбросе с Фазтона с относительной скоростью частиц 100—1000 м/с в зависимости от точки выброса.

## Семейство траекторий

Перейдем к точным формулировкам. Пусть точка  $O_1$  массы  $m_1$  описывает кеплеров эллипс вокруг точки  $O$  массы  $m$ . Масса  $m_1$  конечна, но  $m_1 \ll m$ . В момент  $t_0$  происходит выброс из  $O_1$  частиц  $Q$  бесконечно малой массы. Введем систему декартовых невращающихся координат  $\mathcal{O}$  с началом в  $O$ ; ось  $x$  направим в  $O_1$  в момент выброса, ось  $y$  — ортогонально  $x$  в плоскости орбиты в сторону движения  $O_1$ , ось  $z$  — по вектору площадей орбиты  $O_1$ . Пусть  $b$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$  — сферические координаты вектора скорости  $Q$  относительно  $O_1$ , то есть разности векторов скоростей  $Q$  и  $O_1$  в системе  $\mathcal{O}$ . Считаем точку  $(\theta, \lambda)$  принадлежащей единичной сфере  $\mathbb{S}$ ,  $b = b(\theta, \lambda) > 0$ , причем функция  $b(\theta, \lambda)$  непрерывно дифференцируема на сфере  $\mathbb{S}$ . При  $b = \text{const}$  выброс изотропен. Требуется найти область  $\mathcal{D}$ , заполненную траекториями  $T$  выброшенных частиц  $Q$ . Как известно из [23, 24], область  $\mathcal{D}$  ограничена поверхностью  $\mathcal{S}$ , огибающей двупараметрическое семейство эллипсов  $\{T\}$ .

Обозначим через  $a$ ,  $p$ ,  $e$ ,  $i$ ,  $\Omega$ ,  $g$ ,  $u$ ,  $\varphi$  большую полуось, фокальный параметр, эксцентриситет, наклон, долготу восходящего узла, аргумент перицентра, аргумент широты и истинную аномалию орбиты  $Q$  в эпоху  $t_0$ ; те же величины орбиты  $O_1$  снабдим индексом ноль. Положение и скорость  $O_1$  в момент выброса равны

$$\mathbf{r}_0 = r_0(1, 0, 0), \quad \mathbf{v}_0 = w(\sin f, \cos f, 0). \quad (1)$$

Здесь

$$r_0 = \frac{p_0}{1 + e_0 \cos \varphi_0}, \quad w = \frac{\kappa}{\sqrt{p_0}} K, \\ K = \sqrt{1 + 2e_0 \cos \varphi_0 + e_0^2}, \quad 1 - e_0 \leq K \leq 1 + e_0, \quad (2)$$

где  $\kappa^2$  — произведение постоянной тяготения на массу  $m$ ;  $f$  — угол, на который надо повернуть вектор скорости  $\mathbf{v}_0$  до совмещения с лучом  $Oy'$ , параллельным лучу  $Oy$  (рис. 1). По известным формулам

кеплеровского движения [25, 26]

$$\cos f = \frac{1 + e_0 \cos \varphi_0}{K}, \quad \sin f = \frac{e_0 \sin \varphi_0}{K}. \quad (3)$$

При  $e_0 = 0$  (круговая орбита) или  $\sin \varphi_0 = 0$  (выброс в апсидальной точке)  $f = 0$ , то есть вектор скорости ортогонален радиус-вектору, что и следовало ожидать. В общем случае, как легко показать,

$$\sqrt{1 - e_0^2} \leq \cos f \leq 1, \quad -e_0 \leq \sin f \leq e_0. \quad (4)$$

Ограничиваясь эллиптическими орбитами  $O_1$ , потребуем

$$e_0 < 1. \quad (5)$$

Безразмерную скорость

$$c(\theta, \lambda) = \frac{b(\theta, \lambda)}{w}$$

назовем *параметром выброса*. Здесь и далее будем считать ее функцией от  $\theta$  и  $\lambda$ , но часто писать сокращенно  $c$ . Наложим условие эллиптичности орбит частиц, то есть считаем  $w + b$  меньшей параболической скорости:

$$c < \frac{\sqrt{2(1 + e_0 \cos \varphi_0)}}{K} - 1. \quad (6)$$

Например, при выбросе в апсидальных точках это условие переходит в

$$c < \sqrt{\frac{2}{1 + e_0}} - 1 \quad (\text{перицентр}), \quad c < \sqrt{\frac{2}{1 - e_0}} - 1 \quad (\text{апоцентр}),$$

а для круговой орбиты

$$c < \sqrt{2} - 1. \quad (7)$$

Найдем орбиту  $T$  точки  $Q$  по положению и скорости. В начальную эпоху положение и скорость выброшенной частицы  $Q$ , выделенной двумя параметрами  $\theta$  и  $\lambda$ , будут

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= \mathbf{r}_0 = r_0(1, 0, 0), \\ \mathbf{v} &= w(\sin f + c \sin \theta \cos \lambda, \cos f + c \sin \theta \sin \lambda, c \cos \theta), \end{aligned} \quad (8)$$

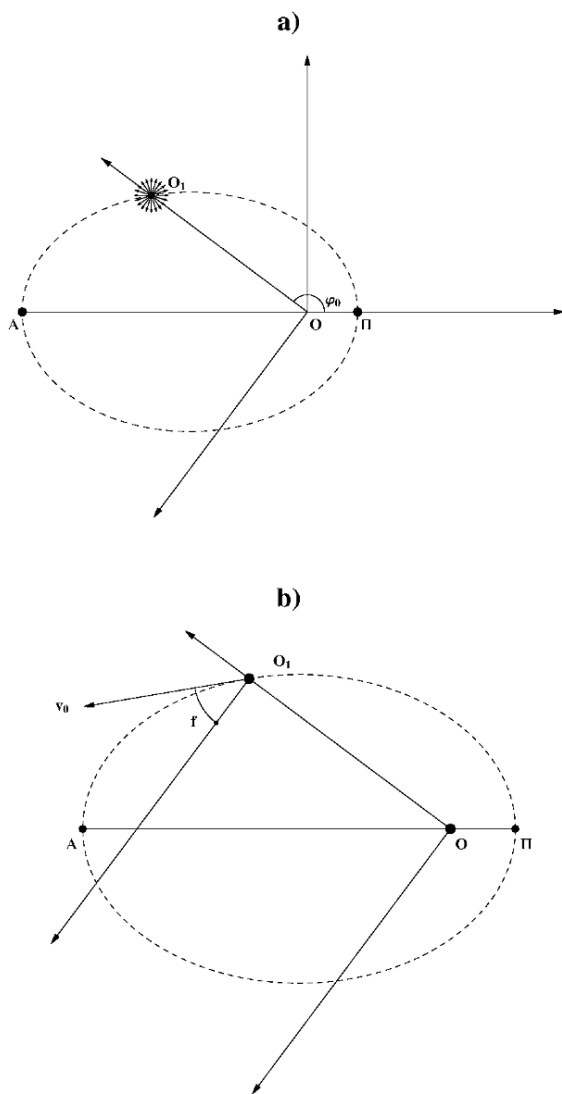


Рис. 1. Модель изотропного выброса с эллиптической орбиты родительского тела

причем

$$|\mathbf{v}| = wL, \quad L = \sqrt{1 + 2c \sin \theta \sin(f + \lambda) + c^2} \quad 1 - c \leq L \leq 1 + c.$$

Отсюда сразу находим вектор площадей

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{v} &= \kappa \sqrt{p} (\sin i \sin \Omega, -\sin i \cos \Omega, \cos i) = \\ &= r_0 w (0, -c \cos \theta, \cos f + c \sin \theta \sin \lambda). \end{aligned} \quad (9)$$

Если  $\cos \theta = \cos f + c \sin \theta \sin \lambda = 0$ , то последний вектор исчезает, что отвечает прямолинейной орбите. Если  $\cos f + c \sin \theta \sin \lambda = 0$ ,  $\cos \theta \neq 0$ , то плоскость орбиты ортогональна плоскости  $xy$ , содержащей орбиту  $O_1$ . Если  $\cos f + c \sin \theta \sin \lambda < 0$ , движение частицы обратно движению  $O_1$ . Наложим условие: все частицы  $Q$  обладают прямым движением. Для этого необходимо и достаточно

$$\cos f + c(\theta, \lambda) \sin \theta \sin \lambda > 0 \iff \frac{1 + e_0 \cos \varphi_0}{K} + c(\theta, \lambda) \sin \theta \sin \lambda > 0 \quad (10)$$

при всевозможных  $\theta, \lambda$ . Заметим, что условие (10) заведомо выполняется при

$$c(\theta, \lambda) < \cos f \iff c(\theta, \lambda) < \frac{1 + e_0 \cos \varphi_0}{K}. \quad (11)$$

При  $c(\theta, \lambda) = \text{const}$  условия (10) и (11) совпадают.

Из двух неравенств (6) и (10) ни одно не является следствием другого. В [17] для постоянного  $c$  определено, в каких случаях сильнее неравенство (6), а в каких — неравенство (10). При  $e_0 \leq 1/2$  неравенство (11) вытекает из (6). В противном случае задача сводится к тригонометрическому уравнению третьей степени относительно  $\varphi_0$ , содержащему  $e_0$  в качестве параметра. Подробности см. в [17].

Введем величину  $A$ :

$$A = \sqrt{(\cos f + c \sin \theta \sin \lambda)^2 + c^2 \cos^2 \theta}. \quad (12)$$

Поскольку  $A > 0$  при условии (11), можно представить (9) в виде

$$\begin{aligned} \kappa \sqrt{p} (\sin i \sin \Omega, -\sin i \cos \Omega, \cos i) &= \\ &= r_0 w A \left( 0, \frac{-c \cos \theta}{A}, \frac{\cos f + c \sin \theta \sin \lambda}{A} \right), \end{aligned} \quad (13)$$

делая последний вектор единичным.

Равенство (13) влечет

$$p = r_0 A^2 M, \quad (14)$$

где

$$M = \frac{1 + 2e_0 \cos \varphi_0 + e_0^2}{1 + e_0 \cos \varphi_0}, \quad 1 - e_0 \leq M \leq 1 + e_0. \quad (15)$$

Направление вектора площадей согласно (13) определяется соотношениями

$$\begin{aligned} \sin i \sin \Omega &= 0, \\ A \sin i \cos \Omega &= c \cos \theta, \\ A \cos i &= \cos f + c \sin \theta \sin \lambda. \end{aligned} \quad (16)$$

Примем для удобства, что  $-\pi/2 \leq i \leq \pi/2$ , а восходящий и нисходящий узлы меняются местами при переходе  $i$  через 0. Тогда  $\Omega = 0$  для орбит любого наклона. Окончательно,

$$\Omega = 0, \quad \cos i = \frac{\cos f + c \sin \theta \sin \lambda}{A}, \quad \sin i = \frac{c \cos \theta}{A}. \quad (17)$$

Теперь найдем истинную аномалию  $\varphi$  при  $t = t_0$ :

$$\begin{aligned} e \cos \varphi &= p/r_0 - 1 = A^2 M - 1, \\ e \sin \varphi &= \frac{\sqrt{p}}{\kappa} v_x = AM(\sin f + c \sin \theta \cos \lambda). \end{aligned}$$

Мы условились, что при  $t = t_0$  будет  $\Omega = 0$  и, следовательно,  $u = 0$ . Отсюда получаем аргумент перигея  $g = -\varphi$ . В результате

$$e \cos g = \alpha, \quad e \sin g = \beta, \quad (18)$$

где

$$\alpha = A^2 M - 1, \quad \beta = -AM(\sin f + c \sin \theta \cos \lambda). \quad (19)$$

В заключение найдем большую полуось и эксцентриситет орбиты частицы. Согласно интегралу энергии полная энергия частицы на единицу массы есть

$$\mathcal{H} = \frac{v^2}{2} - \frac{\kappa^2}{r_0} = -\frac{\kappa^2}{2r_0}(2 - L^2 M).$$



Отсюда

$$a = -\frac{\varkappa^2}{2\mathcal{H}} = \frac{r_0}{2 - L^2 M}. \quad (20)$$

Эксцентриситет можно получить, отправляясь от  $p$ , а по формуле  $e^2 = 1 - p/a$  или отправляясь от  $e \cos g$ ,  $e \sin g$ . Получим

$$e^2 = 1 - A^2 M(2 - L^2 M). \quad (21)$$

Заметим, что  $2 - L^2 M > 0$ , поскольку, согласно (6),  $(1 - c)^2 < 2/M$ .

Орбита частицы определена полностью. Вектор положения  $Q$  в произвольную эпоху  $t$  задается формулами

$$\mathbf{r} = r(\cos u, \cos i \sin u, \sin i \sin u), \quad r = \frac{r_0 M A^2}{1 + \alpha \cos u + \beta \sin u}, \quad (22)$$

причем  $A, i, \alpha, \beta$  выражаются через  $\theta, \lambda$  согласно (12, 17, 19). В дальнейшем в качестве независимой переменной, определяющей положение частицы на орбите  $T$ , выберем аргумент широты  $u$ .

## Огибающая поверхность

Параметрические уравнения поверхности  $\mathcal{S}$ , огибающей пространственное двухпараметрическое семейство  $\{T\}$ , даются согласно [23, 24] соотношениями (22) и

$$\Phi(u, \theta, \lambda) = 0, \quad (23)$$

где

$$\Phi = (\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2 \mathbf{r}_3). \quad (24)$$

Здесь и далее индексы 1, 2, 3 у  $\mathbf{r}$ ,  $r$ ,  $i$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$  указывают на дифференцирование по  $u$ ,  $\theta$ ,  $\lambda$  соответственно. Производные от  $A^2$  обозначены как  $A_{22}, A_{23}$ . Необходимо разрешить (23) относительно  $u$  и подставить решение в (22).

Вычисляя смешанное произведение (24), найдем после преобразований

$$\Phi = r^2 \sin u \Phi_1,$$

где

$$\Phi_1 = (i_2 r_3 - i_3 r_2).$$

Выпишем производные независящих от  $u$  величин:

$$A_{22} = 2cc_2 \cos^2 \theta - 2c^2 \sin \theta \cos \theta + \\ + 2 \sin \lambda (\cos f + c \sin \theta \sin \lambda) (c \cos \theta + c_2 \sin \theta);$$

$$A_{23} = 2cc_3 \cos^2 \theta + 2 \sin \theta (\cos f + c \sin \theta \sin \lambda) (c \cos \lambda + c_3 \sin \lambda);$$

$$A^2 i_2 = -c^2 \sin \lambda - c \cos f \sin \theta + c_2 \cos f \cos \theta;$$

$$A^2 i_3 = \cos \theta (-c^2 \sin \theta \cos \lambda + c_3 \cos f);$$

$$\alpha_2 = MA_{22};$$

$$\alpha_3 = MA_{23};$$

$$2A\beta_2 = -2MA^2 \cos \lambda (c \cos \theta + c_2 \sin \theta) - MA_{22} (\sin f + c \sin \theta \cos \lambda);$$

$$2A\beta_3 = 2MA^2 \sin \theta (c \sin \lambda - c_3 \cos \lambda) - MA_{23} (\sin f + c \sin \theta \cos \lambda).$$

Теперь можно вычислить производные от радиуса:

$$r_2 = \frac{r_0 M}{(1 + \alpha \cos u + \beta \sin u)^2} \left[ A_{22} (1 - \cos u) + \frac{1}{2} \Psi_1 \sin u \right],$$

$$r_3 = \frac{r_0 M}{(1 + \alpha \cos u + \beta \sin u)^2} \left[ A_{23} (1 - \cos u) + \frac{1}{2} \Psi_2 \sin u \right].$$

Здесь

$$\Psi_1 = AM \left[ -A_{22} (\sin f + c \sin \theta \cos \lambda) + 2A^2 \cos \lambda (c \cos \theta + c_2 \sin \theta) \right],$$

$$\Psi_2 = AM \left[ -A_{23} (\sin f + c \sin \theta \cos \lambda) - 2A^2 \sin \theta (c \sin \lambda - c_3 \cos \lambda) \right].$$

После перехода к половинному углу

$$r_2 = \frac{r_0 M}{(1 + \alpha \cos u + \beta \sin u)^2} \sin \frac{u}{2} \left( 2A_{22} \sin \frac{u}{2} + \Psi_1 \cos \frac{u}{2} \right),$$

$$r_3 = \frac{r_0 M}{(1 + \alpha \cos u + \beta \sin u)^2} \sin \frac{u}{2} \left( 2A_{23} \sin \frac{u}{2} + \Psi_2 \cos \frac{u}{2} \right).$$

В результате

$$\Phi = \frac{r^2 r_0 M}{A(1 + \alpha \cos u + \beta \sin u)^2} \sin u \sin \frac{u}{2} \left( B_1 \cos \frac{u}{2} + B_2 \sin \frac{u}{2} \right). \quad (25)$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 B_1 &= \cos \theta (c^2 \sin \theta \cos \lambda - c_3 \cos f) \Psi_1 + \\
 &\quad + (-c^2 \sin \lambda - c \cos f \sin \theta + c_2 \cos f \cos \theta) \Psi_2, \\
 B_2 &= 2 \cos \theta (c^2 \sin \theta \cos \lambda - c_3 \cos f) A_{22} + \\
 &\quad + 2(-c^2 \sin \lambda - c \cos f \sin \theta + c_2 \cos f \cos \theta) A_{23}.
 \end{aligned}$$

Получим все решения уравнения (23).

- а) Двойной корень  $u = 0$ . Отвечает конической точке  $(1, 0, 0)$  поверхности  $\mathcal{S}$ : все траектории  $T$  проходят через точку выброса.  
 б) Простой корень  $u = \pi$ . Отвечает перетяжке

$$x_1 \leq x \leq x_2, \quad y = z = 0 \quad (26)$$

поверхности  $\mathcal{S}$ : все траектории проходят через линию узлов. Здесь  $x_s$  — крайние точки абсциссы

$$x = -r_0 M \frac{A^2}{2 - A^2 M},$$

причем  $r_0, M$  постоянны, а  $A^2$ , согласно (12), изменяется в ограниченном промежутке, когда  $(\theta, \lambda)$  описывает сферу  $\mathbb{S}$ . Окрестности конической точки и перетяжки приведены на рис. 2.

- в) Корни  $(\theta^*, \lambda^*)$  системы уравнений

$$B_1(\theta, \lambda) = 0, \quad B_2(\theta, \lambda) = 0. \quad (27)$$

Обе орбиты  $T(\theta^*, \lambda^*)$  целиком лежат на огибающей поверхности  $\mathcal{S}$ .

- г) В остальных случаях уравнение (23) равносильно

$$\operatorname{tg} \frac{u}{2} = -\frac{B_1}{B_2},$$

откуда однозначно определяются нужные нам косинус и синус аргумента широты

$$\cos u = \frac{B_2^2 - B_1^2}{B_1^2 + B_2^2}, \quad \sin u = -\frac{2B_1 B_2}{B_1^2 + B_2^2}. \quad (28)$$

Приведем окончательное параметрическое задание огибающей поверхности  $\mathcal{S}$ :

$$\begin{aligned}
 x &= r_0 M A^2 \frac{h_1}{h}, & y &= r_0 M A^2 \frac{h_2}{h}, \\
 z &= r_0 M A^2 \frac{h_3}{h}, & r &= r_0 M A^2 \frac{h_4}{h},
 \end{aligned} \quad (29)$$

где

$$\begin{aligned}
 h_1 &= B_2^2 - B_1^2, \\
 h_2 &= -2B_1B_2 \cos i, \\
 h_3 &= -2B_1B_2 \sin i, \\
 h_4 &= B_1^2 + B_2^2, \\
 h &= (1 - \alpha)B_1^2 + (1 + \alpha)B_2^2 - 2\beta B_1B_2. \quad (30)
 \end{aligned}$$

*Замечание.* Первые три случая содержатся в четвертом. Первый получается при  $B_1(\theta, \lambda) = 0$ ,  $B_2(\theta, \lambda) = 1$ ; второй — при  $B_2(\theta, \lambda) = 0$ ; третий — предельным переходом  $\theta \rightarrow \theta^*$ ,  $\lambda \rightarrow \lambda^*$ .

Вид семейства траекторий и огибающей его поверхности приведен на рис. 3

## Свойства огибающей поверхности при изотропном выбросе

В общем случае функции  $h_s(\theta, \lambda)$  сложны и установить свойства  $S$  затруднительно. Рассмотрим сначала простейший случай изотропного выброса  $c = \text{const}$ ,  $c_2 = c_3 = 0$ , когда  $h_s(\theta, \lambda)$  — тригонометрические многочлены. Даже в этом случае, как мы увидим, задача нетривиальна.

Выпишем нужные нам величины при  $c = \text{const}$ ,  $c_2 = c_3 = 0$ :

$$\begin{aligned}
 A_{22} &= -2c^2 \sin \theta \cos \theta + 2c \cos \theta \sin \lambda (\cos f + c \sin \theta \sin \lambda); \\
 A_{23} &= 2c \sin \theta \cos \lambda (\cos f + c \sin \theta \sin \lambda); \\
 A^2 i_2 &= -c^2 \sin \lambda - c \cos f \sin \theta; \\
 A^2 i_3 &= -c^2 \cos \theta \sin \theta \cos \lambda; \\
 \alpha_2 &= MA_{22}; \\
 \alpha_3 &= MA_{23}; \\
 2A\beta_2 &= -2MA^2c \cos \theta \cos \lambda - MA_{22}(\sin f + c \sin \theta \cos \lambda); \\
 2A\beta_3 &= 2MA^2c \sin \theta \sin \lambda - MA_{23}(\sin f + c \sin \theta \cos \lambda). \\
 \Psi_1 &= AM [-A_{22}(\sin f + c \sin \theta \cos \lambda) + 2A^2c \cos \theta \cos \lambda], \\
 \Psi_2 &= AM [-A_{23}(\sin f + c \sin \theta \cos \lambda) - 2A^2c \sin \theta \sin \lambda]. \\
 B_1 &= c^2 \cos \theta \sin \theta \cos \lambda \Psi_1 - c(c \sin \lambda + \cos f \sin \theta) \Psi_2, \\
 B_2 &= 2c^2 \cos \theta \sin \theta \cos \lambda A_{22} - 2c(c \sin \lambda + \cos f \sin \theta) A_{23}. \quad (31)
 \end{aligned}$$

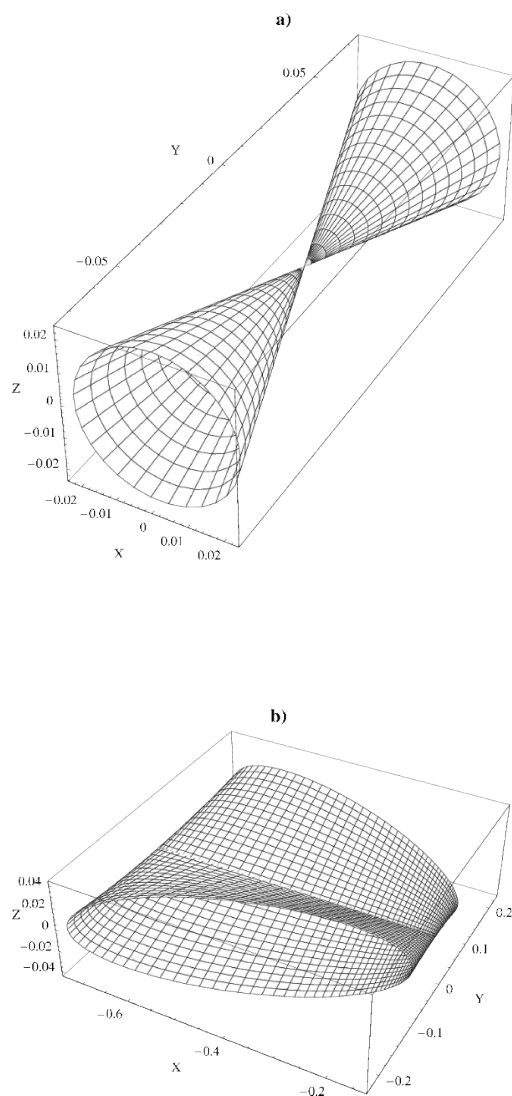


Рис. 2. Окрестности конической точки (a) и перетяжки (b)

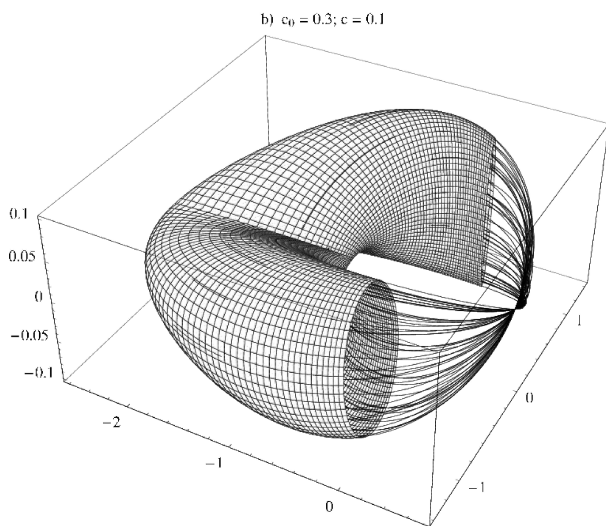
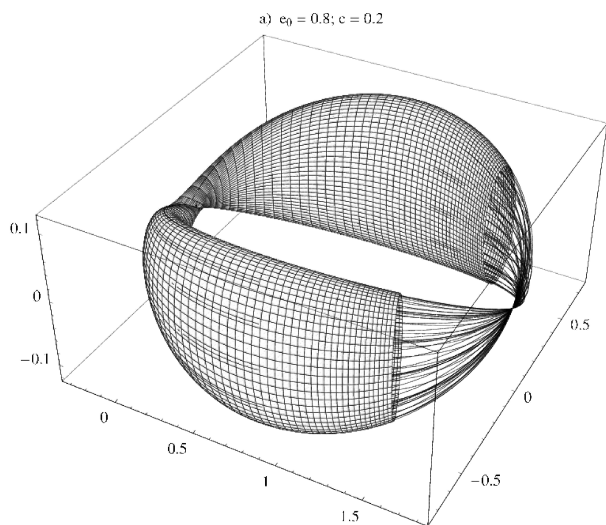


Рис. 3. Поверхность, огибающая семейство траекторий. Выброс изотропный апсидальный в апоцентре (a) и перигентре (b)

## Ограниченность

1. Перепишем последнюю формулу (17) в виде

$$\sin^2 i = \frac{c^2 \cos^2 \theta}{(\cos f + c \sin \theta \sin \lambda)^2 + c^2 \cos^2 \theta}. \quad (32)$$

Поскольку  $\cos f > c > 0$ ,  $\sin \theta \geq 0$ , последнее выражение принимает наибольшее значение при  $\sin \lambda = -1$ . Таким образом,

$$\sin^2 i \leq F(\theta) := \frac{c^2 \cos^2 \theta}{\cos^2 f - 2c \cos f \sin \theta + c^2}.$$

Вычислим производную

$$\frac{dF(\theta)}{d\theta} = \frac{2c^2 \cos \theta}{(\cos^2 f - 2c \cos f \sin \theta + c^2)^2} (\cos f - c \sin \theta)(c - \cos f \sin \theta).$$

Ясно, что наибольшее значение  $F$  принимает при  $\sin \theta = c/\cos f$ , причем в этой точке  $F = c^2/\cos^2 f$ . В результате

$$|\sin i| \leq \frac{c}{\cos f}. \quad (33)$$

Равенство в (33) достигается при

$$\sin \theta = c/\cos f, \quad \sin \lambda = -1. \quad (34)$$

Теперь легко установить ограниченность отношения  $z/r$  на поверхности  $\mathcal{S}$ . Согласно (29, 30)

$$\left| \frac{z}{r} \right| = \left| \frac{h_3}{h_4} \right| = \left| \frac{2B_1 B_2 \sin i}{B_1^2 + B_2^2} \right| \leq |\sin i|,$$

так что

$$\left| \frac{z}{r} \right| \leq \frac{c}{\cos f}. \quad (35)$$

Установим точность оценки (35). Достижимости равенства в (33) нам недостаточно: соответствующая орбита может касаться огибающей не обязательно в верхней точке. Подставим в (12, 31) значения (34):

$$A = \sqrt{\cos^2 f - c^2}, \quad A_{22} = -2c\sqrt{\cos^2 f - c^2}, \quad A_{23} = 0;$$

$$\Psi_1 = 2cM(\cos^2 f - c^2) \sin f;$$

$$\Psi_2 = 2c^2 M (\cos^2 f - c^2)^{3/2} / \cos f;$$

$$B_1 = B_2 = 0.$$

Мы встретились с орбитой экстремального наклона. Их две, согласно (34). Обе они целиком лежат на  $\mathcal{S}$ . Таким образом, оценка (35) точна.

2. Перейдем к оценке радиуса  $r$  снизу. Согласно (14, 21)

$$r_\pi = \frac{p}{1+e} = \frac{A^2 M r_0}{1 + \sqrt{1 - A^2 M (2 - L^2 M)}}. \quad (36)$$

Правая часть (36) возрастает с ростом  $A$  и убывает с ростом  $L$ . Поэтому

$$\min_{A, L} r_\pi(A, L) \geq r_\pi(\min A, \max L) = r_\pi(\cos f - c, 1 + c).$$

Неравенство вызвано тем, что минимум  $A$  и максимум  $L$  достигаются на экваторе  $\theta = \pi/2$ , но при разных значениях  $\lambda$ . В результате получаем простое, но не точное неравенство

$$r \geq \frac{(\cos f - c)^2 M r_0}{1 + \sqrt{1 - (\cos f - c)^2 M [2 - (1 + c)^2 M]}} \geq \frac{(\cos f - c)^2 M r_0}{2}. \quad (37)$$

Простого точного неравенства не существует. В [17] показано, что для получения точного неравенства достаточно вычислить наименьшее значение правой части (36) по  $\lambda$  при  $\theta = \pi/2$ , что можно свести к вычислению корней тригонометрического многочлена 5-й степени.

3. Перейдем к оценке радиуса  $r$  сверху:

$$\begin{aligned} r \leq r_\alpha &= \frac{p}{1-e} = \frac{A^2 M r_0}{1 - \sqrt{1 - A^2 M (2 - L^2 M)}} = \\ &= \frac{1 + \sqrt{1 - A^2 M (2 - L^2 M)}}{2 - L^2 M} r_0. \end{aligned}$$

Правая часть убывает с ростом  $A$  и возрастает с ростом  $L$ . Поэтому

$$\max_{A, L} r_\alpha(A, L) \leq r_\alpha(\min A, \max L) = r_\alpha(\cos f - c, 1 + c).$$



Окончательно,

$$r \leq \frac{1 + \sqrt{1 - (\cos f - c)^2 M [2 - (1 + c)^2 M]}}{2 - (1 + c)^2 M} r_0 \leq \frac{2}{2 - (1 + c)^2 M} r_0. \quad (38)$$

Итак, поверхность  $\mathcal{S}$  ограничена. Она замкнута как непрерывное отображение сферы. Таким образом,  $\mathcal{S}$  компактна.

### Симметрия

Подстановка  $(\theta, \lambda) \mapsto (\pi - \theta, \lambda)$  сохраняет  $\sin \theta$ ,  $A$ ,  $A_{23}$ ,  $\cos i$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\Psi_2$ ,  $B_1$ ,  $B_2$ ,  $h_1$ ,  $h_2$ ,  $h_4$ ,  $h$  и меняет знак у  $\cos \theta$ ,  $A_{22}$ ,  $\sin i$ ,  $\Psi_1$ ,  $h_3$ , что влечет  $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ .

Таким образом, поверхность  $\mathcal{S}$  симметрична относительно плоскости  $xy$ . Нетрудно показать, что других плоскостей симметрии в общем случае не существует. Однако они появляются в важных частных случаях.

Пусть  $f = 0$ , что выполнено при круговой орбите материнского тела или при выбросе в перицентре или апоцентре. Подстановка  $(\theta, \lambda) \mapsto (\pi - \theta, \pi - \lambda)$  сохраняет  $\sin \theta$ ,  $\sin \lambda$ ,  $A$ ,  $\cos i$ ,  $\alpha$ ,  $\Psi_1$ ,  $\Psi_2$ ,  $B_1$ ,  $h_1$ ,  $h_3$ ,  $h_4$ ,  $h$  и меняет знак у  $\cos \theta$ ,  $\cos \lambda$ ,  $A_{22}$ ,  $A_{23}$ ,  $\sin i$ ,  $\beta$ ,  $B_2$ ,  $h_2$ , что влечет  $(x, y, z) \mapsto (x, -y, z)$ . Мы получили дополнительную плоскость симметрии  $xz$ .

### Свойства поверхности $\mathcal{S}$ в общем случае

Если параметр выброса  $c(\theta, \lambda)$  является переменным и не обладает какой-либо симметрией, то и поверхность  $\mathcal{S}$  асимметрична.

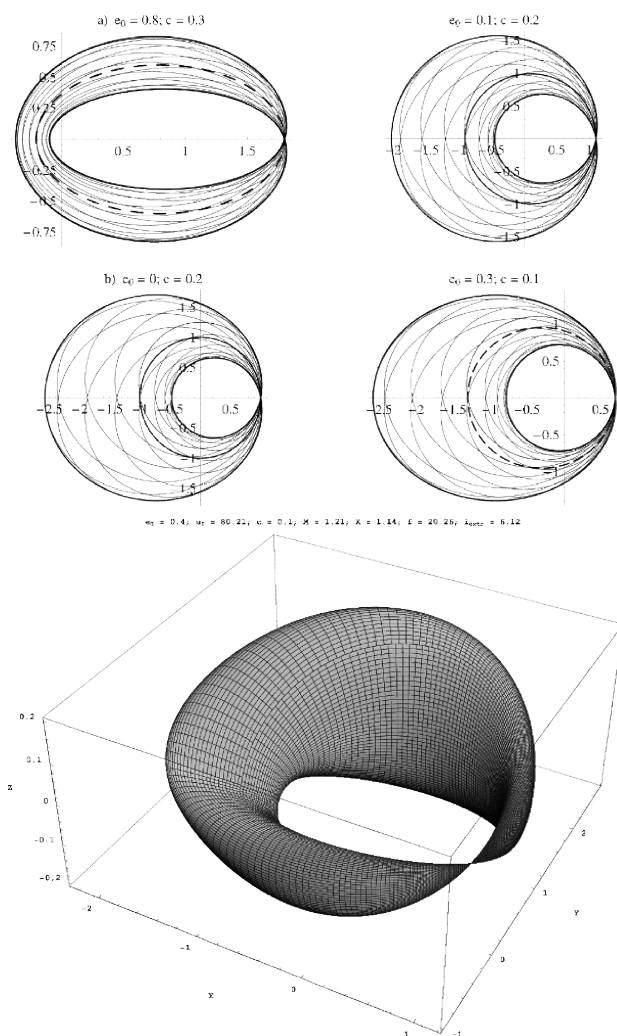


Рис. 4. Сечение огибающей поверхности плоскостью орбиты родительского тела (вверху). Поверхность, огибающая семейство траекторий (внизу). Выброс изотропный неапсидальный

Однако плоскость  $xu$  по-прежнему будет плоскостью симметрии при дополнительном условии: функция  $c$  зависит лишь от квадрата косинуса  $\theta$ , то есть  $c = c(\cos^2 \theta, \lambda)$ . Это ясно из геометрического смысла условия и легко проверяется формально. Достаточно заметить, что подстановка  $(\theta, \lambda) \mapsto (\pi - \theta, \lambda)$  влечет  $c_2 \mapsto -c_2$ ,  $c_3 \mapsto c_3$ .

Вывод о компактности  $\mathcal{S}$  сохраняет силу. Как было сказано во введении, увеличение скорости выброса расширяет заполненную частицами область  $\mathcal{D}$ . В частности, оценки (35, 37, 38) остаются справедливыми при замене  $c$  на  $c^* = \max_{\theta, \lambda} c(\theta, \lambda)$ .

Некоторое представление о форме поверхности  $\mathcal{S}$  при изотропном выбросе дает рисунок 4. Для наглядности мы выбрали сравнительно большие значения параметра выброса. Как правило, он значительно меньше, см. полученные численным интегрированием аналогичные рисунки в работах [5, 6, 8, 9].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 17–02–00478) и СПбГУ (грант 6.37.341.2015).

## Библиографические ссылки

1. *Soter S.* The Dust Belts of Mars // Cornell Univ. Center for Radio-physics and Space Res. Report. — 1971. — Iss. 462. — P. 62.
2. *Кривов А. В., Соколов Л. Л., Холшевников К. В., Шор В. А.* О существовании роя частиц в окрестности орбиты Фобоса // Астрон. вестн. — 1991. — Т. 25, вып. 3. — С. 317–326.
3. *Kholshevnikov K. V., Krivov A. V., Sokolov L. L., Titov V. B.* The Dust Torus around Phobos Orbit // Icarus. — 1993. — Vol. 105. — P. 351–362.
4. *Krivov A. V., Sokolov L. L., Dikarev V. V.* Dynamics of Mars-orbiting Dust: Effects of Light Pressure and Planetary Oblateness // Celest. Mech. Dyn. Astr. — 1996. — Vol. 63. — P. 313–339.
5. *Бордовицына Т. В., Васильченко О. И.* Численное моделирование распада и эволюции фрагментов КА на геостационарной орбите // Фундаментальные и прикладные проблемы современной механики : докл. всерос. науч. конф. — Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2000. — С. 125–126.
6. *Мишкин А. В., Бордовицына Т. В., Авдюшев В. А.* Моделирование эволюции фрагментов распада геостационарного спутника

- на больших интервалах времени // Исследования по баллистике и смежным вопросам механики. — 2002. — Вып. 5. — С. 132—133.
7. *Бордовицына Т. В., Авдюшев В. А.* Теория движения искусственных спутников Земли. — Томск : Изд-во Томск. ун-та, 2007.
  8. *Рябова Г. О.* Плотность потока частиц при распаде тела на орбите // Астрономия и геодезия. — 1998. — Вып. 16. — С. 75—78.
  9. *Ryabova G. O.* Mathematical modelling of the Geminid meteoroid stream // Mon. Not. R. Astron. Soc. — 2007. — Vol. 375. — P. 1371—1380.
  10. *Коблик В. В., Холшевников К. В.* Огибающая орбит изотропно выброшенных частиц // Вестн. СПбГУ. — Сер. 1. — 1994. — Вып. 1. — С. 98—102.
  11. *Холшевников К. В., Орлов С. А.* Пылевой тор. I. Уравнения огибающей поверхности семейства траекторий изотропно выброшенных частиц // Вестн. СПбГУ. — Сер. 1. — 2000. — Вып. 3. — С. 118—123.
  12. *Холшевников К. В., Орлов С. А., Джазмат М. С.* Пылевой тор. II. Исследование огибающей поверхности семейства траекторий изотропно выброшенных частиц // Вестн. СПбГУ. — Сер. 1. — 2003. — Вып. 4. — С. 119—130.
  13. *Орлов С. А., Холшевников К. В.* Пылевой тор. III. Уравнения огибающей поверхности семейства траекторий изотропно выброшенных частиц с учетом движения узлов и перигелиев // Вестн. СПбГУ. — Сер. 1. — 2004. — Вып. 1. — С. 112—119.
  14. *Орлов С. А.* Пылевой тор. IV. Исследование огибающей поверхности семейства траекторий изотропно выброшенных частиц с учетом движения узлов и перигелиев // Вестн. СПбГУ. — Сер. 1. — 2006. — Вып. 3. — С. 131—144.
  15. *Орлов С. А., Холшевников К. В.* Орбитальный пылевой тор как огибающая поверхность семейства траекторий изотропно выброшенных частиц // Астрон. вестн. — 2008. — Т. 42, вып. 2. — С. 99—118.
  16. *Орлов С. А., Холшевников К. В.* Пылевой тор, образованный выбросом частиц в апсидальных точках // Астрон. вестн. — 2012. — Т. 46, вып. 3. — С. 223—234.
  17. *Orlov S. A., Kholshchevnikov K. V.* Dust torus formed by particles ejected from a celestial body at an arbitrary point of its elliptic

- orbit // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2013. — Vol. 116, iss. 1. — P. 35—52.
18. *Burns J. A., Lamy P. L., Soter S.* Radiation forces on small particles in the solar system // *Icarus*. — 1979. — Vol. 40. — P. 1—48.
  19. *Wyatt M. C., Clarke C. J., Booth M.* Debris disk size distributions: steady state collisional evolution with Poynting–Robertson drag and other loss processes // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2011. — Vol. 111. — P. 1—28.
  20. *Pástor P.* Influence of fast interstellar gas flow on the dynamics of dust grains // *Celest. Mech. Dyn. Astr.* — 2012. — Vol. 112. — P. 23—45.
  21. *Kozai Y.* The motion of a close earth satellite // *Astron. J.* — 1959. — Vol. 64. — P. 367—377.
  22. *Valsecchi G. B., Milani A., Gronchi G. F., Chesley S. R.* Resonant returns to close approaches: Analytical theory // *Astron. Astrophys.* — 2003. — Vol. 408. — P. 1179—1196.
  23. *Залгаллер В. А.* Теория огибающих. — М. : Наука, 1975.
  24. *Фавар Ж.* Курс локальной дифференциальной геометрии. — М. : ИЛ, 1960.
  25. *Субботин М. Ф.* Введение в теоретическую астрономию. — М. : Наука, 1968.
  26. *Холшевников К. В., Титов В. Б.* Задача двух тел. — СПб : Изд-во Санкт-Петербург. ун-та, 2007.