

На правах рукописи

МАЛЫГИН АЛЕКСЕЙ ПАВЛОВИЧ

**НЕЛИНЕЙНЫЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОС
В ПРОЦЕССАХ ЗАТВЕРДЕВАНИЯ И
ИСПАРЕНИЯ С ДВУХФАЗНОЙ ЗОНОЙ**

01.04.14 — Теплофизика и теоретическая теплотехника

**Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
доктора физико-математических наук**

Екатеринбург - 2013

Работа выполнена на кафедре математической физики ФГАОУ ВПО "Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина"

Научный консультант: доктор физико-математических наук,
профессор Александров Дмитрий
Валерьевич

Официальные оппоненты: Попель Петр Станиславович, доктор
физико-математических наук, профессор,
ФГБОУ ВПО "Уральский государственный
педагогический университет", заведующий
кафедрой общей физики

Федотов Владимир Петрович, доктор
технических наук, доцент, ФГБУН "Институт
машиноведения Уральского отделения РАН",
главный научный сотрудник Лаборатории
прикладной механики

Мартюшев Леонид Михайлович, доктор
физико-математических наук, ФГАОУ ВПО
"Уральский федеральный университет
имени первого Президента России
Б.Н.Ельцина", профессор кафедры
технической физики

Ведущая организация: ФГБУН "Институт теплофизики Уральс-
кого отделения РАН", г. Екатеринбург

Защита состоится "22" февраля 2013 года в 15 ч. 00 мин. на заседании
диссертационного совета Д 212.285.02 на базе ФГАОУ ВПО "Уральский фе-
деральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина" по
адресу: 620002, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19, аудитория I главного учебного
корпуса.

С диссертацией можно ознакомиться в библиотеке ФГАОУ ВПО "Уральский
федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина".

Автореферат разослан " " 201 г.

Ученый секретарь диссертационного совета
доктор физ.-мат. наук, профессор



Г.И. Пилипенко

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Актуальность проблемы. Математическое описание процессов тепло- и массопереноса в задачах затвердевания и испарения при наличии подвижных межфазных границ берет свое начало с конца 19 века с работ Джозефа Стефана. В настоящее время этот подход применяется для описания широкого класса физических явлений, связанных с наличием движущихся границ. Так, например, стефановская постановка задачи о кристаллизации льда может быть использована для описания процессов направленного затвердевания расплавов в металлургии. Это объясняется схожестью физических процессов замерзания воды и затвердевания сплавов. Фронтальная модель Стефана также пригодна для описания условий кристаллизации земного ядра или процессов испарения летучих соединений с поверхностей пленок жидкости при учете соответствующих физических особенностей этих процессов.

Математическое моделирование процессов затвердевания и испарения основывается на уравнениях тепло- и массопереноса, записываемых во всех фазах системы, и граничных условиях, имеющих смысл непрерывности, скачка или баланса температурного и концентрационного полей. При этом математические модели реальных процессов, встречающихся в природе или технологических условиях, осложняются наличием одной или нескольких подвижных границ фазовых переходов, которые двигаются с заранее неизвестной скоростью. Модели таких систем также осложняются нелинейным транспортом тепла и примеси в гетерогенных системах, конвективными и гидродинамическими течениями сред, а также многообразием возможных граничных и начальных условий процессов. Поэтому универсальных методов решения задач подобного типа не существует и в каждой отдельной ситуации требуется разработка оригинальных способов и подходов к их решению. При этом численные методы, основывающиеся на фиксации большинства параметров, не во всех ситуациях могут определять влияние различных системных характеристик на решение задачи. Во многих ситуациях при этом для проверки их результатов требуется разработка сразу нескольких схем. Это обуславливает необходимость разработки универсальных методов решения задач с подвижными границами, применимых к определенным группам процессов - к стационарным автомоделным и нестационарным, фронтальным и при наличии области фазового перехода, осложненных неустойчивостями, гидродинамикой и конвекцией. Разработке таких методов решения при наличии области фазового перехода в тепломассообменных процессах затвердевания и испарения веществ с движущимися межфазными границами посвящена настоящая диссертационная работа. Кроме этого, в диссертации рассмотрен ряд задач, описывающих природные и технологические процессы, решение ко-

торых само по себе имеет важное практическое значение. Так, например в работе разработаны аналитические методы решения квазистационарных задач о затвердевании бинарных расплавов с нелинейной фазовой диаграммой, о кристаллизации трехкомпонентных систем, проведен анализ устойчивости локально плоской межфазной границы земного ядра и определена возможная структура ее области фазового перехода, разработаны методы решения автомодельных и нестационарных задач при наличии одной или нескольких двухфазных зон, впервые исследована конвективная неустойчивость области фазового перехода, изучена динамика роста дендритных структур в такой зоне и разработаны методы решения задач об испарении летучих соединений, когда фазовый переход протекает в области жидкость - твердое тело.

Цель работы. Аналитическое описание нелинейного тепломассопереноса в процессах кристаллизации и испарения при наличии движущейся области фазового перехода.

В рамках поставленной цели исследовались:

- Процессы затвердевания бинарных и трехкомпонентных расплавов с постоянной скоростью при наличии области фазового перехода. Здесь цель состояла в обобщении ранее известной теории кристаллизации бинарных систем на случай нелинейной фазовой диаграммы и в разработке новой теории (и аналитических методов решения), описывающей затвердевание трехкомпонентных расплавов.

- Процессы затвердевания бинарных расплавов с постоянной скоростью в условиях кристаллизации земного ядра. Здесь первоначальной целью являлась задача об определении ответа на вопрос: является ли межфазная граница ядра переохлажденной? Положительный ответ на него поставил следующую задачу - изучение условий нарушения морфологической устойчивости локально плоской границы твердая фаза - расплав и определение областей изменения параметров системы, где процесс морфологически неустойчив. Решение этих задач привело к вопросу о построении теории двухфазной зоны, описывающей условия затвердевания земного ядра. Развитые в работе методы и модели также применимы для описания конвективной кристаллизации в геофизических процессах замерзания воды и в металлургических процессах затвердевания сплавов.

- Процессы нестационарного затвердевания бинарных систем при наличии одной или нескольких областей фазового перехода. Сначала была разработана аналитическая теория, моделирующая соответствующий автомодельный процесс. Затем, теория двухфазной зоны была обобщена на случай кристаллизации льда при развитии в системе ложного дна, также представляющего собой протяженную область фазового перехода. Успешное решение этого во-

проса позволило поставить задачу о взаимодействии фазовых переходов и вызванном им структурообразовании льда.

- Процессы конвективной неустойчивости области фазового перехода, вызванные течением жидкости в океане и в двухфазной зоне. Для решения этой задачи был проведен линейный анализ конвективной морфологической неустойчивости и получен новый критерий устойчивой кристаллизации при наличии ламинарных и турбулентных течений жидкости в подледовом пространстве, который определяет условия возникновения каналов в области фазового перехода.

- Процессы дендритного роста в двухфазной зоне бинарных расплавов при наличии конвекции. Для определения отборного соотношения скорости роста дендритов был поставлен и решен целый ряд задач: были найдены квазистационарные решения в параболической системе координат, был проведен линейный анализ устойчивости относительно этих решений, было определено дисперсионное соотношение и выведен критерий микроскопической разрешимости, определяющий искомое отборное соотношение. Затем была решена задача о модификации теории на трехмерный случай параболоида вращения и проведено исследование о рамках применимости теории.

- Процессы изотермического и неизотермического испарения в газовую фазу в двухфазной системе жидкость - твердый материал. Сначала была поставлена и успешно решена задача об обобщении ранее известной асимптотической теории изотермического испарения на более широкий класс процессов. Успешное решение этой задачи, заключающееся в разработке ряда методов определения аналитических решений нелинейных моделей, позволило изучить нестационарные неизотермические процессы.

Научная новизна представленных материалов заключается в систематическом исследовании различных аспектов затвердевания и испарения вещества при наличии области фазового перехода и ряда нелинейных нестационарных явлений и процессов. В работе получены следующие новые результаты:

- Развита аналитическая модель решения термодиффузионной модели Стефана, описывающей квазистационарный процесс кристаллизации бинарных расплавов и растворов с областью фазового перехода при учете нелинейной фазовой диаграммы. Впервые определено явное решение нелинейной задачи при нулевом значении коэффициента распределения примеси и получена одноточечная задача Коши для концентрации примеси в случае произвольных значений этого коэффициента. Показано, что нелинейность фазовой диаграммы системы, приводящая к уменьшению температуры фазового перехода по сравнению с линейным случаем, ответственна за более интенсивный рост твердой фазы и увеличение протяженности двухфазной зоны. Проде-

монстрировано сохранение скейлинговых свойств области фазового перехода при учете нелинейного уравнения Ликвидуса.

- Впервые разработаны математическая модель и метод ее решения для описания квазистационарного затвердевания трехкомпонентных систем с двумя областями фазового превращения - основной и котектической двухфазными зонами. Определено, что ширина котектической области меньше, чем ширина основной, а концентрация примеси второго (добавочного к бинарной системе) примесного компонента возрастает в зоне котектики, достигает максимума в основной зоне, а далее убывает в ней.

- Найдены новые аналитические решения сферически-симметричных уравнений тепломассопереноса, описывающие фронтальную кристаллизацию земного ядра. Определено, что скорость роста ядра возрастает с увеличением неадиабатического теплового потока на границе жидкого ядра с мантией. Показано, что у границы ядра всегда существует концентрационное переохлаждение, а она сама морфологически неустойчива при учете натекания на нее конвектирующего расплава. Впервые проведен линейный анализ морфологической неустойчивости локально плоской межфазной границы земного ядра с учетом конвекции, позволивший определить новые дисперсионное соотношение и кривую нейтральной устойчивости. Развита и аналитически исследована математическая модель, описывающая квазистационарное затвердевание в условиях ядра Земли. Анализ решений позволил определить ряд параметров и свойств области фазового перехода.

- Найдено точное аналитическое решение нелинейной модели типа Стефана, описывающей автомодельное затвердевание бинарных расплавов с двухфазной зоной для установившихся стадий процесса. Определены явные зависимости концентрации примеси, температуры и доли твердой фазы от пространственно-временной автомодельной переменной. Продемонстрировано, что доля твердой фазы в области фазового перехода убывает с ростом автомодельной координаты.

- Впервые разработана математическая модель кристаллизации морской воды с областью фазового перехода при учете процесса эволюции ложного дна, также представляющего собой двухфазную зону. Модель учитывает возможность турбулизации жидкости в океане и нестационарность атмосферной температуры на поверхности льда. Определены аналитические решения этой нелинейной нестационарной модели - найдены распределения температуры и концентрации примеси, доли твердой фазы, координаты и скорости движения четырех границ фазовых превращений. Показано, что два встречных фазовых перехода до момента слияния их границ не взаимодействуют, а понижение температуры атмосферы приводит к ускорению движения межфазных

границ и более быстрому смерзанию ледяных пластов.

- Путем сравнения данных полевых наблюдений и развиваемой теории впервые показано, что эволюция ложного дна связана с появлением столбчатогранулированной структуры морского льда, в то время как замерзание льда сверху порождает его столбчатую структуру. Таким образом, структурные переходы во льду проинтерпретированы как результат взаимодействия встречных фазовых переходов. Показано, что тепловой поток, связанный с ростом ложного дна, оказывает существенное влияние на теплообмен между океаном и атмосферой.

- Впервые развита термодиффузионная математическая модель для исследования конвективной морфологической неустойчивости области фазового перехода при наличии ламинарных и турбулентных течений жидкости в океане. Выполнен анализ этой модели и найдены новые критерии морфологической устойчивости и кривая нейтральной устойчивости, определяющие условия возникновения каналов конвектирующей жидкости в анизотропной и неоднородной области фазового перехода. Показано, что область неустойчивости процесса увеличивается при турбулизации жидкости в океане около межфазной границы по сравнению с ламинарной моделью.

- Впервые определены точные аналитические решения термодиффузионной задачи о росте параболического дендрита в набегающем потоке жидкости. Выполнен анализ морфологической устойчивости найденных решений и определено дисперсионное соотношение. Выведено условие микроскопической разрешимости для рассматриваемого процесса из которого определено новое отборное соотношение для скорости роста дендрита. Развита теория обобщает ранее известные модели дендритного роста. Выполнено обобщение на трехмерный случай и определены пределы применимости теории в зависимости от чисел Пекле и Рейнольдса.

- Впервые найдено точное аналитическое решение задачи об изотермическом испарении летучего компонента в газовую фазу в двухфазной системе жидкость - твердое тело. Определен поток испаряющегося вещества и показано, что граница растворения движется быстрее границы испарения. Теория обобщена на случай зависимости приведенного коэффициента испарения от граничной концентрации примеси и на случаи сферической и цилиндрической симметрий рабочего тела парового генератора. Впервые разработана математическая модель и построено ее точное аналитическое решение для процесса неизотермического испарения в системе газ - жидкость - твердое тело. Показано, что с возрастанием температуры фазового перехода на границе растворения и с увеличением первоначальной толщины пленки жидкости уменьшается поток испаряющегося вещества. Также определено, что при

уменьшении приведенного коэффициента испарения поток испарения стабилизируется около своего первоначального значения.

Результаты проведенных исследований в совокупности позволяют сформулировать новое научное направление теплофизики и теоретической теплотехники - теорию нелинейного тепломассопереноса в процессах затвердевания и испарения с двухфазной областью.

Достоверность полученных результатов обеспечивается следующими положениями:

- обоснованностью физических представлений и моделей сплошных сред теорий кристаллизации и испарения в больших объемах, используемых для исследований процессов тепло- и массопереноса;
- соответствием полученных выводов экспериментальным данным или результатам численных расчетов;
- математической строгостью методов решения и согласованностью результатов, полученных различными способами.

Практическое значение. Найденные в диссертации результаты о влиянии теплофизических параметров на режимы затвердевания и испарения являются полезными для получения материалов с заданными свойствами и важными для прогнозирования процессов динамики исследуемых систем.

Апробация работы. Основные результаты диссертации докладывались и обсуждались на представительных научных конференциях:

13-я международная конференция по теплопереносу (Сидней, Австралия, 2006), 7-й молодежный семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (Екатеринбург, 2006), 13-я международная конференция по жидким и аморфным металлам (Екатеринбург, 2007), 14-я всероссийская научная конференции студентов-физиков и молодых ученых (Уфа, 2008), 10-я ежегодная конференция сербского общества исследования материалов, YUCOMAT (Херцег-Нови, 2008), 12-я российская конференции "Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов" (Екатеринбург, 2008), Юбилейная 10-я всероссийская молодежная школа-семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества (Екатеринбург, 2009), Всероссийские школы-конференции "Математическое моделирование в естественных науках" (Пермь, 2010; 2012), 21-й международный симпозиум по явлениям переноса (Тайвань, 2010), 8-я международная конференция по теплопереносу, механике жидкости и термодинамике (Маврикий, 2011), 13-я российской конференции "Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов" (Екатеринбург, 2011), а также на семинарах в Институте Metallургии УрО

РАН и на кафедре математической физики Уральского федерального университета.

Публикации. По теме диссертации опубликовано 19 научных статей из перечня ведущих периодических изданий ВАК, 9 научных статей в изданиях, не вошедших в этот перечень, 9 тезисов конференций. Список публикаций приведен в конце автореферата.

Структура и объем работы. Текст диссертации состоит из введения, семи глав основного содержания, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 304 страницы машинописного текста, она содержит 69 рисунков, 6 таблиц и 243 ссылки на источники цитируемой литературы.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении кратко обоснована актуальность работы, указаны ее цели, научная новизна, практическое значение и апробация проведенных исследований.

Глава 1. Динамика процессов затвердевания. Современное состояние

Первая глава работы носит обзорный характер и является ретроспективой наиболее значимых с точки зрения настоящего изложения результатов. Здесь рассматривается классическая термодиффузионная модель Стефана, описывающая затвердевание бинарных систем с плоским фронтом, обсуждается вопрос об устойчивости решений этой модели и появлении концентрационного переохлаждения. В главе также излагается классическая модель двухфазной зоны и приводятся ее решения в квазистационарном и нестационарном режимах процесса. Материал первой главы также отмечает место настоящей диссертационной работы в научном поле данной тематики и показывает, что ранее было сделано диссертантом и другими исследователями.

Глава 2. Тепломассоперенос при квазистационарном затвердевании с двухфазной зоной

Вторая глава является логическим продолжением и развитием материала первой главы. Так, классическая модель квазистационарной кристаллизации с областью фазового перехода и метод отыскания ее аналитических решений,

изложенные в первой главе, здесь модифицируются для изучения более широкого класса систем, в которых необходимо учитывать нелинейность фазовой диаграммы. При этом решение задачи строится в явном аналитическом виде для водных растворов (системы с нулевым коэффициентом распределения примеси) и сводится к стандартной одноточечной задаче Коши для других расплавов. В главе анализируется влияние нелинейности уравнения ликвидус на характеристики изучаемого процесса и делается вывод о сохранении областью фазового перехода своих скейлинговых свойств. Естественным развитием теории первой главы является исследование затвердевания трехкомпонентных систем при наличии двухфазной зоны (двух областей фазового перехода - основной и котектической). В этой части работы развивается математическая модель процесса и определяются ее аналитические решения, анализ которых обнаруживает характерное для процесса поведение доли твердой фазы и концентраций примеси. Впервые показана возможность существования квазистационарного решения для льдоподобных систем.

Математическая модель процесса кристаллизации с областью двухфазного состояния вещества была разработана несколько десятилетий назад в работах [1–3]. Приведем основные уравнения этой модели, описывающие процесс затвердевания вдоль пространственной оси z

$$\frac{\partial}{\partial t} [(1 - \varphi)C_m] = \nabla (D_m(\varphi)\nabla C_m) - kC_m \frac{\partial \varphi}{\partial t}, \quad (1)$$

$$\rho_m c_m(\varphi) \frac{\partial T_m}{\partial t} = \nabla (k_m(\varphi)\nabla T_m) + L_V \frac{\partial \varphi}{\partial t} = 0, \quad T_m = T_m(C_m), \quad (2)$$

где T_m , C_m и φ - температура, концентрация примеси и доля твердой фазы в двухфазной зоне, L_V - скрытая теплота фазового перехода, t - время, k - равновесный коэффициент распределения примеси, D_m , ρ_m , c_m и k_m - коэффициент диффузии примеси, плотность, теплоемкость и коэффициент теплопроводности в области двухфазного состояния вещества, зависящие от доли твердой фазы φ . В случае вытянутых (дендритных) структур в двухфазной зоне коэффициенты переноса можно выразить через коэффициенты переноса по твердой и жидкой фазам [4]

$$D_m = D_l(1 - \varphi), \quad \rho_m c_m(\varphi) = \rho_s c_s \varphi + \rho_l c_l(1 - \varphi), \quad k_m(\varphi) = k_s \varphi + k_l(1 - \varphi).$$

Здесь ρ_s , c_s и ρ_l , c_l - плотность, теплоемкость в твердой и жидкой фазах, k_s и k_l - коэффициенты теплопроводности в этих фазах, а D_l - коэффициент диффузии примеси в расплаве (диффузией в твердой фазе традиционно пренебрегается).

К уравнениям (1) и (2) добавляются условия непрерывности, а также баланса тепла и массы на межфазных границах двухфазной зоны

$$L_V [\varphi] V_n = [k_m \mathbf{n} \cdot \nabla T_m], (C_m - C_s) [\varphi] V_n = [D_m \mathbf{n} \cdot \nabla C_m], [T_m] = 0, \quad (3)$$

где $[\cdot]$ обозначает скачок величины на межфазной границе, V_n - нормальная скорость границы фазового перехода твердое вещество - двухфазная область или двухфазная область - жидкость, \mathbf{n} - вектор нормали к межфазной границе, C_s - концентрация примеси в твердой фазе. Граничные условия (3) дополняются непрерывностью концентрации примеси на границе зона - жидкость и условием $C_s = kC_m$ на границе зона - твердая фаза. К системе уравнений и граничных условий (1)-(3) добавляются уравнения тепломассопереноса в чисто твердой и жидкой фазах, а также условия вдали от области фазового перехода.

В первой части второй главы исследован квазистационарный процесс направленной кристаллизации с нелинейной фазовой диаграммой процесса. Для системы уравнений (1)-(3) развит метод аналитического интегрирования, основанный на оценке ее слагаемых и переходе к новой независимой переменной - доле твердой фазы φ в системе отсчета двухфазной зоны, движущейся с постоянной скоростью u_s . В работе показано, что скорость процесса затвердевания и зависимость концентрации примеси от доли твердой фазы определяются как

$$u_s = \frac{k_s G_s - k_l G_l}{L_V}, \frac{d}{d\varphi} \left((1 - \varphi) C_m + \frac{h_*(\varphi)}{g(C_m)} \right) + k C_m = 0, \quad (4)$$

где G_l и G_s - фиксированные температурные градиенты в жидкой и твердой фазах системы, $h_*(\varphi)$ и $g(C_m)$ - известные функции своих аргументов. Второе выражение формулы (4) определяет неявную зависимость концентрации примеси в двухфазной области от доли твердой фазы в общем виде.

В работе было найдено аналитическое решение рассматриваемой задачи при малых коэффициентах распределения примеси ($k \approx 0$). При произвольных k нелинейная задача сведена к стандартной одноточечной задаче Коши, определяющей зависимость $C_m(\varphi)$. Для определенности аналитического решения рассматривалось уравнение ликвидус $T_m = T_* - mC_m + nC_m^2$ (T_* - температура фазового перехода чистого вещества, m и n - коэффициенты). Так, например, общий вид неявных зависимостей концентрационного распределения и протяженности δ двухфазной зоны определяется следующими выражениями:

$$z_1(\varphi) = \int_{\varphi_*}^{\varphi} \frac{dC_m/d\varphi}{dC_m/dz_1} d\varphi, \quad \delta = \frac{D_l}{u_s} \int_{\varphi_*}^0 \frac{dC_m/d\varphi}{dC_m/dz_1} d\varphi,$$

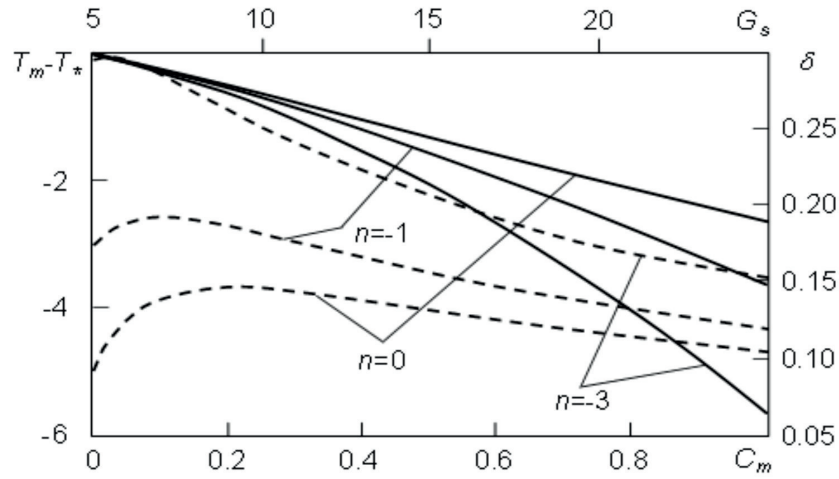


Рисунок 1 - Зависимости температуры фазового перехода $T_m - T_*$ ($^{\circ}\text{C}$) от концентрации примеси C_m (сплошные линии) и протяженности двухфазной зоны δ (см) от температурного градиента в твердой фазе G_s ($^{\circ}\text{C}/\text{см}$) (штриховые линии) при различных значениях коэффициента n для железо-никелевого расплава.

где $z_1 = u_s(z - u_s t)/D_l$ - безразмерная пространственная координата процесса затвердевания (z - размерная координата), φ_* - доля твердой фазы на границе двухфазная область - твердое вещество. Эта величина и подинтегральные функции определены в диссертации.

Точные аналитические решения нелинейной задачи показаны на рисунке 1. Из приведенных зависимостей видно сильное влияние нелинейности фазовой диаграммы на протяженность области фазового перехода.

Вторая часть данной главы посвящена развитию теории с целью описания квазистационарного затвердевания трехкомпонентных систем. При этом третий компонент может моделировать примесные вклады к бинарной системе. Математическая модель такого процесса, впервые выведенная в статье [5], основана на уравнениях тепломассопереноса в двух областях фазового перехода: в одной зоне затвердевает основное вещество, а в другой кристаллизуются два компонента - основное вещество с примесью. Так, например, температура фазового перехода в основной зоне имеет вид $T_* + m_B B + m_C C$, где B и C - концентрации растворенных примесей, а m_B и m_C - соответствующие наклоны ликвидуса.

Существенное усложнение процесса, связанное с наличием трех подвижных границ фазового перехода и увеличением числа нелинейных уравнений переноса и граничных условий к ним, потребовало разработки новых подходов для построения аналитических решений такой модели. Математическая модель процесса и разработанные методы построения ее аналитических решений подробно обсуждаются в диссертации. Одним из основных результа-

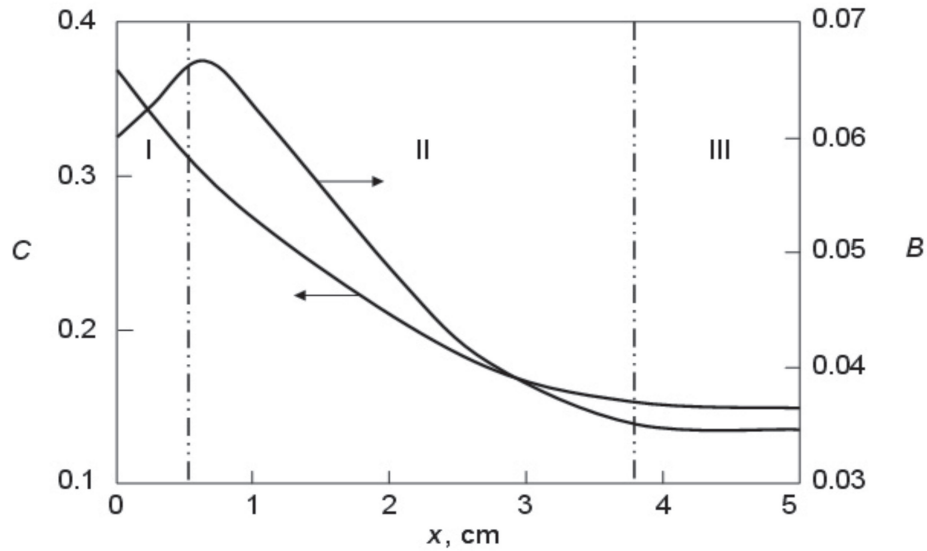


Рисунок 2 - Концентрации примесей B и C в зависимости от пространственной координаты $x = z - u_s t$ для трехкомпонентной системы $H_2O - KNO_3 - NaNO_3$. Котектическая зона, основная зона и жидкая фаза соответственно расположены в регионах I, II и III.

тов развитой теории явилось то обстоятельство, что скорость процесса по-прежнему описывается первым выражением (4) и, как было показано в работе, не зависит от числа примесных компонент.

На рисунке 2 на основе аналитического решения показаны распределения концентраций примеси во всей области фазового перехода. Основным примесным компонент, имеющий концентрацию $C(x)$, монотонно убывает в регионах I и II вследствие вытеснения примеси растущей твердой фазой системы. В отличие от этой зависимости, имеющей традиционное поведение, концентрация примеси второго компонента $B(x)$ возрастает в зоне котектики, пересекает границу между регионами I и II, достигает максимума в основной зоне, а затем убывает в ней и в жидкой фазе, стремясь к исходной концентрации в жидкости. Такое поведение концентрации примеси $B(x)$ объясняется тем, что компонент B претерпевает фазовый переход в регионе I.

Рассмотренная во второй главе теория описывает, например, вытягивание кристалла из расплава с постоянной скоростью кристаллизации по методу Чохральского. Также она применима к процессам медленного затвердевания расплава на границе внутреннего (твердого) ядра Земли. Кроме этого, найденные в настоящей работе аналитические решения позволяют исследовать динамическую устойчивость затвердевания трехкомпонентных систем (которая ответственна за слоистую ликвацию примеси) по аналогии с теорией устойчивости, развитой ранее для бинарных расплавов.

Третья глава диссертации посвящена модификации теории первой и второй глав для описания условий затвердевания ядра Земли. Здесь сначала определяются точные аналитические решения сферически-симметричных уравнений тепломассопереноса во фронтальном приближении. Анализ полученных решений показывает, что около межфазной границы ядра возникает концентрационное переохлаждение, являющееся причиной ее морфологической неустойчивости. Далее проводится линейный анализ морфологической неустойчивости при наличии конвективных течений расплава и выводится новый критерий устойчивости твердого ядра Земли, зависящий от скорости растяжения. Поскольку такая неустойчивость приводит к развитию области фазового перехода, далее в главе строится теория двухфазной зоны и разрабатываются аналитические методы решения ее уравнений. Найденное решение затем позволяет получить ряд оценок параметров области фазового перехода.

В главе в качестве исходного состояния (нулевого приближения) рассматривается хорошо перемешанное адиабатическое RS-состояние земного ядра, решения модели которого известны. Для учета отклонений от этого состояния методами теории возмущений строится первое приближение, для которого выводятся уравнения тепломассопереноса и определяются аналитические решения в сферически-симметричном случае (r - радиальная координата). Так, например, концентрация примеси в расплаве земного ядра имеет вид

$$C_r = C_{\text{СМВ}} + \frac{A_1}{3D_l} \left(\frac{r^2}{2} + \frac{r_{\text{СМВ}}^3}{r} - \frac{3r_{\text{СМВ}}^2}{2} \right),$$

где A_1 - определенная в работе постоянная, а индекс СМВ соответствует границе жидкого ядра и мантии. Радиально-симметричная зависимость энтропии имеет более сложный вид. С помощью этих распределений в диссертации находится явное выражение для скорости роста земного ядра, проиллюстрированное на рисунке 3. Указанная теория в третьей главе развивается, как для случая неподвижного расплава, так и для случая его конвективного течения на ядро.

Далее показано, что из полученных аналитических решений следует, что около границы твердого и жидкого ядра Земли выполняется условие концентрационного переохлаждения. В связи с этим возникает вопрос о морфологической устойчивости его межфазной границы, движущейся с постоянной скоростью u_s , с учетом зависимости процесса кристаллизации от давления и конвективных течений расплава. Основными уравнениями, отличающими данную теорию от классического анализа устойчивости Маллинза и Секерки являются уравнения конвективного тепломассопереноса в жидкой фазе (при

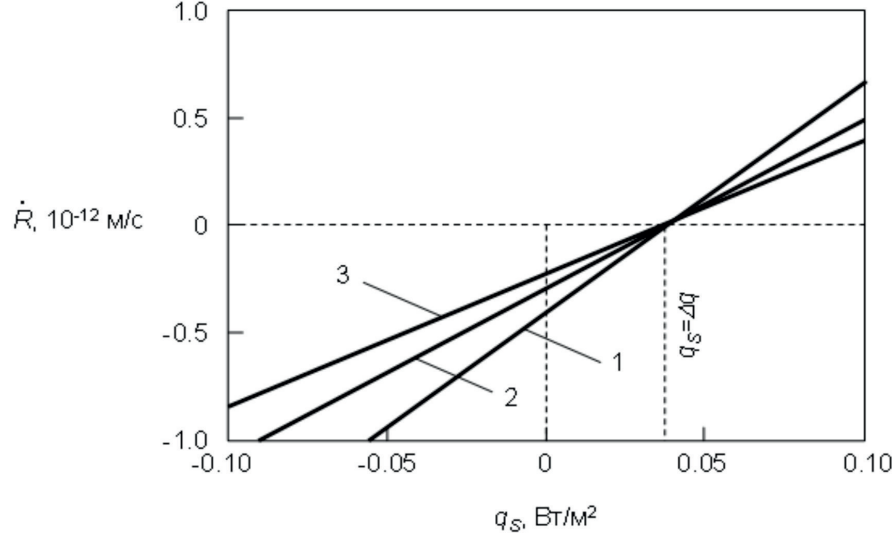


Рисунок 3 - Зависимость скорости роста ядра Земли \dot{R} от величины удельного теплового потока q_s на границе с мантией при различных значениях скачка концентрации примеси на границе твердого и жидкого ядра $\Delta C = 0.03$ (1), 0.065 (2), 0.1 (3).

$z > 0$) и зависимость фазовой диаграммы от давления (при $z = 0$):

$$\frac{\partial T_l}{\partial t} - u_s \frac{\partial T_l}{\partial z} + \mathbf{V} \cdot \nabla T_l = \kappa_l \nabla^2 T_l, \quad z > 0, \quad (5)$$

$$\frac{\partial C_l}{\partial t} - u_s \frac{\partial C_l}{\partial z} + \mathbf{V} \cdot \nabla C_l = D_l \nabla^2 C_l, \quad z > 0, \quad (6)$$

$$T_l = T_s = T_* + \Gamma H + m_P G_P h' + m_C C_l, \quad z = 0, \quad (7)$$

где T_l и κ_l - температура и коэффициент температуропроводности в расплаве, \mathbf{V} - скорость расплава, T_s - температура в твердой фазе, Γ - коэффициент Гиббса, $H \approx \nabla^2 h'$ (h' - морфологические возмущения локально-плоской межфазной поверхности), G_P - градиент давления, m_P и m_C - наклоны ликвидуса.

Система уравнений (5)-(7) дополняется классическим уравнением теплопроводности в твердой фазе и граничными условиями на межфазных поверхностях. Проведенный в диссертации анализ морфологической устойчивости позволил определить дисперсионное соотношение, являющееся обобщением критерия Маллинза-Секерки [6] и ранее известных приближенных теорий [7, 8] в виде

$$\omega = (\alpha_C m_C G_C - \alpha_l G_l - \alpha_s G_s + m_P G_P - \Gamma k_h^2) \times \left(\frac{L_V}{k_s \beta_s - k_l \beta_l} - \frac{m_C G_C D_l / u_s^2}{\beta_0 D_l / u_s + 1 - k} \right)^{-1}. \quad (8)$$

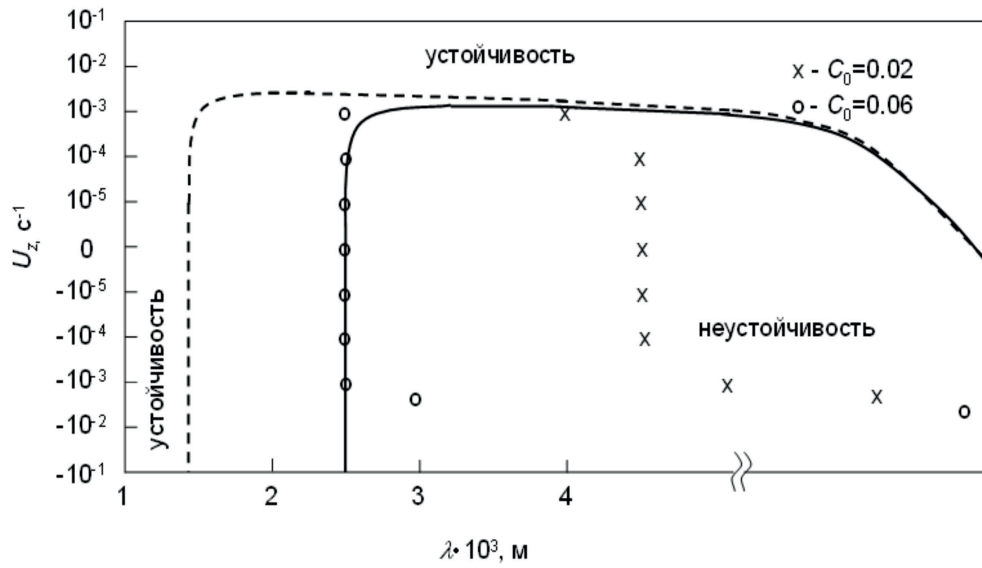


Рисунок 4 - Кривые нейтральной устойчивости для различных допустимых значений концентраций примеси C_0 на фронте кристаллизации земного ядра: ($C_0 = 0.02$ - сплошные линии, $C_0 = 0.06$ - штриховые линии). Символы соответствуют длинам волн возмущений с максимальными частотами. Критерий концентрационного переохлаждения выполняется в областях устойчивости ($\omega < 0$) и неустойчивости ($\omega > 0$).

Здесь G_C , G_l и G_s - градиенты концентрации примеси, температуры в расплаве и твердой фазе на фронте кристаллизации, α_C , α_l , α_s , β_l , β_s и β_0 - определенные в диссертации параметры, зависящие от частоты возмущений ω , волнового числа k_h и скорости растяжения $U_z = -(\partial V_z / \partial z)_{z=0}$, а также других характеристик системы.

На рисунке 4 изображены кривые нейтральной устойчивости ($\omega = 0$) на основе обобщенного критерия (8) при допустимых (оцененных в работе) значениях скорости растяжения $-10^{-1} < U_z < 10^{-1} \text{ с}^{-1}$. Реализация устойчивого или неустойчивого сценария затвердевания зависит от соответствующего значения скорости растяжения U_z . Видно, что процесс устойчив в регионах опускающегося расплава ($V_z < 0$, $U_z > 0$). В регионах поднимающегося расплава ($V_z > 0$, $U_z < 0$) процесс неустойчив к морфологическим возмущениям (также еще существует регион неустойчивости при $U_z > 0$). Полученный результат находится в соответствии с оценками работы [9], где подобные выводы были сделаны на основе анализа действия композиционных сил.

Далее в диссертации проводится анализ кривой нейтральной устойчивости для затвердевания в условиях земной поверхности и развиваются соответствующие этому случаю модели двухфазной зоны при учете натекания расплава: одна модель соответствует сценарию "концентрационное переохлаждение и морфологическая устойчивость", другая - сценарию "концентрационное

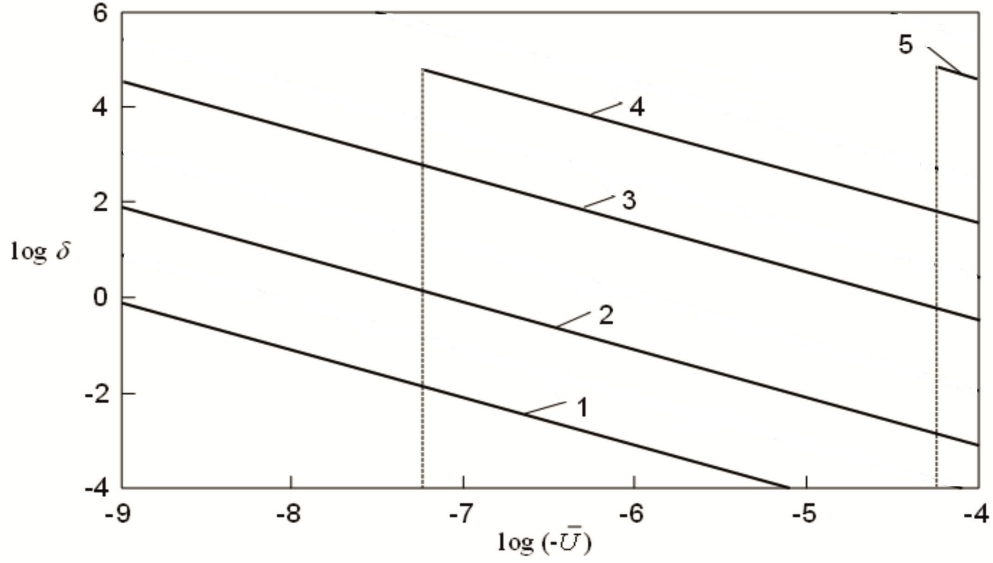


Рисунок 5 - Протяженность двухфазной области ядра Земли δ (м) в зависимости от средней скорости жидкости \bar{U} (м/с) при $\mu = 10^{19}$ Па с (1), $\mu = 10^{17}$ Па с (2), $\mu = 10^{15}$ Па с (3), $\mu = 10^{13}$ Па с (4) и $\mu = 10^{10}$ Па с (5). Вертикальные линии показывают критические значения средней скорости жидкости.

переохлаждение и морфологическая неустойчивость”. В диссертации определяются аналитические решения обеих моделей.

Затем в работе строится модель двухфазной области ядра Земли, главной особенностью которой является учет давления в соответствии с уравнением Дарси

$$(1 - \varphi)\mathbf{V} = \frac{\Pi(\varphi)}{\mu} ((\rho_l - \rho_\infty)\mathbf{g} - \nabla p),$$

где $\Pi(\varphi)$ - проницаемость двухфазной зоны, μ - коэффициент динамической вязкости, $\rho_l(C_m)$ - плотность расплава в двухфазной зоне, ρ_∞ - плотность расплава на границе двухфазная область - жидкая фаза, p - давление, \mathbf{g} - ускорение силы тяжести. Для решения такой нелинейной задачи был развит метод второй главы, позволивший получить аналитические решения в явном виде. Так, например, протяженность двухфазной зоны и распределение в ней доли твердой фазы имеют вид

$$\delta = \int_{\varphi_*}^0 \frac{d\varphi}{\psi(\varphi)}, \quad z(\varphi) = \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\psi(\varphi)},$$

где функция $\psi(\varphi)$ определяется из решения одноточечной задачи Коши.

На рисунке 5 показана протяженность двухфазной зоны земного ядра при различных значениях вязкости расплава. Принимая во внимание характерные значения средней скорости $|\bar{U}| \sim 10^{-8} - 10^{-6}$ м с⁻¹ и других параметров

ядра Земли, получаем $\mu \sim 10^{14} - 10^{16}$ Па с. Далее в работе было оценено характерное междендритное расстояние земного ядра, составившее при различных допустимых значениях физических параметров системы $\sim 10^2 - 10^3$ м, характерный размер каналов области фазового перехода и характерное расстояние между ними.

Глава 4. Тепломассоперенос при нестационарном затвердевании с двухфазной зоной

Четвертая глава диссертационной работы развивает теорию двухфазной зоны для описания нестационарных процессов кристаллизации. Сначала в качестве простейшего режима такого процесса исследуется автомодельное затвердевание, которое характеризуется зависимостью параметров системы от единой пространственно-временной переменной. Поскольку экспериментально такой процесс реализуется на поздних стадиях процесса, в работе упрощается исходная модель и определяются ее точные аналитические решения. Далее в главе развивается модель существенно нестационарной кристаллизации с двухфазной зоной с целью описания реальных процессов замерзания морского льда. Модель первой главы затем усложняется для описания процессов эволюции ложного дна, образующегося в весенне-летний период времени при фильтрации пресной воды через двухфазную зону основного льда. В результате, для описания второго дна, также представляющего собой протяженную область фазового перехода, в диссертации развивается модель с двумя встречными процессами замерзания льда сверху и снизу, каждый из которых представляет собой соответствующую двухфазную зону. В главе строятся аналитические решения такой нелинейной тепломассообменной задачи при различных допустимых реализациях замерзания. Показано, что взаимодействия фазовых переходов до их слияния не происходит, вследствие наличия между ними слоя пресной воды, а их нелинейная динамика ответственна за появление различных структур льда. Также определено, что тепловой поток, связанный с развитием ложного дна, оказывает существенное влияние на теплообмен между океаном и атмосферой.

Первая часть главы посвящена моделированию автомодельной кристаллизации бинарных расплавов, характеризуемой зависимостью решения задачи от единственной пространственно-временной автомодельной переменной $\eta = z/\sqrt{4D_t t}$, когда граница твердая фаза - двухфазная зона $h(t)$ и двухфазная зона - расплав $c(t)$ определяются через константы параболического роста λ_a и λ_b (они находятся из решения задачи) в виде $h(t) = \lambda_a \sqrt{4D_t t}$ и $c(t) = \lambda_b \sqrt{4D_t t}$. Поскольку такое решение описывает поздние стадии процес-

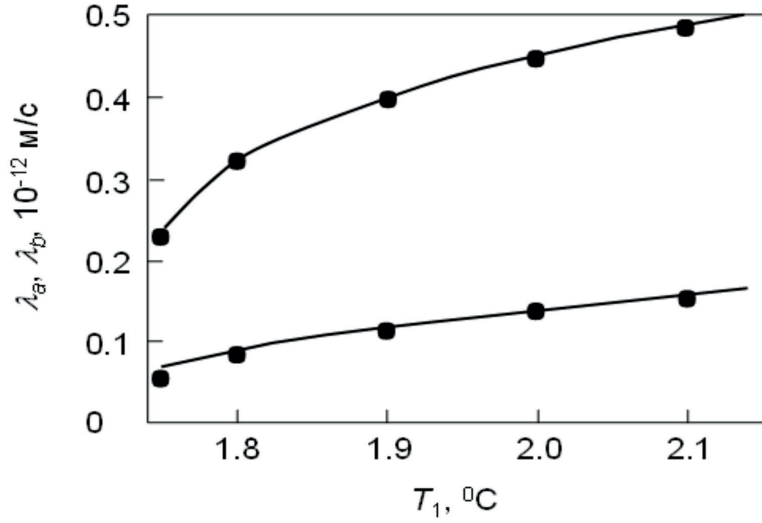


Рисунок 6 - Зависимость безразмерных скоростей от управляющего параметра $T_1 = -mC_\infty - T_B$ (C_∞ - концентрация примеси в расплаве вдали от двухфазной зоны, T_B - температура границы охлаждения $z = 0$) для раствора NaNO_3 в воде. Точками отмечены результаты эксперимента и численного решения работ [10, 11].

са, в диссертации рассматривается установившийся режим кристаллизации, когда доля твердой фазы в двухфазной зоне практически не меняется во времени. После перехода в уравнениях и граничных условиях к переменной η в таком случае удастся определить точные аналитические решения нелинейных уравнений для концентрационного и температурного полей, а также доли твердой фазы в области фазового перехода. Эти решения имеют вид

$$\varphi(\eta) = 1 - \frac{\exp(\eta^2)}{C_4 \exp(\eta^2) + C_2}, \quad (9)$$

$$C_m(\eta) = C_1 \left(C_3 + \frac{1}{4} \sqrt{\pi} \left[2C_4 \text{erf}(\eta) + \sqrt{2} C_2 \text{erf}(\sqrt{2}\eta) \right] \right),$$

где C_1 , C_2 , C_3 и C_4 - определенные в работе постоянные, а поле температуры находится из уравнения ликвидус и выражения (9). На рисунке 6 показано сравнение данных развиваемой теории с результатами других работ.

Вторая часть главы посвящена изучению существенно нестационарных условий замерзания бинарных систем с областью фазового перехода при учете процессов эволюции ложного дна, также представляющего собой двухфазную зону. В природе ложное дно формируется в весенне-летний период времени при проникновении талой воды под толщу льда, где формируется второй слой льда, кристаллизующийся по направлению к атмосфере. В работе развита математическая модель, описывающая эволюцию двух областей фазового превращения: одна движется сверху от холодной атмосферы по направлению к океану, вторая (двухфазная зона ложного дна) - снизу от океа-

на к атмосфере. Основной отличительной особенностью процесса замерзания второго дна являются граничные условия на поверхности ложное дно - океан (при $z = b(t)$), учитывающие течения жидкости в подледовом пространстве (так называемые турбулентные граничные условия). Так, например, граничное условие теплового баланса имеет вид

$$L_V \psi_b \frac{db}{dt} = k_m(\psi_b) \frac{\partial T_m}{\partial z} + \alpha_h \rho_l c_l u (T_\infty - T_b), \quad z = b(t), \quad (10)$$

где ψ_b - доля твердой фазы на границе b , α_h - коэффициент турбулентного переноса тепла, u - скорость трения, а T_∞ - температура в жидкости вдали от области фазового перехода.

В диссертации разработан аналитический метод решения указанной нелинейной задачи с четырьмя движущимися границами фазового перехода: $h(t)$ - лед - двухфазная зона, $c(t)$ - двухфазная зона - талая вода, $a(t)$ - талая вода - ложное дно и $b(t)$ - ложное дно - океан. Определены температурное и концентрационное поля в системе, доли твердой фазы в обеих областях фазового перехода, законы и скорости движения их границ, а также тепловые потоки. Так, например, законы миграции межфазных границ определяются следующими соотношениями:

$$h(t) = -D_l A_l \int_0^t \frac{dc/dt}{T_c - A_l c(t) dc/dt} dt, \quad c(t) = -\sqrt{\frac{2\Phi}{L_V \varphi_c} \left(T_c t - \int_0^t T_a(\alpha_1) d\alpha_1 \right)},$$

$$a(t) = b(t) + P_1(T_{a(t)}, t), \quad b(t) = b(0) - \int_0^t \frac{\alpha_s u [T_b(T_{a(t)}) + m C_\infty]}{T_b(T_{a(t)}) \psi_b} dt,$$

где $T_a(t)$ - температура атмосферы, A_l , T_c , Φ , $T_{a(t)}$, P_1 , T_b и α_s - определенные в работе функции и параметры. На рисунке 7 показана динамика рассматриваемого процесса.

Расчеты показывают, что тепловой поток, связанный с эволюцией ложного дна, сопоставим по величине с другими вкладами в результирующий поток тепла. Так, например, колебания потока скрытого тепла, вызванного замерзанием морской воды в трещинах льда по данным работы [12], составляют от 0.0008 до 0.004 Вт/см² (измерения проводились между 22 июня и 10 июля 1982 г., т.е. как раз в период, характерный для формирования ложного дна). Это означает, что рост ложного дна может оказывать существенное влияние на теплообмен между океаном и атмосферой, что особенно проявляется в летний период, для которого характерны процессы образования и эволюции второго дна.

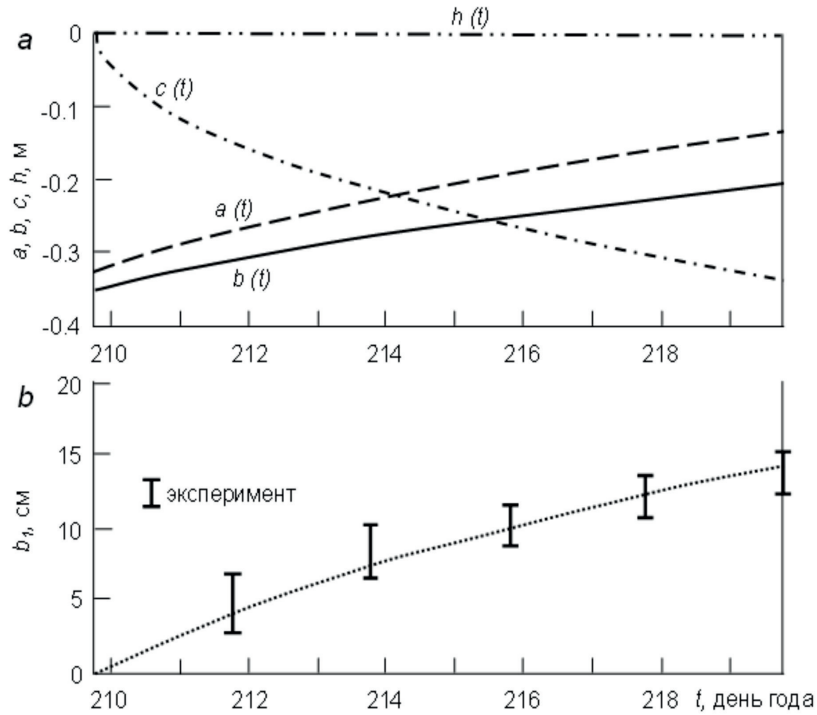


Рисунок 7 - Координаты межфазных границ (a) и координата $b_1(t) = b(t) - b(0)$ границы ложное дно - океан (b) в соответствии с развиваемой теорией и данными полевых наблюдений "AIDJEX" (1975 г.).

Глава 5. Конвективная неустойчивость двухфазной зоны

Пятая глава диссертации посвящена исследованию вопроса о нарушении устойчивой кристаллизации с двухфазной зоной вследствие наличия ламинарных и турбулентных течений жидкости в океане. Сначала в главе развивается математическая модель такого процесса, осложненная гидродинамическими течениями воды в пористом пространстве двухфазной зоны. Затем определяются аналитические решения этой модели и проводится линейный анализ устойчивости, когда течения жидкости в океане ламинарные. Из теории устойчивости определяются дисперсионное соотношение и кривая нейтральной устойчивости для анизотропной и неоднородной области фазового перехода. Показано, что конвективно-морфологическая неустойчивость процесса существенно изменяет область неустойчивости по сравнению с ранее известными критериями устойчивости при варьировании теплофизических параметров системы. Затем теория устойчивости развивается для турбулентных граничных условий и приводится оценка скорости роста шероховатости льда. Показано, что область устойчивости увеличивается при возрастании скорости трения и коэффициента турбулентного переноса тепла. Полученные критерии неустойчивости кристаллизации определяют условия возникновения в двухфазной области каналов конвектирующей жидкости.

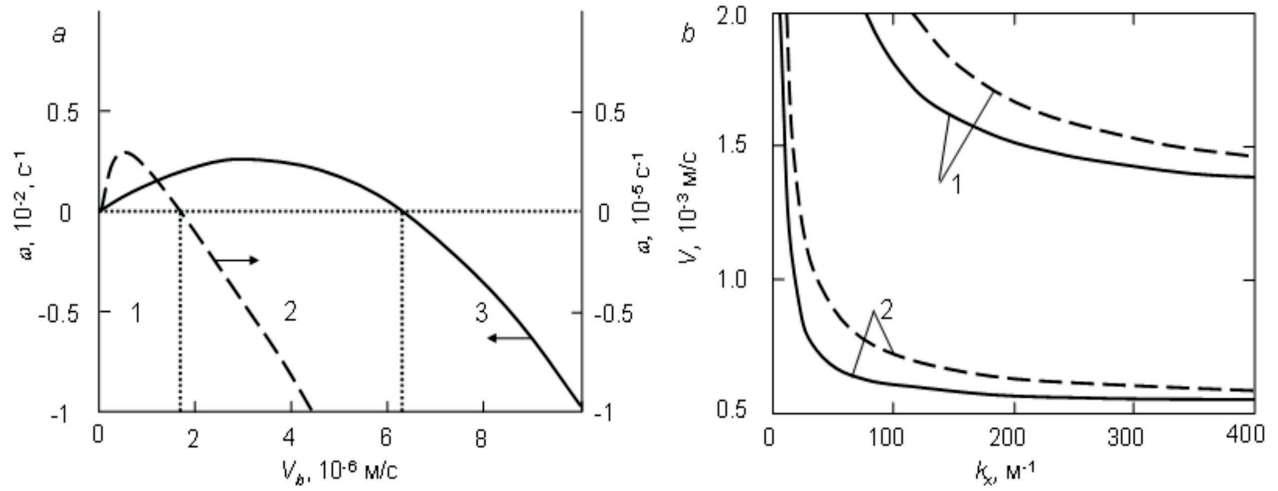


Рисунок 8 - *a*. Зависимость параметра неустойчивости от скорости кристаллизации для морской воды в соответствии с развиваемой теорией (сплошная линия). Штриховая линия - теория динамической неустойчивости работы [15]. Точки пересечения кривых с линией $\omega = 0$ показывают переход через кривую нейтральной устойчивости. Вертикальные линии разделяют три области: динамическая и конвективная неустойчивость (1), динамическая устойчивость и конвективная неустойчивость (2), динамическая и конвективная устойчивость (3). *b*. Кривые нейтральной устойчивости ($\omega = 0$) для морской воды при нетурбулентных (сплошные линии) и турбулентных (штриховые линии) условиях кристаллизации, (1) - $\beta_a = 0.1$, (2) - $\beta_a = 1$. Области неустойчивости и устойчивости соответственно лежат выше и ниже каждой кривой.

Экспериментальные данные по кристаллизации морской воды с двухфазной зоной (см., например, [13]) показывают, что при определенных условиях устойчивый режим процесса замерзания разрушается и в области фазового перехода образуются каналы циркулирующей жидкости. Это обуславливает необходимость исследования морфологической неустойчивости межфазной границы двухфазная область - жидкость при классических граничных условиях баланса тепла и массы, а также при условиях, учитывающих течения жидкости в океане. В качестве математической модели в главе используется нелинейная модель двухфазной зоны с конвективными слагаемыми, ответственными за течения жидкости по каналам (протокам) области фазового перехода, которые учитываются с помощью уравнения Дарси. Проницаемость двухфазной зоны в вертикальном (Π_v) и горизонтальном (Π_h) направлениях моделировалась с помощью зависимостей [14]

$$\Pi_v(z) = \Pi_v(0) \exp(\gamma_i z), \quad \Pi_h(z) = \beta_a^2 \Pi_v(z),$$

где $0 \leq \beta_a \leq 1$ - коэффициент анизотропии, а γ_i - параметр неоднородности.

Далее в главе выполнен линейный анализ морфологической неустойчивости процесса и получены новые критерий конвективной морфологической устойчивости кристаллизации с областью фазового перехода. В случае клас-

сических граничных условий баланса тепла и массы, дисперсионное соотношение - зависимость частоты возмущений ω от волнового числа k_x , имеет вид

$$\omega = k_x V_b \left(\frac{B_i(\gamma_i, \beta_a, k_x)}{q(\gamma_i, \beta_a, k_x) + \gamma_i + k_x} - 1 \right) - \frac{(1-k)V_b^2 k_l}{k_s D_l}, \quad (11)$$

где B_i , q и V_b определены в работе. При учете течений жидкости в океане, произведенном с помощью граничных условий, подобных условию (10), аналог соотношения (11) имеет более сложный вид, приведенный в диссертации.

На рисунке 8 показана зависимость параметра роста возмущений от скорости кристаллизации. Из графиков видно, что рассматриваемая конвективная неустойчивость увеличивает область динамической неустойчивости "1" до области конвективной неустойчивости "1" + "2" и регион устойчивости становится шире в турбулентном режиме кристаллизации.

Глава 6. Дендритный рост в двухфазной зоне

Шестая глава диссертационной работы связана с изучением процессов роста дендритных структур в области фазового превращения. Для этого сначала определяются точные аналитические решения термодиффузионной задачи о росте параболического дендрита в набегающем потоке жидкости. Затем найденные решения исследуются на устойчивость - выводятся эволюционные уравнения для возмущений, определяются дисперсионное соотношение и кривая нейтральной устойчивости. Далее для рассматриваемого случая выводится условие микроскопической разрешимости, из которого определяется отборное соотношение для скорости роста вершины дендрита. Развитая теория имеет предельные переходы ко всем ранее известным моделям дендритного роста. В конце главы делается обобщение на трехмерный случай и проводится анализ применимости результатов в зависимости от значений чисел Пекле и Рейнольдса.

Дендритный рост в набегающем потоке расплава вдоль оси z , имеющим скорость V_∞ вдали от дендрита (x - перпендикулярная координата), описывается с помощью классической термодиффузионной модели Стефана и гидродинамических уравнений Осеена. Сначала определяются точные аналитические решения задачи в параболических координатах ξ_p и η_p ($x = \rho_d \sqrt{\xi_p \eta_p}/2$, $z = \rho_d(\eta_p - \xi_p)/2$, ρ_d - радиус вершины дендрита), описывающие рост дендрита с постоянной скоростью V_d в потоке жидкости с компонентами скорости u_η и u_ξ . Эти решения имеют вид

$$T_l(\eta_p) = T_i + (T_\infty - T_i) \frac{I(\eta_p)}{I(\infty)}, \quad C_l(\eta_p) = C_i + (C_\infty - C_i) \frac{I_1(\eta_p)}{I_1(\infty)}, \quad (12)$$

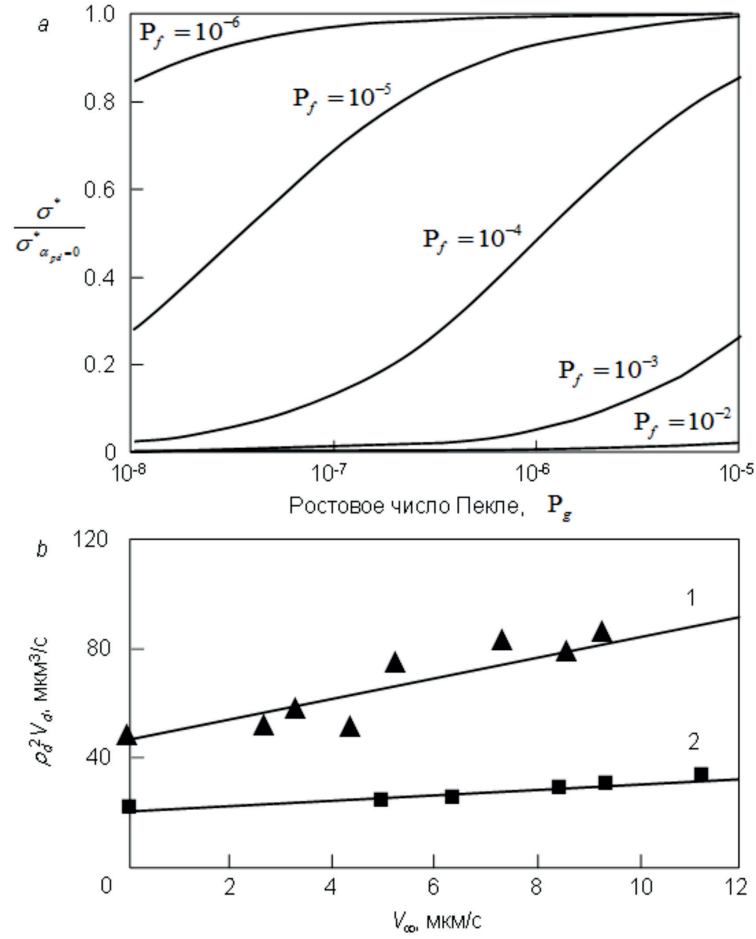


Рисунок 9 - *a*. Относительный масштабный фактор $\sigma^*/\sigma^*(\alpha_{pd} = 0)$ в зависимости от ростового числа Пекле при различных потоковых числах Пекле. *b*. Сравнение теории и эксперимента работы [21] при различных значениях концентрации примеси $C_\infty = 0.02$ - (1) и $C_\infty = 0.04$ - (2).

$$u_\eta = \frac{-f_p(\eta_p)}{2\sqrt{\xi_p + \eta_p}}, \quad u_\xi = \frac{\sqrt{\xi_p \eta_p}}{\sqrt{\xi_p + \eta_p}} \frac{df_p}{d\eta_p}, \quad f_p(\eta_p) = 2(V_\infty + V_d)\sqrt{\eta_p} - 2V_\infty g_p(\eta_p),$$

где T_i и C_i - выписанные в работе температура и концентрация примеси на поверхности дендрита $\eta_p = 1$, T_∞ и C_∞ - заданные значения этих величин вдали от дендрита, а функции I , I_1 и g_p зависят от ростового $P_g = \rho_d V_d / (2\kappa_l)$ и потокового $P_f = \rho_d V_\infty / (2\kappa_l)$ чисел Пекле и числа Рейнольдса $Re = \rho_d V_\infty / \nu$ (ν - коэффициент кинематической вязкости).

Далее в работе проводится линейный анализ морфологической устойчивости найденных решений, по результатам которого определяется дисперсионное соотношение, которое на кривой нейтральной устойчивости принимает вид зависимости волнового числа k_d от параметров процесса

$$k_d = k_{TC} \sqrt{\frac{\exp(i\theta) + i\alpha_{pd}(1 - \beta \cos 4\theta) \sin \theta \cos \theta}{1 - \beta \cos 4\theta}}, \quad \alpha_{pd} = \frac{a_d d_0 V_\infty}{4\rho_d V_d P_d} + \frac{a_d d_0 V_\infty D_T}{2\rho_d V_d P_d D_l}.$$

где θ - угол между нормалью к поверхности дендрита и осью его роста, d_0 - капиллярная константа, β - фактор анизотропии, а параметры P_d , a_d и волновое число термоконцентрационной задачи без течения k_{TC} определены в диссертации. Полученная зависимость содержит все ранее известные результаты - решения тепловой задачи без течения [16], тепловой задачи с течением [17] и термоконцентрационной задачи без течения [18].

Для отбора постоянной скорости роста дендрита (с учетом анизотропии) волновое число задачи использовалось в условии микроскопической разрешимости, из которого определялся масштабный фактор

$$\sigma^* \equiv \frac{2d_0 \kappa_l}{\rho_d^2 V_d} = \sigma_0 \beta^{7/4} P_d \left[1 + b_d \left(\beta^{-3/4} \alpha_{pd} \right)^{11/14} \right]^{-1}.$$

Здесь σ_0 и b_d - численные постоянные, определяемые с помощью асимптотических методов [19] или с помощью совмещения модельных предсказаний и экспериментальных значений [20].

Рисунок 9 показывает, что при уменьшении потокового числа Пекле и при увеличении ростового числа Пекле вклад конвекции в устойчивость вершины дендрита уменьшается. Также здесь показано сравнение теоретических и экспериментальных результатов при различных концентрациях примеси и скоростях натекающей на дендрит жидкости. В конце шестой главы сделано обобщение теории на трехмерный дендритный рост и показано, что найденные решения будут описывать процесс кристаллизации при увеличении числа Рейнольдса.

Глава 7. Нелинейная динамика процессов испарения в системе жидкость - кристалл

Седьмая глава посвящена исследованию процессов испарения летучих соединений в газовую фазу, происходящих в двухфазных системах жидкость - твердый материал. Сначала в работе развивается теория описания изотермического процесса с целью рассмотрения более широкого класса систем по сравнению с ранее известной асимптотической теорией, применимой лишь для ограниченного числа системных параметров. Для больших значений приведенного коэффициента испарения решение задачи находится в явном аналитическом виде, а для произвольных - в явном параметрическом виде. Далее

в главе сделано обобщение постановки задачи на цилиндрическую и сферическую форму паровых генераторов и выполнен учет слабой зависимости коэффициента испарения от концентрации примеси. Показано, что граница растворения движется быстрее границы испарения и, что с течением времени увеличивается отклонение потока испаряющегося вещества от своего первоначального значения. Далее построена математическая модель процесса неизотермического испарения и развит метод получения ее аналитического решения в параметрическом виде. Определено, что увеличение температуры фазового перехода на границе растворения и возрастание первоначальной протяженности слоя жидкости приводят к уменьшению потока испаряющегося вещества.

Для рассматриваемых бинарных систем (например, интерметаллические соединения) при испарении летучего компонента А граница $L_e(t)$ вакуум - жидкость начинает двигаться, а возникающий при этом градиент концентрации, распространяется в глубь жидкости, захватывая все новые области, пока не достигнет границы $\Lambda_e(t)$ жидкость - твердое тело. Дальнейшее уменьшение концентрации компонента А в слое жидкости приводит к плавлению кристаллов, что восстанавливает равновесие на границе $\Lambda(t)$, а сама она, при этом, начинает двигаться. В начальный момент времени $t = 0$ жидкий слой занимает область $-L_0 < z < 0$, а твердая фаза - $z > 0$ (рисунок 10, а). Летучий компонент А при $t = 0$ распределен в жидкой и твердой фазах равномерно с концентрациями C_s/k и C_s соответственно (C_s - концентрация компонента А в кристаллах A_nB_m , $k \gg 1$ - коэффициент распределения). При $t > 0$ начинается процес испарения атомов вещества А в вакуум.

В работе показывается, что в следствие небольшой протяженности слоя жидкости распределения концентрации примеси C (и температуры) в этом слое являются линейными функциями в каждый момент времени. Пограничные условия баланса массы на движущихся границах фазового перехода $L_e(t)$ и $\Lambda_e(t)$ в изотермической системе имеют вид

$$C \frac{dL_e}{dt} + D_l \frac{\partial C}{\partial z} = \alpha_e C, \quad j_e = \rho_l \frac{dL_e}{dt} = \alpha_e C, \quad z = L_e(t),$$

$$\frac{1-k}{k} C_s \frac{d\Lambda_e}{dt} + D_l \frac{\partial C}{\partial z} = 0, \quad z = \Lambda_e(t).$$

Здесь α_e - приведенный коэффициент испарения, а j_e - поток испаряющегося вещества.

В диссертации развиты методы нахождения аналитических решений различных ситуаций и геометрий рассматриваемого процесса. В случае декар-

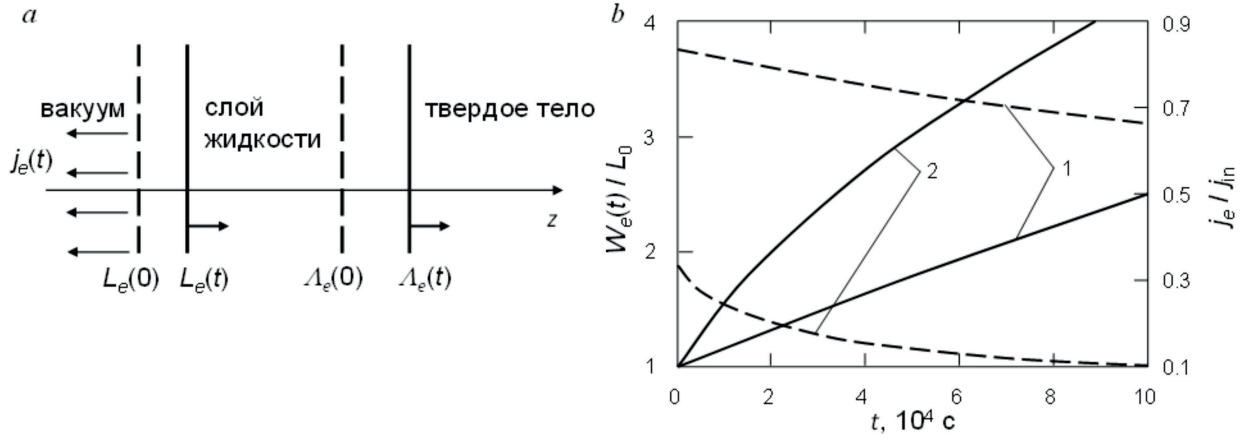


Рисунок 10 - *a*. Схематическая диаграмма процесса. Пунктирные линии обозначают координаты межфазных границ в начальный момент времени. *b*. Временные зависимости относительной толщины слоя жидкости (сплошные линии) и относительного потока (штриховые линии) при различных значениях коэффициента α_e : (1) - $\alpha_e = 10^{-6}$ м/с, (2) - $\alpha_e = 10^{-5}$ м/с, j_{in} - начальное значение потока.

товой системы координат, параметрическое решение имеет вид

$$\Lambda_e(s) = \frac{1 + (k - 1)s - \rho_l k / C_s + s_e L_e s (1 - p_e s)}{s_e s (1 - p_e s)}, \quad s = \frac{d\Lambda_e}{dL_e},$$

$$t(s) = \int_{s_0}^s \frac{dL_e}{ds} \frac{ds}{F_e(s)}, \quad L_e(s) = \frac{1}{s_e} \left(\frac{\rho_l k}{C_s} - 1 \right) \left(\ln \left| \frac{s - 1}{s} \right| + \frac{1}{s} \right) +$$

$$+ \frac{p_e^2}{s_e} \left(\frac{1}{(p_e - 1)^2} \ln \left| \frac{s - 1}{1 - p_e s} \right| - \frac{1}{(1 - p_e s)(p_e - 1)} \right) + B_e,$$

где p_e , s_e и B_e - определенные в работе параметры.

Рисунок 10, *b* показывает динамику относительной толщины пленки жидкости и потока испаряющегося вещества. В целом, развитые в главе методы существенно расширяют теорию аналитического описания стефановских задач подобного типа.

Заключение

Научные материалы, изложенные в диссертации, представляют собой единую теорию исследования нелинейного тепломассопереноса в процессах затвердевания и испарения при наличии области фазового перехода. Во всех главах диссертации излагаются оригинальные авторские методы решения соответствующих термодиффузионных задач типа Стефана с движущимися границами фазовых переходов, осложненных присутствием конвективных и

гидродинамических течений жидкости. Сформулируем главные результаты диссертационной работы.

Основные результаты и выводы работы заключаются в следующем:

- Разработан аналитический метод решения термодиффузионной задачи типа Стефана, описывающей квазистационарное затвердевание бинарных расплавов с двухфазной областью при нелинейной фазовой диаграмме процесса. Показано, что решение нелинейных уравнений тепломассопереноса имеет явный вид для водных растворов (при нулевом коэффициенте распределения примеси) и сводится к решению одноточечной задачи Коши для отыскания концентрации примеси в области фазового перехода во всех остальных случаях. Определено, что температура фазового перехода может претерпевать существенное уменьшение при небольших отклонениях уравнения ликвидус от линейной зависимости. При этом происходит более интенсивный рост доли твердой фазы в двухфазной области и увеличивается протяженность зоны фазового перехода. В работе проиллюстрировано, что распределения концентрации примеси и доли твердой фазы в двухфазной области претерпевают практически самоподобный перенос при отклонении уравнения ликвидус от линейной зависимости. Это означает сохранение скейлинговых свойств области фазового превращения в случае нелинейной фазовой диаграммы.

- Разработан аналитический метод решения нелинейной термодиффузионной задачи типа Стефана, описывающей квазистационарное затвердевание трехкомпонентных расплавов с двумя двухфазными областями - основной и котектической зонами. Показано, что доля твердого вещества основного компонента монотонно убывает во всей области фазового перехода, а доля твердого вещества примесного компонента убывает в котектическом регионе. При этом протяженность котектической области меньше протяженности основной области фазового перехода. В работе также показано, что концентрация примеси основного компонента монотонно убывает во всей области фазового перехода, а концентрация примеси второго компонента возрастает в зоне котектики, достигает максимума в основной зоне, а затем убывает в ней. Это объясняется тем обстоятельством, что второй примесный компонент претерпевает фазовый переход лишь в котектической области.

- Получены новые аналитические сферически-симметричные решения нелинейных уравнений тепломассопереноса в жидком ядре Земли, описывающие фронтальный процесс кристаллизации. Показано, что скорость затвер-

девания ядра Земли является возрастающей функцией удельного неадиабатического теплового потока. Определено, что скорость роста ядра больше в тех регионах, где более холодный расплав опускается к ядру и меньше в регионах, где поднимается более горячий расплав. Эта разница температур и скоростей является причиной морфологической неустойчивости межфазной границы. Аналитически показано, что около границы с твердым ядром всегда появляется концентрационное переохлаждение, также являющееся причиной морфологической неустойчивости локально-плоской границы фазового перехода.

- Проведен линейный анализ морфологической неустойчивости локально-плоской межфазной границы ядра Земли при наличии натекания на нее расплава. Получен новый критерий морфологической устойчивости и определена кривая нейтральной устойчивости процесса. Показано, что при различных скоростях течения расплава возможна реализация морфологически устойчивой и неустойчивой кристаллизации, существующей одновременно с концентрационным переохлаждением, что приводит к двум сценариям затвердевания: "концентрационное переохлаждение и морфологическая устойчивость" и "концентрационное переохлаждение и морфологическая неустойчивость". Разработаны и решены аналитически нелинейные термодиффузионные модели двухфазной области, соответствующие найденным сценариям затвердевания в классическом стефановском приближении. Развита более полная модель рассматриваемого квазистационарного процесса затвердевания земного ядра с областью фазового перехода, учитывающая течения расплава, зависимость фазовой диаграммы от концентрации примеси и давления, зависимость скорости течения жидкости от давления и проницаемости двухфазной зоны. Найдены приближенные аналитические решения этой нелинейной модели. Определены допустимые интервалы изменений динамической вязкости и наклона линии ликвидус, соответствующие формированию области фазового перехода, междендритное расстояние и средний радиус вершины растущих в области фазового перехода дендритов. Показано, что в двухфазной зоне существуют узкие протоки горячего восходящего расплава, а в остальной области более холодный расплав опускается к ядру.

- Разработан аналитический метод решения нелинейной термодиффузионной задачи типа Стефана, описывающей нестационарное автомодельное затвердевание бинарного расплава при малых временных изменениях доли твердой фазы в области фазового перехода. Определены явные зависимости концентрации примеси, температуры, а также долей жидкой и твердой фаз в двухфазной зоне от автомодельной переменной. Показано, что доля твердой

фазы может лишь убывать по автомодельной переменной. Найденное аналитическое решение хорошо согласуется с ранее известным асимптотическим решением и данными эксперимента.

- Разработана математическая модель типа Стефана, описывающая нестационарное замерзания воды с развитием ложного дна при учете встречной кристаллизации в направлении от охлаждаемой границы с атмосферой. Развита модель впервые учитывает взаимодействие двух нестационарных областей фазового превращения - двухфазной зоны ложного дна и основной двухфазной зоны, вызванной формированием шуги льда. Модель процесса также впервые учитывает нелинейные эффекты тепломассопереноса, связанные с наличием турбулентных течений жидкости в океане и нестационарностью внешних параметров системы - атмосферной температуры, скорости трения, температуры и солености океана. Определены аналитические решения разработанной модели кристаллизации воды в обеих областях фазового перехода. Аналитически продемонстрировано, что фазовые переходы в обеих двухфазных областях не взаимодействуют до момента срастания их границ, движущихся во встречном направлении. Показано, что координата нижней границы ложного дна лежит в пределах разброса экспериментальных данных полевых наблюдений "AIDJEX" при учете временных изменений скорости трения. В диссертации показано, что встречные процессы кристаллизации льда сверху и снизу приводят к полному сращиванию обоих вертикальных слоев (двухфазных зон) льда в моменты встречи их границ фазовых переходов. При этом более низкие значения атмосферной температуры приводят к более быстрому смерзанию обоих слоев льда.

- Путем сравнения развитой теории с данными полевых наблюдений экспедиции "ARCTIC 91" (проведенных на борту ледокола "Polarstern") показано, что эволюция ложного дна порождает столбчато-гранулированную структуру льда, а над талой водой находится слой льда с чисто столбчатой структурой. Вследствие того, что на различных глубинах наблюдаются структурные переходы от столбчатого к столбчато-гранулированному типу, такие переходы могут формироваться в результате процессов смерзания исследованных пластов льда. Таким образом, структурные переходы в толще льда можно интерпретировать как результат взаимодействия фазовых переходов, поскольку в природе встречаются располагающиеся друг под другом мигрирующие структуры ложного дна. Аналитически определены тепловые потоки на границах ложное дно - океан и лед - атмосфера. При этом первый из них может быть направлен как в сторону океана, так и в сторону атмосферы (его направление определяется граничной температурой или соленостью). Пока-

зано, что оба тепловых потока по своей величине сопоставимы с другими вкладами в результирующий поток тепла. Это означает, что рост ложного дна может оказывать существенное влияние на теплообмен между океаном и атмосферой, что особенно проявляется в весенне-летний период времени, для которого характерны процессы образования и эволюции второго дна.

- Разработана математическая модель исследования морфологической неустойчивости процесса кристаллизации при наличии анизотропной и неоднородной области фазового перехода с учетом течения жидкости и конвективного тепломассопереноса в двухфазной зоне. Проведен линейный анализ морфологической устойчивости с учетом течения среды в жидкой фазе и двухфазной зоне системы для нетурбулентных и турбулентных условий реализации процесса. Определен параметр эволюции возмущений для анизотропной и неоднородной двухфазной зоны, получены кривые нейтральной устойчивости процесса. Показано, что учет диффузии примеси и неоднородности зоны фазового перехода расширяют область неустойчивости, а уменьшение анизотропии приводит к ее сужению. Также продемонстрировано, что увеличение кинематической вязкости жидкости сдвигает процесс в сторону устойчивости. Обратный эффект вызывает возрастание скорости жидкости вблизи границы фазового перехода. Приведена оценка скорости роста шероховатостей межфазной границы (амплитуда неровности в 1 сантиметр может возрасти в разы за несколько часов), которая является основой построения нелинейной теории. Показано, что область устойчивости процесса затвердевания расширяется в случае турбулентных течений жидкости в океане около межфазной границы по сравнению с нетурбулентной моделью. При этом регион устойчивости процесса также увеличивается при увеличении скорости трения и коэффициента турбулентного переноса тепла вследствие того, что турбулентные граничные условия учитывают силы трения на межфазной поверхности двухфазная зона - океан, которые являются стабилизирующим фактором. Продemonстрировано, что исследуемая конвективная неустойчивость расширяет область ранее известной динамической неустойчивости двухфазной зоны. При этом увеличение скорости течения жидкости в океане вблизи межфазной границы сужает область устойчивости. Полученные критерии устойчивости определяют различные режимы процесса кристаллизации с областью фазового перехода при наличии или отсутствии в ней каналов конвектирующей жидкости.

- Впервые построены аналитические решения термодиффузионной задачи Стефана, описывающие рост параболического дендрита с постоянной скоростью в бинарной жидкости с течением. Проведен линейный анализ мор-

фологической устойчивости найденных решений. Выведены дисперсионное уравнение и уравнение кривой нейтральной устойчивости процесса, из которого определена зависимость волнового числа от теплофизических и гидродинамических параметров системы. Показано, что обобщенное волновое число содержит предельные переходы к ранее известным моделям дендритного роста. Определен обобщенный критерий устойчивого роста двухмерного параболического дендрита (определяющий отборное соотношение для скорости роста) с учетом анизотропии поверхностного натяжения на межфазной границе кристалл-расплав. Найденный критерий также содержит ранее известные критерии для роста изолированного дендрита в однокомпонентной среде с конвекцией жидкости и роста изолированного дендрита в неподвижной бинарной системе. Из обобщенного критерия следует, что с ростом ростового числа Пекле и уменьшением потокового числа Пекле вклад конвекции в устойчивость роста вершины дендрита уменьшается. Показано, что развиваемая теория справедлива при произвольных числах Рейнольдса и Пекле, определяемых скоростью набегающего на дендрит потока жидкости. Сделано обобщение теории на случай трехмерного дендритного роста.

- Построено точное аналитическое решение задачи об изотермическом испарении летучего компонента в системе газ - жидкость - твердое тело в параметрическом виде. Показано, что граница растворения движется быстрее границы испарения, а с возрастанием приведенного коэффициента испарения указанная особенность усиливается. Также продемонстрировано, что с течением времени возрастает разница между потоком испаряющегося вещества и его первоначальным значением, которое соответствует ранее известному асимптотическому решению. Построенные в диссертации решения существенно расширяют рамки применимости аналитических решений по сравнению с ранее исследованным асимптотическим случаем. Теория обобщена на ситуацию слабой зависимости приведенного коэффициента испарения от граничной концентрации примеси, а также на случаи цилиндрической и сферической симметрий процесса.

- Разработаны нелинейная термодиффузионная модель типа Стефана и метод построения ее аналитического решения для описания процессов неизо-термического испарения в системе газ - жидкость - твердое тело. Показано, что точное решение задачи строится в параметрической форме. Определено, что увеличение температуры фазового перехода на границе растворения приводит к уменьшению толщины пленки жидкости и к уменьшению скорости движения границы испарения. Решение показывает, что рост температуры фазового перехода на границе растворения и возрастание первоначальной

толщины пленки жидкости приводят к уменьшению потока испаряющегося вещества. Из проведенного анализа также следует, что при малых приведенных коэффициентах испарения наблюдается стабилизация потока испарения в окрестности своего первоначального значения. Возрастание этого коэффициента может приводить к существенному уменьшению потока испаряющегося вещества даже на начальных стадиях процесса.

Основное содержание диссертации опубликовано в работах:

Статьи, опубликованные в рецензируемых научных журналах, определенных ВАК:

1. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.**, Alexandrova I.V. Solidification of leads: approximate solutions of non-linear problem // *Annals of Glaciology*, 2006.- Vol. 44.- P. 118-122.

2. Александров Д.В., **Малыгин А.П.** Аналитическое описание кристаллизации морской воды в трещинах льдов и их влияние на теплообмен между океаном и атмосферой // Доклады Академии Наук, 2006.- Т. 411(3).- С. 390-394 [Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Analytical description of seawater crystallization in ice fissures and their influence on heat exchange between the ocean and the atmosphere // *Doklady Earth Sciences*, 2006.- Vol. 411(9).- P. 1407-1411].

3. Alexandrov D.V., Nizovtseva I.G., **Malygin A.P.**, Huang H.-N., Lee D. Unidirectional solidification of binary melts from a cooled boundary: analytical solutions of a nonlinear diffusion-limited problem // *Journal of Physics: Condensed Matter*, 2008.- Vol. 20(11).- P. 114105-01-06.

4. Александров Д.В., Иванов А.А., **Малыгин А.П.** К теории нестационарного затвердевания при наличии двухфазной зоны // *Расплавы*, 2008.- N 5.- С. 69-76.

5. Alexandrov D.V., Ivanov A.A., **Malygin A.P.** Self-similar solidification of binary alloys // *Acta Physica Polonica A*, 2009.- Vol. 115(4).- P. 795-799.

6. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Phase transitions in solid-liquid-gas systems with applications to alkali metal generators // *Physica A*, 2010.- Vol. 389(10).- P. 2063-2069.

7. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** The Stefan problem for unsteady-state evaporation of a volatile component in the solid-liquid-gas systems: exact analytical solution // *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 2010.- Vol. 53(13-

14).- P. 2790-2794.

8. Александров Д.В., Рахматуллина И.В., **Малыгин А.П.** К теории затвердевания с двухфазной зоной концентрационного переохлаждения // Расплавы, 2010.- N 4.- С. 88-96 [Alexandrov D.V., Rakhmatullina I.V., **Malygin A.P.** On the theory of solidification with a two-phase concentration supercooling zone // Russian Metallurgy (Metally), 2010.- Vol. 2010(8).- P. 745-750].

9. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Влияние конвекции, анизотропии и неоднородности среды на структурно-фазовые переходы в процессах кристаллизации // Доклады Академии Наук, 2010.- Т. 434(3).- С. 327-331 [Aleksandrov D.V., **Malygin A.P.** The influence of convection, anisotropy, and inhomogeneity of a medium on structural phase transitions during crystallization // Doklady Physics, 2010.- Vol. 55(9).- P. 431-435].

10. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Convective instability of directional crystallization in a forced flow: The role of brine channels in a mushy layer on nonlinear dynamics of binary systems // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2011.- Vol. 54(5-6).- P. 1144-1149.

11. Александров Д.В., **Малыгин А.П.** Конвективная неустойчивость кристаллизации с зоной фазового перехода // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2011.- Т. 139(4).- С. 688-694 [Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Convective instability of solidification with a phase transition zone // Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2011.- Vol. 112(4).- P. 596-601].

12. Александров Д.В., Асеев Д.Л., **Малыгин А.П.** К теории процессов затвердевания с неравновесной двухфазной зоной // Расплавы, 2011.- N 1.- С. 16-30.

13. Александров Д.В., **Малыгин А.П.** Нелинейная динамика фазовых переходов при замерзании морской воды с образованием ложного дна // Океанология, 2011.- Т. 51(6).- С. 1000-1008 [Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Nonlinear dynamics of phase transitions during seawater freezing with false bottom formation // Oceanology, 2011.- Vol. 51(6).- P. 940-948].

14. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Coupled convective and morphological instability of the inner core boundary of the Earth // Physics of the Earth and Planetary Interiors, 2011.- Vol. 189(3-4).- P. 134-141.

15. **Малыгин А.П.**, Александров Д.В. Аналитическое описание квазистационарной кристаллизации трехкомпонентных систем // Расплавы, 2011.-

N 6.- С. 11-24 [**Malygin A.P.**, Alexandrov D.V. Analytical description of the quasi-stationary solidification of ternary systems // Russian Metallurgy (Metally), 2012.- Vol. 2012(2).- P. 136-145].

16. Александров Д.В., **Малыгин А.П.** Комментарий к статье "Симметричный тепломассоперенос во вращающемся сферическом слое ЖЭТФ, том 121, вып. 3, 2002 // Журнал экспериментальной и теоретической физики, 2012.- Т. 141(2).- С. 292-293 [Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Comments on article "symmetric heat and mass transfer in a rotating spherical layer," JETP 94 (3), 459 (2002) // Journal of Experimental and Theoretical Physics, 2012.- Vol. 114(2).- P. 257-258].

17. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Flow-induced morphological instability and solidification with the slurry and mushy layers in the presence of convection // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012.- Vol. 55(11-12).- P. 3196-3204.

18. **Малыгин А.П.**, Александров Д.В. Задача Стефана об испарении летучего компонента в системе газ-расплав-твердое тело // Расплавы, 2012.- N 2.- С. 17-25.

19. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** The steady-state solidification scenario of ternary systems: Exact analytical solution of nonlinear model // International Journal of Heat and Mass Transfer, 2012.- Vol. 55(13-14).- P. 3755-3762.

По результатам диссертации были зарегистрированы следующие программы для ЭВМ:

1. SeaIceCrystallization.mcd (авторы: Д.В. Александров, **А.П. Малыгин**, И.Г. Низовцева), свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ N 2010615921.

2. Программа для ЭВМ EvaporationSolidLiquidGaz.mcd (авторы: Д.В. Александров, **А.П. Малыгин**), свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ N 2010615922.

3. Программа для ЭВМ DendriteGrowth.mcd (авторы: Д.В. Александров, **А.П. Малыгин**), свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ N 2010615923.

4. Программа для ЭВМ ConvectiveSolidification.mcd (авторы: Д.В. Александров, **А.П. Малыгин**), свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ N 2011615005.

Другие публикации:

1. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.**, Alexandrova I.V. Self-similar solidification from a cooled boundary for ice growing from aqueous salt solutions // Proc. on CD-ROM, 13-th International Conference on Heat Transfer, Sydney, Australia, 13-18 August 2006, 11 pp.
2. Александров Д.В., Иванов А.А., **Малыгин А.П.** Автомоделное затвердевание с двухфазной зоной от охлаждаемой стенки // Вестник Удмуртского университета. Физика. Химия, 2008.- Вып. 1.- С. 14-25.
3. Александров Д.В., Иванов А.А., **Малыгин А.П.** Нелинейная динамика процессов затвердевания при наличии двухфазной зоны в автомоделном режиме // Труды XII Российской конференции "Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов Екатеринбург, 22-26 сентября 2008, С. 145-148.
4. Александров Д.В., Галенко П.К., **Малыгин А.П.**, Херлах Д.М. Отбор устойчивого режима роста вершины параболического дендрита при вынужденном конвективном течении и кристаллизации бинарной жидкости // Вестник Удмуртского университета. Физика. Химия, 2010.- Вып. 1.- С. 3-16.
5. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.**, Alexandrova I.V. Morphological instability of the solid-liquid interface during directional solidification of binary mixtures with a mushy layer: the case of channel formation // Proc. On CD ROM "The 21th International Symposium on Transport Phenomena", Kaohsiung City, Taiwan, 2-5 November 2010, C06-28-01-08.
6. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.**, Galenko P.K. Effect of a forced flow on 3D dendritic growth in binary systems // Proc. "8th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics", Pointe Aux Piments, Mauritius, 11-13 July 2011, P. 299-304.
7. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.** Morphological instability of the sea ice - ocean interface in the presence of brine channels in a mushy layer // Proc. "8th International Conference on Heat Transfer, Fluid Mechanics and Thermodynamics", Pointe Aux Piments, Mauritius, 11-13 July 2011, P. 305-312.
8. Александров Д.В., **Малыгин А.П.** Задача Стефана об испарении летучего компонента в бинарном расплаве // Труды XIII Российской конференции "Строение и свойства металлических и шлаковых расплавов", Т. 4, Екатеринбург, 12-16 сентября 2011, С. 153-156.

9. Александров Д.В., **Малыгин А.П.**, Александрова И.В. Квазистационарное затвердевание трехкомпонентных систем при наличии подвижных областей фазового перехода // Вестник Удмуртского университета. Физика. Химия, 2011.- Вып. 2.- С. 12-23.

Результаты работы также опубликованы в следующих тезисах:

1. Александров Д.В., **Малыгин А.П.**, Низовцева И.Г. Нестационарные процессы направленного затвердевания растворов. Кристаллизация морской воды // VII Молодежный семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества, Екатеринбург, 27 ноября - 3 декабря 2006, С. 45.

2. Александров Д.В., **Малыгин А.П.**, Низовцева И.Г. Нестационарные процессы направленного затвердевания растворов. Приближенное аналитическое решение проблемы // VII Молодежный семинар по проблемам физики конденсированного состояния вещества, Екатеринбург, 27 ноября - 3 декабря 2006, С. 46.

3. Alexandrov D.V., Nizovtseva I.G., **Malygin A.P.**, Huang H.-N., Lee D. Unidirectional solidification of binary melts from a cooled boundary. Analytical solutions of nonlinear diffusion-limited problem // Book of Abstracts: Thirteenth International Conference on Liquid and Amorphous Metals, LAM XIII, Ekaterinburg, 8 - 14 July 2007, P. 13.

4. Александров Д.В., Иванов А.А., **Малыгин А.П.** Аналитическое описание направленной кристаллизации двухкомпонентных систем при наличии зоны двухфазного состояния вещества в автомодельных условиях // Тезисы Четырнадцатой всероссийской научной конференции студентов-физиков и молодых ученых, ВНКСФ-14, Уфа, 26 марта - 3 апреля 2008, С. 107.

5. Alexandrov D.V., **Malygin A.P.**, Malashkevich A. Self-similar solidification of binary alloys // Abstracts of the Tenth Annual Conference YUCOMAT 2008, Herceg Novi, Montenegro, 8-12 September 2008, P. 32.

6. **Малыгин А.П.**, Александров Д.В. Аналитические модели направленного затвердевания ядра Земли // Тезисы докладов Юбилейной X Всероссийской молодежной школы-семинара по проблемам физики конденсированного состояния вещества, Екатеринбург, 9-15 ноября 2009, С. 207.

7. Александров Д.В., **Малыгин А.П.**, Низовцева И.Г., Иванов А.А. Структурно-фазовые переходы при кристаллизации соленой воды: конвекция, анизотропия и неоднородность среды // XIX Всероссийская школа-конференция

молодых ученых и студентов "Математическое моделирование в естественных науках", Пермь, 6 - 9 октября 2010, С. 6-8.

8. Alexabdrov D.V., **Malygin A.P.**, Alexandrova I.V. Morphological instability of the solid-liquid interface during directional solidification of binary mixtures with a mushy layer: the case of channel formation // Book of Abstracts "The 21th International Symposium on Transport Phenomena", Kaohsiung City, Taiwan, 2-5 November 2010, P. 218.

9. **Малыгин А.П.** Сферически-симметричные решения уравнений тепло-массопереноса ядра Земли в неэластичном приближении. Морфологическая устойчивость процесса // Тезисы докладов "Математическое моделирование в естественных науках", Пермь, 3-6 октября 2012, С. 114-115.

Список литературы

- [1] Hills R.N., Loper D.E., Roberts P.H. A thermodynamically consistent model of a mushy zone // Q. Jl Mech. appl. Math., 1983.- Vol. 36, Pt. 4.- P. 505-539.
- [2] Fowler A.C. The formation of freckles in binary alloys // IMA Journal of Applied Mathematics, 1985.- Vol. 35.- P. 159-174.
- [3] Борисов В.Т. Теория двухфазной зоны металлического слитка.- М.: Металлургия, 1987.- 224 с.
- [4] Batchelor G.K. Transport properties of two-phase materials with random structure // Ann. Rev. Fluid Mech., 1974.- Vol. 6.- P. 227-255.
- [5] Anderson D.M. A model for diffusion-controlled solidification of ternary alloys in mushy layers // J. Fluid Mech., 2003.- Vol. 483.- P. 165-197.
- [6] Mullins W. W., Sekerka R. F. Stability of a planar interface during solidification of a dilute binary alloy // J. Appl. Phys., 1964.- Vol. 35.- P. 444-451.
- [7] Deguen R., Alboussière T., Brito D. On the existence and structure of a mush at the inner core boundary of the Earth // Phys. Earth Planet. Int., 2007.- Vol. 164.- P. 36-49.
- [8] Shimizu H., Poirier J.P., Le Mouél J.L. On crystallization at the inner core boundary // Phys. Earth Planet. Int., 2005.- Vol. 151.- P. 37-51.
- [9] Loper, D.E. A model of the dynamical structure of Earth's outer core // Phys. Earth Planet. Inter., 2000.- Vol. 117.- P. 179-196.

- [10] Huppert H.E., Worster M.G. Dynamic solidification of a binary alloy // Nature, 1985.- Vol. 314.- P. 703-707.
- [11] Worster M.G. Solidification of an alloy from a cooled boundary // J. Fluid Mech., 1986.- Vol. 167.- P. 481-501.
- [12] Perovich D.K., Maykut G.A. Solar heating of a stratified ocean in the presence of a static ice cover // J. Geophys. Res., 1990.- Vol. 95.- P. 18,233-18,245.
- [13] Wettlaufer J.S., Worster M.G., Huppert H.E. The phase evolution of young sea ice // Geophys. Res. Lett., 1997.- Vol. 23.- P. 1251-1254.
- [14] Feltham D.L., Worster M.G., Wettlaufer J.S. The influence of ocean flow on newly forming sea ice // J. Geophys. Res., 2002.- Vol. 107.- art. no. 3009.
- [15] Alexandrov D.V., Ivanov A.O. Dynamic stability analysis of the solidification of binary melts in the presence of a mushy region: changeover of instability // J. Crystal Growth, 2000.- Vol. 210.- P. 797-810.
- [16] Pelce P. Dynamics of curved fronts.- Boston: Academic Press, 1988.
- [17] Bouissou Ph., Pelce P. Effect of a forced flow on dendritic growth // Phys. Rev. A, 1989.- Vol. 40.- P. 6673-6680.
- [18] Ben Amar M., Pelce P. Impurity effect on dendritic growth // Phys. Rev. A., 1989.- Vol. 39.- P. 4263-4269.
- [19] Brener E., Melnikov V.I. Pattern selection in two-dimensional dendritic growth // Adv. Phys., 1991.- Vol. 40.- P. 53-97.
- [20] Galenko P., Reutzel S., Herlach D. et al. Modelling of dendritic solidification in undercooled dilute Ni-Zr melts // Acta Mater., 2007.- Vol. 55.- P. 6834-6842.
- [21] Bouissou Ph., Perrin B., Tabeling P. Influence of an external flow on dendritic crystal growth // Phys. Rev. A, 1989.- Vol. 40.- P. 509-512.

Работа частично выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 11-01-00137), государственного задания высшим учебным заведениям в части проведения НИР (заявка 2.542.2011) и ФЦП "Научные и научно-педагогические кадры инновационной России" на 2009 - 2013 годы (главы 3-5 выполнялись при поддержке Государственного контракта N 14.740.11.0197, а глава 6 подготовлена в соответствии с Соглашением N 14.A18.21.0858).

Подписано в печать . Формат 60x84/16

Бумага офсетная. Усл. печ. л. .

Заказ № . Тираж 100.

Отпечатано в ИПЦ “Издательство УрФУ”.

г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.