Министерство образования и науки Российской Федерации

Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина

Э. П. Макаров

ЭЛЕКТРОННЫЕ ТАБЛИЦЫ MS Excel 2007

Часть 2

Вычислительная математика в электронных таблицах

Под общей редакцией Т. А. Матвеевой

Рекомендовано учебно-методическим советом
Института фундаментального образования УрФУ
в качестве **учебного пособия** по дисциплине «Информатика»
для студентов всех форм обучения по направлениям подготовки
09.03.02 – Информационные системы и технологии,
13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника,
14.05.02 – Атомные станции: проектирование, эксплуатация
и инжиниринг

Екатеринбург
Издательство ООО «Форт Диалог-Исеть»
2016

УДК 621.3
ББК
М15

Рецензенты:
кафедра «Информационных технологий» ГАОУ ДПО СО Института развития образования (зав. кафедрой д-р пед. наук, проф. Л. И. Долинер);
зав. сектором топологии ИММ УрО РАН, д-р физ.-мат. наук, проф. А. В. Осипов.

Макаров Э. П.
М15 Электронные таблицы MS Excel 2007. Вычислительная математика в электронных таблицах: Учебное пособие/ Э. П. Макаров; под редакцией Т. А. Матвеевой. – Екатеринбург, ООО «Форт Диалог-Исеть»/ 2016. Ч. 2. ─ 210 с.

ISBN 978-5-91128-104-5

Учебное пособие включает дидактический материал для выполнения самостоятельной работы по базовой дисциплине «Информатика». Все главы пособия представляют собой автономные модули. Задачи взяты из базового курса математики, являются значимыми для студента в его будущей профессиональной деятельности. Содержательная часть заданий для самостоятельной работы структурирована для реализации методом проектов с указанием поэтапных результатов и форм их представления.

Учебное пособие предназначено для студентов всех форм обучения по направлениям подготовки: 09.03.02 ─ Информационные системы и технологии, 13.03.01 ─ Теплоэнергетика и теплотехника, 14.05.02 ─ Атомные станции: проектирование, эксплуатация и инжиниринг.

Библиогр.: 3 назв. Рис. 110. Табл. 7

УДК 621.3

ББК 32.81

ISBN 978-5-91128-104-5

ПРЕДИСЛОВИЕ

Метод проектов является широко известным методом активного обучения. Назначение метода проектов – стимулировать интерес студентов к определенным проблемам, предполагающим владение определенной суммой знаний, и решение этих проблем через проектную деятельность, В основе метода проектов лежит: развитие познавательных навыков студентов, критического и творческого мышления; умение самостоятельно конструировать свои знания, увидеть, сформулировать и решить задачу, ориентироваться в информационном образовательном пространстве.

Выполнение задания на самостоятельную работу по дисциплине «Информатика» на основе метода проектов – это способ дидактического достижения цели обучения через детальную разработку алгоритма решения математической задачи в электронных таблицах, которая должна завершиться конкретным результатом. Решение задачи предусматривает необходимость интегрирования знаний из области информатики и вычислительной математики в объеме базовых курсов. При этом задачи взяты из курса высшей математики, являются значимыми для студента в его будущей профессиональной деятельности.

Содержательная часть самостоятельной работы структурирована для реализации методом проектов с указанием поэтапных результатов и форм их представления. Основные этапы выполнения работы следующие.

1. Обсуждение постановки задачи самостоятельной работы.
2. Обсуждение математических методов решения задачи.
3. Структурирование задачи с выделением подзадач, подбор необходимых информационных материалов.
4. Разработка алгоритмов и электронных таблиц для решения задач.
5. Анализ полученных данных, корректировка и оформление конечных результатов в виде отчета – электронного документа.
6. Презентация результатов выполнения самостоятельной работы.

Темы заданий для самостоятельной работы включают наборы задач из следующих разделов вычислительной математики [1].

1. Численное решение нелинейных уравнений.

2. Исследование нелинейных функций и построение их графиков.

3. Численное интегрирование.

В учебном пособии сформулированы задачи вычислительной математики для самостоятельной работы, приводятся краткие теоретические сведения и расчетные формулы, даны методические указания по созданию электронных таблиц в среде MS Excel 2007 (MS Excel) и оформлению отчета в виде компьютерной презентации в среде MS Power Point 2007. Большое количество иллюстраций и подробное описание процедур выполнения математических вычислений в среде электронных таблиц в пошаговом режиме делают для студента возможным самостоятельное выполнение заданий. Разнообразие алгоритмов решения задачи позволит не только самостоятельно оценить достоверность выполненных расчетов, но и усвоить методы вычислений в среде MS Excel.

Для выполнения заданий на самостоятельную работу необходимы навыки работы с MS Excel в среде ОС Windows. В данном пособии использован справочный материал по созданию электронных таблиц в среде MS Excel [2] и оформлению итогового документа (отчета) [3].

Пособие написано на основании опыта преподавания учебной дисциплины «Информатика» на кафедре «Информационные системы и технологии» Уральского федерального университета имени первого Президента России Б. Н. Ельцина.

Учебное пособие предназначено для подготовки бакалавров и специалистов всех форм обучения по направлениям 09.03.02 – Информационные системы и технологии, 13.03.01 – Теплоэнергетика и теплотехника, 14.05.02 – Атомные станции: проектирование, эксплуатация и инжиниринг., а также может вызвать интерес у преподавателей дисциплины «Информатика» на первом курсе университета в плане повышения квалификации.

ГЛАВА 1. ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

1.1. Постановка задачи

Нелинейное (алгебраическое или трансцендентное) уравнение с одним неизвестным имеет вид

$$f(x) = 0, \tag{1}$$

где нелинейная функция $f(x)$ определена и непрерывна в некотором интервале (α, β) значений x.

Задача решения уравнения (1) представляет собой *задачу об отыскании корней (нулей) функции* $f(x)$. Всякое значение x_0, которое обращает функцию $f(x)$ в нуль, называется *корнем* уравнения (1) или *нулем* функции $f(x)$.

В общем случае задача не разрешима, поскольку для нелинейных функций не существует выражения в виде формулы с конечным числом алгебраических действий или они достаточно громоздки (например, для алгебраических уравнений выше второго порядка). В подобных задачах применяют численные методы приближенного решения уравнения с наперед заданной точностью.

В учебном пособии рассматриваются методы отыскания приближенных значений *действительных корней* уравнения (1). Решение этой задачи распадается на следующие две подзадачи:

1. *Отделение корня* – выделение отрезка $[\alpha_0, \beta_0]$, принадлежащего *области определения функции* $f(x)$, на котором существует только один корень x_0 уравнения (1), искомое значение которого неизвестно. Границы этого отрезка можно рассматривать как первое приближение искомого значения корня x_0 (левая граница – с недостатком, а правая – с избытком).
2. *Уточнение найденного приближенного значения корня* – доведение его до заданной степени точности. Обозначив найденный отрезок, на котором находится единственный корень x_0, через $[\alpha_0, \beta_0]$ и, применив один из методов уточнения корня, получим более узкий

отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$, который содержится в отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$ и содержит искомый корень x_0. Критерием достижения заданной точности оценки искомого значения корня является величина абсолютной погрешности, которая не должна превышать допустимого значения (см. п. 1.2.7). Применив затем указанный процесс к отрезку $[\alpha_1, \beta_1]$, получим еще более узкий отрезок $[\alpha_2, \beta_2]$ и т. д.

Задания для самостоятельной работы по теме «Численное решение нелинейных уравнений» приведены в прил. 1.

1.2. Отделение корней уравнения *f*(*x*) = 0

Для решения *задачи отделения корней уравнения* (1) необходимо иметь критерий, позволяющий убедиться в выполнении следующих двух условий.

1. На рассматриваемом отрезке [α, β] существует корень уравнения (1).
2. Этот корень единственный на указанном отрезке [α, β].

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [α, β], а ее значения на концах отрезка $f(\alpha)$ и $f(\beta)$ имеют разные знаки, то на рассматриваемом отрезке существует по крайней мере одна точка x_0 такая, что $f(x_0) = 0$, т.е. по крайней мере один корень уравнения (1). Логическое условие существования корня уравнения (1) на отрезке [α, β] имеет вид

$$f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0. \qquad (2)$$

Геометрически это означает, что, если концы дуги графика непрерывной функции находятся по разные стороны оси *OX*, то дуга пересечет ось *OX* по крайней мере в одной точке $x = x_0$.

Корень x_0 заведомо будет единственным, если первая производная $f1(x)$[1] существует и сохраняет постоянный знак внутри интервала (α, β), т. е. функция $f(x)$ на данном интервале *монотонна*. Логическое условие монотонности функции на интервале (α, β) имеет вид

$$f1(\alpha) \cdot f1(\beta) > 0 \qquad (3)$$

[1] В тексте пособия принято обозначение производных функции: $f'(x)$ в виде $f1(x)$, $f''(x)$ в виде $f2(x)$.

Таким образом, *критерий для отделения корня* уравнения (1) следующий. Если на отрезке [α, β] функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, а ее значения на концах отрезка имеют разные знаки, то на данном отрезке существует один и только один корень уравнения (1).

Алгоритм 1.1. Отделение корней уравнения f(x) = 0

1. Исследовать *область существования и определения* функции $f(x)$. Найти точки разрыва функции $f(x)$. Найти границы интервалов (α, β), на которых функция $f(x)$ непрерывна, а ее значения на границах интервала имеют разные знаки.
2. Найти *критические точки* (границы интервалов монотонности) функции $f(x)$ *формульным* (по формулам корней уравнения $f1(x) = 0$) и *табличным* способами (по таблице значений функции $f1(x)$). Отобразить критические точки функции $f(x)$ на **Точечной** диаграмме (графике функции $y = f(x)$)
3. Отделить корни уравнения (1) на основе *критерия для отделения корня*. Найти границы отрезка [α, β], где существует единственный корень x_0 уравнения (1) *формульным* и *табличным* способами. Отобразить результаты на диаграмме (графике функции $y = f(x)$).
4. Произвести оценку погрешности найденных приближенных значений корней уравнения (1) различными способами.

1.2.1. Исследование областей существования и определения функции

В учебном пособии рассматриваются функции $f(x)$, которые заданы *формулами* (см. прил. 1).

Функция $y = f(x)$, в которой каждому значению x (независимой переменной) из множества X ставится в соответствие одно вполне определенное значение величины y (зависимой переменной), является *определенной на множестве X*. Множество X – это *область существования функции*.

Область существования функции $f(x)$ определяется формулой, задающей функцию, а ее *область определения* задается условиями решаемой задачи, либо физическим смыслом изучаемого явления. То есть *областью определения* функции $f(x)$ может быть любая часть *области существования* функции, на которой функция $f(x)$ непрерывна, или они могут полностью совпадать.

Таким образом, когда говорят, что дана функция $y = f(x)$, то полагают, что дана ее *область определения* X – она либо указано явно, либо ее надо предварительно найти с использованием математического анализа. Например, если по условию задачи нужно найти корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[\alpha, \beta]$, то *область определения функции* $f(x)$ есть отрезок $[\alpha, \beta]$, на котором функция $f(x)$ непрерывна, а ее значения на границах отрезка имеют разные знаки.

Пример 1.1.1

Пусть функция имеет вид

$$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{4}$$

где a, b, c, d – некоторые фиксированные числа, не равные нулю. Исследовать *области существования и определения функции* $y = f(x)$.

Каждому действительному числу α можно поставить в соответствие одно действительное число $y = a\alpha^3 + b\alpha^2 + c\alpha + d$. То есть *область существования* функции (4) – это множество всех действительных чисел $(-\infty, +\infty)$. Функция $f(x)$ *непрерывна* на всем интервале *области существования*. Значения функции $f(x)$ на границах интервала имеют разные знаки ($f(-\infty) < 0$; $f(+\infty) > 0$). *Область определения функции* $y = f(x)$ полностью совпадает с ее *областью существования*.

Пример 1.1.2

Пусть функция имеет вид

$$f(x) = \mathrm{tg}ax - bx \tag{5}$$

где a, b – некоторые фиксированные числа, не равные нулю. Исследовать *области существования и определения функции* $y = f(x)$ при поиске положительных корней уравнения $f(x) = 0$.

Каждому действительному числу α (как радианной мере угла), такому, что $\alpha \neq (\pi/2 + k\pi)/a$, где k – любое целое число, можно поставить в соответствие одно действительное число $y = \mathrm{tg}a\alpha - b\alpha$. То есть, *область существования* функции (5) – множество всех действительных чисел $(-\infty, +\infty)$, кроме чисел $x_{\text{тр}k} = (\pi/2 + k\pi)/a)$, где k = 0, 1, 2,… ($x_{\text{тр}k}$ – *точки разрыва*).

Область определения функции (5), во-первых, ограничивается неотрицательными значениями $x \in (0; +\infty)$, а, во-вторых, делится точками разрыва на интервалы:

$$(0;\ \pi/(2a));\ (\pi/(2a);\ (\pi/2\ +\pi)/a));\ ((\pi/2 + \pi)/a);\ (\pi/2 + 2\pi)/a));....$$

Предполагаем, что значения функции $f(x)$ на границах интервалов имеют разные знаки.

Примеры исследования областей существования и определения функций, которые даны в заданиях на самостоятельную работу (см. прил. 1), приведены в прил.2.

1.2.2. Отыскание критических точек функции $f(x)$

Алгоритм 1.2. Определение критических точек функции f(x) формульным способом

1. По данной $y = f(x)$ определить формулы первой производной $f1(x)$ и действительных корней уравнения $f1(x) = 0$. Определение формул для вычисления критических точек функций $f(x)$, которые даны в заданиях для самостоятельной работы (см. прил.1), приведено в прил. 3.
2. Вычислить по формулам действительные корни уравнения $f1(x) = 0$ *(критические точки функции)* xk_i, i = 1, 2,…, которые делят *область определения* функции $(-\infty,\ +\infty)$ на *интервалы монотонности*
$$(-\infty, xk_1), (xk_1, xk_2), (xk_2, +\infty). \qquad (6)$$
3. Вычислить значения функции $f(x)$ в критических точках $f(xk_i)$. Проверить *условие существования корня* (2) уравнения (1) на интервалах монотонности (6).
4. Исследовать *область определения* функции $f(x)$.

Пример 1.2

Для функции $f(x)$ вида (4) найти критические точки xk_i *формульным* способом.

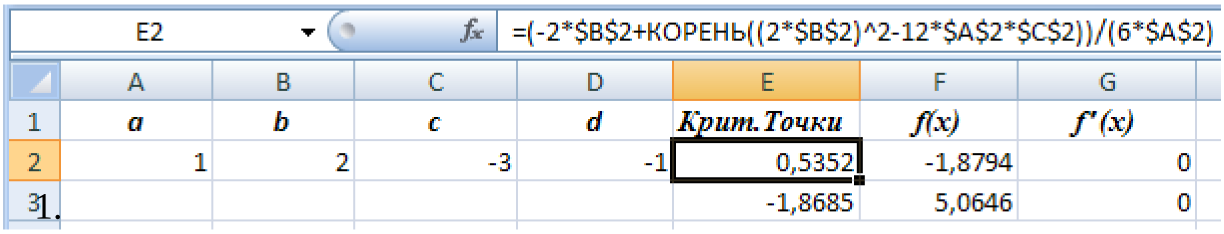
Продолжить пример 1.1.1. Выполнить запуск MS Excel. Переименовать *Лист 1* на *Лист Пример 1_2*. Пусть коэффициенты $f(x)$ (4) заданы числовыми значениями: a = 1; b = 2; $c = -3$; $d = -1$. Следуя инструкциям алгоритма 1.2, необходимо выполнить следующие действия.

1. Определить формулы для производных $f1(x)$, $f2(x)$ функции $f(x)$ вида (4) и для вычисления корней $xk_{1,2}$ уравнения $f1(x) = 0$.

Таблица 1.

Характеристика	Выражение
Функция $f(x)$	$f\,(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$
Первая производная $f1(x)$	$f1(x) = 3ax^2 + 2bx + c$
Критические точки (корни $f1(x)$=0)	$xk_{1,2} = (-b \pm \sqrt{b^2 - 3ac}\,)/(3a)$
Вторая производная $f2(x)$	$f2(x) = 6ax + 2b$

2. Ввести числовые значения коэффициентов a, b, c, d выражения (4) в ячейки электронной таблицы A2:D2 (рис. 1).



E2 | =(-2*$B$2+КОРЕНЬ((2*$B$2)^2-12*$A$2*$C$2))/(6*$A$2)

	A	B	C	D	E	F	G
1	*a*	*b*	*c*	*d*	*Крит.Точки*	*f(x)*	*f'(x)*
2	1	2	-3	-1	0,5352	-1,8794	0
3					-1,8685	5,0646	0

Рис. 1. Электронная таблица вычисления значений критических точек функции $f(x)$ вида (4)

3. Ввести формулу в ячейку E2 для вычисления значения критической точки xk_1 (по данным табл. 1)

$$= (-\$B\$2 + \text{КОРЕНЬ}\ (\$B\$2\text{^}2 - 3 * \$A\$2 * \$C\$2)/(3 * \$A\$2) \qquad (7)$$

(см. рис. 1, строка формул Рабочего окна). При вводе адресных ссылок, например, $B$2 применить средство их *автоматического ввода*, путем выделения ячеек, щелкнув на них мышью. Абсолютная адресная ссылка вводится нажатием клавиши <F4>. Ввод имени встроенной функции КОРЕНЬ( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel: продолжить набирать формулу в ячейке E2, установить курсор после символа «+»; ввести первый символ «К» имени функции – под ячейкой появится раскрывающийся список (рис. 2). Выбрать элемент «КОРЕНЬ» из списка, дважды щелкнув на нем; в строку формул будет вставлено выражение «КОРЕНЬ(» с одной скобкой – закрывающую скобку следует набрать после ввода выражения аргумента. Завершить ввод формулы (7) и нажать клавишу <Enter>. В ячейку E2 будет возвращено значение xk_1, равное 0,5352.

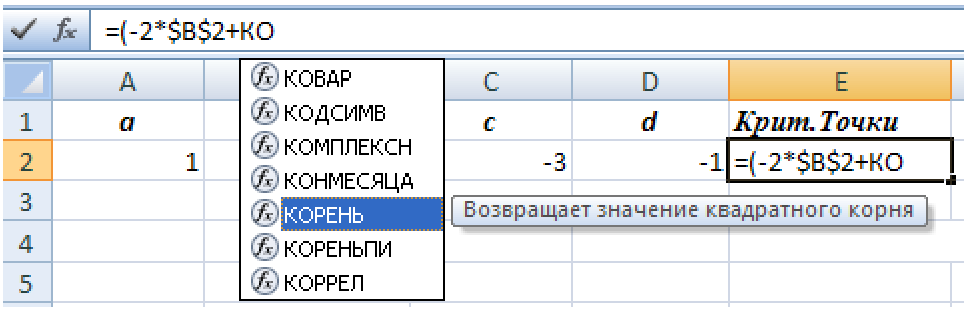


Рис. 2. Ввод имени встроенной функции КОРЕНЬ с помощью функции Автозавершение формул

4. Ввести формулы в ячейки F2 и G2 (см. рис. 1) для вычисления значений функции *f*(*x*) в критической точке xk_1 *автоматическим способом*

$$= \$A\$2 * E2\text{^}3 + \$B\$2 * E2\text{^}2 + \$C\$2 * E2 + \$D\$2 \qquad (8)$$

и первой производной *f1*(*x*) (по данным табл. 1)

$$= 3*\$A\$2*E2\text{^}2 + 2*\$B\$2*E2 + \$C\$2. \qquad (9)$$

В ячейку F2 будет возвращено вычисленное значение *f*(0,535) = –1,8794, а в ячейку G3 – вычисленное значение *f1*(0,535) = 0.

5. Ввести формулу в ячейку E3 для вычисления значения критической точки xk_2 (по данным табл. 1)

$$= (-\$B\$2 - \text{КОРЕНЬ} (\$B\$2\text{^}2 - 3 * \$A\$2 * \$C\$2)/(3 * \$A\$2).$$

Данная формула отличается от формулы (7) знаком « – ». Для ввода формулы применим *способ копирования формулы в ячейке E2 через* *строку формул*: выделить ячейку E2; выделить формулу в строке формул способом *протаскивания указателя мыши* по формуле; скопировать выделенную формулу в буфер обмена, нажав клавиши <Ctrl> + <C>; завершить копирование нажатием клавиши <Esc>. Вставить формулу в выделенную ячейку E3: установить курсор ввода в строке формул и нажать клавиши <Ctrl> + <V>. Выполнить редактирование формулы в ячейке E3, заменив в выражении (7) символ «+» на «−», и нажать клавишу <Enter>. В ячейку E3 будет возвращено вычисленное значение xk_2, равное −1,8685.

6. Ввести формулы в ячейки F3и G3для вычисления значений функции $f(x)$ в критической точке xk_2 (см. рис. 1)

   = $A$2 * E3^3 + $B$2 * E3^2 +$C$2 * E3 + $D$2

   и первой производной $f1(x)$

   = 3 * $A$2 * E3^2 +2 * $B$2 * E3 + $C$2.

   Формулы в ячейках F3 и G3 отличаются от формул (8) и (9) адресной ссылкой E3. Применить копирование формул в ячейках F2 и G2 в ячейки F3 и G3 способом *протаскивания указателя мыши* с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формул. Выделить ячейки F2 и G2, подвести указатель мыши к *черному квадратику* в правом нижнем углу ячейки G2 (курсор примет вид *крестика*), удерживая кнопку мыши, *протащить крестик* в ячейку G3. Завершить копирование, отпустив кнопку мыши. Из-за действия *механизма относительной адресации* редактирование формул в ячейках F3 и G3 не требуется: адрес E2 будет автоматически заменен адресом E3. В ячейку F3 будет возвращено вычисленное значение $f(-1{,}8685)$, равное 5,0646, а в ячейку G3 − значение $f1(-1{,}8685)$, равное 0 (см. рис. 1).

7. Исследовать значения первой производной $f1(x)$ в критических точках при $x = xk_1$ и $x = xk_2$ (см. рис. 1). *Область определения функции* $f(x)$

полностью совпадает с *областью определения первой производной* $f1(x)$ (см. пример 1.1.1). Значения первой производной $f1(x)$ в критических точках, представленные в ячейках G2 и G3, равны нулю, т.е. $xk_1= -1{,}869$; $xk_2 = 0{,}535$ являются корнями уравнения $f1(x) = 0$.

8. Исследовать о*бласть определения функции* $f(x)$. При переходе через значения xk_1 и xk_2 производная $f1(x)$ меняет знак. Критические точки делят область определения функции $f(x)$ на интервалы монотонности (6). Значения функции $f(x)$ в критических точках, представлены в ячейках F2 и F3. Определим знаки функции $f(x)$ на границах интервалов монотонности:

$$f(-\infty) < 0;\ f(-1{,}869) > 0;\ f(0{,}535) < 0;\ f(+\infty) > 0. \qquad (10)$$

Знаки функции $f(x)$ на границах интервалов монотонности разные, что позволяет утверждать на основании критерия, который используется для отделения корней (см. п. 1.2), внутри этих интервалов существуют действительные корни уравнения $f(x) = 0$.

9. Для отыскания корней уравнения $f(x) = 0$ бесконечный интервал $(-\infty, +\infty)$ необходимо сузить. Для этого достаточно непосредственно проверить знак в целочисленных точках, принадлежащих бесконечному интервалу. Значение левой границы первого интервала $(-\infty; xk_1)$, например, примем равной -4, а значение правой границы интервала $(xk_2, +\infty)$ примем равной 3. Проверим знаки функции $f(x)$ на границах интервала $(-4; 3)$: $f(-4) < 0$, $f(3) > 0$. Знаки функции $f(x)$ на границах интервала $(-4; 3)$ соответствуют знакам функции $f(x)$ на границах интервала $(-\infty, +\infty)$ (10). Таким образом, за область определения функции $f(x)$ можно принять интервал $(-4; 3)$ который делится критическими точками на три отрезка

$$[-4; -1{,}859],\ [-1{,}859; 0{,}535],\ [0{,}535; 3]. \qquad (11)$$

Границы этих отрезков можно рассматривать как первое приближение искомых значений корней (левая граница – с недостатком, правая –

с избытком). Дальнейшее сужение границ найденных отрезков до заданной точности eps – это *задача уточнения корня* (см. п. 1.1.).

Алгоритм 1.3. Отделение корней уравнения $f1(x) = 0$ табличным способом

Пусть дана функция $f(x)$, которая непрерывна и дифференцируема на интервале (α,β). Значения x, $f(x)$ и $f1(x)$ заданы в виде таблицы значений.

Корни уравнения $f1(x) = 0$, которые являются критическими точками $f(x)$ неизвестны. Задача отыскания корней уравнения $f1(x) = 0$ решается в два этапа: отделение отрезка, на котором существует корень уравнения; сужения отрезка до достижения заданной точности отыскания корня (см. п. 1.1).

Для отделения критических точек функции $f(x)$ табличным способом необходимо выполнить следующие действия.

1. Вычислить таблицу значений x_i с постоянным шагом h на отрезке [α, β], где x_1 = α, $x_2 = x_1 + h_x, \ldots, x_i = x_{i-1} + h_x, \ldots, x_n = x_{n-1} + h_x$ = β.

   По данным таблицы x_i вычислить таблицы значений $f(x_i)$ и $f1(x_i)$.
2. По данным таблицы ряда значений первой производной $f1(x_i)$ отделить отрезок $[x_{i-1}; x_i]$, на котором выполняется логическое *условие существования корня* на отрезке вида (2). По аналогии с логическим условием (2) логическое условие для функции $f1(x)$, заданной таблично, имеет вид

$$f1(x_i) \cdot f1(x_{i-1}) < 0 \qquad (12)$$

3. Проверить выполнение логического условия (12) с помощью логической функции ЕСЛИ. Если логическое условие (12) имеет значение ИСТИНА, *то* на данном отрезке существует корень уравнения $f1(x) = 0$ (критическая точка $f(x)$), *иначе* корень отсутствует.

Пример 1.3.

Для функции $f(x)$ вида (4) отделить критические точки функции табличным способом. Продолжить пример 1. 2 (см. рис. 1). Скопировать *Лист Пример 1_2* и переименовать на *Лист Пример 1_3*. Следуя инструкциям алгоритма 1. 3, выполнить следующие действия.

1. Создать электронную таблицу вычисления ряда значений величины x на отрезке $[-4; 3]$ по формуле арифметической прогрессии ($x_1 = -4$; $x_i = x_{i-1} + h_x$, где i = 2, 3,…, 15) (рис. 3). Ввести в ячейки: B3 значение −4 (начальное значение x_1; в D3 значение 0,5 (шаг h_x). В ячейку A5 ввести формулу = B3, чтобы скопировать значение x_1 Выделить диапазон A6:A19. Ввести в ячейку A6 формулу = A5 + \$D\$3 для вычисления x_2 ($x_2 = x_1 + h_x$). Выполнить копирование формулы в ячейке A6 на диапазон A7:A19 для автоматического ввода формулы в ячейки диапазона с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формулы (удерживая клавишу <Ctrl>, нажать клавишу<Enter>).
2. Создать электронную таблицу вычисления ряда значений величины функции $f(x_i)$ (4), представленных в диапазоне B5:B19, для значений x_i (диапазон A5:A19). В ячейку B5 ввести формулу

   = \$A\$2 * A5^3 + \$B\$2 * A5^2 + \$C\$2 * A5 + \$D\$2 (13)

   При этом следует учесть, что ранее в ячейку F2 уже была введена формула вычисления значения функции (8) (см. пример 1.2), которая отличается от (13) только адресом аргумента (E2). Для ввода формулы (13) применить *копирование формулы* (8) в ячейке F2 в буфер обмена и *вставку формулы* в ячейку B5. Для копирования формулы в буфер обмена выделить ячейку F2 и нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <C>. Выделить диапазон B5:B19 и в ячейку B5 вставить формулу вычисления ряда значения функции $f(x)$ из буфера обмена, применив команду **Вставить** на вкладке **Главная** Ленты. Редактирование адресной ссылки E2 формулы (8) на A5 не требуется с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формулы (см. рис. 3).

B5 f_x =$A$2*A5^3+$B$2*A5^2+$C$2*A5+$D$2

	A	B	C	D	E	F	G
1	***a***	***b***	***c***	***d***	***Крит.Точки***	***f(x)***	***f 1 (x)***
2	1	2	-3	-1	0,5352	-1,8794	0
3	***Нач.знач x***	-4	***hx***	0,5	-1,8685	5,0646	0
4	***x***	***f(x)***	***f1(x)***				
5	-4	-21	29				
6	-3,5	-8,875	19,75				
7	-3	-1	12				
8	-2,5	3,375	5,75				
9	-2	5	1				
10	-1,5	4,625	-2,25				
11	-1	3	-4				
12	-0,5	0,875	-4,25				
13	0	-1	-3				
14	0,5	-1,875	-0,25				
15	1	-1	4				
16	1,5	2,375	9,75				
17	2	9	17				
18	2,5	19,625	25,75				
19	3	35	36				

Рис. 3. Электронная таблица вычисления рядов значений величин x, $f(x)$, $f1(x)$

3. Создать электронную таблицу вычисления ряда значений величины производной $f1(x_i)$ (см. табл. 1), представленных в диапазоне C5:C19, для ряда значений x_i (диапазон A5:A19). В ячейку C5 ввести формулу

$$= 3 * \$A\$2 * A5\text{^}2 + 2*\$B\$2 * A5 + \$C\$2. \qquad (14)$$

По аналогии с вычислением значений функции $f(x)$ (диапазон B5:B19) (см. п.2) применить копирование формулы (9) в ячейке G2 (вычисление производной $f1(x)$) в буфер обмена. Выделить диапазон C5:C19 и вставить формулу в ячейку C5, применив команду **Вставить** на вкладке **Главная** Ленты. Редактирование адресной ссылки E2 формулы (9) в ячейке C5 на A5 не требуется с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формулы.

4. Создать электронную таблицу проверки логического условия (12). Выделить диапазон E6:E19, ввести в ячейку E6 формулу для проверки логического условия и принятия решения о выполнении *условия*

существования корня уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[x_1; x_2]$ (рис. 4), которая имеет вид

$$= \text{ЕСЛИ}(C5 * C6 < 0; \text{"Критическая точка"}; \text{"Нет"}),$$

где C5 и C6 – это адреса ячеек, в которых находятся вычисленные значения $f1(x_1)$ и $f1(x_2)$ на границах отрезка .

E6 | =ЕСЛИ(C5*C6<0;"Крит.точка";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
1	*a*	*b*	*c*	*d*	*Крит.Точки*	*f(x)*	*f 1 (x)*
2	1	2	-3	-1	0,5352	-1,8794	0
3	*Нач.знач x*	-4	*hx*	0,5	-1,8685	5,0646	0
4	*x*	*f(x)*	*f1(x)*		*Крит.точка*		
5	-4	-21	29				
6	-3,5	-8,875	19,75		Нет		
7	-3	-1	12		Нет		
8	-2,5	3,375	5,75		Нет		
9	-2	5	1		Нет		
10	-1,5	4,625	-2,25		Крит.точка		

Рис. 4. Электронная таблица отделения корней уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[-4; 3]$

Ввод имени встроенной функции ЕСЛИ( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). При различных знаках значений величин в ячейках C5 и C6 логическое выражение $C5 * C6 < 0$ имеет значение ИСТИНА и в ячейке E6 оператор ЕСЛИ вернет значение «Критическая точка», иначе – вернет значение «Нет» (значение логического выражения ЛОЖЬ).

Выполнить копирование формулы в ячейке E6 на диапазон E6:E19 для *автоматического ввода* формулы в ячейки диапазона с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формулы (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). Анализ результатов проверки логического условия (12) показал (см. рис. 4), что на отрезках $[-2; -1{,}5]$, $[0{,}5; 1{,}0]$ выполняется *условие существования корня* уравнения $f1(x) = 0$, т.е. на этих отрезках *существуют критические точки* функции $f(x)$. Полученные результаты соответствуют расчетным значениям по формулам

$xk_2 = -1{,}869$; $xk_2 = 0{,}535$ (см. пример 1.2), которые находятся внутри этих отрезков.

1.2.3. Уточнение корня уравнения $f1(x) = 0$ *табличным способом*

Точность приближенного значения корня xk уравнения $f1(x) = 0$ определяется длиной отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, содержащего единственную критическую точку. Уточнение найденного приближенного значения критической точки xk до заданной точности eps представляет собой итерационный процесс и выполняется в два этапа.

1. На *первом* этапе исходный отрезок $[x_{i-1}; x_i]$, делится на n отрезков $[x_{j-1}; x_j]$, (обычно принимают $n = 10$, $j = 2, 3, \ldots, n$) и отделяется более узкий отрезок $[x^1_{j-1}; x^1_j]$, который содержится на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ и на котором с помощью функции ЕСЛИ проверяется выполнение *логического условия существования корня* уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке. По аналогии с (12) логическое условие для первой производной функции $f1(x)$ на отрезке $[x^1_{j-1}; x^1_j]$, имеет вид
$$f1(x^1_{j-1}) \cdot f1(x^1_j]) < 0. \qquad (15)$$
2. На каждой итерации с помощью функции ЕСЛИ проверяется логическое условие достижения заданной точности сужения отрезка: длина отрезка по модулю должна быть меньше *eps*.
$$\left| x^1_{j-1} - x^1_j \right| < \text{eps}. \qquad (16)$$
Если оба условия (15) и (16) выполняются, заданная точность отыскания корня уравнения $f1(x) = 0$ достигнута и процесс сужения отрезка следует завершить. В противном случае итерационный процесс сужения отрезка $[x^1_{j-1}; x^1_j]$ следует продолжить во второй итерации.

Алгоритм 1.4. Сужение отрезка существования корня уравнения $f1(x) = 0$ ***до заданной точности табличным способом***

Для сужения отрезка до заданной точности отыскания корня уравнения $f1(x) = 0$ табличным способом необходимо выполнить следующие действия.

1. По данным отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, на котором существует корень уравнения $f1(x) = 0$ (см. алгоритм 1.3), вычислить на *первой* итерации ряд значений x_j^1 по формуле арифметической прогрессии $x_j^1 = x_{j-1}^1 + h_x$. Задать начальное значение ряда $x_j^1 = x_{i-1}$ и шаг $h_x = 0{,}1 \cdot |x_i - x_{i-1}|$. Для полученных значений ряда $x^1{}_j$ вычислить ряд значений $f1(x_j^1)$.
2. Исследовать значения $f1(x_j^1)$ на границах отрезков $[x_{j-1}^1; x_j^1]$. Отделить отрезок $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ на *перво*й итерации, содержащий корень уравнения $f1(x) = 0$ (критическую точку xk), проверив выполнение *условия существования корня* (15) с помощью логической функции ЕСЛИ.
3. Исследовать достижение заданной точности eps оценки корня уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[x_{j-1}^1; x_j^1]$, проверив логическое *условие останова процесса уточнения критической точки* (16). Если условие (16) выполняется (модуль длины отрезка не превышает допустимое значение погрешности eps), то процесс сужения отрезка $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ следует завершить. За значение критической точки xk принимается значение правой границы отрезка, полученное в последней итерации.
4. Если условие (16) не выполняется, то итерационный процесс сужения отрезка $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ необходимо продолжить во второй итерации, повторив пп. 1-3 алгоритма. По данным отрезка $[x_{j-1}^1; x_j^1]$, вычислить на *второй* итерации ряд значений x_j^2 по формуле арифметической прогрессии $x_j^2 = x_{j-1}^2 + h_x$. Задать новое начальное значение ряда $x_1^2 = x_{j-1}^1$ и шаг $h_x = 0{,}1 \cdot |x_{j-1}^1 - x_j^1|$ (см. п. 1). Для полученных значений ряда x_j^2 вычислить ряд значений функции $f1(x_j^2)$.

Пример 1.4

Для функции $f1(x)$ (см. табл. 1) сузить отрезок существования корня до заданной точности отыскания корня уравнения $f1(x) = 0$ табличным способом. Продолжить пример 1.3 (см. рис. 3). Скопировать *Лист Пример 1_3* и переименовать в *Лист Пример 1_4*.

Следуя инструкциям алгоритма 1.4, выполнить следующие действия.

1. По данным интервала $[-2; -1{,}5]$, на котором существует корень уравнения $f1(x) = 0$ (см. пример 1.3), вычислить ряд значений x_j^1 по формуле арифметической прогрессии $x_j^1 = x_{j-1}^1 + h_x$. В ячейке электронной таблицы E23 задать для первой итерации начальное значение ряда $x_1^1 = -2$, в ячейке E25 – значение $h_x = 0{,}05$ (рис. 5).

D26 | =ЕСЛИ(ABS(A25-A26)<$E$27;"Точн.дост";"Нет")

	A	B	C	D	E	F
21	***Табличный способ уточнения корня уравнения f1 (x)= 0***					
22	***x***	***f1(x)***	***Крит.точка***	***Дост.точн***	***Нач.знач***	
23	-2	1			-2	
24	-1,95	0,6075	Нет	Нет	***Шаг***	
25	-1,9	0,23	Нет	Нет	0,05	
26	-1,85	-0,1325	Крит.точка	Нет	***Точность***	
27	-1,8	-0,48	Нет	Нет	0,001	
28	-1,75	-0,8125	Нет	Нет		
29	-1,7	-1,13	Нет	Нет		
30	-1,65	-1,4325	Нет	Нет		
31	-1,6	-1,72	Крит.точка	Нет		
32	-1,55	-1,9925	Нет	Нет		
33	-1,5	-2,25	Нет	Нет		

Рис. 5. Электронная таблица табличного сужения отрезка $[-2; -1{,}5]$ до достижения заданной точности

2. Выделить ячейку A23 и ввести формулу = E23 для копирования начального значения ряда. Выделить диапазон A24:A33 и ввести в ячейку A24 формулу = A23 + $E$25 для вычисления ряда значений x_j^1 по формуле арифметической прогрессии. Выполнить копирование формулы в ячейке A24 на диапазон A24:A33 для *автоматического ввода* формулы в ячейки диапазона с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формулы (комбинация клавиш <Ctrl> + +<Enter>). Числовые значения x_j^1 отображаются в ячейках диапазона A23:A33 «по умолчанию» в числовом формате

Общий: незначащие нули в целой и дробной частях числового значения не отображаются; выводимое значение округляется до 7 цифр (см. рис. 5).

3. Для ряда значений x_j^1, представленных в диапазоне A23:A33, вычислить ряд значений первой производной $f1(x_j^1)$. В ячейку B23 ввести формулу вида

   = 3 * $A$2 * A23^2 + 2*$B$2 * A23 + $C$2.

   Чтобы не повторять ввод формулы с клавиатуры применить копирование формулы (14) в ячейке C5 (см. рис. 3) в буфер обмена и вставку ее в B23, применив команду **Формула** меню вкладки **Вставка** Ленты. Выделить диапазон B23:B33 и в ячейку B23 вставить формулу вычисления значения первой производной функции $f1(x)$ из буфера обмена. Выполнить редактирование адресной ссылки #ССЫЛКА! в формуле (14), изменив ее на A23. Выполнить копирование формулы в ячейке B23 на диапазон B23:B33 для *автоматического ввода* формулы в ячейки диапазона (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). Числовые значения $f1(x_j^1)$ отображаются в ячейках диапазона B23:B33 «по умолчанию» в формате **Общий**.

4. Исследовать значения первой производной функции $f1(x)$, проверив выполнение *условия существования корня* уравнения $f1(x) = 0$ (15). Выделить диапазон C24:C33 и в ячейку C24 ввести формулу

   = ЕСЛИ (B23 * B24 < 0; "Критическая точка"; "Нет").

   Ввод имени встроенной функции ЕСЛИ( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). Выполнить копирование формулы в ячейке C24 на диапазон C4:C33 для *автоматического ввода* формулы в ячейки диапазона (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). На *первой* итерации корень уравнения $f1(x) = 0$ отделен на отрезке $[-1{,}9; -1{,}85]$ (см. рис. 5).

5. Исследовать достижение заданной точности eps = 0,001 на отрезке $[-1,9; -1,85]$, проверив *логическое условие останова процесса уточнения корня* (16). Ввести значение 0,001 в ячейку E27. Выделить диапазон D24:D33 и в ячейку D24 ввести формулу
= ЕСЛИ (ABS(A23 − A24) < $E$27; "Точность достигнута"; "Нет"). (17)
Ввод имен встроенных функций ЕСЛИ( ) и ABS( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel. Выполнить копирование формулы в ячейке D24 на диапазон D24:D33 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). Логическое условие ABS(A25 − A26) < $E$27 в формуле (17) в ячейке D26 не выполняется (значение ЛОЖЬ) и оператор ЕСЛИ возвращает значение «Нет» (см. рис. 5). Длина отрезка $[-1,9; -1,85]$ по модулю, равная 0,05, не удовлетворяет требованиям заданной точности. Итерационный процесс сужения отрезка $[-1,9; -1,85]$ необходимо продолжить, повторив пп. 1-3 в следующей итерации. В ячейках E23 и E25 следует задать для *второй* итерации значение $x_1^2 = -1,9$ и шаг $h_x = 0,005$, соответственно. В результате замены будет выполнен автоматически пересчет рядов значений x_j^2 и первой производной функции $f1(x_j^2)$.
6. Если условие (16) выполняется (длина отрезка $[-1,869; -1,868]$ не превышает допустимое значение eps = 0,001), то итерационный процесс сужения следует закончить (рис. 6). За значение критической точки xk принимается значение, равное одной из границ отрезка $[-1,869; -1,8685]$.
7. Провести анализ достижения заданной точности отделения корня уравнения $f1(x) = 0$ (критической точки функции $f(x)$) табличным способом, сравнив со значением $x = -1,8685$ в критической точке xk_1, вычисленной по формуле (см. рис. 2, ячейка E3). Значение $xk_1 = -1,8685$, которое получено табличным способом, совпадает с расчетным значением, вычисленным по формуле действительного

корня уравнения $f1(x) = 0$, с точностью до четвертого десятичного знака после запятой. При этом следует отметить, что табличный способ отыскания и уточнения действительного корня уравнения первой производной $f1(x)=0$ более эффективен по сравнению с формульным способом, т. к. не зависит от сложности функции $f(x)$.

D28 | =ЕСЛИ(ABS(A27-A28)<$E$29;"Точн.дост";"Нет")

	A	B	C	D	E	F
23	***Табличный способ уточнения корня уравнения f1 (x)= 0***					
24	***x***	***f1(x)***	***Крит.точка***	***Дост.точн***	***Нач.знач***	
25	-1,87	0,0107			-1,87	
26	-1,8695	0,0070908	Нет	Точн.дост	***Шаг***	
27	-1,869	0,003483	Нет	Точн.дост	0,0005	
28	-1,8685	-0,000123	Крит.точка	Точн.дост	***Точность***	
29	-1,868	-0,003728	Нет	Точн.дост	0,001	
30	-1,8675	-0,007331	Нет	Точн.дост		
31	-1,867	-0,010933	Нет	Точн.дост		
32	-1,8665	-0,014533	Нет	Точн.дост		
33	-1,866	-0,018132	Нет	Точн.дост		
34	-1,8655	-0,021729	Нет	Точн.дост		
35	-1,865	-0,025325	Нет	Точн.дост		

Рис.6. Достижение заданной точности сужения отрезка $[-2; -1{,}5]$

1.2.4. Отыскание корней уравнения **f1(x) = 0** *графическим способом*

Если функция $f1(x)$ непрерывна на отрезке $[\alpha, \beta]$, а ее значения на концах отрезка $f1(\alpha)$ и $f1(\beta)$ имеют разные знаки, то на рассматриваемом отрезке существует по крайней мере одна точка $x = xk_1$ такая, что $f(xk_1) = 0$. Логическое условие существования корня уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ имеет вид

$$f1(\alpha) \cdot f1(\beta) < 0. \tag{18}$$

Геометрически логическое условие (18) означает, что, если концы дуги графика непрерывной функции $y1 = f1(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ находятся по разные стороны оси абсцисс OX, то дуга пересечет ось OX по крайней мере в одной точке $x = xk_1$ (критической точке $f(x)$).

Алгоритм 1.5. Отыскание корней уравнения f1(x) = 0 графическим способом

Для отыскания корней уравнения $f1(x) = 0$ (критических точек функции $f(x)$) графическим способом необходимо выполнить следующие действия.

1. Построить график функции $y1 = f1(x)$ в области определения с настройками параметров *горизонтальной оси OX* в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси** «по умолчанию».
2. Отделить визуально на графике отрезки [α, β], принадлежащие области определения функции $f1(x)$, на которых существует единственный корень уравнения $f1(x) = 0$. Проверить геометрически выполнения условия существования единственного корня уравнения $f1(x) = 0$ (18) на этих отрезках.
3. Отделить *визуально* значение корня xk_1 уравнения $f1(x) = 0$, принадлежащего отрезку [α, β]. Провести анализ точности отделения корня уравнения $f1(x) = 0$ с учетом масштаба по оси *OX*.

   Обозначив исходный отрезок через $[\alpha_0, \beta_0]$, сузить его графическим способом с помощью настройки параметров фрагмента диаграммы **Горизонтальная ось (значений) OX** (*минимальное значение − фиксированное; максимальное значение − фиксированное*) в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси.** Отобразить на графике более узкий отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$, который содержится в отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$ и также содержит единственный корень. Сузить длину отрезков $[\alpha_k, \beta_k]$ итеративным способом до значения, позволяющего отделить корень на графике $y1 = f1(x)$ с заданной степенью точности eps.

Пример 1.5

Для функции $f(x)$ вида (4) отыскать корни уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке [−4; 3] графическим способом. Продолжить пример 1.3 (см. рис.3). Скопировать *Лист Пример 1_3* и переименовать на *Лист Пример 1_5*.

Следуя инструкциям алгоритма 1.5, выполните следующие действия.

1. Отобразить ряды значений x и $f1(x)$ на **Точечной** диаграмме. Выделить диапазоны A5:A19 и C5:C19, содержащие значения базовых рядов x и $f1(x)$, для отображения на диаграмме (см. рис. 3, пример 1.3). Выбрать на Ленте вкладку **Вставить**, далее в разделе **Диаграммы** выбрать тип диаграммы **Точечная** и подтип **Точечной** диаграммы – **Точечная с гладкими краями** (рис. 7).

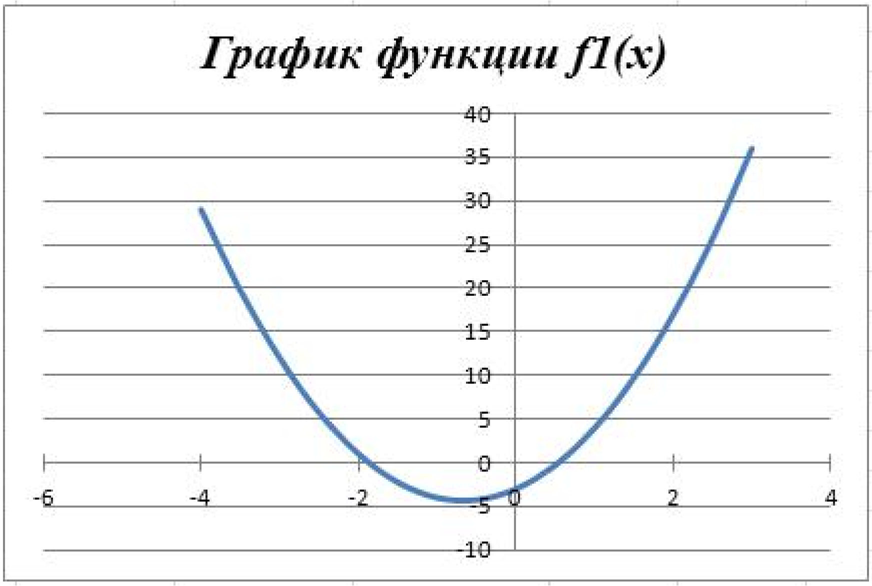
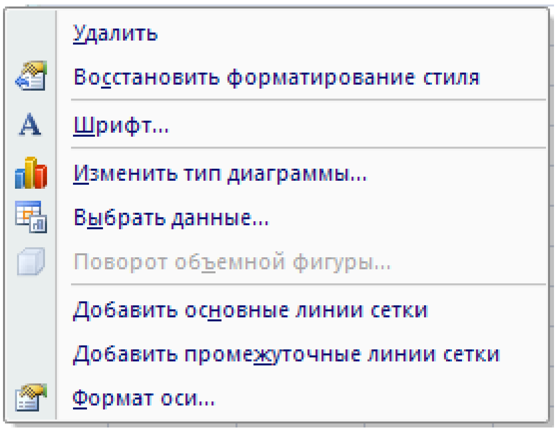


Рис. 7. График функции $f1(x)$ на отрезке $[-4; 3]$

2. Выполнить форматирование оси OX на диаграмме – настроить цену основных делений *горизонтальной оси (значений)* OX на диаграмме в соответствии с табличными значениями ряда x с помощью установки параметров в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси**. Чтобы вызвать диалоговое окно **Формат оси** необходимо: выделить элемент диаграммы **Горизонтальная ось (значений)** на диаграмме: установить указатель мыши на оси OX и щелкнуть правой кнопкой мыши. В контекстном меню выбрать команду **Формат оси**. На вкладке **Параметры оси**, которая открывается по умолчанию (рис. 8),



установить значение в окне: *цена основных делений – фиксированное* 0,5. В результате форматирования оси OX диаграмма (см. рис. 7) примет вид (рис. 9).

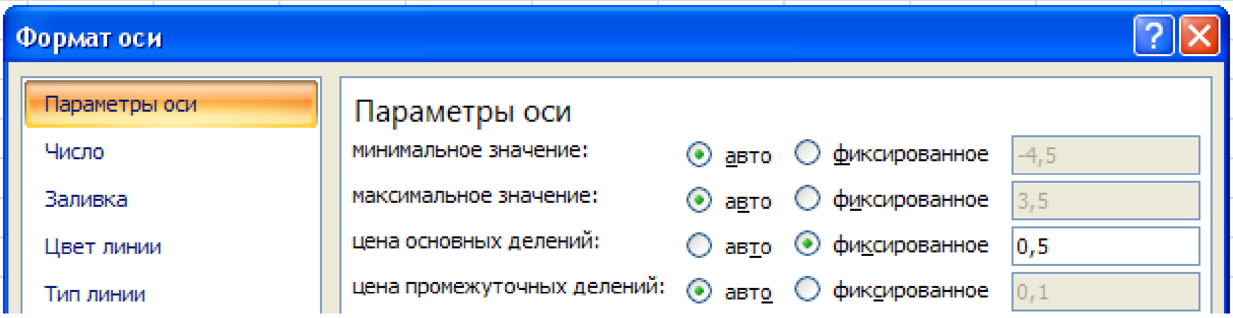


Рис. 8. Диалоговое окно с настройками оси OX для исследования критической точки функции на интервале [-2;-1,5]

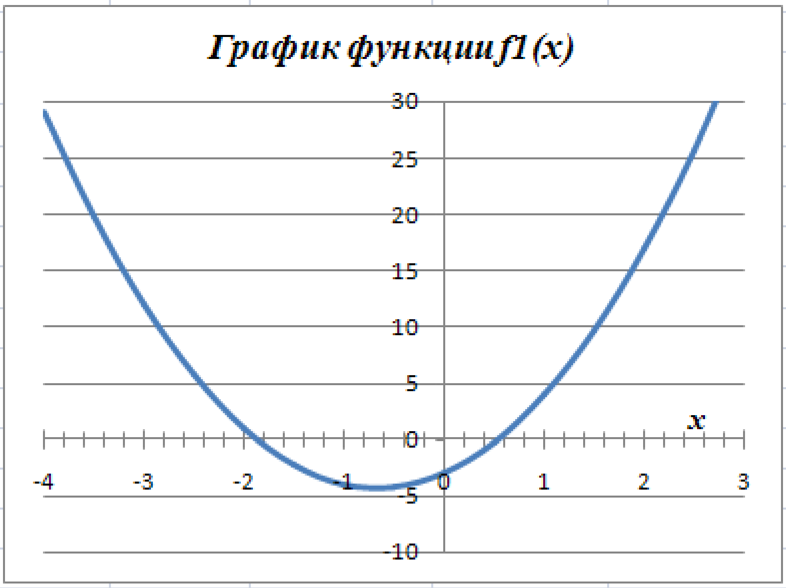


Рис. 9. График функции $y1=f1(x)$ с ценой 0,2 промежуточных делений оси OX

3. Отделить *визуально* на графике $y1=f1(x)$ отрезки $[-2; -1{,}8]$ и $[0{,}5; 0{,}6]$, принадлежащие области определения функции $f1(x)$, на которых существует единственный корень уравнения $f1(x)=0$. Проверить геометрически выполнение *условия существования единственного корня* уравнения $f1(x)=0$ (18) на каждом из этих отрезков. Для отделения корней уравнения $f1(x)=0$ на отрезках $[-2; -1{,}8]$ и $[0{,}5; 0{,}6]$ графическим способом необходимо создать копию диаграммы (рис. 9).

4. Отделить корень уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке [- 2; - 1,8] графическим способом на первой итерации следует с ценой основных делений равной 0,05. Выполнить форматирование оси OX на диаграмме (см. рис. 9) для отображения графика функции $y1=f1(x)$ с ценой 0,05 основных делений. Выделить на диаграмме фрагмент **Горизонтальная ось (значений)**, в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси** (рис. 8), установить значения параметров в окнах: *минимальное значение (по оси OX) – фиксированное* – 2,0; *максимальное значение (по оси OX) – фиксированное* – 1,8; *цена основных делений – фиксированное* 0,05. Выделить на диаграмме фрагмент **Вертикальная ось (значений)**, в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси** (см. рис. 8), установить значения параметров в окнах: *минимальное значение (по оси OY) – фиксированное* – 1,0; *максимальное значение (по оси OY) – фиксированное* 1,0. В результате форматирования диаграмма (см. рис. 9) примет вид (рис. 10).

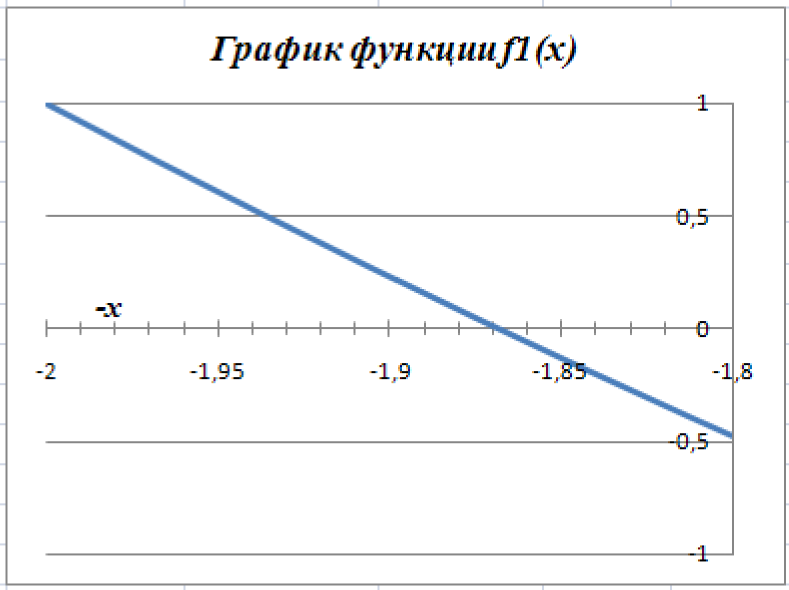


Рис. 10. График функции $f1(x)$ на отрезке $[-2; -1{,}8]$ с ценой 0,05 основных делений оси OX

Отделить визуально на графике отрезок $[-1{,}9; -1{,}85]$, принадлежащий отрезку $[-2; -1{,}5]$, на котором существует корень уравнения $f1(x) = 0$.

Проверить геометрически выполнение условия существования единственного корня $f1(x) = 0$ (18).

5. Достигнутая погрешность отделения корней уравнения $f1(x) = 0$ (см. рис. 10) составила 0,05 (цена основных делений по оси OX) и превышает допустимое значение eps=0,001. Итерационный процесс сужения отрезка $[-1{,}9; -1{,}85]$ следует продолжить на второй итерации. Чтобы отделить корень уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[-1{,}9; -1{,}85]$ необходимо выполнить форматирование оси OX на диаграмме (см. рис. 10) с ценой основных делений по оси OX, равной 0,005. Установить параметры осей OX и OY на диаграмме (см. п.4) в соответствии с настройками на рис. 11. В результате форматирования диаграмма (рис. 10) примет вид (рис. 11).

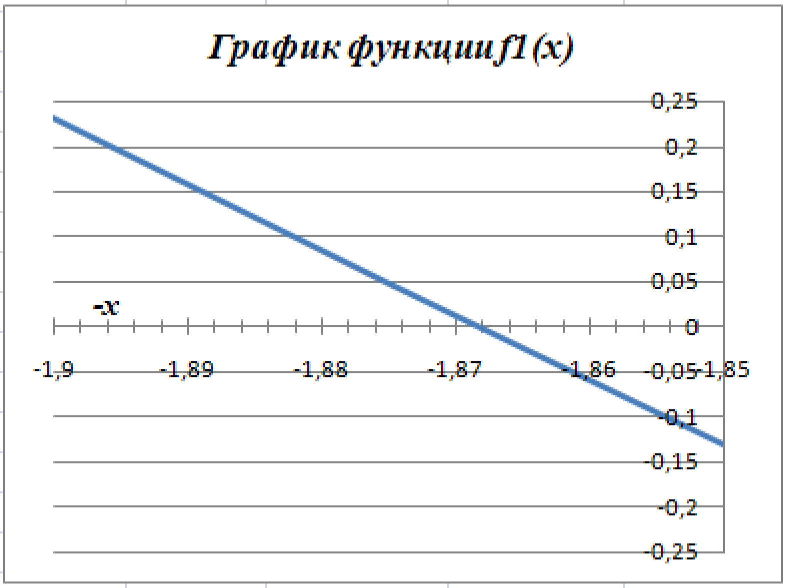


Рис. 11. График функции $f1(x)$ на отрезке $[-1{,}9; -1{,}85]$

с ценой 0,005 основных делений оси OX

6. Отделить *визуально* на графике $y1=f1(x)$ отрезок $[-1{,}87; -1{,}865]$, принадлежащие отрезку $[-1{,}9; -1{,}85]$, на котором существует корень уравнения $f1(x) = 0$. Проверить геометрически выполнение *условия существования единственного корня* $f1(x) = 0$ (18), соответствующего нулю функции $f1(x)$ на этом отрезке.

7. Достигнутая погрешность отделения корней уравнения $f1(x) = 0$ (см. рис. 11) составила 0,005 и также превышает допустимое значение eps = 0,001. Итерационный процесс сужения отрезка $[-1{,}87; -1{,}865]$ следует продолжить на третьей итерации. Чтобы отделить корень уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[-1{,}87; -1{,}865]$ необходимо выполнить форматирование оси *OX* на диаграмме (см. рис. 11) с ценой основных делений по оси *OX*, равной 0,0005. Установить параметры осей *OX* и *OY* (см. п.4), в соответствии с настройками на рис. 12.

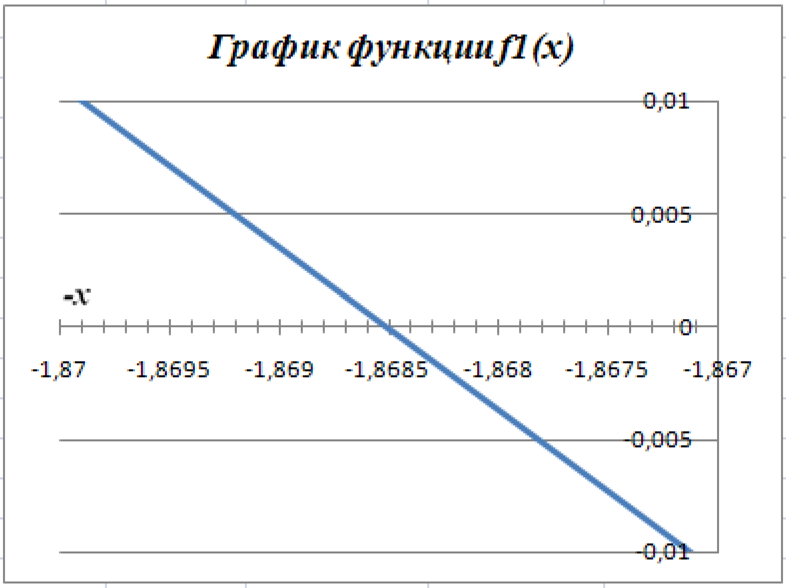


Рис. 12. График функции $f1(x)$ на отрезке $[-1{,}87; -1{,}865]$

с ценой 0,0005 основных делений оси *OX*

В результате форматирования диаграмма (рис. 11) примет вид, приведенный на рис. 12. Отделить *визуально* на графике отрезок $[-1{,}869; -1{,}8685]$, принадлежащий отрезку $[-1{,}87; -1{,}865]$,

\на котором существует корень уравнения $f1(x) = 0$. Проверить геометрически выполнение *условия существования единственного корня* $f1(x) = 0$ (18) на этом отрезке.

8. Достигнутая погрешность отделения корня уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[-1{,}869; -1{,}8685]$ (см. рис. 12) составила 0,0005, что удовлетворяет заданной точности 0,001. Провести анализ достижения заданной точности отделения корня уравнения $f1(x) = 0$

(критической точки функции $f(x)$) графическим способом, сравнив со значением $x = -1{,}8685$ в критической точке xk_1, вычисленной по формуле (см. рис. 3, ячейка E3). Итерационный процесс сужения отрезка $[-2; -1{,}5]$ следует завершить. За приближенное значение корня уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[-2; -1{,}5]$ принимается значение, равное одной из границ отрезка $[-1{,}869; -1{,}8685]$.

9. Алгоритм итерационного процесса сужения отрезка $[0{,}5; 1{,}0]$ графическим способом аналогичен процессу сужения отрезка $[-2; -1{,}5]$ (см. пп.4-9). Чтобы отделить корень уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке $[0{,}5; 1{,}0]$ необходимо использовать копию диаграммы (рис. 9). На заключительной (четвертой) итерации в результате форматирования диаграмма графика функции $y1=f1(x)$ на отрезке $[0{,}535; 0{,}536]$ с *ценой основных делений оси* $OX - 0{,}001$ и *ценой промежуточных делений* $- 0{,}0002$ примет вид, приведенный на рис. 13.

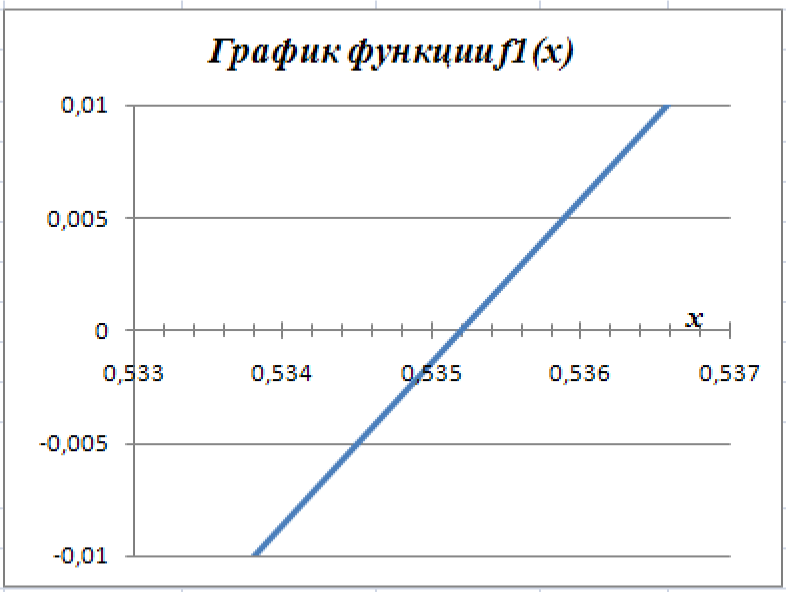


Рис. 13. График функции $f1(x)$ на отрезке $[0{,}535; 0{,}536]$ с ценой 0,001 основных делений оси Ox

Отделить *визуально* на графике отрезок $[0{,}5352; 0{,}5354]$, принадлежащий отрезку $[0{,}535; 0{,}536]$, на котором существует корень уравнения $f1(x) = 0$. Проверить геометрически выполнение *условия* *существования единственного корня* $f1(x) = 0$ (18), на этом отрезке. Достигнутая точность отделения корней уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке [0,5352; 0,5354] (см. рис. 13) составила 0,0002, что удовлетворяет заданной точности 0,001.

10. Провести анализ достижения заданной точности отделения корня уравнения $f1(x) = 0$ (сравнив со значением $xk_1 = 0{,}5352$ в критической точке, вычисленной по формуле (см. рис. 3, ячейка E2). Итерационный процесс сужения отрезка [0,5; 1,0] следует завершить. За приближенное значение корня уравнения $f1(x) = 0$ на отрезке [0,5; 1,0] принимается значение, равное одной из границ отрезка [0,5352; 0,5354].

1.2.5. Отделение корней уравнения f(x) = 0 *табличным способом*

Критерий для отделения корня уравнения (1) сформулирован в разделе 1.2. «Отделение корней уравнения $f(x) = 0$».

Логическое условие, которое имеет значение ИСТИНА, когда *условие существования корня уравнения* на отрезке [α, β] выполняется, имеет вид (2).

Логическое условие, которое имеет значение ИСТИНА, когда *условие монотонности функции* на интервале (α, β) выполняется, имеет вид (3).

Логическое условие, в котором с помощью логической функции И объединяются два логических условия (2) и (3) и которое имеет значение ИСТИНА, когда выполняются оба *условия*, имеет вид

$$\text{И } (f(\alpha) \cdot f(\beta) < 0;\ f1(\alpha) \cdot f1(\beta) > 0). \qquad (19)$$

Алгоритм 1.6. Отделение корней уравнения f(x) = 0 *табличным способом*

Пусть дана функция $f(x)$, которая непрерывна и дифференцируема на интервале (α, β). Значения x, $f(x)$ и $f1(x)$ заданы в виде таблицы значений.

1. Вычислить таблицу значений x_i с постоянным шагом h_x на отрезке [α, β], где $x_1 = \alpha$; $x_2 = x_1 + h_x, \ldots, x_i = x_{i-1} + h_x, \ldots, x_n = x_{n-1} + h_x = \beta$. По данным таблицы x_i вычислить таблицы значений $f(x_i)$ и $f1(x_i)$.

2. По данным таблицы ряда значений функции $f(x_i)$ отделить отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, на котором выполняется логическое *условие существования корня* на отрезке вида (2).

$$f(x_i) \cdot f(x_{i-1}) < 0. \qquad (20)$$

Проверить выполнение логического условия (20) с помощью логической функции ЕСЛИ. Если логическое условие (20) имеет значение ИСТИНА (на данном отрезке существует корень уравнения $f(x) = 0$) вывести текст «Сущ.корень», иначе «Нет». Провести анализ результатов выполнения *условия существования корня* уравнения $f(x) = 0$ на этих отрезках.

3. По данным таблицы ряда значений функции $f1(x_i)$ отделить интервал $(x_{i-1}; x_i)$, на котором выполняется логическое *условие монотонности функции* на интервале вида (3).

$$f1(x_i) \cdot f1(x_{i-1}) > 0. \qquad (21)$$

Проверить выполнение логического условия (21) с помощью логической функции ЕСЛИ. Если логическое условие (21) имеет значение ИСТИНА (на данном интервале функция $f1(x)$ монотонна) вывести текст «Монотонна», иначе «Нет». Провести анализ результатов выполнения *условия монотонности* функции $f1(x)$ на этих интервалах.

4. Исследовать значения функции $f(x_i)$ на границах отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, заданных таблично, проверив выполнение *условия существования единственного корня* (19). По аналогии с условием (19) логическое условие для таблично заданных функций $f(x_i)$ и $f1(x_i)$, имеет вид

$$\text{И}(f(x_i) \cdot f(x_{i-1}) < 0; f1(x_i) \cdot f1(x_{i-1}) > 0). \qquad (22)$$

Проверить выполнение логического условия (22) с помощью логической функции ЕСЛИ. Если логическое условие (22) имеет значение ИСТИНА (на данном интервале *существует единственный корень* функции $f(x)$), вывести текст «Существует единственный корень», иначе «Нет». Провести анализ результатов выполнения *условия существования единственного корня* на этих отрезках.

Пример 1.6

Для функции *f*(*x*) вида (4) отделить корни уравнения *f*(*x*) = 0 табличным способом. Продолжить пример 1.3 (см. рис.3). Скопировать *Лист Пример 1_3* и переименовать в *Лист Пример 1_6*. Следуя инструкциям алгоритма 1.6, выполнить следующие действия.

1. Создать электронную таблицу проверки логического условия (20). Выделить диапазон F6:F19, и в ячейку F6 ввести логическую формулу с функцией ЕСЛИ для проверки логического условия и принятия решения о выполнении *условия существования корня* на отрезке $[x_{i-1}\ x_{i1}]$, которая имеет вид

   = ЕСЛИ (B5 * B6 <*0*; "Сущ.корень"; "Нет"). (23)

   Ввод имени встроенной функции ЕСЛИ( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). Выполнить копирование формулы в ячейке F6 на диапазон (рис. 14).

F8 =ЕСЛИ(B7*B8<0;"Существ.кор";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	*a*	*b*	*c*	*d*	*Крит.Точки*	*f(x)*	*f'(x)*	
2	1	2	-3	-1	0,5352	-1,8794	0	
3	*Нач.знач x*	-4	*hx*	0,5	-1,8685	5,0646	0	
4	x	*f(x)*	*f '(x)*		***Отделение корней***			
5	-4	-21	29		*Крит.точка*	*Существ.корн*	*Монотонна*	*Сущ.ед.кор*
6	-3,5	-8,875	19,75		Нет	Нет	Монотонна	Нет
7	-3	-1	12		Нет	Нет	Монотонна	Нет
8	-2,5	3,375	5,75		Нет	Существ.кор	Монотонна	Сущ.ед.кор
9	-2	5	1		Нет	Нет	Монотонна	Нет
10	-1,5	4,625	-2,25		Крит.точка	Нет	Нет	Нет
11	-1	3	-4		Нет	Нет	Монотонна	Нет
12	-0,5	0,875	-4,25		Нет	Нет	Монотонна	Нет
13	0	-1	-3		Нет	Существ.кор	Монотонна	Сущ.ед.кор
14	0,5	-1,875	-0,25		Нет	Нет	Монотонна	Нет
15	1	-1	4		Крит.точка	Нет	Нет	Нет
16	1,5	2,375	9,75		Нет	Существ.кор	Монотонна	Сущ.ед.кор
17	2	9	17		Нет	Нет	Монотонна	Нет
18	2,5	19,625	25,75		Нет	Нет	Монотонна	Нет
19	3	35	36		Нет	Нет	Монотонна	Нет

Рис. 14. Электронная таблица отделения корней уравнения *f*(*x*) = 0 табличным способом

Анализ результатов проверки логического условия (23) показывает (см. данные в диапазоне F6:F19), что на каждом из отрезков

$[-3; -2{,}5]$, $[-0{,}5; 0]$, $[1{,}0; 1{,}5]$ выполняется *условие существования корня,* т.е. на этих отрезках *существует корень* $f(x) = 0$.

2. Создать электронную таблицу проверки логического условия (21). Выделить диапазон G6:G19 (см. рис. 14) и в ячейку G6 ввести формулу с функцией ЕСЛИ для проверки логического условия (21) и принятия решения о выполнении *условия монотонности функции* на интервале $(x_{i-1}\ x_i)$, которая имеет вид

   = ЕСЛИ (C5 * C6 > 0; "Монотонна"; "Нет"). (24)

   Выполнить копирование формулы в ячейке G6 на диапазон G6:G19 (см. рис. 14). Анализ результатов проверки логического условия (24) показывает (см. данные в диапазоне G6:G19), что на каждом из интервалов, где выполняется *условие существования корня* (21), $(-3; -2{,}5)$, $(-0{,}5; 0)$, $(1; 1{,}5)$ выполняется *условие монотонности* $f(x)$.

3. Создать электронную таблицу проверки логического условия (22) *условия существования единственного корня* уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$. Выделить диапазон H6:H19 (см. рис. 14) и в ячейку H6 ввести логическую формулу с функцией ЕСЛИ для проверки логического условия (22) и принятия решения о выполнении *условия существования единственного корня уравнения* $f(x) = 0$ на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$, которая имеет вид

   = ЕСЛИ (И (B5 * B6 < *0;* C5*C6 > 0*);* "Сущ.ед.корень"; "Нет").

   Ввод имени встроенных логических функций ЕСЛИ( ) и И( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel. Выполнить копирование формулы в ячейке H6 на диапазон (см. рис.14).

4. Анализ результатов проверки логического условия показывает (см. данные в диапазоне H6:H19), что на каждом из отрезков $[-3; -2{,}5]$, $[-0{,}5; 0]$, $[1; 1{,}5]$ выполняется *условие существования единственного корня* функции $f(x)$.

*1.2.6. Отделение корней уравнения **f**(**x**) = 0 графическими способами*

В работе рассматривается два графических способа отделение корней уравнения $f(x) = 0$ (вида (1)).

1. На основе критерия отделения единственного корня уравнения вида (1) на отрезке [α, β] (см. п. 1.2).
2. На основе замены уравнение вида (1) эквивалентным ему уравнением вида $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$.

Алгоритм 1.7. Отделение корней уравнения f(x) = 0 на основе критерия отделения единственного корня на отрезке графическим способом

Пусть дана функция $f(x)$, которая непрерывна и дифференцируема на интервале (α, β).

1. Вычислить таблицу значений x_i спостоянным шагом h_x на отрезке [α, β], где x_1 = α; $x_2 = x_1 + h_x$,…, $x_i = x_{i-1} + h_x$, …, $x_n = x_{n-1} + h_x$ = β. По данным таблицы x_i вычислить таблицы значений $f(x_i)$ и $f1(x_i)$.
2. Отобразить ряды значений x_i, $f(x_i)$ и $f1(x_i)$ на **Точечной** диаграмме. Выбрать подтип ─ **Точечная с гладкими краям** (см. пример 1.5). Выполнить форматирование оси *OX* на диаграмме ─ настроить *цену основных делений оси OX* равной шагу h_x табличных значений ряда x_i с помощью установки параметров в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси**.
3. Исследовать график функции $y = f(x)$ на границах отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, заданных таблично. Отделить *визуально* отрезки, на которых существует единственный корень уравнения вида (1), проверив *геометрически* выполнение *условия существования единственного корня* (22) (см. п. 1.2.5). Геометрически *условие существования корня* уравнения вида (1) на отрезке $[x_{i-1}\ x_i]$ означает, что если концы дуги графика непрерывной функции $y = f(x)$ находятся по разные стороны оси абсцисс *OX*, а концы дуги графика производной непрерывной функции $y1 = f1(x)$ находятся по одну сторону от оси абсцисс *OX*,

то на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ существует корень x_0 уравнения вида (1) и, причем единственный. Границы этих отрезков можно рассматривать как первое приближение искомых значений корней (левая граница – с недостатком, правая – с избытком). Дальнейшее сужение границ найденных отрезков до достижения заданной точности eps – это *задача уточнения корня*.

4. Провести анализ эффективности отделения корней уравнения $f(x) = 0$ графическим способом на основе критерия отделения единственного корня уравнения вида (1).

Пример 1.7

Для функции $f(x)$ вида (4) отделить корни уравнения $f(x) = 0$ графическим способом на основе *критерия отделения корня* уравнения вида (1). Продолжить пример 1.6 (см. рис.14). Скопировать *Лист Пример 1_6* и переименовать на *Лист Пример 1_7*.

Следуя инструкциям алгоритма 1.7, выполнить следующие действия.

1. Создать внедренную диаграмму типа **Точечная** (подтип **Точечная с гладкими краями**) для отображения рядов значений x_i, $f(x_i)$ и $f1(x_i)$ (рис. 15). Выполнить форматирование оси *OX* на диаграмме – настроить *цену основных делений горизонтальной оси OX*, равной шагу $h_x = 0{,}5$ значений x_i с помощью установки параметров в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси** (см. пример 1.5).
2. Исследовать график функции $y = f(x)$ на границах интервалов значений $[x_{i-1}; x_i]$, заданных таблично. Отделить *визуально* отрезки $[-3{,}0; -2{,}5]$, $[-0{,}5; 0]$, $[1; 1{,}5]$, на которых существует единственный корень уравнения вида (4), проверив геометрически выполнение *условия существования единственного корня* (22). На концах отрезка $[-3{,}0; -2{,}5]$ концы дуги графика непрерывной функции $y = f(x)$ находятся по разные стороны оси абсцисс *OX*, а концы дуги графика производной непрерывной функции $y1 = f1(x)$ – по одну сторону.

Следовательно, можно утверждать, что на отрезке $[-3{,}0; -2{,}5]$ существует корень уравнения $f(x) = 0$ и, причем единственный (см. рис. 15). Анализ результатов проверки логического условия (22) показывает, что на каждом из отрезков $[-3{,}0; -2{,}5]$, $[-0{,}5; 0]$, $[1; 1{,}5]$ выполняется *условие существования единственного корня*, т.е. на этих интервалах *существует корень и, причем единственный*.

	A	B	C	D	E	F	G
1	***a***	***b***	***c***	***d***	***Крит.Точки***	***f(x)***	***f 1 (x)***
2	1	2	-3	-1	0,5352	-1,8794	0
3	***Нач.знач x***	-4	***hx***	0,5	-1,8685	5,0646	0
4	***x***	***f(x)***	***f1(x)***				
5	-4	-21	29				
6	-3,5	-8,875	19,75				
7	-3	-1	12				
8	-2,5	3,375	5,75				
9	-2	5	1				
10	-1,5	4,625	-2,25				
11	-1	3	-4				
12	-0,5	0,875	-4,25				
13	0	-1	-3				
14	0,5	-1,875	-0,25				
15	1	-1	4				
16	1,5	2,375	9,75				
17	2	9	17				
18	2,5	19,625	25,75				
19	3	35	36				
20							

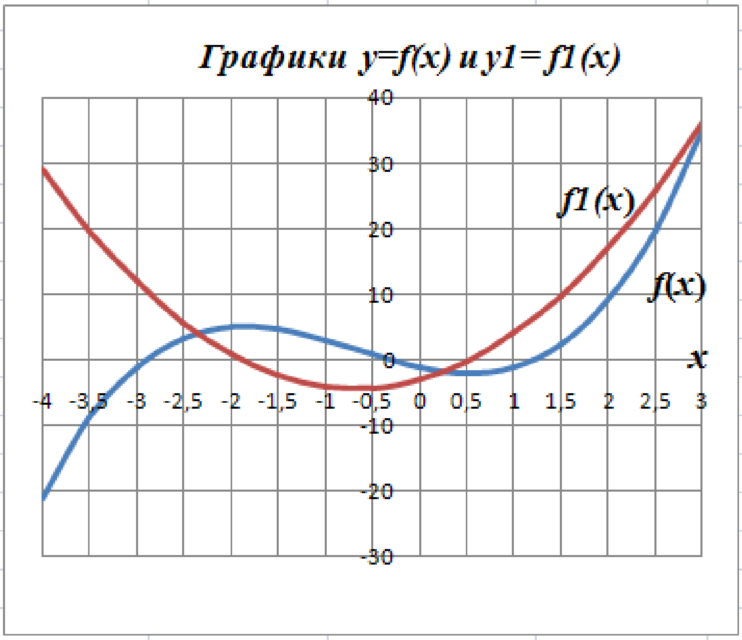


Рис.15. Электронная таблица отделения корней уравнения $f(x) = 0$ графическим способом

3. Провести анализ эффективности отделения отрезков на которых существует единственный корень уравнения $f(x) = 0$ *табличным* и *графическим* способами. На диаграмме (см. рис. 15), отображающей графики $y = f(x)$ и $y1 = f1(x)$, процесс отделения корней более наглядный по сравнению с табличным способом (см. рис. 14).

Алгоритм 1.8. Отделение корней уравнения на основе замены уравнения вида $f(x) = 0$ эквивалентным ему уравнением вида $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

Дано уравнение вида (1), где $f(x)$ непрерывная и дифференцируемая на любом отрезке из области определения функции, кроме конечного числа точек (например, точек разрыва).

По графику функции $y = f(x)$ можно выполнить отделение корней уравнения вида (1) визуально определив, где находятся точки пересечения графика функции $y = f(x)$ с осью OX (см. рис. 15). Для удобства построения графика функции $y = f(x)$ в ряде случаев бывает удобно заменить уравнение вида (1) эквивалентным ему уравнением вида

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \qquad (25)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые функции аргумента x, которые также будем считать непрерывными и дифференцируемыми на любом отрезке их области определения.

Геометрически найти корень уравнения вида (25) – это значит найти абсциссу точки пересечения графиков функции $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$. При этом в силу эквивалентности уравнений вида (1) и (25) абсциссы точек корней уравнений (1) и (25) должны быть равны между собой.

Переход от уравнения вида (1) к уравнению вида (25) для графического отделения корней может быть полезен, если графики функций $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$ строить проще, чем график функции $y = f(x)$.

Графический способ отделения корней уравнения вида (1) на основе его преобразования к уравнению вида (25) рекомендуется использовать на начальном этапе исследования области определения функции и отделения отрезков $[\alpha, \beta]$, где существуют корни уравнения (1).

Примеры графического отделения корней уравнения $f(x) = 0$ на основе его преобразования к виду $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$ для функций $f(x)$, которые даны в заданиях на самостоятельную работу (см. прил. 1), приведены в прил. 4.

Пример 1.8

Для функции $f(x)$ вида (4) отделить корни уравнения на основе замены уравнения вида $f(x) = 0$ эквивалентным ему уравнением вида $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$, где $\varphi_1(x) = ax^3 + bx^2$; $\varphi_2(x) = cx + d$. Продолжить Пример 1.7. Скопировать *Лист Пример 1_7* и переименовать на *Лист Пример 1_8*.

1. Ввести данные таблицы ряда значений величины x на отрезке $[-4; 3]$ в ячейки диапазона A22:A36. При этом следует учесть, что ранее (см. пример 1.3) ряд значений величины x на отрезке $[-4; 3]$ уже был вычислен по формуле арифметической прогрессии и представлен формулами в ячейках диапазона A5:A19 (см. рис. 3).

   $$x_1 = -4;\ x_i = x_{i-1} + h_x, \text{ где } i = 2, 3, \ldots, 15.$$

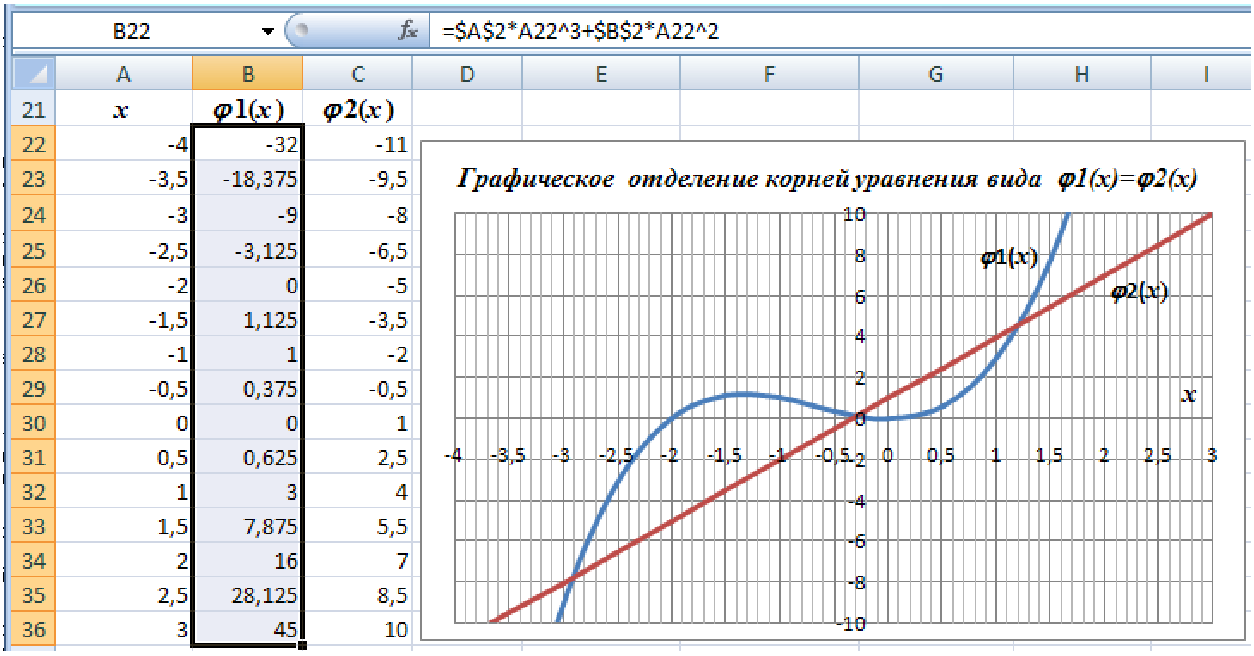
   Для автоматического ввода данных в ячейки диапазона A22:A36 выполнить операции: **Копирование** диапазона A5:A19 в буфер обмена; преобразование формул в вычисленные по ним значения и вставку в диапазон вставки A22:A36 с использованием команды **Вставить значения** меню вкладки **Вставка** Ленты. Для копирования в буфер обмена необходимо выделить диапазон A5:A19 и нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <C>. Для вставки значений из буфера обмена достаточно выделить только первую ячейку A22 диапазона вставки.

2. Создать электронную таблицу вычисления ряда значений функции $\varphi1(x_i)$ в ячейках диапазона B22:B36 для ряда значений x_i (диапазон A22:A36). Выделить диапазон B22:B36 и в ячейку B22 вставить формулу (рис. 16)

   = \$A\$2 * A22^3 + \$B\$2 * A22^2 (26)

   Формула (26) является фрагментом формулы (13) в ячейке B5 для вычисления значения функции $f(x)$ вида (4) и отличается также адресом аргумента (A22). Чтобы не вводить формулу (26) с клавиатуры эффективнее применить копирование формулы в ячейке B5 в буфер обмена и вставку формулы в ячейку B22, применив команду **Формула** меню вкладки **Вставка** Ленты. Выделить ячейку

В22 и вставить формулу (13) из буфера обмена. Выполнить редактирование формулы (13): выделить отсутствующий фрагмент формулы (26) в строке формул способом *протаскивания указателя мыши по формуле* и удалить его, нажав клавишу <Delete>. Выделить диапазон В22:В36 и скопировать формулу в ячейке В22 на диапазон автоматического ввода формулы в ячейки диапазона (комбинация клавиш <Ctrl + Enter>). Редактирование адресной ссылки А5 формулы (13) на А22 в формуле (26) не требуется учетом действия *механизма относительной адресации при копировании формулы* (см. рис. 16).


B22 =$A$2*A22^3+$B$2*A22^2

	A	B	C
21	x	$\varphi 1(x)$	$\varphi 2(x)$
22	-4	-32	-11
23	-3,5	-18,375	-9,5
24	-3	-9	-8
25	-2,5	-3,125	-6,5
26	-2	0	-5
27	-1,5	1,125	-3,5
28	-1	1	-2
29	-0,5	0,375	-0,5
30	0	0	1
31	0,5	0,625	2,5
32	1	3	4
33	1,5	7,875	5,5
34	2	16	7
35	2,5	28,125	8,5
36	3	45	10

Рис. 16. Электронная таблица графического отделения корней

уравнения вида $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

3. Создать электронную таблицу вычисления ряда значений величины функции $\varphi 2(x_i)$ в ячейках диапазона С22:С36 для ряда значений x_i. (диапазон А22:А36). Выделить диапазон С22:С36 и в ячейку С22 ввести формулу =$C$2 * A22 + $D$2, применив средство *автоматического ввода адресных ссылок*, путем выделения ячеек, щелкнув на них мышью. Выполнить копирование формулы в ячейке С22 на диапазон С22:С36 для автоматического ввода формулы в ячейки диапазона.

4. Создать внедренную диаграмму типа **Точечная** (подтип **Точечная с гладкими краями**) для отображения рядов значений x_i, $\varphi_1(x_i)$ и $\varphi_2(x_i)$ (см. пример 1.5). Выполнить редактирование названий диаграммы, как показано на рис. 16, вручную с помощью раскрывающихся меню кнопок **Название диаграммы** (раздел **Подписи**) и **Вставить** на вкладке **Макет**. Выполнить форматирование осей OX и OY на диаграмме, как показано на рис. 16, с помощью установки параметров в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси**. Выделить фрагмент **Горизонтальная ось (значений)** и установить: *минимальное значение* (*по оси* OX) – *фиксированное* – 4,0; *максимальное значение* (*по оси* OX) – *фиксированное* 3; *цена основных делений оси* OX – *фиксированное* 0,5. Выделить вертикальную ось (значений) OY и установить значения параметров в окнах: *минимальное значение (по оси OY)* – *фиксированное* – 10,0; *максимальное значение (по оси OY)* – *фиксированное* 10,0. В результате редактирования и форматирования элементов диаграмма примет вид, как показано на рис. 16.
5. Отделить визуально отрезки, на которых существует корень уравнения вида (25), проверив геометрически выполнение условия существования корня. Геометрически условие существования корня уравнения вида (25) на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ означает, что если дуги графиков функции $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$ пересекаются, то на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ существует корень $x = x_0$ уравнения вида (25) и, причем единственный. Анализ результатов проверки геометрически выполнение условия существования корня показывает, что на каждом из отрезков $[-3; -2{,}5]$, $[-0{,}5; 0]$ и $[1; 1{,}5]$ существует корень и, причем единственный. Границы этих отрезков можно рассматривать как первое приближение искомых значений корней (левая граница – с недостатком, правая – с избытком).

6. Сужение границ найденных отрезков может быть достигнуто с помощью форматирования диаграммы. Выделить фрагмент диаграммы **Горизонтальная ось (значений)** правой кнопкой мыши. Открыть диалоговое окно **Формат оси**, выбрав соответствующую команду в контекстном меню. Установить параметр *цена промежуточных делений оси OX – фиксированное* 0,1 на вкладке **Параметры оси**. В контекстном меню выбрать команду **Добавить промежуточные линии сетки**. Это позволит отделить отрезки, на которых существует корни уравнения вида (25), с точностью до одного десятичного знака после запятой.

1.2.7. Оценка погрешности приближенного значения корня уравнения

Пусть $x = x_0$ – «точное» значение корня уравнения вида $f(x) = 0$ (1) на отрезке [α, β], а $x = x_1^*$ – приближенное значение корня. *Ошибкой приближенного значения корня* x_1^* называют разность $(x_0 - x_1^*)$. Поскольку точное значение x_0 неизвестно, то и величина ошибки не может быть определена. На практике применяют оценку ошибки – *абсолютную величину ошибки сверху* приближенного значения корня x_1^*, которую называют *абсолютной погрешностью*. Обозначив абсолютную погрешность корня x_1^* символом $\Delta(x_1^*)$, формулу для ее оценки представим в виде

$$|x_0 - x_1^*| < \Delta\,(x_1^*). \quad (27)$$

Условно можно принять, что приближенное значение x_1^*, выражает «точное» значение корня уравнения вида (1) на отрезке [α, β] с абсолютной погрешностью $\Delta(x_1^*)$. Из неравенства (27) следует

$$x_1^* - \Delta\,(x_1^*) < x_0 < x_1^* + \Delta\,(x_1^*). \quad (28)$$

Так как корень x_0 отделен на отрезке [α, β], то $\alpha < x_0 < \beta$ и каково бы ни было значение x_1^*, на отрезке [α, β] можно принять $\Delta\,(x_1^*) = |\alpha - \beta|$.

Если в качестве значения x_1^* принято значение α (левая граница отрезка) или β (правая граница), то на основании (28) имеем значение x_0 с недостатком (29) или с избытком (30):

$$\alpha - \Delta\,(x_1^*) < x_0 < \alpha + \Delta\,(x_1^*); \quad (29)$$

$$\beta - \Delta\,(x_1^*) < x_0 < \beta + \Delta\,(x_1^*). \quad (30)$$

Например, если длина интервала $[-3; -2{,}5]$ равна 0,5 (рис. 15, диапазон A7:A8), что означает, что таблица ряда значений x_i вычислена с абсолютной погрешностью, равной 0,5, то в соответствии с (29) и (30) имеем значения корня x_0 с недостатком $(-3{,}5 < x_0 < -2{,}5)$ или с избытком $(-3 < x_0 < -2)$.

Если в качестве значения x_1^* принята внутренняя точка на отрезке $[\alpha, \beta]$, то без дополнительного исследования нельзя указать, с какой стороны относительно x_0 расположено приближенное значение корня x_1^*.

Если в качестве приближенного значения корня x_1^* принять середину отрезка $[\alpha, \beta]$, т.е. положить $x_1^* = (\alpha + \beta)/2$, то ошибку можно оценить точнее

$$\Delta\,(x_1^*) = |\alpha - \beta|/2, \quad (31)$$

но при этом может оказаться, что точное значение корня x_0 расположено ближе к α,чем к β.

Например, если в качестве приближенного значения корня x_1^* принять середину интервала $[-3; -2{,}5]$, т.е. положить $x_1^* = (\alpha + \beta)/2 = -2{,}75$, то абсолютная погрешность определения корня x_0 в соответствии с (31) равна $\Delta\,(x_1^*) = 0{,}25$ и оценка приближенного значения корня x_0 на основании (28) определяется выражением

$$-3 < x_0 < -2{,}5.$$

***Оценка абсолютной погрешности для приближенного значения корня внутри отрезка* [α, β]**

Рассмотренные оценки (27)-(31) абсолютной погрешности приближенного значения корня x_1^* уравнения вида (1), отделенного на отрезке $[\alpha, \beta]$, фактически не зависят от самого уравнения, а зависят лишь от длины отрезка, на котором отделен корень. Если функция $f(x)$ дифференцируема внутри отрезка $[\alpha, \beta]$, то тогда оценки погрешности $\Delta\,(x_1^*)$ могут быть улучшены.

Пусть x_1^* любая точка на отрезке [α, β], где отделен единственный корень x_0 а ξ – некоторая точка, расположенная между x_0 и x_1^*. Тогда по теореме Лагранжа

$f(x_1^*) - f(x_0) = f1(\xi)(x_1^* - x_0)$ или $f(x_1^*) = f1(\xi)(x_1^* - x_0)$, так как $f(x_0) = 0$. (32).

Приближенное значение корня x_1^* не совпадает с точным значением x_0, следовательно $f(x_1^*)$ не равно нулю, а в силу (32) $f1(\xi)$ также не равно нулю. Тогда из (32) следует, что $(x_0 - x_1^*) = f(x_1^*)/f1(\xi)$. Полагая, что функция $f(x)$ на отрезке [α, β] монотонна, т.е. $|f1(x)| >= m$. Введя замену $|f(x_1^*)|/|f1(\xi)| <= |f(x_1^*)|/m$ для оценки абсолютной погрешности отделения корня получим выражение

$$\Delta\,(x_1^*) = |f(x_1^*)|/m. \tag{33}$$

Например, на отрезке $[-3; -2{,}5]$ первая производная функции $f1(x)$ принимает значения в диапазоне от 12 до 5,75 (см. рис. 14). Примем значения: $x_1^* = 2{,}75$ (середину отрезка $[-3; -2{,}5]$) (31); $m \approx 9$, округлив значение выражения $(12 + 5{,}75)/2$ (рис. 14, таблица ряда значений $f1(x)$); функции $f(x) = 1{,}2$ на середине отрезка $(1{,}2 \approx (3{,}375 - 1)/2)$. Тогда оценка погрешности отделения корня $\Delta\,(x_1^*)$ в соответствии с (33) будет определяться выражением $\Delta\,(x_1^*) \approx 1{,}2/9 \approx 0{,}15$.

Для оценки погрешности отделения корня наилучшей является та оценка, которая дает наименьшее значение $\Delta\,(x_1^*)$. Таким образом, на отрезке $[-3; -2{,}5]$ наименьшее значение погрешности отделения корня x_0 дает оценка, полученная по формуле (33), равная 0,15 (по сравнению с оценкой, равной 0,25 (31)), т. е. оценка приближенного значения корня x_0 на интервале $[-3; -2{,}5]$ определяется выражением

$$-2{,}9 < x_0 < -2{,}6.$$

Оценка относительной погрешности

Степень точности оценки приближенного значения корня $\Delta\,(x_1^*)$ на отрезке [α, β] зависит не только от абсолютной погрешности, но и от вычисляемой величины x_1^*. Поэтому за меру оценки точности приближенного значения x_1^* принимают *относительную погрешность*. Относительной погрешностью $\delta\,(x_1^*)$ приближенной величины x_1^* называют отношение ее абсолютной погрешности к модулю самой величины.

$$\delta\,(x_1^*) = \Delta\,(x_1^*)/\left|x_1^*\right|. \qquad (34)$$

Например, оценка относительной погрешности отделения корня $\delta\,(x_1^*)$ на отрезке $[-3; -2{,}5]$ в соответствии с (31) и (33) будет определяться значениями $\delta\,(x_1^*) = 0{,}25/2{,}75 \approx 0{,}1$ (31) и $\delta\,(x_1^*) = 0{,}15/2{,}75 \approx 0{,}05$ (33).

1.3. Уточнение приближенного значения корня уравнения $f(x) = 0$

Погрешность, которая возникает при самом неблагоприятном выборе приближенного значения корня x_1^* уравнения (1) на исходном отрезке $[\alpha_0, \beta_0]$ вместо искомого x_0 (которое неизвестно), в соответствии с формулой (28) будет тем меньше, чем меньше модуль длины $\left|\alpha_0 - \beta_0\right|$ этого отрезка. Таким образом, на отрезке существования единственного корня нужно найти более узкий отрезок $[\alpha_1, \beta_1]$, также отделяющий корень x_0, удовлетворяющий неравенству

$$\alpha_1 \le \alpha_0 \le x_0 \le \beta_1 \le \beta_0, \text{ где } \left|\alpha_1 - \beta_1\right| < \left|\alpha_0 - \beta_0\right|.$$

Продолжая итерационный процесс уточнения корня, получим систему отрезков $[\alpha_k, \beta_k]$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$), для которых

$$\alpha_0 \le \alpha_1 \le \alpha_2 \le \ldots \le \alpha_k \le \ldots \le x_0 \le \ldots \le \beta_k \le \ldots \le \beta_2 \le \beta_1 \le \beta_0. \qquad (35)$$

Итерационный процесс уточнения корня продолжают до тех пор, пока не будет выполнено *условие останова при достижении заданной точности*. Применяют следующие *критерии*, которые оценивают достижение погрешности определения корня x_0, на отрезке $[\alpha_k, \beta_k]$, удовлетворяющей заданной точности eps.

1. Значение функции $f(\beta_k)$ на k-й итерации по модулю стало меньше eps. Логическое условие имеет вид

$$\left|f(\beta_k)\right| < \text{eps}. \qquad (36)$$

2. Длина отрезка $[\alpha_k, \beta_k]$ по модулю в результате k-й итерации стала меньше eps. Логическое условие имеет вид

$$|\alpha_k - \beta_k| < \text{eps}. \quad (37)$$

3. Критерий, в котором выполняются оба условия (36) и (37) или выполняется любое одно из условий. Сложное логическое условие, в котором с помощью логической функции ИЛИ объединяются два логических условия (36) и (37), имеет вид

$$\text{ИЛИ } (|f(\beta_k)| < eps; \ |\alpha_k - \beta_k| < eps). \quad (38)$$

В работе предлагается сравнить эффективность двух методов уточнения корня на отрезке существования единственного корня.

1. Табличный способ уточнения корня на отрезке с отображением данных на диаграмме.
2. Метод касательных (метод Ньютона).

1.3.1. Уточнение корня уравнения **f(x) = 0** *табличным способом*

Процесс уточнения приближенного значения корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ табличным способом аналогичен процессу уточнения приближенного значения корня уравнения $f1(x) = 0$ (критической точки функции $f1(x)$) (см. алгоритм 1.4).

Точность приближенного значения корня x_0 уравнения $f(x) = 0$ определяется длиной отрезка $[x_{i-1}; x_i]$, содержащего единственный корень. Уточнение найденного приближенного значения корня x_0 до заданной точности eps представляет собой итерационный процесс и выполняется в два этапа.

1. На *первом* этапе исходный отрезок $[x_{i-1}; x_i]$, делится на n отрезков $[x_{j-1}; x_j]$, (обычно принимают n = 10, j= 2, 3, ..., n) и отделяется более узкий отрезок $[x^1_{j-1}; x^1_j]$, который содержится на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$, и на котором с помощью функции ЕСЛИ проверяется выполнение *логического условия существования корня* уравнения $f(x) = 0$ на отрезке. По аналогии с (20) логическое условие для функции $f(x)$ на отрезке $[x^1_{j-1}; x^1_j]$, имеет вид: $f(x^1_{j-1}) \cdot f(x^1_j) < 0$.

2. На каждой итерации с помощью функции ЕСЛИ проверяется *логическое условие достижения заданной точности сужения отрезка*. По аналогии с (38) логическое условие для функции $f(x)$ на отрезке $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ имеет вид: ИЛИ ($|f(x_j^1)| < eps$; $|x_{j-1}^1 - x_j^1| < eps$).
3. Если *логическое условие достижения заданной точности сужения отрезка*, на котором существует единственный корень уравнения, выполняется, то заданная точность отыскания корня уравнения $f(x) = 0$ достигнута и процесс сужения отрезка следует прекратить. В противном случае итерационный процесс сужения отрезка $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ следует продолжить во второй итерации.

Алгоритм 1.9. Табличный способ уточнения корня уравнения на отрезке* [α, β] *с отображением данных на диаграмме

1. По данным исходного отрезка $[\alpha_0, \beta_0]$, на котором существует единственный корень x_0, вычислить ряд значений x_j, где $j = 1, 2, \ldots$, задав начальное значение ряда $x_1 = \alpha_0$ и шаг $h = 0{,}1 \cdot |\beta_0 - \alpha_0|$. По данным ряда значений x_j вычислить ряд значений функции $f(x_j)$.
2. Отобразить ряды значений x_j и $f(x_j)$ на **Точечной** диаграмме. Выбрать подтип **Точечной** диаграммы – **Точечная с гладкими краями** (см. пример 1.5). Выполнить форматирование элемента диаграммы **Горизонтальная ось (значений)** *OX* на диаграмме, установив в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси** *фиксированную цену основных* и *промежуточных делений*.
3. Исследовать значения функции $f(x_j)$ на границах отрезка $[x_{j-1}; x_j]$ табличных значений x, проверив выполнение логического условия существования корня (20) с помощью функции ЕСЛИ (см. алгоритм 1.6), а также геометрически (см. алгоритм 1.7). Отделить отрезок $[\alpha_1; \beta_1]$, удовлетворяющий условию (20), содержащий корень x_0.

4. Исследовать достижение заданной точности eps оценки корня x_0 на отрезке $[\alpha_1; \beta_1]$, проверив логическое условие останова процесса уточнения корня (38).
5. Если логическое условие (38) выполняется (погрешность оценки корня x_0 не превышает заданное значение допустимой погрешности eps), то итерационный процесс сужения отрезка $[\alpha_0, \beta_0]$ нужно закончить. За приближенное значение корня x_0 принимается значение границы отрезка β_1, полученное на последней итерации.
6. Если условие (38) не выполняется (погрешность оценки x_0 превышает заданное значение допустимой погрешности eps), то итерационный процесс сужения отрезка $[\alpha_1; \beta_1]$ нужно продолжить в следующей итерации, повторив пп.1-5. Вычислить ряд значений x_j по данным значений границ отрезка $[\alpha_1; \beta_1]$, на котором существует единственный корень x_0. Для этого в ячейках той же электронной таблицы нужно заменить начальное значение ряда $x_1 = \alpha_1$ и шага $h_x = 0{,}1 \cdot |\beta_1 - \alpha_1|$. В результате замены будет выполнен автоматически пересчет рядов значений x_j, функции $f(x_j)$ и их отображение на **Точечной** диаграмме также автоматически изменится.

Пример 1.9

Для функции $f(x)$ вида (4) уточнить корень уравнения $f(x) = 0$ на отрезке $[-3; -2{,}5]$ табличным способом. Продолжить пример 1.6 (см. рис.14). Скопировать *Лист Пример 1_6* и переименовать на *Лист Пример 1_9*.

Следуя инструкциям алгоритма 1.9, выполнить следующие действия.

1. По данным значений границ исходного отрезка $[-3; -2{,}5]$, на котором существует единственный корень x_0, вычислить ряд значений x_j. В ячейках электронной таблицы E23 и E25 задать значение левой границы отрезка, равное -3 и шага $h_x = 0{,}05$, соответственно (рис. 17). Выделить ячейку A23 и ввести формулу = \$E\$23 для задания начального

значения арифметической прогрессии $x_1 = -3$. Выделить диапазон A24:A33 и ввести формулу = A23 + $E$25 в ячейку A24 для вычисления ряда значений x_j по формуле арифметической прогрессии ($x_j = x_{j-1} + h_x$, где $j = 2, 3, \ldots, 10$). Скопировать данные в ячейке A24 на выделенный диапазон A24:A33 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). Все ячейки выделенного диапазона будут заполнены формулами с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формул.

D25 =ЕСЛИ(ИЛИ(ABS(A24-A25)<=$E$27;ABS(B25)<=$E$27);"Точн_дост";"Нет")

	A	B	C	D	E
20					
21		*Табличный способ уточнения корня*			
22	*x*	*f(x)*	*Существ корень*	*Достиж точности*	α_0
23	-3	-1			-3
24	-2,95	-0,417375	Нет	Нет	h_x
25	-2,9	0,131	Сущ корень	Нет	0,05
26	-2,85	0,645875	Нет	Нет	*eps*
27	-2,8	1,128	Нет	Нет	0,0001
28	-2,75	1,578125	Нет	Нет	
29	-2,7	1,997	Нет	Нет	
30	-2,65	2,385375	Нет	Нет	
31	-2,6	2,744	Нет	Нет	
32	-2,55	3,073625	Нет	Нет	
33	-2,5	3,375	Нет	Нет	

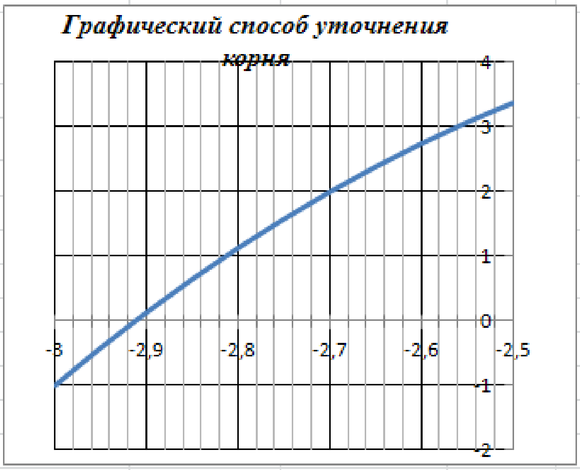


Рис. 17. Уточнение корня уравнения $f(x) = 0$ табличным способом с отображением рядов данных на диаграмме

2. Для вычисленных значений в диапазоне A23:A33 вычислить ряд значений функции $f(x_j)$ в диапазоне B23:B33 (см. рис. 17). В ячейку B23 ввести формулу

= $A$2 * A23^3 + $B$2 * A23^2 + $C$2 * A23 + $D$2,

которую скопировать на диапазон B32:B33 для *автозаполнения* ячеек диапазона формулами. Для ввода формулы в ячейку B23 применить операции **Копировать** формулу (13) в ячейке B5 (пример 1.3) в буфер обмена и **Вставить** в ячейку B23. Для копирования формулы в буфер обмена выделить ячейку B5 и нажать комбинацию клавиши

<Ctrl> + <C>. Выделить диапазон B23:B33 и вставить формулу (13) в ячейку B23, нажав кнопку **Вставить** в разделе **Буфер обмена** на вкладке **Главная** Ленты. Редактирование адресной ссылки A5 формулы (13) на A23 не требуется, так как с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании адресной ссылки она автоматически будет заменена. Нажать клавишу <Enter>. Вычисленные числовые значения рядов x_j и $f(x_j)$ отображаются в ячейках диапазона A23:B33 в числовом формате **Общий**.

3. . Отобразить ряды значений x_j и $f(x_j)$ на диаграмме (см. рис. 17). Выделить диапазон A23:B33, содержащий значения базовых рядов x_j и $f(x_j)$ для отображения на диаграмме. Выбрать на Ленте вкладку **Вставка**, далее в разделе **Диаграммы** выбрать тип диаграммы – щелкнуть кнопку **Точечная**. В открывшемся меню выбрать подтип – **Точечная с гладкими краями**. Выполнить форматирование оси *OX* на диаграмме, как показано на рис. 18.

Рис. 18. График функции *f*(*x*) на отрезке [-3;-2,5] после форматирования оси *OX*

Выделить на диаграмме ось *OX* (элемент **Горизонтальная ось (значений)**). В контекстном меню выбрать команду **Формат оси**. На вкладке **Параметры оси**, которая открывается в диалоговом окне «по умолчанию», установить значения в окнах *фиксированная цена основных делений* и *фиксированная цена промежуточных делений* значения для первой итерации 0,1 и 0,01, соответственно (см. пример 5).

4. Отделить отрезок, удовлетворяющий неравенству (35), содержащий корень x_0, проверив выполнение *условия существования корня* (20) помощью функции ЕСЛИ, а также геометрически (см. рис. 18). В ячейку С24 ввести формулу для проверки логического условия и принятия решения о выполнении *условия существования корня* на отрезке, которая имеет вид

= ЕСЛИ (B23 * B24 < 0; "Сущ.корень"; "Нет").

Для ввода формулы в ячейку С24 применить копирование аналогичной формулы (23) в ячейке F5 в буфер обмена через строку формул (рис. 19) и вставку в ячейку С24.

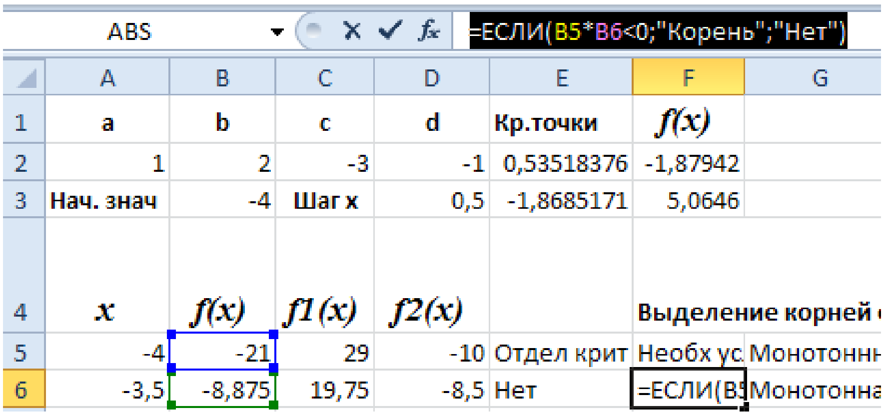


Рис. 19. Копирование формулы в буфер обмена через строку формул

Выполнить редактирование адресных ссылок B5 и B6 в формуле (23), изменив их на B23 и B24. Формулу в ячейке С24 скопировать на диапазон С24:С33 для *автозаполнения* ячеек диапазона формулами (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>) с учетом действия *механизма относительной адресации*. Анализ значений в ячейках диапазона С24:С33 показывает, что на отрезке $[-2{,}95; -2{,}9]$, принадлежащем отрезку $[-3; -2{,}5]$, существует корень уравнения x_0. Проверка *геометрически* выполнения *условия существования корня* уравнения $f(x) = 0$ (20), соответствующего *нулю функции* $f(x)$ на этом отрезке (см. рис. 18), также подтверждает существование корня x_0 на этом отрезке. За приближенное значение корня x_0 на первой итерации принимается значение $-2{,}95$ (левой границы исходного отрезка).

5. Исследовать достижение заданной точности eps=0,00001, значение которой введено в ячейку E27, оценки корня x_0 на отрезке $[-2{,}95; -2{,}9]$, проверив *условие останова процесса уточнения корня* (38). Выделить диапазон D24:D33 и в ячейку D24 ввести формулу (см. рис. 17)

= ЕСЛИ (ИЛИ (ABS(A23 − A24)<$E$27; ABS (B24)<$E$27);

"Точность достигнута"; "Нет").

Имена встроенных функций ЕСЛИ( ), ИЛИ( ) и ABS( ) ввести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). Скопировать формулу в ячейке D24 на диапазон D24:D33 для *автозаполнения* ячеек диапазона формулами, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <Enter>.

6. Корень x_0, который отделен на интервале $[-2{,}95; -2{,}9]$, не удовлетворяет требованиям заданной точности (см. рис. 18). Логическое условие (38) не выполняется (погрешность оценки превышает допустимую погрешность eps) и итерационный процесс уточнения корня x_0нужно продолжить, повторив пп.1-5 для интервала $[-2{,}95; -2{,}9]$. Для этого в ячейки E23 и E25 нужно ввести новое значение границы отрезка ($-2{,}95$) и шага h_x=0,005. В результате замены будет выполнен автоматически пересчет рядов значений x и функции $f(x)$. Их отображение на **Точечной** диаграмме также будет изменено автоматически. Выполнить форматирование оси *OX* на диаграмме, изменив значения в окнах *фиксированная цена основных делений и фиксированная цена промежуточных делений*, установленные для предыдущей итерации (см. рис. 18).
7. Логическое условие (38) выполняется на отрезке $[-2{,}9125; -2{,}9122]$ (погрешность оценки x_0 не превышает допустимое значение величины eps), Итерационный процесс уточнения корня x_0 корня уравнения

нужно завершить. За значение корня x_0 принимается значение −2,9122, полученное на последней итерации (рис. 20).

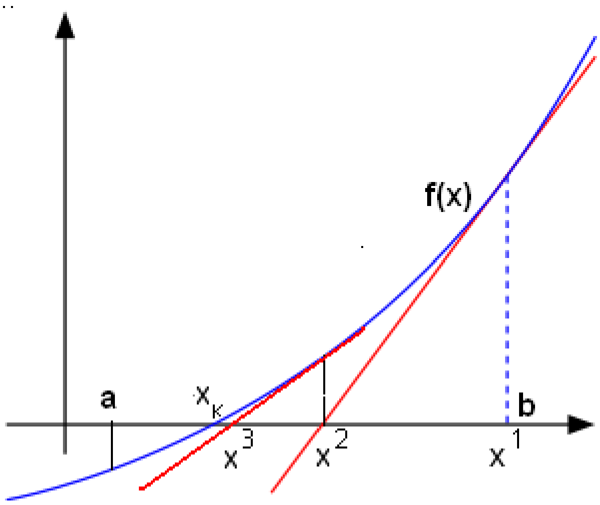
	A	B	C	D	E
21	*Табличный способ уточнения корня*				
22	*x*	*f(x)*	*Существ корень*	*Достиж точности*	α_0
23	-2,9125	-0,002924			-2,9125
24	-2,91245	-0,002384	Нет	Точн_дост	h_x
25	-2,9124	-0,001844	Нет	Точн_дост	0,00005
26	-2,91235	-0,001304	Нет	Точн_дост	*eps*
27	-2,9123	-0,000765	Нет	Точн_дост	0,0001
28	-2,91225	-0,000225	Нет	Точн_дост	
29	-2,9122	0,000315	Сущ корень	Точн_дост	
30	-2,91215	0,0008546	Нет	Точн_дост	
31	-2,9121	0,0013943	Нет	Точн_дост	
32	-2,91205	0,0019339	Нет	Точн_дост	
33	-2,912	0,0024735	Нет	Точн_дост	

Рис. 20. Достижение заданной точности уточнения корня табличным и графическим способами

1.3.2. *Метод касательных* (*метод Ньютона*)

Метод касательных (метод Ньютона) – это итерационный численный метод нахождения корня уравнения вида $f(x) = 0$ (1).

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке [α, β]. Пусть на отрезке [α, β] существует единственный корень x_0 уравнения вида (1), т. е. выполняется логическое условие (2), а также первая $f1(x)$ и вторая $f2(x)$ производные функции существуют, отличны от нуля и сохраняют знак.



Геометрическая интерпретация *метода касательных* приведена на рис. Выбрать в качестве первого приближения $x^{(1)}$ корня x_0 значение одной из границ отрезка [α, β]. Сходимость итерационного процесса уточнения корня уравнения может быть достигнута при выполнении логического условия: знаки функции $f(x^{(1)})$ и второй производной $f2(x^{(1)})$ при $x = x^{(1)}$ совпадают. Логическое условие сходимости методом касательных имеет вид

$$f(x^{(1)}) \cdot f2(x^{(1)}) > 0. \qquad (39)$$

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с координатами $[x^{(1)}; f(x^{(1)})]$ имеет вид: $y - f(x^{(1)}) = f1(x^{(1)})(x - x^{(1)})$

Абсцисса $x^{(2)}$ точки пересечения касательной к графику функции $y = f(x)$ принимается как следующее приближенное значение корня x_0 на отрезке [α, β]. Так как $y = 0$ при $x = x^{(2)}$, то введя замену x на $x^{(2)}$ получим формулу для вычисления приближения $x^{(2)}$

$$x^{(2)} = x^{(1)} - f(x^{(1)} / f1(x^{(1)})).$$

Введя замену $x^{(1)}$ на $x^{(k)}$, а $x^{(2)}$ на $x^{(k+1)}$ получим *итерационную формулу метода касательных*

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - f(x^{(k)} / f1(x^{(k)}). \qquad (40)$$

Методами математического анализа можно доказать, что последовательность приближённых значений корня $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ сходится и её предел равен истинному значению корня x_0. Значения последовательных приближенных значений $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ должны принадлежать отрезку [α, β], что говорит о *сходимости итерационного процесса* уточнения корня.

Исследовать достижение заданной точности *eps* оценки корня x_0, на интервале [α, β], проверив *логическое условие останова процесса уточнения корня*, которое имеет вид

$$\left| x^{(k+1)} - x^{(k)} \right| < \text{eps}. \qquad (41)$$

Если условие (41) не выполняется, то итерационный процесс уточнения корня x_0 уравнения вида (1) на отрезке [α, β] нужно продолжить.

Алгоритм 1.10. Уточнение корня уравнения $f(x) = 0$ на отрезке [α, β] методом касательных

1. Выбрать значение одной из границ отрезка [α, β], удовлетворяющее логическому условию сходимости процесса (39) в качестве первого приближения $x^{(1)}$ корня x_0.

2. Вычислить значения функции $f(x^{(1)})$ и первой производной $f1(x^{(1)})$. Вычислить второе приближение корня $x^{(2)}$по *итерационной формуле метода касательных* (40). Значение $x^{(2)}$ должно находиться внутри отрезка [α, β], иначе итерационный процесс не является сходящимся, уточнение корня нужно остановить и проверить правильность выбора начального приближения корня $x^{(1)}$.
3. Вычислить значение погрешности $\left|x^{(2)} - x^{(1)}\right|$ и проверить выполнение *логического условия останова процесса уточнения корня* (41) с помощью логической функции ЕСЛИ. Если условие (41) не выполняется (погрешность оценки превышает допустимое значение eps), то итерационный процесс уточнения корня x_0 уравнения (1) на отрезке [α, β] нужно продолжить.
4. Перейти к п. 2. Вычислить значения функции $f(x^{(2)})$ и первой производной $f1(x^{(2)})$. Определить следующее приближение $x^{(3)}$ корня x_0 по итерационной формуле (40). Перейти к п. 3 и проверить выполнение *логического условия останова процесса уточнения корня*.
5. Итерационный процесс уточнения корня следует продолжать до тех пор, пока не будет выполнено *логическое условие останова* (41). За значение корня x_0 принимается значение $x^{(k+1)}$, полученное на последней итерации.

Пример 1.10

Уточнить приближенное значения корня x_0 уравнения $f(x) = 0$ вида (4) на интервале $[-3; -2{,}5]$ методом касательных. Продолжить пример 1.9. Скопировать *Лист Пример 1_9* и переименовать на *Лист Пример 1_10*.

Следуя инструкциям алгоритма 1.10, выполнить следующие действия.

1. Создать электронную таблицу для вычисления функции $f(x)$, первой $f1(x)$ и второй $f2(x)$ производных функции для значений x на границах отрезка $[-3; -2{,}5]$. Ввести значение -3 в ячейку А3, а в ячейку А38 – значение $-2{,}5$ (рис.21). Скопировать формулы (13), (14) для

вычисления $f(x)$ и $f1(x)$ из ячеек B5 и C5 (см. рис. 14, пример 1.6) в буфер обмена, применив команду **Копировать** (нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <C>). Выделить диапазон B37:B38 и вставить формулы в диапазон ячеек B37:C38, применив команду **Вставить** (нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>). Редактирование адресной ссылки A5 в формулах в ячейках диапазона B37:C37, а также ссылки A6 в ячейках B38:C38 при копировании не требуется, так как с учетом действия *механизма относительной адресации* они автоматически будут заменены на A37 и A38, соответственно. Выделить диапазон D37:D38 и в ячейку D37 ввести формулу для вычисления значений второй производной $f2(x)$ функции на границах отрезка $[-3; -2{,}5]$ (42), применив средство их *автоматического ввода*, путем выделения ячеек, щелкнув на них мышью.

$$= 6 * \$A\$2 * A37 + 2 * \$B\$2. \qquad (42)$$

E37 | f_x | =ЕСЛИ(B37*D37>0;"Нач.прибл";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
35	***Метод Ньютона уточнения корня***						
36	***x***	***f(x)***	***f 1 (x)***	***f2(x)***	***Выбор начального приближения***		
37	-3	-1	12	-14	Нач.прибл		
38	-2,5	3,375	5,75	-11	Нет		

Рис. 21. Выбор начальной точки приближения корня на отрезке $[-3; -2{,}5]$

2. Выполнить копирование формулы в ячейке D37 на диапазон D37:D38 для автоматического ввода формулы в ячейку D38 с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формулы (комбинация клавиш <Ctrl>+<Enter>).
3. Анализ данных в ячейках диапазона A37:D38 (см. рис. 21) позволяет сделать следующие выводы: функция $f(x)$ вида (4) определена и непрерывна на отрезке $[-3; -2{,}5]$; первая $f1(x)$ и вторая $f2(x)$ производные функции существуют, отличны от нуля и сохраняют знак; на отрезке существует единственный корень.

4. Выбрать в качестве первого приближения $x^{(1)}$ корня x_0 значение одной из границ отрезка $[-3; -2,5]$, на которой знаки функции $f(x^{(1)})$ и второй производной $f2(x^{(1)})$ совпадают. Создать электронную таблицу для проверки логического условия (39) с помощью функции ЕСЛИ (см. рис. 21). Выделить диапазон E37:E38 и ввести в E37 формулу вида

   = ЕСЛИ (B37 * D37 > 0; "Нач.прибл"; "Нет").
5. Ввод имени встроенной функции ЕСЛИ( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. прим. 1.2). Анализ данных в ячейках диапазона E37:E38 позволяет сделать вывод, что условие (39) выполняется для значения $x^{(1)} = -3$. Значение левой границы отрезка $[-3; -2,5]$ примем за начальное (первое) приближение $x^{(1)}$ корня x_0 уравнения $f(x) = 0$ вида (4).
6. Определить второе приближение корня $x^{(2)}$ ($k = 2$) по *итерационной формуле метода касательных* (40). В ячейку A40 ввести значение -3 (*начальное приближение корня*, удовлетворяющее условию (39)), а в ячейки B40 и C40 скопировать формулы вычисления функции $f(x)$ и первой производной $f1(x)$ из ячеек B37 и C37, соответственно, применив команду **Копировать** (<Ctrl> + <C>) данные в буфер обмена и команду **Вставить (**<Ctrl> + <V>) (см. п.1).
7. В ячейку A41 ввести формулу =A40 – B40/C40 для вычисления следующего $x^{(2)}$ приближения корня по итерационной формуле (40) применив средство *автоматического ввода* адресных ссылок. В результате получим $x^{(2)} = -2,91667$ (рис. 22). Результат показывает, что итерационный процесс сходящийся, т.к. значение $x^{(2)}$ находится внутри исходного интервала $[-3; -2,5]$.
8. Исследовать достижение заданной точности eps оценки корня x_0, на интервале $[-3; -2,5]$, проверив *логическое условие останова процесса уточнения корня* (41), применив логическую функцию

ЕСЛИ. Ввести значение eps = 0,00001 в ячейку E41. Выделить ячейку D41, в которую ввести формулу проверки *логического условия останова процесса уточнения корня* (41) (рис. 23)

= ЕСЛИ (ABS (A40 – A41) < $D$65; "Точность достигнута"; "Нет").

A41 =A40-B40/C40

	A	B	C	D	E	F	G
35	***Метод Ньютона уточнения корня***						
36	***x***	***f(x)***	***f1(x)***	***f2(x)***	***Выбор начального приближения***		
37	-3	-1	12	-14	Нач.прибл		
38	-2,5	3,375	5,75	-11	Нет		
39							
40	-3	-1	12	***Дост.точн***	***Eps***		
41	-2,91666667	-0,048032	10,8541667	Нет	0,00001		
42	-2,91224142	-0,000132	10,7944845	Нет			
43	-2,91222918	-1,01E-09	10,7943197	Нет			
44	-2,91222918	0	10,7943197	Точн.дост			

Рис.22. Электронная таблица уточнения корня методом касательных

D41 =ЕСЛИ(ABS(A40-A41)<$E$41;"Точн.дост";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
35	***Метод Ньютона уточнения корня***						
36	***x***	***f(x)***	***f1(x)***	***f2(x)***	***Выбор начального приближения***		
37	-3	-1	12	-14	Нач.прибл		
38	-2,5	3,375	5,75	-11	Нет		
39							
40	-3	-1	12	***Дост.точн***	***Eps***		
41	-2,91666667	-0,048032	10,8541667	Нет	0,00001		
42	-2,91224142	-0,000132	10,7944845	Нет			
43	-2,91222918	-1,01E-09	10,7943197	Нет			
44	-2,91222918	0	10,7943197	Точн.дост			

Рис. 23. Проверка логического условия останова процесса уточнения корня

9. Ввод имени встроенных функций ЕСЛИ( ) и ABS( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel. Результат проверки логического условия в ячейке D41 показывает, что заданная точность eps на первом шаге уточнения корня не достигнута, итерационный процесс уточнения корня нужно продолжать – вычислить следующее приближение корня $x^{(k)}$ (k = 3).

10. Вычислить значения функции $f(x^{(2)})$ и первой производной $f1(x^{(2)})$. Выделить ячейки B41 и C41 и применить копирование формул в ячейках в ячейки B42 и C42 способом *протаскивания указателя мыши*. Подвести указатель мыши к *черному квадратику* в правом нижнем углу ячейки C41; удерживая кнопку мыши, *протащить крестик* в ячейку C42. Завершить копирование, отпустив кнопку мыши. За счет действия *механизма относительной адресации* редактирования формул в ячейках B42 и C42 не требуется. В результате в ячейки B42 и C42 будут возвращены значения $f(x^{(2)}) = -0{,}04$ и $f1(x^{(2)}) = 10{,}854$, соответственно (см. рис.23).
11. Определить следующее приближение $x^{(3)}$ корня x_0 по итерационной формуле *метода касательных* (40). Повторить пп. 2-5. Скопировать формулу в ячейке A41 в ячейку A42, применив способ копирования *протаскиванием курсора мыши* (см. п. 10). В результате вычисления по формуле $= \text{A41} - \text{B41} / \text{C41}$ в ячейку A42 будет возвращено значение $x^{(3)}$, равное $-2{,}91224$. Проверить условие останова процесса уточнения корня (41), скопировав формулу в ячейке D41 в ячейку D42. Результат проверки – точность не достигнута («Нет»).
12. Определить следующие приближения $x^{(k)}$ (для $k = 4$ и $k = 5$) корня уравнения по итерационной формуле *метода касательных* (40). Повторить пп. 2-6. На пятой итерации ($k = 5$) в ячейку A44 ,будет возвращено значение $x^{(5)}$, равное $-2{,}912229$. В результате проверки выполнения *условия останова процесса уточнения корня* (41) в ячейку D44 будет возвращено значение – «Точн.достигнута» (см. рис. 23).
13. Итерационный процесс уточнения корня x_0, уравнения $f(x) = 0$ вида (4) на интервале $[-3; -2{,}5]$ следует завершить, поскольку логическое условие останова (41) имеет значение ИСТИНА (условие выполняется). За значение корня x_0 принимается значение $x^{(5)} = -2{,}912229$, полученное на последней итерации.

ГЛАВА 2. ИССЛЕДОВАНИЕ НЕЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЕ ИХ ГРАФИКОВ

2.1. Постановка задачи

Пусть функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале (α, β). а также первая $f1(x)$ и вторая $f2(x)$ производные функции существуют, отличны от нуля и сохраняют знак.

Задачи исследования функций $y = f(x)$ и построение их графиков с применением первой и второй производных функции являются одними из главных задач *дифференциального исчисления*. Общая схема исследования функции $f(x)$ и построение ее графика $y = f(x)$ включает следующие действия.

1. Исследование функции $f(x)$ на возрастание (неубывание) или убывание (невозрастание).
2. Исследование экстремумов функции $f(x)$: нахождение координат точек максимума и минимума функции.
3. Исследование функции $f(x)$ на выпуклость вверх или вниз. Нахождение точки перегиба функции.
4. Создание графического отображения рядов значений аргумента x, функции $f(x)$, ее первой $f1(x)$ и второй $f2(x)$ производных, а также характерных точек (пп. 2, 3).

Для выполнения исследования функций и построения их графиков необходимо предварительно познакомиться с алгоритмами исследования *области определения и отделения критических точек* (см. глава 1).

Данные результатов вычисления рядов значений аргумента x, функции $f(x)$ вида $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ее первой производной $f1(x)$, отделения корней уравнений $f(x) = 0$ и $f1(x)=0$ (критических точек $f(x)$) приведены в электронной таблице (см. рис. 14). Графическое отображение данных рядов значений x, $f(x)$ и $f1(x)$ показано на встроенной диаграмме (см. рис. 15).

2.2. Исследование функции $f(x)$ на возрастание (убывание) табличным способом

Для решения *задачи о возрастании* функции $f(x)$ на интервале (α, β) необходимо иметь критерий, позволяющий убедиться в выполнении следующих двух условий.

1. Если при возрастании аргумента x (при $\beta > \alpha$) соответствующие значения функции $f(x)$ также возрастают, то функция называется *возрастающей*, иначе – *невозрастающей*. Логическое выражение, которое имеет значение ИСТИНА, когда выполняется *первое условие возрастания функции* на интервале (α, β), имеет вид
$$f(\beta) > f(\alpha). \tag{43}$$
2. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (α, β) и монотонна (21), а в любой точке $x = \xi$, расположенной на интервале (α, β), функция имеет *неотрицательную производную*, то функция называется *возрастающей*, иначе – *невозрастающей*. Приняв значение $\xi = \beta$, логическое выражение, которое имеет значение ИСТИНА, когда выполняется *второе условие возрастания функции* на интервале (α, β), имеет вид
$$\text{И}\ ((f1(\beta) \cdot f1(\alpha)) > 0; f1(\beta) >= 0). \tag{44}$$

Для решения *задачи об убывании* функции $f(x)$ на интервале (α, β) *табличным способом* необходимо иметь критерий, позволяющий убедиться в выполнении следующих двух условий.

1. Если при возрастании аргумента x (при $\beta > \alpha$) соответствующие значения функции $f(x)$ убывают, то функция называется *убывающей*, иначе – *неубывающей*. Логическое выражение, которое имеет значение ИСТИНА, когда выполняется *первое условие убывания функции* на интервале (α, β), имеет вид
$$f(\beta) < f(\alpha). \tag{45}$$
2. Если функция $f(x)$ непрерывна на интервале (α, β) и монотонна (21), а в любой точке $x = \xi$, расположенной на интервале (α, β), функция

имеет *неположительную производную*, то функция называется *убывающей*, иначе – *неубывающей.* Приняв ξ = β, логическое условие, которое имеет значение ИСТИНА, когда выполняется второе *условие убывания функции на интервале* (α, β), будет иметь вид

$$\text{И}\ ((f1(\beta)\cdot f1(\alpha)) > 0;\ f1(\beta) <= 0). \qquad (46)$$

Алгоритм 2.1. Исследование функции на возрастание и убывание табличным способом

Пусть дана функция $f(x)$, которая непрерывна и дифференцируема на интервале (α, β).

1. Вычислить таблицу значений x_i с постоянным шагом h_x на отрезке [α, β], где x_1 = α, $x_2 = x_1 + h_x$,…, $x_i = x_{i-1} + h_x$,…, $x_n = x_{n-1} + h_x$ = β. По данным таблицы x_i вычислить таблицы значений $f(x_i)$ и $f1(x_i)$. Отобразить ряды значений x_i, $f(x_i)$ и $f1(x_i)$ на **Точечной** диаграмме, подтип **Точечная с гладкими краям** (см. пример 1.5). Выполнить форматирование фрагмента диаграммы **Горизонтальная ось** *OX* – настроить *цену основных делений оси OX* равной шагу h_x табличных значений ряда x_i с помощью установки параметров в диалоговом окне **Формат оси** на вкладке **Параметры оси** (см. рис. 8, пример 1.5).
2. Исследовать значения функции $f(x)$ на границах интервалов (x_{i-1}, x_i) значений x, заданных таблично, проверив с помощью логической функции ЕСЛИ выполнение сложного логического условия с функцией И, объединяющего *логические условия возрастания функции* (43) и (44),

   $$\text{И}\ (f(x_i) > f(x_{i-1};\ f1(x_i)\cdot f1(x_{i-1}) > 0;\ f1(x_i) >= 0). \qquad (47)$$

   Если логическое условие (47) имеет значение ИСТИНА, вывести текст «Возрастающая», иначе «Невозрастающая».
3. Провести анализ результатов выполнения *условия возрастания функции* на интервалах (x_{i-1}, x_i) графическим способом. Отделить

визуально на графиках $y = f(x)$ и $y1 = f1(x)$ интервалы (x_{i-1}, x_i), принадлежащие области определения первой производной функции $f1(x)$, на которых проверить геометрически выполнение *условия возрастания функции* (44). Геометрически *условие возрастания функции* (47) на интервале (x_{i-1}, x_i) означает, что если дуга графика монотонной функции $y = f(x)$ имеет неотрицательный угол наклона к оси OX, то функция $f(x)$ является *возрастающей* на данном интервале, иначе – *невозрастающей*.

4. Исследовать значения функции $f(x)$ на границах интервалов (x_{i-1}, x_i) значений x, заданных таблично, проверив с помощью логической функции ЕСЛИ выполнение сложного логического условия с функцией И, объединяющего *логические условия убывания функции* (45) и (46),

$$\text{И }(f(x_i) < f(x_{i-1}); f1(x_{i-1}) \cdot f1(x_i) > 0; f1(x_i) <= 0). \qquad (48)$$

Если логическое условие (48) имеет значение ИСТИНА, вывести текст «Убывающая», иначе «Неубывающая».

5. Провести анализ результатов выполнения *условия убывания функции* на интервалах графическим способом. Отделить *визуально* на графиках $y = f(x)$ и $y1 = f1(x)$ интервалы (x_{i-1}, x_i), принадлежащие области определения первой производной функции $f1(x)$, на которых проверить геометрически выполнение *условия убывания функции* (48). Геометрически *условие убывания функции* (48) на интервале (x_{i-1}, x_i) означает, что если дуга графика монотонной функции $y = f(x)$ имеет неположительный угол наклона к оси OX, то функция $f(x)$ является *убывающей* на данном интервале, иначе – *неубывающей*.

Пример 2.1

Исследовать функцию $f(x)$ вида (4) на возрастание и убывание на интервале (- 4; 3) табличным способом. Продолжить пример 1.3 (см. рис.3). Скопировать *Лист Пример 1_3* и переименовать на *Лист Пример 2_1*.

Следуя инструкциям алгоритма 2.1, выполнить следующие действия.

1. Данные результатов вычисления рядов значений аргумента x, функции $f(x)$ вида $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ее первой производной $f1(x)$, отделения критических точек на отрезке $[-4; 3]$ приведены в электронной таблице на рис. 24.
2. Создать электронную таблицу проверки логического *условия возрастания функции* (47). Выделить диапазон F6:F19, ввести в ячейку E6 логическую формулу с функцией ЕСЛИ (см. рис. 24) для проверки логического условия (47) и принятия решения о выполнении *условия возрастания функции* $f(x)$ *на интервале* $(-4; 3)$, которая имеет вид

= ЕСЛИ (И (B6 > B5; C5 * C6 > 0; C6 >= 0);
"Возрастающая";"Невозрастающая"). (49)

F6 | f_x | =ЕСЛИ(И(B6>B5;C5*C6>0;C6>=0);"Возрастающ";"Невозрастающ")

	A	B	C	D	E	F	G
1	***a***	***b***	***c***	***d***	***Крит.Точки***	***f(x)***	***f 1 (x)***
2	1	2	-3	-1	0,5352	-1,8794	0
3	***Нач.знач x***	-4	***hx***	0,5	-1,8685	5,0646	0
4	***x***	***f(x)***	***f1(x)***		***Исследование f(x) на возрастние и убывание***		
5	-4	-21	29			***Возрастание***	***Убывание***
6	-3,5	-8,875	19,75		Нет	Возрастающ	Неубывающ
7	-3	-1	12		Нет	Возрастающ	Неубывающ
8	-2,5	3,375	5,75		Нет	Возрастающ	Неубывающ
9	-2	5	1		Нет	Возрастающ	Неубывающ
10	-1,5	4,625	-2,25		Крит точка	Невозрастающ	Неубывающ
11	-1	3	-4		Нет	Невозрастающ	Убывающ
12	-0,5	0,875	-4,25		Нет	Невозрастающ	Убывающ
13	0	-1	-3		Нет	Невозрастающ	Убывающ
14	0,5	-1,875	-0,25		Нет	Невозрастающ	Убывающ
15	1	-1	4		Крит точка	Невозрастающ	Неубывающ
16	1,5	2,375	9,75		Нет	Возрастающ	Неубывающ
17	2	9	17		Нет	Возрастающ	Неубывающ
18	2,5	19,625	25,75		Нет	Возрастающ	Неубывающ
19	3	35	36		Нет	Возрастающ	Неубывающ

Рис. 24. Электронная таблица исследования функции $f(x)$
на возрастание (убывание)

Ввод имени встроенных логических функций ЕСЛИ( ) и И( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). Выполнить копирование формулы (49) в ячейке F6 на диапазон F6:F19 для автоматического ввода формулы в ячейки F7:F19 с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формулы (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>).

3. Анализ данных результатов проверки логического условия (47) в диапазоне F6:F19 показывает, что на интервалах $(-4; -2)$ и $(1{,}5; 3)$ выполняется *условие возрастания функции* (47). На интервале $(-1{,}5; 1{,}0)$ – условие (47) не выполняется – функция *невозрастающая*.
4. Проверить геометрически выполнение *условия возрастания функции* (44) на диаграмме (рис. 25). Создание **Точечной** диаграммы для графического отображения данных рядов значений x, $f(x)$ и $f1(x)$ было рассмотрено в примере 1.7.

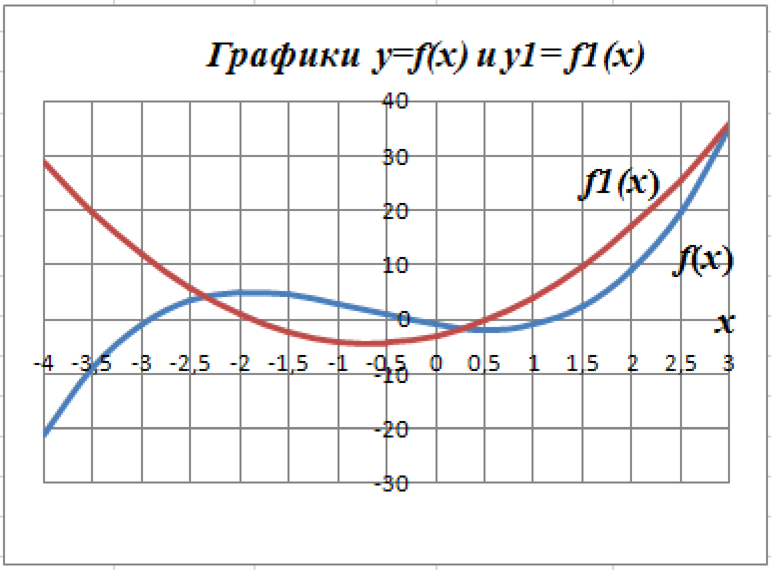


Рис. 25. Графического отображения данных рядов значений x, $f(x)$ и $f1(x)$

5. Область определения функции $f(x)$ $(-4; 3)$ делится абсциссами критических точек ($xk_1 = -1{,}869$ и $xk_2 = 0{,}535$), которые вычислены в ячейках E3 и E2, соответственно, на три интервала монотонности: $(-4; -1{,}869)$, $(-1{,}869; 0{,}535)$ и $(0{,}535; 3)$. На интервалах $(-4; -1{,}869)$ и $(0{,}535; 3)$ дуги графика функции $y = f(x)$ имеют неотрицательный угол наклона к *горизонтальной оси OX* (логическое условие (43) выполняется), а дуги графика первой производной функции $y1 = f1(x)$ находятся в положительной полуплоскости (логическое условие (44)

выполняется). Следовательно, функция $f(x)$ является *возрастающей*, а на интервале $(-1{,}869; 0{,}535)$ – *невозрастающей*.

6. Создать электронную таблицу проверки логического *условия убывания функции* $f(x)$ (48). Выделить диапазон G6:G19, ввести в ячейку G6 логическую формулу с функцией ЕСЛИ (см. рис. 24) для проверки логического условия (48) и принятия решения о выполнении *условия убывания функции* $f(x)$ на интервале $(-4; 3)$, которая имеет вид

   = ЕСЛИ (И (B6 < B5; C5 * C6 > 0; C6 <= 0);

   "Убывающая";"Неубывающая"). (50)

   Данная формула не существенно отличается от формулы (49). Для ввода формулы применим *способ копирования формулы в ячейке* F6 *через строку формул* (см. пример 1.9). Вставить формулу в выделенную ячейку G6: установить курсор ввода в строке формул и нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. Выполнить редактирование формулы в ячейке G6, заменив в выражении: символ «>» на «<», текст «Возрастающая» и «Невозрастающая» на «Убывающая» и «Неубывающая», соответственно. Нажать клавишу <Enter>. Выполнить копирование формулы (50) в ячейке G6 на диапазон G6:G19 для автоматического ввода формулы в ячейки G7:G19 с учетом действия *механизма относительной адресации* при копировании формулы (<Ctrl> + <Enter>) (см. рис. 24).

7. Проверить геометрически выполнение условия убывания функции $f(x)$ (48) на диаграмме (см. рис. 25). Дуги графика функции $y = f(x)$ имеют неположительный угол наклона к *горизонтальной оси OX* (логическое условие (45) выполняется), а дуги графика первой производной функции $y1 = f1(x)$ находятся в отрицательной полуплоскости (логическое условие (46) выполняется). Следовательно, функция $f(x)$ на интервале $(-1{,}869; 0{,}535)$ является *убывающей*. На интервалах $(-4; -1{,}869)$ и $(0{,}535; 3)$ условие (46) не выполняется – функция $f(x)$ является *неубывающей*.

2.3. Исследование функции *f*(*x*) на экстремум. Поиск максимума и минимума функции

2.3.1. Исследование функции f(x) на экстремум табличным способом

Пусть функции *f*(*x*), ее первая *f1*(*x*) и вторая *f2*(*x*) производные определены и непрерывны на интервале (α, β). Пусть x_0 – некоторая точка, расположенная между границами интервала α и β. Для решения *задачи о существования экстремума функции f*(*x*) *на интервале* (α, β) *табличным способом* необходимо иметь критерий, позволяющий убедиться в выполнении следующего условия.

Если первая производная *f1*(*x*) функции при переходе через x_0 меняет знак на противоположный, а ее вторая производная *f2*(*x*) отлична от нуля, то в точке x_0 функция *f*(*x*) достигает *экстремума* (*минимума*, если $f2(x_0) > 0$, или *максимума*, если $f2(x_0) < 0$).

Логическое условие, которое имеет значение ИСТИНА, когда выполняется *условие существования экстремума (максимума) функции на интервале* (α, β), имеет вид

$$\text{И } (f1(\alpha) \cdot f1(\beta) < 0; f2(\beta) < 0). \quad (51)$$

Логическое условие, которое имеет значение ИСТИНА, когда выполняется *условие существования экстремума (минимума) функции на интервале* (α, β), имеет вид

$$\text{И } (f1(\alpha) \cdot f1(\beta) < 0; f2(\beta) > 0). \quad (52)$$

Алгоритм 2.2. Поиск максимума и минимума функции f(x) табличным способом

1. Вычислить таблицу значений x_i с постоянным шагом h_x на отрезке [α, β], где $x_1 = \alpha$, $x_2 = x_1 + h_x, \ldots, x_i = x_{i-1} + h_x, \ldots, x_n = x_{n-1} + h_x = \beta$. По данным таблицы x_i вычислить таблицы значений $f(x_i)$, $f1(x_i)$ и $f2(x_i)$. Отобразить ряды значений x_i, $f(x_i)$, $f1(x_i)$ и $f2(x_i)$ на **Точечной** диаграмме.
2. Исследовать значения функции $f(x_i)$ и ее первой производной $f1(x_i)$ на границах отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, проверив с помощью логической

функции ЕСЛИ выполнение *условия существования экстремума (максимума) функции* (51) на интервале (x_{i-1}, x_i),

$$\text{И}(f1(x_i) \cdot f1(x_{i-1}) < 0; f2(x_i) < 0). \quad (53)$$

3. Если логическое условие (53) имеет значение ИСТИНА, вывести текст «Максимум», иначе – «Нет». Провести анализ результатов выполнения *условия существования экстремума (максимума) функции* $f(x)$ на интервале (α, β) графическим способом. Отделить *визуально* на графиках $y1=f1(x)$ и $y2=f2(x)$ интервалы (x_{i-1}, x_i), принадлежащие области определения функции $f(x)$, на которых проверить геометрически выполнение *условие существования экстремума* (*максимума*) *функции* (53). Если дуга графика первой производной $y1=f1(x_i)$ пересекает ось *OX*, а значения второй производной $f2(x)$ находятся в отрицательной полуплоскости ($f2(x_i) < 0$), то на интервале (x_{i-1}, x_i) функция $f(x)$ достигает экстремума (*максимума*).
4. Исследовать значения функции $f(x)$ на границах отрезков $[x_{i-1}, x_i]$, проверив с помощью функции ЕСЛИ выполнение *условия существования минимума* функции (52) на интервале (x_{i-1}, x_i),

$$\text{И}(f1(x_i) \cdot f1(x_{i-1})<0;f2(x_i)>0). \quad (54)$$

5. Если логическое условие (54) имеет значение ИСТИНА, вывести текст «Минимум», иначе – «Нет». Провести анализ результатов выполнения *условия существования экстремума (минимума) функции* $f(x)$ на интервале (α, β) графическим способом. Отделить визуально на графиках $y1=f1(x$ и $y2=f2(x)$ интервалы (x_{i-1}, x_i), принадлежащие области определения функции $f(x)$, на которых проверить геометрически выполнение *условие существования экстремума (минимума) функции* (54). Если дуга графика первой производной $y1=f1(x)$ пересекает ось *OX*, а значения второй производной $f2(x)$ находятся в положительной полуплоскости ($f2(x_i) > 0$), то на интервале (x_{i-1}, x_i) функция $f(x)$ достигает экстремума (*минимума*).

Пример 2.2

Исследовать функции $f(x)$ вида (4) на *существование экстремума* (*минимума, максимума*) *функции* на интервале $(-4; 3)$ табличным способом. Продолжить пример 1.3. Скопировать *Лист Пример 1_3* и переименовать на *Лист Пример 2_2*.

Следуя инструкциям алгоритма 2.2, выполнить следующие действия.

1. Данные результатов вычисления рядов значений величин аргумента x, функции $f(x)$ вида $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ее первой производной $f1(x)$ на отрезке $[-4; 3]$ приведены в электронной таблице на рис. 26.

F6 =ЕСЛИ(И(C5*C6<0;D6<0);"Максимум";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
1	***a***	***b***	***c***	***d***	***Корень f 2(x)= 0***	***f 2(x)***	
2	1	2	-3	-1	-0,6667	0	
3	***Нач.знач x***	-4	***hx***	0,5			
4	**x**	***f(x)***	***f1 (x)***	***f2 (x)***	***Исслед. функции на существован. экстремума***		
5	-4	-21	29	-20	***Критич.точка***	***Максимум***	***Минимум***
6	-3,5	-8,875	19,75	-17	Нет	Нет	Нет
7	-3	-1	12	-14	Нет	Нет	Нет
8	-2,5	3,375	5,75	-11	Нет	Нет	Нет
9	-2	5	1	-8	Нет	Нет	Нет
10	-1,5	4,625	-2,25	-5	Критич.точка	Максимум	Нет
11	-1	3	-4	-2	Нет	Нет	Нет
12	-0,5	0,875	-4,25	1	Нет	Нет	Нет
13	0	-1	-3	4	Нет	Нет	Нет
14	0,5	-1,875	-0,25	7	Нет	Нет	Нет
15	1	-1	4	10	Критич.точка	Нет	Минимум
16	1,5	2,375	9,75	13	Нет	Нет	Нет
17	2	9	17	16	Нет	Нет	Нет
18	2,5	19,625	25,75	19	Нет	Нет	Нет
19	3	35	36	22	Нет	Нет	Нет

Рис. 26. Электронная таблица исследования функции $f(x)$ на экстремум

2. Создать электронную таблицу вычисления ряда значений величины второй производной $f2(x) = 6ax + 2b$ (см. табл. 1) в ячейках диапазона D5:D19 (см. рис. 26) для ряда значений x_i (диапазон A5:A19). Выделить диапазон D5:D19 и в ячейку D5 ввести с клавиатуры формулу

=6*$A$2*A5 + 2*$B$2. (55)

3. При вводе адресных ссылок, например, \$A\$2, применить средство их *автоматического ввода*, путем выделения ячеек, щелкнув на них мышью. Выполнить копирование формулы в ячейке D5 на диапазон D5:D19 (нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Enter>). Ряды значений x_i, $f(x_i)$, $f1(x_i)$ и $f2(x_i)$ отображены на **Точечной** диаграмме (рис. 27).

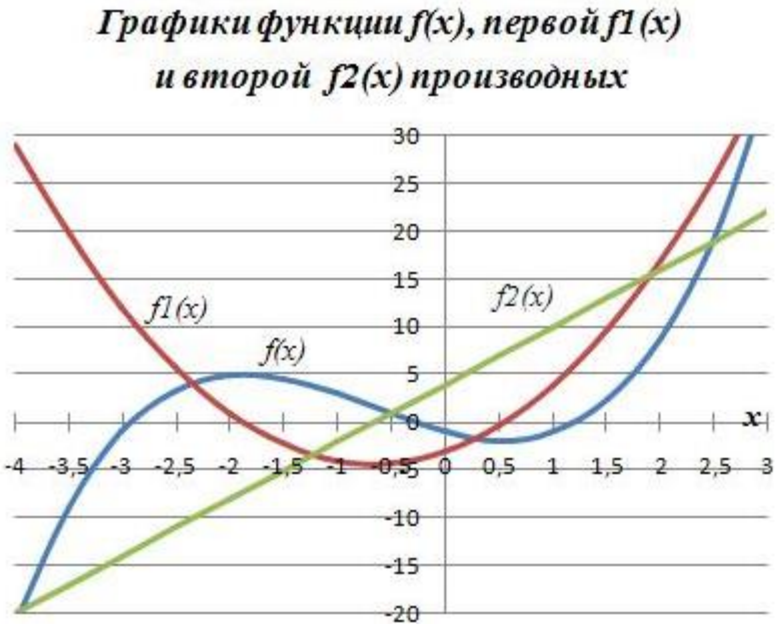


Рис. 27. Точечная диаграмма, отображающая ряды значений x_i, $f(x_i)$, $f1(x_i)$ и $f2(x_i)$

4. Создать электронную таблицу проверки логического условия *существования экстремума (максимума) функции* (53) (см. рис.26). Выделить диапазон F6:F19, ввести в ячейку F6 логическую формулу с функцией ЕСЛИ для проверки выполнения логического условия и принятия решения о *существовании экстремума (максимума) функции на интервале* $(-4; 3)$, которая имеет вид

= ЕСЛИ (И (C6*C5 < 0; D6 < 0); "Максимум"; "Нет").   (56)

5. Ввод имени встроенных логических функций ЕСЛИ( ) и И( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). Выполнить копирование формулы в ячейке F6 на диапазон F6:F19. Анализ данных результатов проверки логического условия (56) в диапазоне F6:F19 показывает, что на отрезке $[-2; -1{,}5]$

выполняется *условие существования экстремума (максимума) функции* (см. рис. 26):

- первая производная $f1(x)$ меняет знак на отрезке $[-2; -1{,}5]$

$$f1(-2) = 1;\ f(-1{,}5) = -2{,}25;\ f1(-2) \cdot f1(-1{,}5) < 0;$$

- вторая производная $f2(x)$ – величина отрицательная и сохраняет знак на отрезке $[-2; -1{,}5]$

$$f2(-2) = -8 < 0;\ f2(-1{,}5) = -5 < 0.$$

6. Значения функции $f(x)$ на границах отрезка $[-2; -1{,}5]$: $f(-2) = 5$; $f(-1{,}5) = 4{,}625$, которые отображаются в ячейках B9, B10 (см. рис. 26), можно рассматривать как первое приближение искомого значения *максимума* функции на интервале $(-4; 3)$. Значение $f(-2) = 5$ является значением с избытком, а значение $f(-1{,}5) = 4{,}625$ – с недостатком. Решение задачи уточнения значения *максимума функции* $f(x)$ до достижения заданной точности eps предполагает сужение отрезка $[-2; -1{,}5]$. Задача уточнения максимума рассматривается в п. 2.3.2.
7. Провести анализ результатов выполнения *условия существования максимума функции* на интервале $(-2; -1{,}5)$ графическим способом (рис. 28). Отделить *визуально* на графиках $f1(x)$ и $f2(x)$ интервал $(-2; -1{,}5)$, принадлежащий области определения функции $f(x)$, на котором проверить геометрически выполнение *условие существования экстремума (максимума) функции* (53) (см. п.3, алгоритма 2.2).
8. Исследовать значения функции $f(x)$ на интервале $(-4; 3)$. На границах отрезка $[2{,}5; 3]$ функция $f(x)$ принимает значения в диапазоне от 19,625 до 35 большие, чем найденное значение *максимума* (см. п. 4): $f(2{,}5) = 19{,}625$, $f(3) = 35$. Но эти значения не могут рассматриваться в качестве *максимума функции* $f(x)$, т.к. на отрезке $[2{,}5; 3]$ не выполняются *условия существования экстремума (максимума) функции* (53):

- первая производная $f1(x)$ не меняет знак на отрезке [2,5; 3]

$$f1(2{,}5) = 25{,}75;\ f1(3) = 36;\ f1(2{,}5) \cdot f1(3) > 0;$$

- вторая производная $f2\ (x)$ величина положительная и сохраняет знак на отрезке [2,5; 3]:

$$f2(2{,}5) = 19 > 0;\ f2(3) = 22 > 0.$$

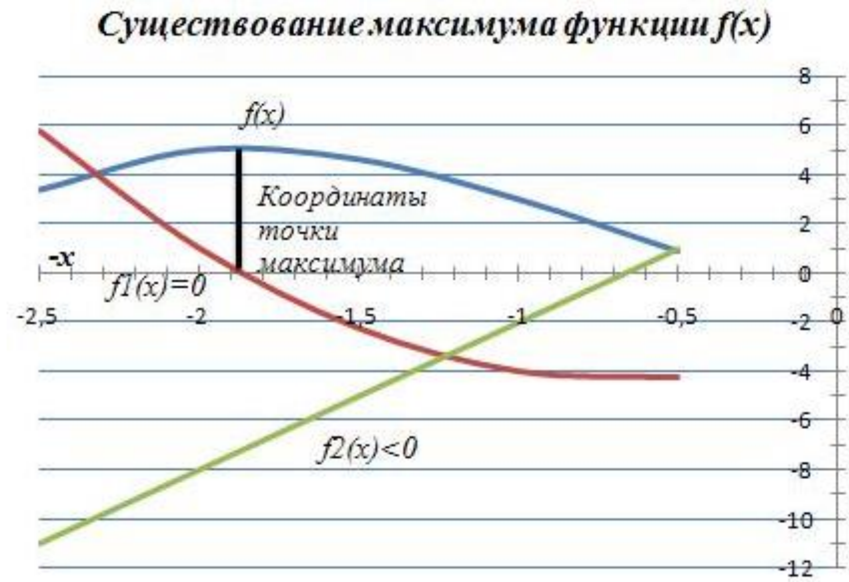


Рис. 28. Проверка выполнение условия существования максимума функции $f(x)$

9. Создать электронную таблицу проверки логического условия *существования экстремума* (*минимума) функции*) (54) (см. рис. 26). Выделить диапазон G6:G19, ввести в ячейку G6 формулу с функцией ЕСЛИ для проверки выполнения логического условия и принятия решения о *существовании экстремума (минимума) функции на интервале* (−4; 3), которое имеет вид

= ЕСЛИ (И (C6 * C5 < 0; D6 > 0); "Минимум"; "Нет"). (57)

Вид этой формулы во многом повторяет вид формулы (56) в ячейке F6 проверки выполнения логического условия и принятия решения о *существовании экстремума (максимума) функции на интервале* (−4; 3). Чтобы не повторять ввод формулы (56) с клавиатуры применить *способ копирования формулы в ячейке через строку формул* (см. пример 1.2) Выделить ячейку F6, выделить формулу в строке формул, скопировать выделенную формулу в буфер обмена, завершить копирование, нажав клавишу <Esc>. Выделить диапазон G6:G19 и вставить формулу в строку формул выделенной ячейки G6. Выполнить редактирование формулы (56), изменив «D6 > 0» на «D6 < 0» и «Максимум» на «Минимум». Выполнить копирование формулы в ячейке G6 на диапазон G6:G19 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>) (см. рис. 26).

10. Анализ данных результатов проверки логического условия показывает, что на отрезке [0,5; 1,0] выполняется *условие существования экстремума (минимума) функции* (57):
    - первая производная $f1(x)$ меняет знак на отрезке [0,5; 1,0]:

      $f1(0{,}5) = -0{,}25;\ f1(1{,}0) = 4;\ f1(0{,}5) \cdot f1(1{,}0) < 0;$
    - вторая производная $f2(x)$ величина положительная и сохраняет знак на отрезке [0,5; 1,0]:

      a. $f2(0{,}5) = 7{,}0 > 0;\ f2(1{,}0) = 10 > 0.$
11. Значения функции $f(x)$ на границах отрезка [0,5; 1,0] $f(0{,}5) = -1{,}875;$ и $f(1{,}0) = -1$, которые отображаются в ячейках B14, B15, можно рассматривать как первое приближение искомого значения *минимума функции* $f(x)$ на интервале $(-4; 3)$. Значение минимума функции в точке с координатами $[\,0{,}5;\ -1{,}875\,]$ является значением с избытком, а значение в точке с координатами $[\,1{,}0; -1{,}0\,]$ – с недостатком. Решение задачи уточнения значения *минимума функции* $f(x)$ до достижения заданной точности eps предполагает сужение отрезка [0,5; 1,0] (см. п. 2.3.2).
12. Провести анализ результатов выполнения *условия существования экстремума (минимума) функции* на интервале (0,5; 1,0). графическим способом (рис. 29). Отделить *визуально* на графиках $f1(x)$ и $f2(x)$ интервал (0,5; 1,0), принадлежащий области определения функции $f(x)$, на котором проверить геометрически выполнение *условие существования экстремума (минимума) функции* (54).

13. Исследовать найденное значение *минимума функции* $f(x)$ на интервале $(-4; 3)$. На границах отрезка $[-4{,}0; -3{,}5]$ функция $f(x)$ принимает значения от $-21{,}0$ до $-8{,}875$ ($f(-4) = -21$, $f(-3{,}5) = -8{,}875$) меньшие, чем найденное значение *минимума* (см. п. 10). Но эти значения не могут рассматриваться в качестве *минимума функции* $f(x)$, т.к. на отрезке $[-4{,}0; -3{,}5]$ не выполняются *условия существования экстремума (минимума) функции* (54):

- первая производная $f1(x)$ не меняет знак на отрезке $[-4; -3{,}5]$: $f1(-3{,}5)=19{,}75$; $f1(-4)= 29$; $f1(-3{,}5) \cdot f1(-4) > 0$;
- вторая производная $f2(x)$ величина отрицательная и сохраняет знак на отрезке $[-4; -3{,}5]$: b. $f2(-3{,}5)= -17{,}0 < 0$; $f2(-4)= -20 < 0$.

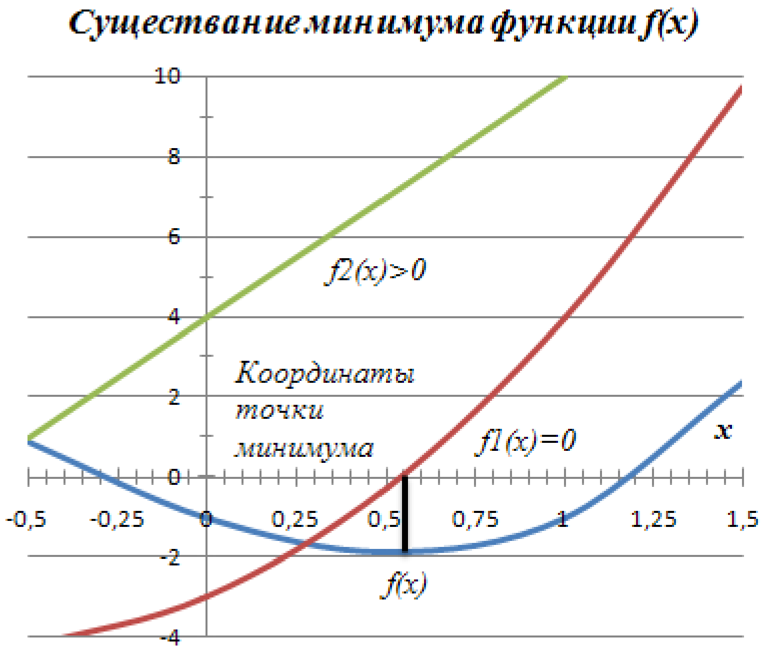


Рис. 29. Геометрическое выполнение условия существования минимума функции $f(x)$

2.3.2. Уточнение приближенного значения максимума (минимума) функции табличным способом

Для уточнения приближенного значения *максимума (минимума) функции* $f(x)$ на интервале (α, β) табличным способом следует выполнить действия, аналогичные уточнению приближенных значений корней уравнений $f1(x) = 0$ (критической точки $f(x)$) (алгоритм 1.4) и $f(x) = 0$ (алгоритм 1.9).

Точность приближенного значения координат точки экстремума функции: максимума $[x_{\text{макс}}; f_{\text{макс}}]$ и минимума $[x_{\text{мин}}; f_{\text{мин}}]$ определяется длиной отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, на котором содержится единственная *точка экстремума*. Решение задачи уточнения значения *максимума (минимума) функции* $f(x)$ предполагает сужение отрезка $[x_{i-1}, x_i]$, до заданной точности eps и представляет собой итерационный процесс.

Алгоритм 2.3. Уточнение приближенного значения координат точки максимума (минимума) функции f(x) табличным способом

Итерационный процесс уточнения значения *максимума (минимума) функции* $f(x)$ выполняется в два этапа.

1. На *первом* этапе исходный отрезок $[x_{i-1}, x_i]$, делится на n отрезков $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ (обычно принимают $n = 10$, $j = 2, 3,..., n$), отделяется более узкий отрезок $[x_{j-1}^1; x_j^1]$, который содержится на отрезке $[x_{i-1}, x_i]$ и с помощью функции ЕСЛИ проверяется выполнение *логических условий существования экстремума функции,* которые имеют вид:
   - при поиске *максимума*
   $$\text{И}(f1(x_{j-1}^1) \cdot f1(x_j^1) < 0; f2(x_j^1) < 0); \tag{58}$$
   - при поиске *минимума*
   $$\text{И}(f1(x_{j-1}^1) \cdot f1(x_j^1) < 0; f2(x_j^1) > 0); \tag{59}$$
2. На каждой итерации с помощью функции ЕСЛИ проверяется логическое *условие останова процесса уточнения значения экстремума*
   $$\text{ИЛИ}(|x_{j-1}^1 - x_j^1| < \text{eps}; |f(x_{j-1}^1) - f(x_j^1)| < \text{eps}; |f1(x_j^1)| < \text{eps}). \tag{60}$$
3. В условии (60) объединены с помощью логической функции ИЛИ три логических условия: $|x_{j-1}^1 - x_j^1| < \text{eps}$ – длина отрезка по модулю меньше eps; $|f(x_{j-1}^1) - f(x_j^1)| < \text{eps}$ – приращение функции на отрезке по модулю меньше eps; $|f1(x_j^1)| < \text{eps}$ – значение первой производной на правой границе отрезка по модулю меньше eps. Логическое выражение (60) будет иметь значение ИСТИНА, если выполняется

любое одно или несколько логических условий – аргументов логической функции ИЛИ.

4. Если логическое условие (60) выполняется (для обнаруженного на отрезке $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ *экстремального значения функции* $f(x)$ заданная точность *eps* оценки достигнута), то итерационный процесс уточнения координат точки экстремума функции на отрезке $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ нужно завершить. За значение точки *экстремума* принимается значение x_j^1 полученное на последней итерации.
5. Если условие (60) не выполняется (заданная точность eps оценки экстремального значения функции $f(x)$ не достигнута), то процесс сужения отрезка $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ нужно продолжить в следующей k-ой итерации (k = 2, 3, …).

Пример 2.3

Для функции $f(x)$ вида (4) уточнить приближенное значение координат точки *максимума* функции на исходном отрезке $[-2; -1{,}5]$ до достижения заданной точности eps табличным способом. Продолжить пример 2.2. Скопировать *Лист Пример 2_2* и переименовать на *Лист Пример 2_3*.

По данным определения координат точки экстремума функции $f(x)$ (см. пример 2.2) на отрезке $[-2; -1{,}5]$ существует точка максимума функции с координатами $[x_{\text{макс}}; f_{\text{макс}}]$. Создать электронную таблицу уточнения *координат точки максимума функции* на отрезке $[-2; -1{,}5]$ до достижения заданной точности eps табличным способом (рис. 30).

Следуя инструкциям алгоритма 2.3, выполнить следующие действия.

1. Вычислить ряд значений x^1_j на отрезке $[-2; -1{,}5]$ на первой итерации. В ячейки электронной таблицы G23 и G25 ввести начальное значение границы интервала $x_1^1 = -2$ и шаг $h_x^1 = 0{,}05 = 0{,}1 \cdot h_x$, соответственно. Выделить ячейку A23 и ввести формулу = G23 для копирования начального значения левой границы интервала. Выделить диапазон A24:A33 и ввести в ячейку A24 формулу =A23 + $G$25

для вычисления ряда значений x_j^1 на отрезке $[-2; -1{,}5]$ по формуле арифметической прогрессии с шагом h_x^1, которую скопировать на диапазон (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). Для ряда значений x_j^1 вычислить ряды значений: функции $f(x_j^1)$ в диапазоне B23:B33; первой производной $f1(x_j^1)$ в диапазоне C23:C33; второй производной $f2(x_j^1)$ в диапазоне D23:D33.

E24 | =ЕСЛИ(И(C23*C24<0;D24<0);"Существ.Макс";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
21	***Табличный способ уточнения координат точки максимума***						
22	***x***	***f(x)***	***f 1 (x)***	***f2(x)***	***Существ. Макс***	***Точн дост***	***Нач знач***
23	-2	5	1	-8			-2
24	-1,95	5,040125	0,6075	-7,7	Нет	Нет	***Шаг hx***
25	-1,9	5,061	0,23	-7,4	Нет	Нет	0,05
26	-1,85	5,063375	-0,1325	-7,1	Существ.Макс	Нет	***eps***
27	-1,8	5,048	-0,48	-6,8	Нет	Нет	0,0001
28	-1,75	5,015625	-0,8125	-6,5	Нет	Нет	
29	-1,7	4,967	-1,13	-6,2	Нет	Нет	
30	-1,65	4,902875	-1,4325	-5,9	Нет	Нет	
31	-1,6	4,824	-1,72	-5,6	Нет	Нет	
32	-1,55	4,731125	-1,9925	-5,3	Нет	Нет	
33	-1,5	4,625	-2,25	-5	Нет	Нет	

Рис. 30. Электронная таблица табличного уточнения координат *точки максимума* на интервале [-2; -1,5]

- В ячейку B23 ввести формулу для вычисления $f(x_j^1)$

=$A$2 * A23^3 + $B$2 * A23^2 + $C$2 * A23 + $D$2. (61)

- В ячейку C23 ввести формулу для вычисления $f1(x_j^1)$

=3*$A$2 * A5^2 + 2 * $B$2 * A5 + $C$2. (62)

- В ячейку D23 ввести формулу для вычисления $f2(x_j^1)$

=6 * $A$2 * A23 + 2*$B$2. (63)

2. Аналогичные формулы ((13), (14), пример 1.3) и ((14), пример 2.2) были введены в ячейки B5, C5 и D5, соответственно (см. рис. 26). Скопировать формулы из ячеек B5, C5 и D5 в буфер обмена и вставить в ячейки B23, C23 и D23, соответственно. Для копирования формул в буфер обмена выделить диапазон ячеек B5:D5 и нажать комбинацию

клавиш <Ctrl> + <C>. Для вставки формул из буфера обмена в ячейки диапазона B23:D33 достаточно выделить диапазон ячеек B23:B33 с помощью мыши и клавиши <Shift> и щелкнуть мышью. Редактирование адресных ссылок на ячейки диапазона A5:A19 в формулах в ячейках диапазона B23:D33 при копировании не требуется, так как с учетом *механизма относительной адресации* они автоматически будут заменены ссылками на ячейки диапазона A23:A33. Вычисленные значения рядов x_j^1, $f(x_j^1)$, $f1(x_j^1)$ и $f2(x_j^1)$ отображаются в ячейках диапазона A23:D33 в числовом формате **Общий**.

3. Исследовать значения первой $f1(x_j^1)$ и второй $f2(x_j^1)$ производных функции на границах отрезков $[x_{j-1}^1; x_j^1]$, заданных таблично, проверив выполнение *условия существования экстремума* (*максимума*) (58) с помощью функции ЕСЛИ, которая имеет вид (см. рис. 30)

   = ЕСЛИ (И (C23 * C24 < 0; D24 < 0);"Существ. Макс"; "Нет"). (64)

   Формула проверки логического условия *существования экстремума (максимума) функции* (58), подобная (64), уже была ранее введена с клавиатуры в ячейки диапазона F6:F19 (см. пример 2.2, (56)). Скопировать формулу из ячейки F6 в буфер обмена и вставить в ячейку E24 (см. п. 1). Редактирование адресных ссылок C5 и C6 в формуле в ячейке E24 при копировании не требуется, так как с учетом *механизма относительной адресации* они автоматически будут заменены соответствующими ссылками на ячейки C23 и C24. Выполнить копирование формулы в ячейке E24 на диапазон E24:E33 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). На первой итерации точка *максимума* отделена на отрезке $[-1{,}9; -1{,}85]$ (ячейки A25, A26) (см. рис. 30).

4. Исследовать достижение заданной точности eps оценки координат точки *максимума* на отрезке $[-1{,}9; -1{,}85]$, полученных делением

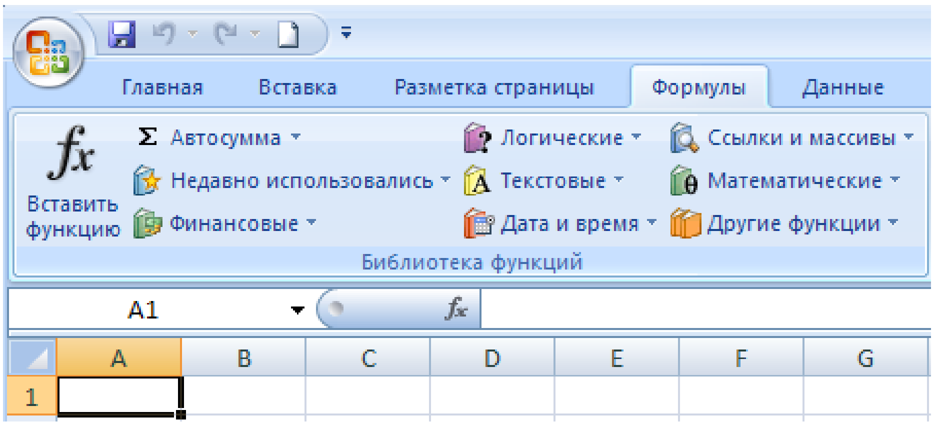
исходного отрезка [−2; −1,5] на 10 отрезков (см. п. 1), проверив логические *условия останова процесса уточнения координат точки экстремума* (60). Выделить диапазон F24:F33 и в ячейку F24 ввести формулу (рис. 31)

=ЕСЛИ (ИЛИ (ABS (A23 − A24) < $G$27; ABS (B23 − B24) < $G$27;
ABS (C24)<$G$27)); "Точность достигнута"; "Нет"). (65)

F26 =ЕСЛИ(ИЛИ(ABS(A25-A26)<$G$27;ABS(B25-B26)<$G$27;ABS(C26)<$G$27);"Точн дост";"Нет")

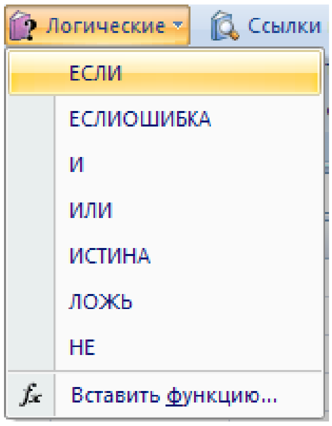
	A	B	C	D	E	F	G
21	***Табличный способ уточнения координат точки максимума***						
22	***x***	***f(x)***	***f 1 (x)***	***f2(x)***	***Существ. Макс***	***Точн дост***	***Нач знач***
23	-2	5	1	-8			-2
24	-1,95	5,040125	0,6075	-7,7	Нет	Нет	***Шаг hx***
25	-1,9	5,061	0,23	-7,4	Нет	Нет	0,05
26	-1,85	5,063375	-0,1325	-7,1	Существ.Макс	Нет	***eps***
27	-1,8	5,048	-0,48	-6,8	Нет	Нет	0,0001
28	-1,75	5,015625	-0,8125	-6,5	Нет	Нет	
29	-1,7	4,967	-1,13	-6,2	Нет	Нет	
30	-1,65	4,902875	-1,4325	-5,9	Нет	Нет	
31	-1,6	4,824	-1,72	-5,6	Нет	Нет	
32	-1,55	4,731125	-1,9925	-5,3	Нет	Нет	
33	-1,5	4,625	-2,25	-5	Нет	Нет	

Рис. 31. Электронная таблица проверки условия останова процесса уточнения координат точки максимума на отрезке [−2; −1,5]

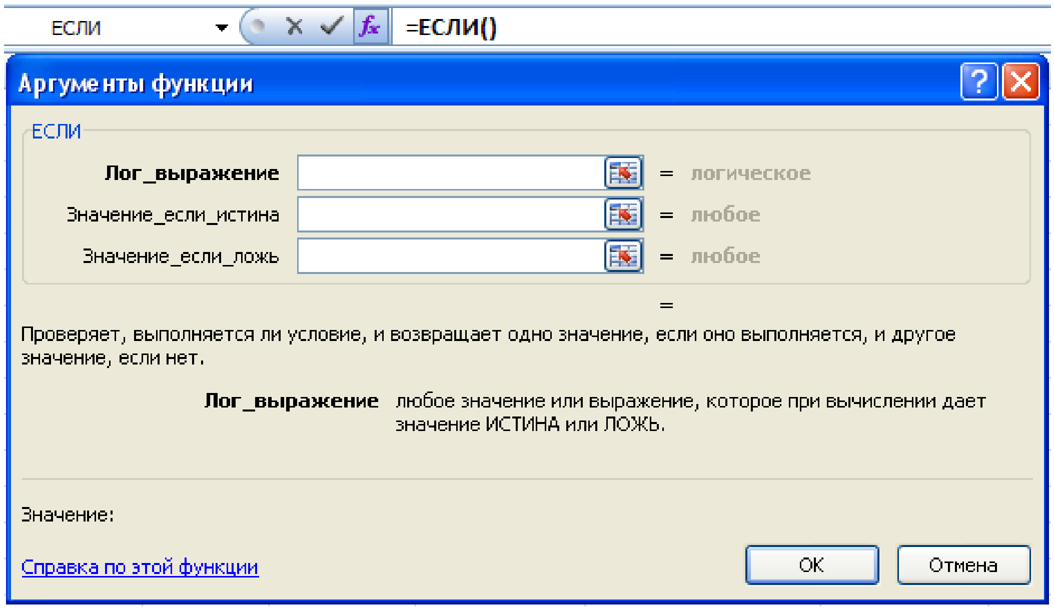


Формула (65) включает основную и вложенные функции. Для ввода встроенных функций ЕСЛИ( ), ИЛИ( ), ABS( ) в формуле предлагается использовать элементы управления раздела **Библиотека функций**, вкладка **Формулы**, которая приведена на рис.

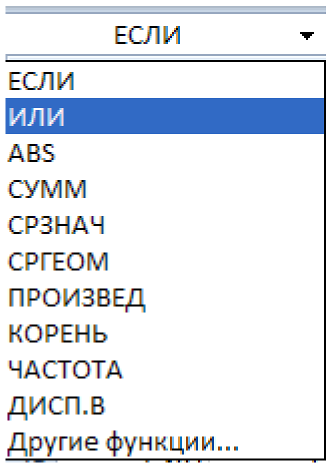
5. Доступ к функциям ЕСЛИ( ), И( ) открывается из раскрывающегося меню кнопки **Логические**, а к функции ABS( ) – из раскрывающегося меню кнопки **Математические.** Для ввода формулы (65) необходимо выполнить следующие действия:



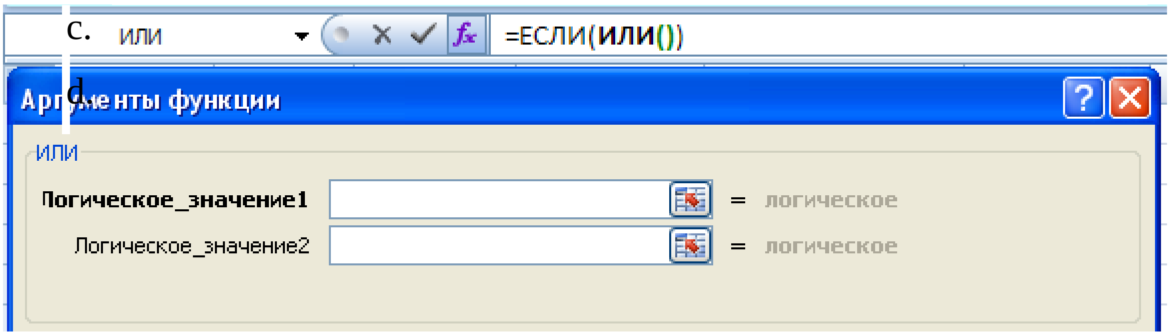
   a. В меню кнопки **Логические** выбрать из списка имя основной функции ЕСЛИ. На экране появится диалоговое окно **Аргументы функции**. MS Excel поместит в строку формул имя функции ЕСЛИ( ) вместе с парой скобок, как показано на рис.



   b. В поле **Логическое выражение** нужно ввести вложенную функцию ИЛИ( ), имя которой выбирается из списка в окне слева в строке формул, в котором отображается имя функции ЕСЛИ, как показано на рис.

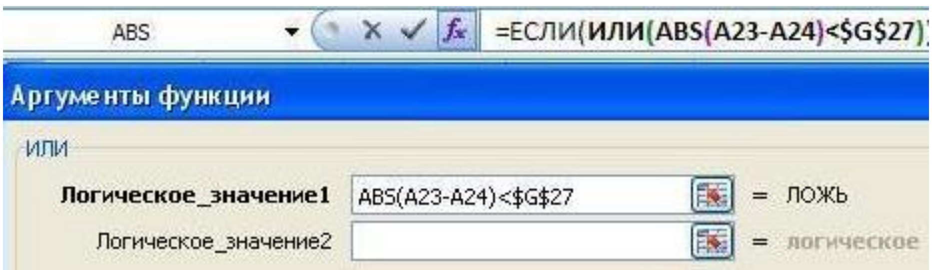


На экране появится диалоговое окно **Аргументы функции** ИЛИ, как показано на рис.



c. В поле ввода **Логическое значение1** нужно ввести из раскрывающегося списка в окне слева в строке формул, в которой отображается имя функции ИЛИ, имя вложенной функции ABS(). На экране появится диалоговое окно **Аргументы функции** ABS. В поле ввода **Число** нужно ввести выражение аргумента (A23 – A24), как показано на рис. Адреса ячеек следует вводить путем выбора ячеек в рабочем листе.

d. Далее следует вернуться в диалоговое окно функции ИЛИ(), щелкнув на имени функции ИЛИ в строке формул. Продолжить вводить с клавиатуры первый аргумент функции ИЛИ ABS(A23 – A24) < $G$27, как показано на рис.



e. Установить курсор в поле ввода **Логическое значение2**, продолжить ввод второго аргумента функции ИЛИ( ), повторив пп. b, c (символ «;» MS Excel добавляет автоматически).

f. Далее следует вернуться в диалоговое окно функции ЕСЛИ(), щелкнув на имени ЕСЛИ в строке формул. Завершить ввод функции: в поле ввода **Значение_если_истин**а ввести *Точность достигнута*, в поле **Значение_если_ложь** ввести *Нет*.

g. Завершить ввод формулы, нажав комбинацию клавиш (<Ctrl> + <Enter>). Формула в ячейке F24 будет размножена на диапазон F24:F33.

6. В результате оценки установлено, что координаты точки *максимума*, которая отделена на интервале $[-1{,}9; -1{,}85]$, не удовлетворяют требованиям заданной точности (см. рис. 31):

   $|x_3^1 - x_4^1| = |-1{,}9 - (-1{,}85)| = 0{,}05 > \text{eps} = 0{,}0001;$

   $|f(-1{,}9) - f(-1{,}85)| = |5{,}061 - 5{,}063| = 0{,}002 > \text{eps};$

   $|f1(-1{,}85)| = 0{,}1325 > \text{eps}.$

   Все аргументы функции ИЛИ логического *условия останова процесса уточнения значения экстремума* (60) имеют значение ЛОЖНО.

7. Логическое условие (60) не выполняется (погрешность оценки превышает допустимое значение eps) и итерационный процесс уточнения координат точки *максимума* функции нужно продолжить во второй итерации, повторив пп.1-4 для интервала [-1,9; -1,85]. Для этого в ячейках электронной таблицы G23 и G25 нужно ввести новые начальные значения левой границы отрезка $x_j^2 = -1{,}9$ и шага $h_x^2 = 0{,}1 \cdot h_x^1 = 0{,}005$, соответственно, и нажать клавишу <Enter>. В результате замены будет выполнен автоматически пересчет в ячейках диапазона A23:F33: рядов значений x_j^2, первой $f(x_j^2)$ и второй $f2(x_j^2)$ производных функции; проверены логические *условия* существования *максимума* (58) *и достижения заданной точности* (60) на отрезках $[x_{j-1}^2; x_j^2]$.

8. Логические условия (58) и (60) выполняется на третьей итерации (заданная точность eps оценки достигнута) на отрезке $[-1{,}869; -1{,}865]$ (рис. 32):

   $|x_3^3 - x_4^3| = |-1{,}869 - (-1{,}8685)| = 0{,}0005 > \text{eps} > 0{,}0001;$

   $|f(-1{,}869) - f(-1{,}8685)| = |5{,}064604 - 5{,}064605| = 0{,}000001 < \text{eps};$

   $|f1(-1{,}8685)| = 0{,}00012325 > \text{eps}.$

Второй аргумент функции ИЛИ логического условия (60) имеет значение ИСТИНА, а другие – ЛОЖНО. Итерационный процесс уточнения координат точки экстремума (*максимума*) функции нужно завершить.

F26 | f_x =ЕСЛИ(ИЛИ(ABS(A25-A26)<$G$27;ABS(B25-B26)<$G$27;ABS(C26)<$G$27);"Точн дост";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
21	***Табличный способ уточнения координат точки максимума***						
22	***x***	***f(x)***	***f 1 (x)***	***f2(x)***	***Существ. Макс***	***Точн дост***	***Нач знач***
23	-1,87	5,064597	0,0107	-7,22			-1,87
24	-1,8695	5,064601	0,00709075	-7,217	Нет	Точн дост	***Шаг hx***
25	-1,869	5,064604	0,003483	-7,214	Нет	Точн дост	0,0005
26	-1,8685	5,064605	-0,00012325	-7,211	Существ.Макс	Точн дост	***eps***
27	-1,868	5,064604	-0,003728	-7,208	Нет	Точн дост	0,0001
28	-1,8675	5,064601	-0,00733125	-7,205	Нет	Точн дост	
29	-1,867	5,064597	-0,010933	-7,202	Нет	Точн дост	
30	-1,8665	5,064590	-0,01453325	-7,199	Нет	Точн дост	
31	-1,866	5,064582	-0,018132	-7,196	Нет	Точн дост	
32	-1,8655	5,064572	-0,02172925	-7,193	Нет	Точн дост	
33	-1,865	5,064560	-0,025325	-7,19	Нет	Точн дост	

Рис. 32. Достижение заданной точности уточнения координат точки максимума на отрезке [−2; −1,5]

Точка с координатами [−1,8685; 5,0646], полученными на последней итерации, принимается за точку *максимума* функции. За максимум функции принимается значение $f_{\text{макс}} = 5{,}0646$, определенное с точностью eps = 0,0001 (см. рис. 32).

Пример 2.4

Для функции $f(x)$ вида (4) уточнить приближенное значение *координат точки минимума* функции на исходном отрезке [0,5; 1,0] до достижения заданной точности eps табличным способом. Продолжить пример 2.3. Скопировать *Лист Пример 2_3* и переименовать на *Лист Пример 2_4.*

По данным определения координат точки экстремума функции $f(x)$ (см. пример 2.2) на отрезке [0,5; 1,0] существует *точка минимума функции* с координатами [$x_{\text{мин}}$; $f(x_{\text{мин}})$]. Создать электронную таблицу уточнения координат точки минимума функции на отрезке [0,5; 1,0] до достижения заданной точности eps табличным способом.

Следуя инструкциям алгоритма 2.3, выполнить следующие действия.

1. В ячейки электронной таблицы G37 и G39 ввести начальное значение левой границы интервала x_1^1 = 0,5 и шаг h_x^1 = 0,05, соответственно. Выделить ячейку A37 и ввести формулу =$G$37 для копирования начального значения границы интервала. Выделить диапазон A38:A47 и ввести в ячейку A38 формулу =A37+$G$39 для вычисления ряда значений x_j^1 на отрезке [0,5; 1,0] по формуле арифметической прогрессии с шагом h_x^1, которую скопировать на диапазон (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). Для ряда значений x_j^1 вычислить ряды значений: функции $f(x_j^1)$ в диапазоне B37:B47; первой производной $f1(x_j^1)$ в диапазоне C37:C47 ; второй производной $f2(x_j^1)$ в диапазоне D37:D47 (рис. 33). Выделить диапазон B37:D47.
   - В ячейку B37 ввести формулу для вычисления $f(x_j^1)$ вида
     = $A$2 * A37^3 + $B$2 * A37^2 + $C$2 * A37 +$D$2. (66)
   - В ячейку C37 ввести формулу для вычисления $f1(x_j^1)$
     = 3 * $A$2 * A37^2 + 2 * $B$2*A37 +$C$2. 67)
   - В ячейку D37 ввести формулу для вычисления $f2(x_j^1)$
     = 6* $A$2 * A37 + 2 * $B$2. (68)
2. Аналогичные формулы (60), (61) и (62) (см. пример 2.3) введены в ячейки B23, C23 и D23, соответственно (см. рис. 30). Скопировать формулы из ячеек B23, C23 и D23 в буфер обмена и вставить в ячейки B37, C37 и D37, соответственно. Для копирования формул в буфер обмена выделить диапазон ячеек B23:D23 и нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <C>. Для вставки формул из буфера обмена в ячейки диапазона B37:D47достаточно выделить диапазон ячеек B37:B47 с помощью мыши и клавиши <Shift> и щелкнуть мышью. Редактирование адресных ссылок на ячейки диапазона A23:A33 в формулах в ячейках диапазона

B37:D47 при копировании не требуется, так как с учетом *механизма относительной адресации* они автоматически будут заменены соответствующими ссылками на ячейки диапазона A37:A47.

E38 | f_x | =ЕСЛИ(И(C37*C38<0;D38>0);"Существ.Мин";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
35	***Табличный способ уточнения координат точки минимума***						
36	***x***	***f(x)***	***f 1(x)***	***f 2(x)***	***Существ. Мин***	***Точн дост***	***Нач знач***
37	0,5	-1,875000	-0,25	7			0,5
38	0,55	-1,878625	0,1075	7,3	Существ.Мин	Нет	***Шаг hx***
39	0,6	-1,864000	0,48	7,6	Нет	Нет	0,05
40	0,65	-1,830375	0,8675	7,9	Нет	Нет	***eps***
41	0,7	-1,777000	1,27	8,2	Нет	Нет	0,0001
42	0,75	-1,703125	1,6875	8,5	Нет	Нет	
43	0,8	-1,608000	2,12	8,8	Нет	Нет	
44	0,85	-1,490875	2,5675	9,1	Нет	Нет	
45	0,9	-1,351000	3,03	9,4	Нет	Нет	
46	0,95	-1,187625	3,5075	9,7	Нет	Нет	
47	1	-1,000000	4	10	Нет	Нет	

Рис. 33. Электронная таблица уточнения координат точки минимума функции на интервале [0,5; 1,0] табличным способом

3. Исследовать значения первой $f1(x_j^1)$ и второй $f2(x_j^1)$ производных функции на границах отрезков $[x_{j-1}^1; x_j^1]$, заданных таблично, проверив выполнение *условия существования экстремума* (*минимума*) (59) с помощью функции ЕСЛИ, которая имеет вид (см. рис. 33)

= ЕСЛИ (И (C37 * C38 < 0; D37 > 0); "Существ.Минимум"; "Нет"). (69)

Формула проверки логического условия *существования экстремума (минимума) функции* (59), подобная (69), ранее уже была введена с клавиатуры в ячейки диапазона G6:G19 (см. пример 2.2). Скопировать формулу из ячейки G6 в буфер обмена и вставить в ячейку E38 (см. п. 1). Редактирование адресных ссылок C5 и C6 в формуле в ячейке E38 при копировании не требуется, так как с учетом *механизма относительной адресации* они автоматически будут заменены соответствующими ссылками на ячейки C37 и C38. Скопировать формулу в ячейке E38 на диапазон E38:E47 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). На первой итерации точка максимума отделена на отрезке [0,5; 0,55] (ячейки A37, A38).

4. Исследовать достижение заданной точности eps оценки координат точки *минимума,* на отрезке [0,5; 0,55], проверив логические *условия останова процесса уточнения координат точки экстремума* (60) с помощью функции ЕСЛИ. Выделить диапазон F38:F47 и в ячейку F38 ввести формулу (см. рис. 34)

= ЕСЛИ (ИЛИ (ABS (A37 - A38) < $G$41; ABS (B37 - B38) < $G$41;

ABS (C38) < $G$41)); "Точность достигнута"; "Нет"). (70)

Аналогичная формула (65) (см. пример 2.3) введена в ячейки F24:F33 (см. рис. 31). Скопировать формулу из ячейки F24 в буфер обмена и вставить в ячейку F38. Для копирования формул в буфер обмена выделить ячейку F24 и нажать комбинацию клавиши <Ctrl> + <C>. Для вставки формул из буфера обмена в диапазон F38:F47 нажать клавиши <Ctrl> + <V>. Редактирование адресных ссылок на ячейки диапазона A23:A33 в формулах в ячейках диапазона F38:F47 при копировании не требуется, так как с учетом *механизма относительной адресации* они автоматически будут заменены соответствующими ссылками на ячейки диапазона A38:A47. Требуется редактирование абсолютной адресной ссылки $G$27 на $G$41. Формулу (70) в ячейке F38 размножить на диапазон F38:F47 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). В результате установлено (см. рис. 33), что оценки координаты точка *минимума*, которая обнаружена на отрезке [0,5; 0,55], не удовлетворяют требованиям заданной точности:

$|x_1^1 - x_2^1| = |0{,}5 - 0{,}55| = 0{,}05 > eps = 0{,}0001;$

$|f(0{,}5) - f(0{,}55)| = |-1{,}875 - (-1{,}878625)| = 0{,}0036 > eps;$

$|f1(0{,}55)| = 0{,}1075 > eps.$

Все аргументы функции ИЛИ логического условия (60) имеют значение ЛОЖНО.

F45 =ЕСЛИ(ИЛИ(ABS(A44-A45)<$G$41;ABS(B44-B45)<$G$41;ABS(C45)<$G$41);"Точн.дост";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
35	***Табличный способ уточнения координат точки минимума***						
36	***x***	***f(x)***	***f 1(x)***	***f 2(x)***	***Существ. Мин***	***Точн дост***	***Нач знач***
37	0,5	-1,875000	-0,25	7			0,5
38	0,505	-1,876162	-0,214925	7,03	Нет	Нет	***Шаг hx***
39	0,51	-1,877149	-0,1797	7,06	Нет	Нет	0,005
40	0,515	-1,877959	-0,144325	7,09	Нет	Нет	***eps***
41	0,52	-1,878592	-0,1088	7,12	Нет	Нет	0,0001
42	0,525	-1,879047	-0,073125	7,15	Нет	Нет	
43	0,53	-1,879323	-0,0373	7,18	Нет	Нет	
44	0,535	-1,879420	-0,001325	7,21	Нет	Точн.дост	
45	0,54	-1,879336	0,0348	7,24	Существ.Мин	Точн.дост	
46	0,545	-1,879071	0,071075	7,27	Нет	Нет	
47	0,55	-1,878625	0,1075	7,3	Нет	Нет	

Рис. 34. Электронная таблица уточнения координат точки минимума функции на отрезке [0,5; 1,0] табличным способом

5. Логическое условие (60) не выполняется (погрешность оценки превышает допустимое значение eps) и итерационный процесс уточнения координат точки *минимума* функции следует продолжить во второй итерации, повторив пп.1-4 для отрезка [0,5; 0,55]. Для этого в ячейках электронной таблицы G37 и G39 нужно ввести новые начальные значения левой границы отрезка $x_1^2 = 0{,}5$ и шага $h_x^2 = 0{,}1 \cdot h_x^1 = 0{,}005$, соответственно, и нажать клавишу <Enter>. В результате замены будет выполнен автоматически пересчет в ячейках диапазона A37:F47: рядов значений x_j^2, первой $f1(x_j^2)$ и второй $f2(x_j^2)$ производных функции; проверены логические *условия существования минимума* (59) *и достижения заданной точности* (60) на отрезках $[x_{j-1}^2; x_j^2]$.
6. Логические условия (59) и (60) выполняется на второй итерации (заданная точность eps оценки достигнута) на отрезке [0,535; 0,54] (см. рис. 34):

$\left| x_8^2 - x_9^2 \right| = \left| 0{,}535 - 0{,}54) \right| = 0{,}0005 > eps = 0{,}0001;$

$\left| f(0{,}535) - f(0{,}54) \right| = \left| -1{,}87942 - (-1{,}879336) \right| = 0{,}00009 < eps;$

$\left| f1(0{,}54) \right| = 0{,}0348 > eps.$

Второй аргумент функции ИЛИ логического условия (60) имеет значение ИСТИНА, а другие – ЛОЖНО. Итерационный процесс уточнения *координат точки минимума функции* нужно закончить. Точка с координатами [0,54; −1,8793], полученными на последней итерации, принимается за точку *минимума функции* [$x_{мин}$; $f_{мин}$]. За минимум функции принимается значение $f_{мин} = -1{,}8793$, определенное с точностью eps = 0,0001.

2.3.2. Определение координат точек экстремума функции по критическим точка формульным способом

Пусть дана функция $f(x)$, которая непрерывна и дифференцируема на интервале (α, β). Функция $f(x)$ и ее первая производная $f1(x)$ заданы аналитически в виде формул (см. прил. 2). Уравнение $f1(x) = 0$ имеет на интервале (α, β) действительные корни, которые являются критическими точками xk функции $f(x)$. Функция $f(x)$ принимает экстремальные значения (*максимума* или *минимума*) в критических точках. Значения корней уравнения $f1(x) = 0$ для функций $f(x)$, которые заданы аналитически в виде формул, могут быть вычислены «точно» по формулам, приведенным в прил. 2. Подставив значение xk в выражение функции $f(xk)$ получим «точное» значение величины *максимума* $f_{макс}$ или *минимума* функции $f_{мин}$. Точка с координатами [xk; $f(xk)$] принимается за точку экстремума (*максимума* или *минимума*) функции $f(x)$.

Пример 2.5

Функция $f(x)$ вида (4) принимает экстремальные значения в критических точках, которые являются корнями уравнения первой производной $f1(x) = 0$. Значения корней уравнения $f1(x) = 0$ для $f(x)$ вида (4) были вычислены «точно» по формулам, приведенным в табл. 1 в примере 1.2. Электронная таблица вычисления критических точек приведена на рис.3. Функция $f(x)$ вида (4) имеет две критические точки $xk_1 = -1{,}8685$; $xk_2 = 0{,}5352$, значения которых представлены в ячейках F2 и F3.

Поскольку было установлено (см. пример 2.2), что *максимум* функции $f(x)$ существует на отрезке $[-2; -1{,}5]$, то подставив значение $xk_1 = -1{,}8685$ в выражение функции $f(x)$ получим «точное» значение величины *максимума* $f_{\text{макс}} = 5{,}0646$ в ячейке F3 (см. рис.26).

Также было установлено (см. пример 2.2), что *минимум* функции $f(x)$ существует на отрезке $[0{,}5; 1{,}0]$, то подставив значение $xk_2 = 0{,}5325$ в выражение функции $f(x)$ получим «точное» значение величины *минимума* $f_{\text{мин}} = -1{,}8794$ в ячейке F2 (см. рис.26).

Сравнительные данные определения «точных» и приближенных значений координат экстремальных точек функции $f(x)$ различными способами приведены в табл.2.

Таблица 2.

Данные определения координат экстремальных точек функции f(x) различными способами

№ п/п	Способ вычисления координат экстремальной точки функции	Максимум		Минимум	
		$x_{\text{макс}}$	$f_{\text{макс}}$	$x_{\text{мин}}$	$f_{\text{мин}}$
1	Критические точки (формульный способ. Пример 1.2)	$-1{,}8685$	5,0646	0,5352	$-1{,}8794$
2	Поиск интервала, на котором существует экстремум (пример 2.2)	$(-2; -1{,}5)$ $x_{\text{макс}} = -1{,}5$	4,625	$(0{,}5; 1{,}0)$ $x_{\text{мин}} = 1{,}0$	$-1{,}0$
3	Уточнение приближенного значения координат точки экстремума (примеры 2.3, 2.4)	$[-1{,}869; -1{,}8685]$ $x_{\text{макс}} = -1{,}8685$	5,0646	$[0{,}535; 0{,}54]$ $x_{\text{мин}} = 0{,}54$	$-1{,}87934$

Анализ данных, приведенных в табл. 2, позволяет сделать вывод об эффективности приближенных способов определения координат точки экстремума функции $f(x)$ по сравнению с «точным» способом, который основан на определении значений действительных корней уравнения $f1(x) = 0$ (критических точек функции $f(x)$) с помощью вычислений по формулам. Трудоемкость «точного» способа обусловлена необходимостью выполнения вручную преобразования аналитического выражения функции $f(x)$, нахождения выражения для ее первой производной $f1(x)$ и ее действительных корней.

2.4. Исследование функции на выпуклость вверх или вниз. Поиск точки перегиба

2.4.1. Исследование функции f(x) на обращение выпуклостью вверх (*вниз*)

Пусть функции $f(x)$, ее первая $f1(x)$ и вторая $f2(x)$ производные определены и непрерывны на интервале (α, β). Для решения *задачи о функции* $f(x)$, *обращенной выпуклостью вверх* (*вниз*) на интервале (α, β) необходимо иметь критерий, позволяющий убедиться в выполнении следующего условия.

Если вторая производная функции $f2(x)$ на некотором интервале (α, β) отрицательна или равна нулю, то на этом интервале кривая функции $f(x)$ обращена *выпуклостью вверх,* иначе, $f2(x)$ положительна и на интервале (α, β) кривая функции $f(x)$ обращена *выпуклостью вниз*.

Логическое условие, которое имеет значение ИСТИНА, когда выполняется *условие выпуклости вверх функции на интервале* (α, β), имеет вид

$$f2(x) < = 0. \tag{71}$$

Когда логическое условие (71) имеет значение ЛОЖЬ, (не выполняется *условие выпуклости вверх* функции на интервале (α, β)), выполняется *условие выпуклости вниз*, которое имеет вид:

$$\text{НЕ } (f2(x) <= 0)), \text{ которое равносильно } f2(x) > 0.$$

Алгоритм 2.4. Исследование функции f(x) на обращение выпуклостью вверх или вниз табличным способом

Для исследования функции на *обращение выпуклостью вверх или вниз* табличным способом необходимо выполнить следующие действия.

1. Вычислить таблицу значений x_i с постоянным шагом h_x на отрезке [α, β], где x_1 = α, $x_2 = x_1 + h_x$,…, $x_i = x_{i-1} + h_x$,…, $x_n = x_{n-1} + h_x$ = β. По данным таблицы x_i вычислить таблицы значений $f(x_i)$ и $f2(x_i)$. Отобразить ряды значений x_i, $f(x_i)$ и $f2(x_i)$ на **Точечной** диаграмме.
2. Исследовать значения второй производной функции $f2(x)$ на границах отрезков $[x_{i-1}; x_i]$ значений x, заданных таблично, проверив выполнение *условия обращения функции* $f(x)$ *выпуклостью вверх* на интервале (α, β) (71) с помощью логической функции ЕСЛИ. Если логическое условие (71) имеет значение ИСТИНА, то вывести текст «Вверх», иначе (значение ЛОЖЬ) − «Вниз».

Пример 2.6

Исследовать функции $f(x)$ вида (4) на *обращение выпуклостью вверх* (*вниз*) на интервале (−4; 3) табличным способом. Продолжить пример 2.3 (см. рис.30). Скопировать *Лист Пример 2_3* и переименовать на *Лист Пример 2_6*.

Следуя инструкциям алгоритма 2.4, выполнить следующие действия.

1. Данные результатов вычисления рядов значений аргумента x, функции $f(x)$ вида $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, ее второй $f2(x)$ производной, на отрезке [−4; 3] приведены в электронной таблице (рис. 35). Ряды значений x_i, $f(x_i)$ и $f2(x_i)$ отображены на **Точечной** диаграмме (рис. 36).
2. Создать электронную таблицу проверки логического условия обращения функции $f(x)$ выпуклостью вверх (вниз) на отрезке [α, β] (71). Выделить диапазон D5:D19, ввести в ячейку D5 формулу с функцией ЕСЛИ для проверки логического условия (71) и принятия решения о его выполнении, которая имеет вид

= ЕСЛИ (C5 <= 0; "Вверх"; "Вниз").

Ввод имени встроенной функции ЕСЛИ произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). Выполнить копирование формулы в ячейке D5 на диапазон D5:D19 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>) (см. рис. 35).

D5 | f_x =ЕСЛИ(C5<=0;"Вверх";"Вниз")

	A	B	C	D	E	F
1	***a***	***b***	***c***	***d***	***Корень f2(x)=0***	***f2(x)***
2	1	2	-3	-1	-0,6667	0
3	***Нач.знач x***	-4	***hx***	0,5		
4	***x***	***f(x)***	***f2(x)***	***Выпуклвверх/вниз***		
5	-4	-21	-20,0	Вверх	***Точка перегиба***	
6	-3,5	-8,875	-17,0	Вверх	Нет	
7	-3	-1	-14,0	Вверх	Нет	
8	-2,5	3,375	-11,0	Вверх	Нет	
9	-2	5	-8,0	Вверх	Нет	
10	-1,5	4,625	-5,0	Вверх	Нет	
11	-1	3	-2,0	Вверх	Нет	
12	-0,5	0,875	1,0	Вниз	Точка перегиба	
13	0	-1	4,0	Вниз	Нет	
14	0,5	-1,875	7,0	Вниз	Нет	
15	1	-1	10,0	Вниз	Нет	
16	1,5	2,375	13,0	Вниз	Нет	
17	2	9	16,0	Вниз	Нет	
18	2,5	19,625	19,0	Вниз	Нет	
19	3	35	22,0	Вниз	Нет	

Рис. 35. Электронная таблица исследования функции $f(x)$ на выпуклость вверх (вниз)

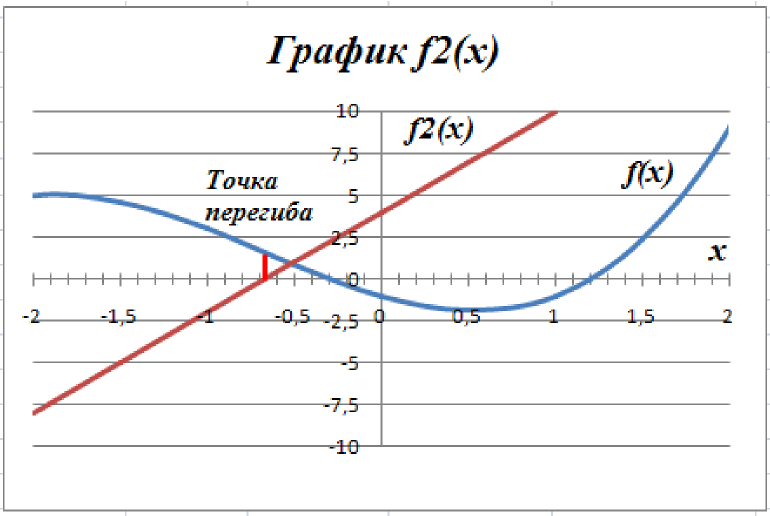


Рис. 36. График второй производной $f2(x)$ функции $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

3. Анализ данных результатов проверки логического условия (71), представленных в диапазоне D5:D19, показывает, что на отрезке

$[-3{,}5; -1\,]$ значений x логическое *условие обращения функции* $f(x)$ *выпуклостью вверх* выполняется (диапазон D5:D11) − *вторая производная отрицательна и сохраняет знак:*

$$f2(-3{,}5\,) = -17 < 0;\ f2(\,-1) = -2 < 0.$$

4. На отрезке $[-0{,}5; 3\,]$ значений x логическое условие (71) имеет значение ЛОЖЬ (диапазон D12:D19), следовательно выполняется *условие обращения функции f(x) выпуклостью вниз* − *вторая производная величина положительная и сохраняет знак:*

$$f2(-0{,}5\,) = 1 > 0;\ f2(\,3\,) = 22 > 0.$$

2.4.2. Определение координат точки перегиба кривой функции табличным способом

Пусть функции $f(x)$ и ее вторая производная $f2(x)$ определены и непрерывны на интервале (α, β). Пусть x_0 − некоторая точка, расположенная между границами интервала α и β. Для решения *задачи о существования точки перегиба кривой функции* $f(x)$ *на интервале* (α, β) *табличным способом* необходимо иметь критерий, позволяющий убедиться в выполнении следующего условия.

Если вторая производная $f2(x)$ непрерывна на интервале (α, β) и меняет знак при $x = x_0$, то точка с координатами $[x_0; f(x_0)]$ является *точкой перегиба кривой функции* $f(x)$ *на интервале* (α, β).

Логическое условие, которое имеет значение ИСТИНА, когда *условие существования точки перегиба функции* $f(x)$ *на интервале* (α, β) выполняется, имеет вид

$$f2(\alpha) \cdot f2(\beta) < 0. \tag{72}$$

Алгоритм 2.5. Определение координат точки перегиба кривой функции $y = f(x)$ табличным способом

Для определения координат точки перегиба кривой функции $y = f(x)$ на интервале (α, β) табличным способом необходимо выполнить следующие действия.

1. Вычислить таблицу значений x_i с постоянным шагом h_x на отрезке [α, β], где x_1 = α, $x_2 = x_1 + h_x$,…, $x_i = x_{i-1} + h_x$,…, $x_n = x_{n-1} + h_x$ = β. По данным таблицы x_i вычислить таблицы значений функции $f(x_i)$ и второй производной $f2(x_i)$. Отобразить ряды значений x_i, $f(x_i)$ и $f2(x_i)$ на **Точечной** диаграмме.
2. Исследовать значения второй производной функции $f2(x_i)$ на границах отрезков $[x_i; x_{i-1}]$ значений x, заданных таблично, проверив выполнение *условия существования точки перегиба кривой функции* $y = f(x)$ (72) с помощью функции ЕСЛИ. Если логическое условие (72) имеет значение ИСТИНА, то вывести текст «Точка перегиба», иначе (логическое условие (72) имеет значение ЛОЖЬ) − «Нет».

Пример 2.7

Найти координаты *точки перегиба* кривой функции $y = f(x)$ вида (4) на интервале (−4; 3) табличным способом. Продолжить пример 2.6 (см. рис. 35). Скопировать *Лист Пример 2_6* и переименовать на *Лист Пример 2_7*.

Следуя инструкциям алгоритма 2.5, выполнить следующие действия.

1. Данные результатов вычисления рядов значений аргумента x_i с постоянным шагом h_x = 0,5 на отрезке [−4; 3], где $x_1 = -4$, $x_2 = x_1 + h_x$,…, $x_i = x_{i-1} + h_x$,…, $x_n = x_{n-1} + h_x = 3$, функции $f(x_i)$ и второй производной $f2(x_i)$ приведены в электронной таблице (см. рис. 35). Ряды значений x_i, $f(x_i)$ и $f2(x_i)$ отображены на **Точечной** диаграмме (см. рис. 36).
2. Создать электронную таблицу проверки логического условия существования *точки перегиба* кривой функции $y = f(x)$ на отрезке [−4; 3] (72) с помощью логической функции ЕСЛИ (рис. 35). Выделить диапазон E6:E19, ввести в ячейку E6 формулу с логической функцией ЕСЛИ для проверки логического условия (72) и принятия решения о его выполнении, которая имеет вид

= ЕСЛИ (C5 * C6 < 0; "Точка перегиба"; "Нет").

3. Ввод имени встроенной функции ЕСЛИ( ) произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). Выполнить копирование формулы в ячейке Е6 на диапазон Е6:Е19 (см. рис. 35).
4. Анализ данных проверки логического условия (72) в ячейках диапазона Е6:Е19 показывает, что на отрезке $[-1; -0{,}5\,]$ (ячейка Е12) выполняется *условие существования точки перегиба кривой функции* $y = f(x)$ – *вторая производная* $f2(x)$ *меняет знак*:

$$f2(-1{,}0) = -2;\ f2(-0{,}5) = 1;\ f2(-1{,}0) \cdot f2(-0{,}5) < 0.$$

5. По данным значений x на границах отрезка $[-1; -0{,}5\,]$ определить значения функции $f(-1{,}0) = 3$; $f(-0{,}5) = 0{,}875$, которые отображаются в ячейках В11, В12 (см. рис. 35). Точки с координатами $[-1{,}0; 3{,}0\,]$ и $[-0{,}5; 0{,}875\,]$ можно рассматривать как первое приближение искомого значения *координат точки перегиба кривой функции* $y = f(x)$ на интервале $(-4; 3)$. Решение задачи уточнения значения координат точки перегиба кривой функции $y = f(x)$ до заданной точности eps предполагает сужение отрезка $[-1{,}0; -0{,}5\,]$.

2.4.3. Уточнение координат точки перегиба кривой функции y = f(x) табличным способом

Для уточнения приближенного значения координат точки перегиба функции $y = f(x)$ на интервале (α, β) с заданной точностью eps табличным способом следует выполнить действия, аналогичные уточнению значения координат точки экстремума функции $f(x)$ табличным способом (см. алгоритм 2.3).

Точность приближенного значения координат точки перегиба кривой функции $y = f(x)$ определяется длиной отрезка $[x_{i-1} - x_i]$, на котором содержится единственная точка перегиба с координатами $[x_0; f(x_0)]$. Решение задачи уточнения значения координат точки перегиба кривой функции $y = f(x)$ предполагает сужение отрезка $[x_{i-1}; x_i]$ до заданной точности eps и представляет собой итерационный процесс.

Алгоритм 2.6. Уточнение приближенного значения координат точки перегиба функции y = f(x) с заданной точностью табличным способом.

Итерационный процесс уточнения значения координат точки перегиба кривой функции y = f(x) на исходном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ выполняется в два этапа.

1. На *первом* этапе исходный отрезок $[x_{i-1}; x_i]$ делится на n отрезков $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ (обычно принимают n = 10, j = 2, 3,…, n) и отделяется более узкий отрезок $[x_{j-1}^1; x_j^1]$, который содержится на отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ и на котором с помощью функции ЕСЛИ проверяется выполнение *логического условия существования точки перегиба кривой функции,* которое имеет вид:

$$f2(x_{j-1}^1) * f2(x_j^1) < 0. \qquad (73)$$

2. На каждой итерации с помощью функции ЕСЛИ проверяется логическое *условие останова процесса уточнения значения* координат точки перегиба кривой функции y = f(x), которое имеет вид:

$$\text{ИЛИ} \left(\left| x_{j-1}^1 - x_j^1 \right| < \text{eps}; \left| f2(x_j^1) \right| < \text{eps} \right). \qquad (74)$$

   В условии (74) объединены с помощью логической функции ИЛИ два логических условия: длина отрезка $\left| x_{j-1}^1 - x_j^1 \right|$ по модулю меньше eps; значение второй производной на правой границе отрезка $\left| f2(x_j^1) \right|$ по модулю меньше eps. Логическое выражение (74) будет иметь значение ИСТИНА, если выполняется любое одно или оба логических условия – аргументы функции ИЛИ.

3. Если оба логические условия (73) и (74) выполняются (на отрезке $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ обнаружено существование *точки перегиба кривой функции* y = f(x) и заданная точность eps оценки ее координат достигнута), то итерационный процесс уточнения координат точки перегиба функции y = f(x) на исходном отрезке $[x_{i-1}; x_i]$ нужно закончить. За значение координат точки *перегиба* принимается $[x_{j-1}^1; x_j^1]$, полученное на последней итерации.

4. Если условие (74) не выполняется (заданная точность eps оценки значения координат точки *перегиба* функции $f(x)$ не достигнута), то итерационный процесс сужения отрезка $[x_{j-1}^1; x_j^1]$ нужно продолжить в следующей (второй, третьей и т.д.) итерациях.

Пример 2.8

Для функции $f(x)$ вида (4) уточнить приближенное значение координат *точки перегиба* кривой функции $y = f(x)$ на исходном отрезке $[-1; -0{,}5]$ до достижения заданной точности eps табличным способом. Продолжить пример 2.7. Скопировать *Лист Пример 2_7* и переименовать на *Лист Пример 2_8*.

По данным определения координат *точки перегиба* функции $f(x)$ (см. пример 2.7) на отрезке $[-1; -0{,}5]$ существует точка перегиба кривой функции с координатами $[x_0; f(x_0)]$. Создать электронную таблицу уточнения координат точки перегиба кривой функции $y = f(x)$ на отрезке $[-1; -0{,}5]$ до достижения заданной точности eps $= 0{,}0001$ табличным способом.

Следуя инструкциям алгоритма 2.6, выполнить следующие действия.

1. В ячейки электронной таблицы F23 и F25 (рис. 37) ввести начальное значение границы интервала $x_1^1 = -1{,}0$ и шаг $h_x^1 = 0{,}05$, соответственно. Выделить ячейку A23 и ввести формулу = F23 для копирования начального значения границы интервала. Выделить диапазон A24:A33 и ввести в ячейку A24 формулу = A23 + $F$25 для вычисления ряда значений x_j^1 на отрезке $[-1; -0{,}5]$ по формуле арифметической прогрессии с шагом h_x^1, которую скопировать на диапазон (комбинация клавиш <Ctrl + Enter>). Для ряда значений x_j^1 вычислить ряды значений:
    - функции $f(x_j^1)$ в диапазоне B23:B33;
    - второй производной $f2(x_j^1)$ в диапазоне C23:C33 (см. рис. 37).

2. Выделить диапазон B23:B33. В ячейку B23 ввести формулу для вычисления $f(x_j^1)$ вида

$$= \$A\$2 * A23\text{^}3 + \$B\$2 * A23\text{^}2 + \$C\$2 * A23 + \$D\$2. \quad (75)$$

В ячейку C23 ввести формулу для вычисления $f2(x_j^1)$

$$= 6 * \$A\$2 * A23 + 2 * \$B\$2. \quad (76)$$

D24 | =ЕСЛИ(C23*C24<0;"Точка перегиба";"Нет")

	A	B	C	D	E	F
21	***Табличный способ уточнения координат точки перегиба***					
22	***x***	***f(x)***	***f2(x)***	***Точка перегиба***	***Точн дост***	***Нач знач***
23	-1	3,000000	-2			-1
24	-0,95	2,797625	-1,7	Нет	Нет	***Шаг hx***
25	-0,9	2,591000	-1,4	Нет	Нет	0,05
26	-0,85	2,380875	-1,1	Нет	Нет	***eps***
27	-0,8	2,168000	-0,8	Нет	Нет	0,0001
28	-0,75	1,953125	-0,5	Нет	Нет	
29	-0,7	1,737000	-0,2	Нет	Нет	
30	-0,65	1,520375	0,1	Точка перегиба	Нет	
31	-0,6	1,304000	0,4	Нет	Нет	
32	-0,55	1,088625	0,7	Нет	Нет	
33	-0,5	0,875000	1	Нет	Нет	

Рис. 37. Электронная таблица уточнения координат точки перегиба функции $f(x)$ на интервале $[\,-1; -0{,}5\,]$

Аналогичные формулы были введены в ячейки B5 и C5, соответственно (см. рис. 35). Скопировать формулы из ячеек B5 и C5 в буфер обмена и вставить в ячейки B23 и C23, соответственно. Для копирования формул в буфер обмена выделить ячейки B5 и C5 и нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <C>. Для вставки формул из буфера обмена в ячейки диапазона B23:C33 достаточно выделить диапазон ячеек B23:B33 с помощью мыши и клавиши <Shift> и щелкнуть мышью. Редактирование адресной ссылки A5 в формулах в ячейках диапазона B23:C33 при копировании не требуется, так как с учетом *механизма относительной адресации* она автоматически будут заменена соответствующими ссылками на ячейки диапазона A23:A33.

3. Исследовать значения второй производной $f2(x_j^1)$ функции $f(x)$ на границах отрезков $[x_{j-1}^1; x_j^1]$, заданных таблично, проверив выполнение *условия существования точки перегиба* (73). Выделить диапазон D24:D33, ввести в ячейку D24 формулу с логической функцией ЕСЛИ для проверки логического условия (73) и принятия решения о его выполнении, которая имеет вид (см. рис. 37)

= ЕСЛИ (C23 * C24 < 0; "Точка перегиба"; "Нет"). (77)

Ввод имени встроенной функции ЕСЛИ произвести с помощью функции **Автозавершение** формул MS Excel (см. пример 1.2). Выполнить копирование формулы (77) в ячейке D24 на диапазон D24:D33 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>) (см. рис. 37). На первой итерации *точка перегиба кривой функции* $y = f(x)$ отделена на суженном отрезке $[-0{,}7; -0{,}65]$ (ячейки A29, A30). Примем значения $x = -0{,}65$ и $f(-0{,}65) = 1{,}52038$ на правом конце отрезка $[-0{,}7; -0{,}65]$ за координаты точки перегиба $[-0{,}65; 1{,}52038]$.

4. Проверить логическое условие останова процесса *уточнения координат точки перегиба* (74). Выделить диапазон E24:E33 в ячейку E24 ввести формулу (рис. 38)

= ЕСЛИ (ИЛИ (ABS (A23 − A24) < $F$27; ABS (C24) < $F$27);
"Точность достигнута"; "Нет").

Для ввода встроенных функций ЕСЛИ( ), ИЛИ( ), ABS( ) в формуле предлагается использовать элементы управления раздела **Библиотека функций**, вкладка **Формулы** (см. пример 2.3). Формулу размножить на диапазон (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>).

5. На первой итерации отрезок, на котором существует точка перегиба, сузился и составил $[-0{,}7; -0{,}65]$. Значение второй производной $f2(-0{,}65) = 0{,}1$. Логическое условие (74) не выполняется (заданная точность eps оценки координат точки перегиба не достигнута) (см. рис. 38). Итерационный процесс уточнения координат точки

перегиба следует продолжить в следующей (второй) итерации, повторив пп.1-3 для отрезка $[\,-0{,}7;\,-0{,}65]$.

E30 | f_x | =ЕСЛИ(ИЛИ(ABS(A29-A30)<$F$27;ABS(C30)<$F$27);"Точн дост";"Нет")

	A	B	C	D	E	F	G
21	***Табличный способ уточнения координат точки перегиба***						
22	***x***	***f(x)***	***f2(x)***	***Точка перегиба***	***Точн дост***	***Нач знач***	
23	-0,667	1,594037	-0,002			-0,667	
24	-0,66695	1,593820	-0,0017	Нет	Точн дост	***Шаг hx***	
25	-0,6669	1,593604	-0,0014	Нет	Точн дост	0,00005	
26	-0,66685	1,593387	-0,0011	Нет	Точн дост	***eps***	
27	-0,6668	1,593170	-0,0008	Нет	Точн дост	0,0001	
28	-0,66675	1,592954	-0,0005	Нет	Точн дост		
29	-0,6667	1,592737	-0,0002	Нет	Точн дост		
30	-0,66665	1,592520	1E-04	Точка перегиба	Точн дост		
31	-0,6666	1,592304	0,0004	Нет	Точн дост		
32	-0,66655	1,592087	0,0007	Нет	Точн дост		
33	-0,6665	1,591870	0,001	Нет	Точн дост		
34							

Рис. 38. Электронная таблица проверки условия останова процесса уточнения координат точки перегиба функции на интервале [- 1,0; -0,5]

6. Логические условия (73) и (74) выполняются на четвертой итерации (заданная точность eps оценки координат точки перегиба достигнута) на отрезке $[\,-0{,}6667;\,-0{,}66665\,]$ (см. рис. 38):

$$\left|\,x_7^4 - x_8^4\,\right| = \left|\,-0{,}6667 - (-0{,}66665)\,\right| = 0{,}00005 < eps = 0{,}0001;$$

$$\left|\,f2(-0{,}66665)\,\right| = 1E{-}04 = eps.$$

Первый аргумент функции ИЛИ логического условия (74) имеет значение ИСТИНА, а второй – ЛОЖНО. Итерационный процесс уточнения координат *точки перегиба кривой функции* $f(x)$ на интервале $[\,-1{,}0;\,-0{,}5\,]$ следует закончить. Точка с полученными на последней итерации координатами $[\,-0{,}66665;\,1{,}5925\,]$ принимается за *точку перегиба* функции $y = f(x)$ на интервале $(-4;\,3\,)$ с точностью eps = 0,0001.

2.4.4. Определение координат точки перегиба кривой функции **f(x)** *формульным способом*

Пусть дана функция $f(x)$, которая непрерывна и дифференцируема на интервале (α, β). Функция $f(x)$ и ее вторая производная $f2(x)$ заданы аналитически в виде формул (см. прил. 2). Уравнение $f2(x) = 0$ имеет на интервале (α, β) действительный корень x_0, который являются абсциссой координат точки перегиба кривой функции $y = f(x)$. Значение корня x_0 уравнения $f2(x) = 0$ может быть вычислено «точно» по формулам для функций, приведенным в прил. 2. Подставив значение x_0 в выражение функции $f(x)$ получим «точное» значение ординаты кривой функции $y = f(x)$. Точка с координатами $[x_0; f(x_0)]$ принимается за точку перегиба кривой функции $f(x)$ на интервале (α, β).

Пример 2.9

Кривая функции $y = f(x)$ вида (4) имеет *точку перегиба* в точке, которая является действительным корнем уравнения второй производной $f2(x)=0$. Значение действительного корня уравнения $f2(x) = 0$ для $f(x)$ вида (4) может быть вычислено «точно» по формуле, приведенной в табл. 1, (см. рис. 35).

$$f2(x) = 6ax + 2b = 0;\ x = x_0 = -2b/(6ax);\ x_0 = -0{,}66667;\ f(x_0) = 1{,}59259.$$

Значение $x_0 = -0{,}66667$ является абсциссой координаты *точки перегиба кривой функции* $y = f(x)$ вида (4). Подставив значение $x_0 = -0{,}66667$ в выражение функции $f(x)$ (4) получим «точное» значение ординаты точки перегиба $f(-0{,}66667) = 1{,}59259$.

Сравнительные данные определения «точных» и приближенных значений *координат точки перегиба кривой функции* $y = f(x)$ различными способами приведены в табл.3. Анализ данных позволяет сделать вывод об эффективности приближенных способов определения координат точки перегиба кривой функции $y = f(x)$ по сравнению с «точным» способом, который основан на определении значения действительного корня уравнения $f2(x) = 0$ с помощью вычислений по формулам. Трудоемкость «точного» способа обусловлена необходимостью выполнения вручную преобразования аналитического выражения функции $f(x)$, нахождения выражения для ее второй производной $f2(x)$ и ее действительного корня.

Таблица 3.

Данные определения координат точки перегиба кривой функции f(x) различными способами

N п/п	Способ вычисления координаты [x_0; $f(x_0)$] точки перегиба кривой функции y = $f(x)$	Абсцисса x_0	Ордината $f(x_0)$	Координаты
1	Корень уравнения $f2(x) = 0$ (формульный способ)	−0,66667	1,59259	[−0,66667;1,59259]
2	Поиск интервала, на котором существует точка перегиба (пример 2.7)	(−1,0; −0,5) $x_0 = -0{,}5$	0,875	[−0,5;0,875]
3	Уточнение приближенного значения координат точки перегиба (пример 2.8)	(−0,6667; −0,66665)	1,59252	[−0,66665;1,59252]

2.5. Отложение характерных точек на графике функции $y = f(x)$

Характерные точки на графике функции $y = f(x)$ (рис. 39):

- Координаты точки *максимума функции* (см. пример 2.3).
- Координаты точки *минимума функции* (см. пример 2.4).
- Координаты точки *перегиба кривой функции* (см. Пример 2.7).

Рис.39. Точечная диаграмма, отображающая ряды значений величин x, $f(x)$, $f1(x)$ и, $f2(x)$ и характерные точки на графике функции вида $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

Для *отложения характерных точек на графике функции* $f(x)$ необходимо выполнить следующие действия.

1. Создать внедренную **Точечную** диаграмму, на которой отобразить четыре базовых ряда значений: x, $f(x)$ $f1(x)$ (первая производная

функции $f(x)$) и $f2(x)$ (вторая производная функции $f(x)$), выбрать подтип **Точечный**.

2. Выполнить форматирование осей *OX* и *OY* на диаграмме на вкладке **Параметры оси** диалогового окна **Формат оси** с учетом требований по точности отображения значений координат характерных точек.
3. Вставить **Надписи** на диаграмме для характерных точек на графике функции $y = f(x)$: «Координаты точки максимума», «Координаты точки минимума», «Координаты точки перегиба».
4. На графиках функции $y = f(x)$ и ее первой производной $y1 = f1(x)$ отложить *координаты точек максимума и минимума функции* $f(x)$ с помощью добавления *автофигуры* **Линия**.
5. На графиках функции $y = f(x)$и ее второй производной $y2 = f2(x)$ отложить *координаты точки перегиба кривой функции* $f(x)$ с помощью добавления *автофигуры* **Линия**.
6. Выполнить редактирование и форматирование диаграммы с применением встроенных в MS Excel *макетов и стилей*.
7. Выполнить редактирование и форматирование элементов диаграммы: *названий диаграммы* и *осей*, *подписей данных*, *горизонтальной OX* и *вертикальной OY осей, сетки, области построения* и *области диаграммы*.
8. Добавить *надписи на диаграмме* и выполнить их форматирование.

2.5.1. Создание внедренной Точечной диаграммы

Алгоритм 2.7. Создание внедренной Точечной диаграммы

1. Выбрать диапазон ячеек, включающий данные, на основе которых будет создана диаграмма, в том числе заголовки столбцов и строк таблицы. Заголовки строк и столбцов таблицы автоматически копируются в *имена рядов* и *подписи осей* данных.
2. Выбрать *тип диаграммы* – щелкнуть на вкладке **Вставка** Ленты, а затем на кнопке со стрелкой выбора типа диаграммы **Точечная**.

На экране появится раскрывающаяся *галерея*, в которой находятся *эскизы* для выбранных *категорий и подтипов* выбранного типа диаграммы. Если задержать указатель мыши на одном из типов или подтипов диаграммы, появится *всплывающая подсказка* с названием *типа диаграммы* и ее краткой характеристикой.

3. Выделить диаграмму в раскрывающейся галерее диаграммы **Точечная** – щелкнуть на эскизе подтипа выбранной диаграммы **Точечная с гладкими краями**, чтобы добавить выбранную диаграмму на Рабочий лист.
4. Диаграмма связана с ячейками динамически, то есть изменение данных в ячейках автоматически переносится на диаграмму.

Пример 2.10

Создать внедренную **Точечную** диаграмму для отображения базовых рядов значений *x*, *f*(*x*) *f1*(*x*) и *f2*(*x*). Использовать данные для создания **Точечной** диаграммы, представленные в ячейках диапазона A4:D19 на рис. 26 (см. пример 2.2). Открыть *Лист Пример 2_2*, выделить диапазон ячеек A4:D19, скопировать данные в буфер обмена, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <C>. Открыть *Лист 2*, выделить ячейку A1 и вставить *значения* в диапазон A1:D16 на Листе 2, как показано на рис. Щелкнуть на кнопке **Вставить** в разделе **Буфер обмена** вкладки **Главная** Ленты и в раскрывшемся меню выбрать параметр **Вставить значения**. Переименовать *Лист 2* в *Лист Пример 2_10*.

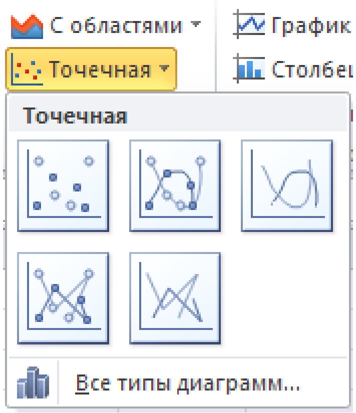
	A	B	C	D
1	x	f(x)	f1(x)	f2(x)
2	-4	-21	29	-20
3	-3,5	-8,875	19,75	-17
4	-3	-1	12	-14
5	-2,5	3,375	5,75	-11
6	-2	5	1	-8
7	-1,5	4,625	-2,25	-5
8	-1	3	-4	-2
9	-0,5	0,875	-4,25	1
10	0	-1	-3	4
11	0,5	-1,875	-0,25	7
12	1	-1	4	10
13	1,5	2,375	9,75	13
14	2	9	17	16
15	2,5	19,625	25,75	19
16	3	35	36	22

Следуя инструкциям алгоритма 2.7, выполнить следующие действия.

1. Выделить диапазон A1:D16 (см. рис.), включающий ряды данных, на основе которых будет создана диаграмм, в том числе заголовки

столбцов таблицы (*x*, *f*(*x*), *f1*(*x*), *f2*(*x*)). Заголовки столбцов таблицы автоматически копируются в *имена рядов данных* на диаграмме.

2. Выбрать вкладку **Вставка** на Ленте, затем в разделе **Диаграммы** выбрать тип диаграммы – щелкнуть кнопку **Точечная**. В открывшемся меню выбрать подтип **Точечная с гладкими кривыми** (см. рис.). Выбранная диаграмма будет добавлена на Рабочий лист.



3. Диаграмма появится на Рабочем листе в виде внедренной диаграммы вместе с данными, на основе которых создана диаграмма (рис. 40).

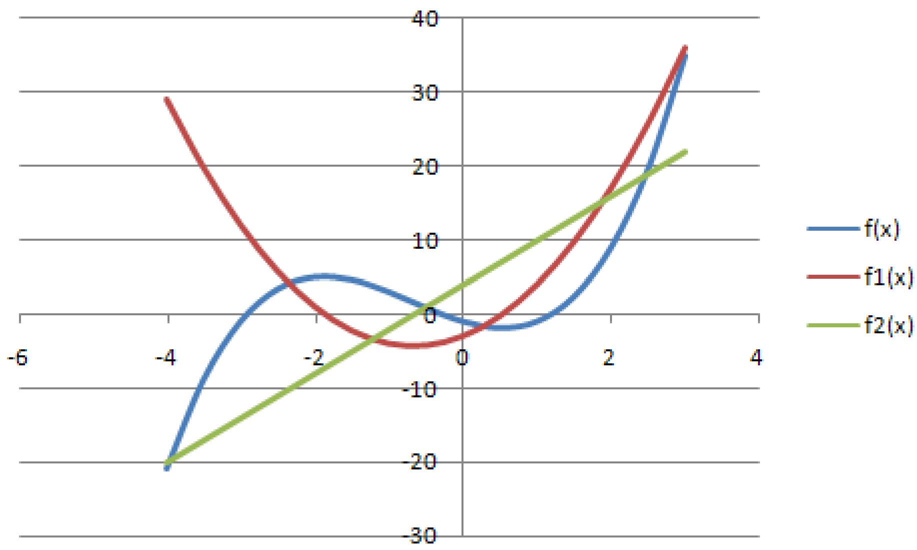


Рис. 40. Точечная диаграмма, отображающая значения базовых рядов x, f(x), f1(x) и f2(x)

2.5.2. Форматирование горизонтальной и вертикальной осей диаграммы

Ось – это шкала, которая применяется для нанесения значений базовых рядов на диаграмму. В **Точечной** диаграмме *горизонтальная* и *вертикальная оси* называются *осями значений*, При создании диаграммы параметры осей устанавливаются автоматически, исходя из значений отображаемых величин (см. пример 1.5, рис. 7). Для внесения изменений необходимо выбрать на диаграмме **Элемент диаграммы**. В MS Excel можно выбрать один из следующих способов выделения отдельных элементов диаграммы.

1. Выбрать элемент непосредственно на диаграмме, используя всплывающую подсказку, которая появляется под указателем мыши, и щелкнуть на нем.
2. Щелкнуть на имени элемента диаграммы в раскрывающемся списке **Элементы диаграммы** в группе **Текущий элемент** на вкладке **Формат**, находящейся на контекстной вкладке **Работа с диаграммами**. **Текущий** (выбранный) **элемент** отображается в поле **Элементы диаграммы**.

Если элемент диаграммы выделен, то изменить настройки его параметров можно щелкнув на кнопке **Формат** выделенного фрагмента. Будет отображено диалоговое окно **Формат оси** с выбранной вкладкой **Параметры оси** (см. рис. 8). В процессе настройки параметров элементов диаграммы **Горизонтальная ось (значений)** *OX* и **Вертикальная ось (значений)** *OY* для удовлетворения требований по точности отображения значений базовых рядов изменяют *максимальное и минимальное значение*, *цену основных и промежуточных делений*, изменение положения точки, в которой *горизонтальная ось пересекает* вертикальную и др. параметры.

Алгоритм 2.8. Форматирование осей OX и OY

Для форматирования *горизонтальной OX* и *вертикальной OY осей* (*значений*) на **Точечной** диаграмме выполнить следующие действия.

1. Выполнить форматирование *горизонтальной оси OX* на диаграмме с учетом требований по точности отображения значений координат характерных точек. Вызвать диалоговое окно **Формат оси**, выделив *горизонтальную ось OX* на диаграмме, установив указатель мыши на оси (первый способ) и щелкнув правой кнопкой. В контекстном меню выбрать команду **Формат оси** (см. пример 1.5).
2. В диалоговом окне **Формат оси** выполнить следующие настройки параметров осей.

2.1. На вкладке **Параметры оси**, которая открывается по умолчанию (рис. 8), установить:

- значения в окнах: *минимальное значение* (*по оси OX*) *фиксированное*; *максимальное значение (по оси OX) фиксированное*; *цена основных делений и цена промежуточных делений ─ фиксированные*.
- значения в окнах: *основные линии ─ пересекают ось; промежуточные линии ─ пересекают ось.*

2.2. На вкладке **Цвет линии** отменить **Автовыбор** и установить флажок на пункте **Сплошная линия, Цвет – черный**.

3. Выполнить форматирование *линий сетки горизонтальной оси OX*.

3.1. Вызвать диалоговое окно **Формат основных линий сетки**, выделив *горизонтальную ось OX* на диаграмме, установив указатель мыши на *горизонтальной оси* и щелкнув правой кнопкой. В контекстном меню выбрать команду **Формат основных линий сетки**. Выбрать вкладку **Цвет линии**, отменить **Автовыбор** (установку по умолчанию) и включить флажок на пункте **Сплошная линия, Цвет ─ темноголубой**.

3.2. Вызвать диалоговое окно **Формат промежуточных линий сетки** ─ выбрать команду в контекстном меню выделенной *оси* OX. Выполнить форматирование промежуточных линий сетки аналогично форматированию основных линий сетки (см. п. 2.1).

4. Выполнить форматирование *вертикальной оси OY* диаграммы. Выделить *вертикальную ось OY* на диаграмме, применив раскрывающийся список **Элементы диаграммы** в группе **Текущий элемент** (второй способ). Вызвать диалоговое окно **Формат оси** и на вкладке **Параметры оси** установить значения в окнах: *минимальное значение (по оси OY) фиксированное; максимальное значение (по оси OY) фиксированное; цена основных делений* и *цена промежуточных делений ─ фиксированные*.

5. Выполнить форматирование *линий сетки вертикальной оси OY* диаграммы аналогично форматированию *линий сетки* оси *OX* (см. п. 2).

Пример 2.11

Выполнить форматирование *элементов диаграммы* **Горизонтальная** и **Вертикальная оси (значений) Точечной** диаграммы (см. рис. 40), как показано на рис. 39.

Следуя инструкциям алгоритма 2.8 выполнить следующие действия.

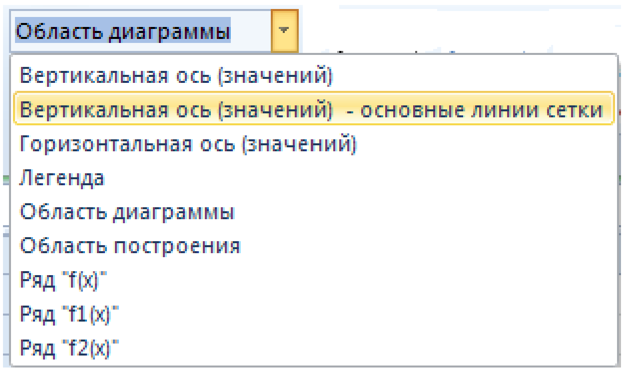
1. Выполнить форматирование *горизонтальной оси OX* диаграммы с учетом требований по точности отображения значений координат характерных точек. Примем точность отображения данных на *горизонтальной оси OX* равной 0,1 (см. рис. 39). Вызвать диалоговое окно **Формат оси**, выделив элемент **Горизонтальную ось (значений)** на диаграмме.

1.1. На вкладке **Параметры оси**, которая открывается по умолчанию, установить:

- значения в окнах: *минимальное значение (по оси OX) фиксированное* – 4,0; *максимальное значение (по оси OX) фиксированное* 3; *цена основных делений и цена промежуточных делений – фиксированные* 0,5 и 0,1, соответственно.
- значения в окнах: *основные линии – пересекают ось; промежуточные линии – пересекают ось.*

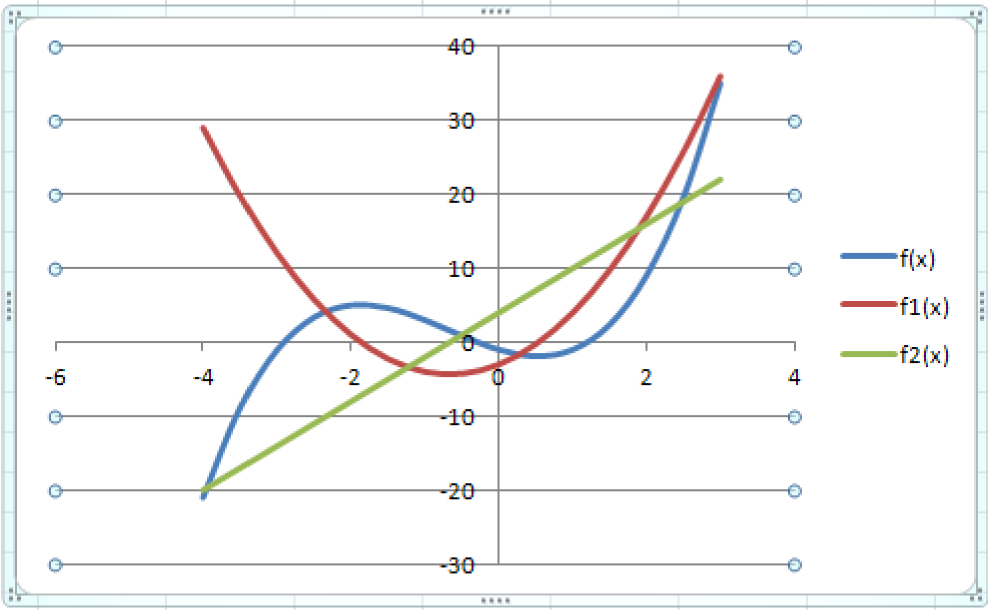
1.2. На вкладке **Цвет линии** отменить **Автовыбор** и установить флажок на пункте **Сплошная линия**, **Цвет** – *черный* (см. рис. 39).

2. Выполнить форматирование *линий сетки вертикальной оси OY*, как показано на рис. 39.

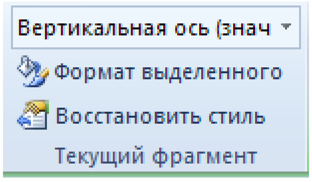


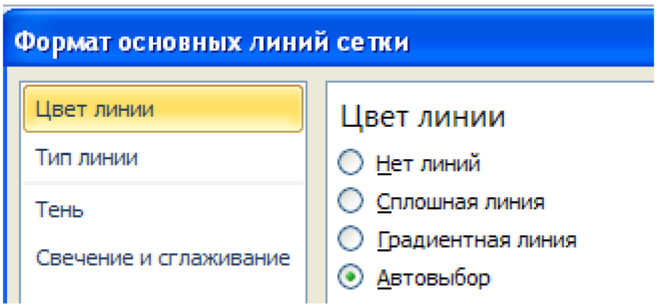
2.1. Вызвать диалоговое окно **Формат основных линий сетки**, выделив элемент диаграммы **Вертикальная ось (значений)** ось *OY*, щелкнув на имени элемента в раскрывающемся списке **Элементы**

диаграммы в группе **Текущий фрагмент** на вкладке **Формат**, находящейся на контекстной вкладке **Работа с диаграммами**. При выделении элемента диаграммы вокруг него появятся маркеры выделения, как показано на рис., а его имя отображается в поле со списком **Элементы диаграммы**.



2.2. Щелкнуть на кнопке **Формат выделенного фрагмента**, находящийся в группе **Текущий фрагмент**. Будет отображено диалоговое окно **Формат основных линий сетки**, как показано на рис.





2.3. Выбрать вкладку **Цвет линии**, отменить **Автовыбор** (установку по умолчанию) и включить флажок на пункте **Сплошная линия**, **Цвет** – *темноголубой*.

2.2. Вызвать диалоговое окно **Формат промежуточных линий сетки**. Выбрать вкладку **Цвет линии**, отменить **Автовыбор** (установку по умолчанию) и включить флажок на пункте **Сплошная линия, Цвет** – *темноголубой.*

3. Выполнить форматирование элемента диаграммы **Вертикальная ось (значений)**. Вызвать диалоговое окне **Формат оси** одним из способов и на вкладке **Параметры оси** установить значения в окнах: *минимальное значение (по оси OY) фиксированное* –25; *максимальное значение (по оси OY) фиксированное* – 35; *цена основных делений* и *цена промежуточных делений – фиксированные* 5,0 и 1,0, соответственно (см. рис. 39).
4. Выполнить форматирование элемента диаграммы **Вертикальная ось (значений) – основные линии сетки** аналогично форматированию *линий сетки горизонтальной оси OX* (см. п. 2).

2.5.3. Создание и форматирование графических объектов с текстом на диаграмме

MS Excel поддерживает создание пользователем *графических объектов с текстом* с помощью кнопок **Надпись**, **WordArt**, находящихся на вкладке **Вставка** Ленты (рис. 41).

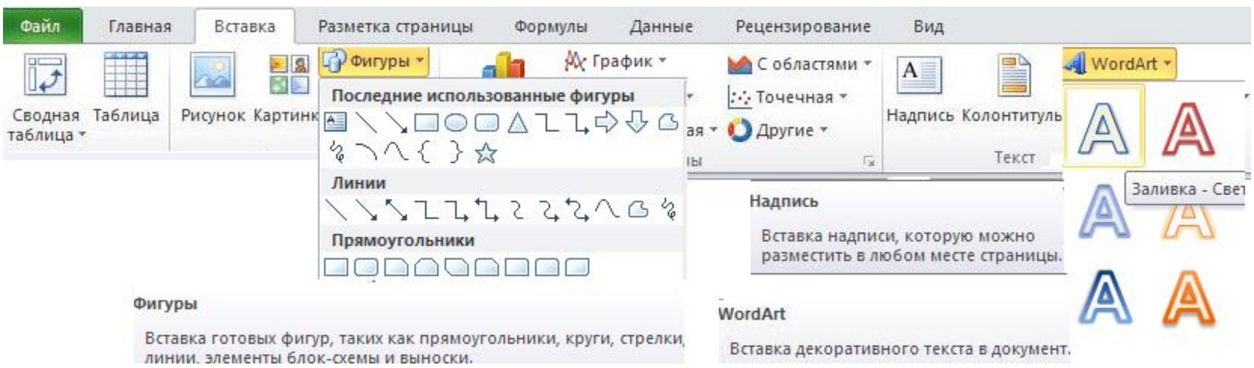


Рис. 41. Инструменты на вкладке Вставка Ленты для управления графическими объектами на Рабочем листе

Графические объекты с текстом (текстовые надписи) – это специальные графические объекты, которые представляют собой комбинацию текста и прямоугольного графического объекта. Они применяются для привлечения внимания к важным свойствам создаваемых диаграмм, например, характерным точкам на графике.

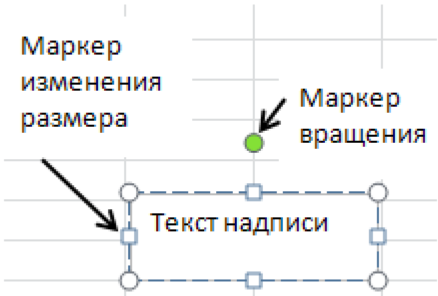
Алгоритм 2.9. Создание и форматирование графических объектов с текстом на диаграмме

Для создания форматирования графических объектов с текстом на диаграмме необходимо выполнить следующие действия.

1. Создать *текстовую надпись*: щелкнуть на кнопке **Надпись**, на вкладке **Вставка** Ленты (см. рис. 41), затем перетащить указатель мыши для создания *прямоугольного контура надписи*. После того, как кнопка мыши будет отпущена, в верхнем левом углу контура появится *точка вставки текста.*
2. Ввести текст, который будет отображаться в **Надписи**. При достижении правого края *контура надписи*, автоматически создается новая строка. Если достигнут конец *прямоугольного контура надписи*, а ввод текста продолжается, производится прокрутка текста вверх с одновременным изменением *размера контура*. По завершении ввода текста щелкнуть на любом месте экрана за пределами **Надписи**, чтобы отменить ее выделение.
3. Выполнить форматирование **Надписи**.

3.1. Выделить текстовую надпись – отображаются маркеры изменения размера и маркер вращения (см. рис.).

3.2. **Надпись**, которая добавлена в электронную таблицу, можно форматировать: изменять *шрифт*, его *размер*, *выравнивание текста*, включая его *ориентацию.*, *цвет фона*, *тип линий*, *поля надписи*. Для изменения формата всего текста надписи нужно щелкнуть на графическом объекте **Надписи** в Рабочем листе, вокруг прямоугольного контура надписи появится сплошной контур, после чего перейти на вкладку **Главная** Ленты и форматировать текст **Надписи** с помощью кнопок в разделах **Шрифт** и **Выравнивание**.



3.3. Для форматирования самого *прямоугольного контура надписи* щелкнуть на *контуре графического объекта*, вокруг контура появится сплошная рамка, выбрать вкладку **Формат** в контекстной вкладке **Средства рисования** (рис. 42), после чего выбрать нужный параметр форматирования:

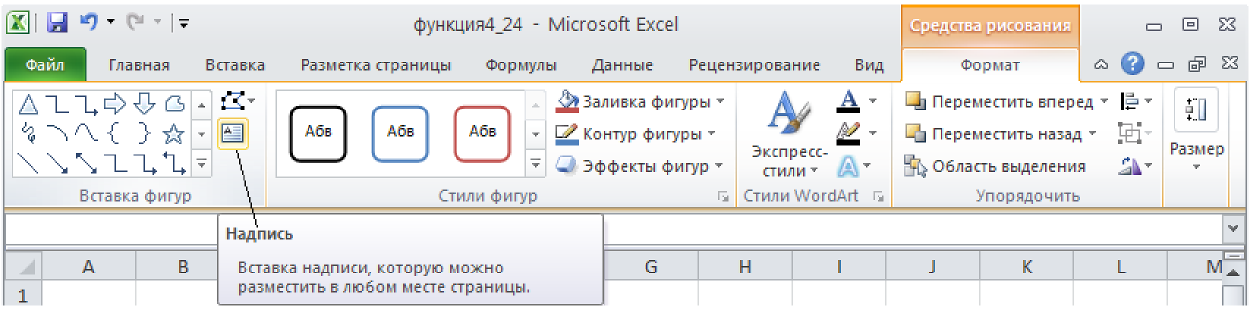


Рис. 42. Средства форматирования Надписи на вкладке Формат

- Кнопка со списком **Контур фигуры** – предназначена для выбора нового *цвета, толщины либо стиля линии* (*контура надписи*). Для удаления контура выбрать параметр **Нет контура**.
- Кнопка со списком **Заливка фигуры** – предназначена для выбора *нового цвета в целях заливки надписи*. Для удаления существующей заливки выбрать параметр **Нет заливки**.
- Галерея **Стили фигур** – предназначена для одновременного выбора нового *контура, заливки и цвета текста* с помощью щелчка на соответствующей миниатюре (используется «живой просмотр» для предварительного просмотра цветовой схемы).

3.4. Выполнить *форматирование текстовых полей в* **Надписи**. При первом вводе текста MS Excel не устанавливает *текстовые поля* – между текстовыми символами и краем надписи практически не остается места. Необходимо подобрать подходящие поля между символами надписи и рамкой контура. Для *форматирования* *текстовых полей* нужно: выделить *надпись*, щелкнуть на ней правой кнопкой мыши, появится контекстное меню (рис. 43).

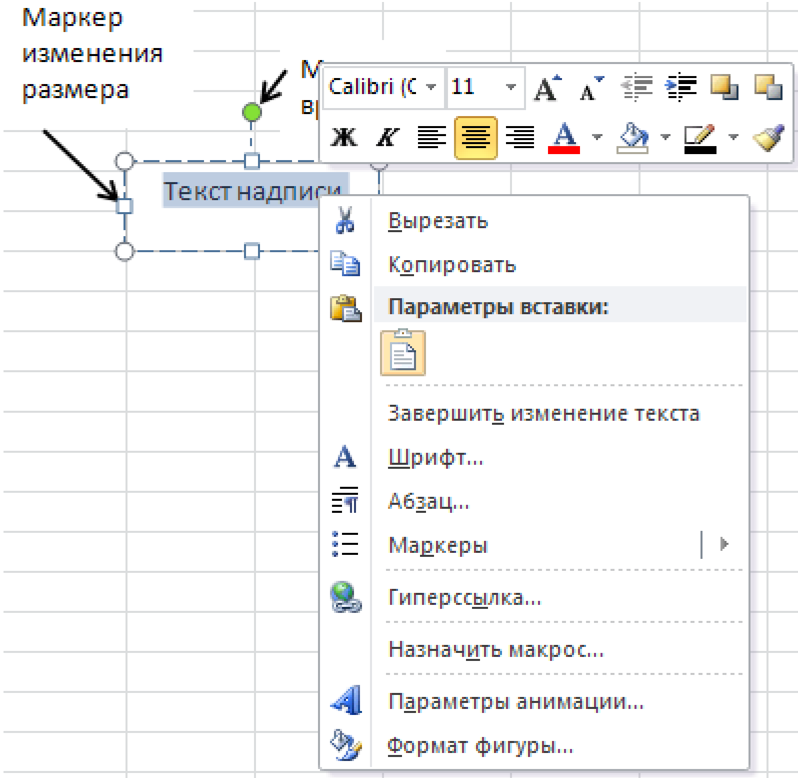


Рис. 43. Контекстное меню с параметром Формат фигуры

3.5. В контекстном меню выбрать параметр **Формат фигуры**. В диалоговом окне **Формат фигуры** (рис. 44) выбрать вкладку **Надпись** и в поля ввода **Верхнее**, **Нижнее**, **Левое** и **Правое**, находящиеся в разделе **Внутренние поля**, ввести значения, выраженные в долях дюйма. Для того, чтобы MS Excel автоматически изменяла размер *прямоугольного контура надписи* с учетом форматирования текста (например, увеличение размера шрифта) нужно установить флажок **Подгонять размер фигуры под текст**, который находится в разделе **Автоподбор**.

4. Выполнить редактирование *текста надписи*. Текст надписи редактируется, как данные любой ячейки Рабочего листа:

- чтобы *ввести новый текст*, поместить точку вставки в необходимое место и начать ввод текста;
- для *удаления текста слева от точки вставки* – нажать

клавишу <Backspace>, справа – клавишу <Delete>. Для удаления *фрагмент текста* – выделить его с помощью I-образного указателя мыши, а затем нажать клавишу <Delete>;

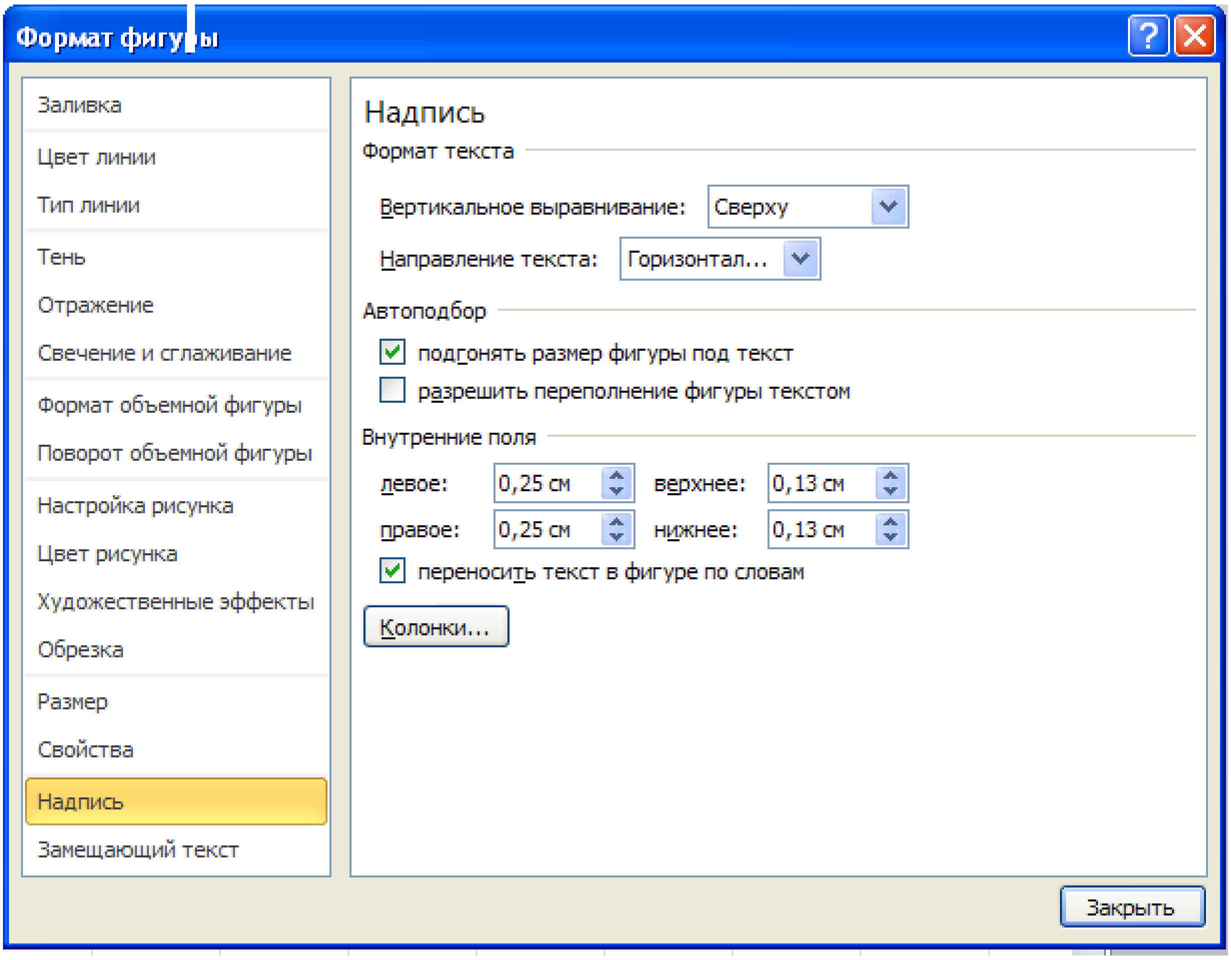


Рис. 44. Диалоговое окно Формат фигуры

- для удаления **Надписи** из рабочего листа, нужно выделить ее, щелкнув на границе *прямоугольного контура надписи*, а затем нажать клавишу <Delete>;
- для *проверки правописания* всего текста надписи или ее части, нужно выделить текст, а затем щелкнуть на кнопке **Орфография**, находящейся на вкладке **Рецензирование,** и выбрать команду проверки орфографии.

Пример 2.12

Создать и выполнить форматирование графических объектов с текстом на диаграмме (см. рис. 39). Следуя инструкциям алгоритма 2.9. выполнить следующие действия.

1. На диаграмме создать *графические формы с текстом* – **Надписи** для характерных точек на графике функции. Щелкнуть на кнопке **Надпись**, на вкладке **Вставка** Ленты (см. рис. 41). В верхнем левом углу контура появится *точка вставки текста.*
2. Ввести текст «*Координаты точки максимума*», «*Координаты точки минимума*», «*Координаты точки перегиба*», который будет отображаться в **Надписи**. По завершении ввода текста щелкнуть на любом месте экрана за пределами **Надписи**.
3. Выполнить форматирование **Надписи**.

3.1. Для изменения параметров форматирования всего текста **Надписи** нужно выделить объект – щелкнуть на графическом объекте **Надписи** в Рабочем листе. Вокруг *прямоугольного контура надписи* появится сплошной контур.

3.2. Перейти на вкладку **Главная** Ленты и форматировать текст **Надписи** с помощью кнопок в разделах **Шрифт** и **Выравнивание.** Установить параметры форматирования: **шрифт** Arial, **размер** 10 пт., **выравнивание – по центру**.

3.3. Для форматирования самого *прямоугольного контура надписи* в контекстной вкладке **Средства рисования**, которая появляется на Ленте *при выделении объекта,* на вкладке **Формат** выбрать:

- кнопку **Контур фигуры** и установить параметр форматирования – **Нет контура**;
- кнопку **Заливка фигуры** и установить параметр форматирования – **Цвет заливки – Желтый***;*

3.4. Для форматирования *текстовых полей* – ввести значения, выраженные в долях дюйма в поля ввода **Верхнее**, **Нижнее**, **Левое** и **Правое**, находящиеся в разделе **Внутренние поля**. Для того, чтобы MS Excel автоматически изменяла размер *прямоугольного контура надписи* с учетом форматирования текста (например, увеличение размера шрифта) нужно установить флажок **Подгонять размер фигуры под текст**, который находится в разделе **Автоподбор**.

4. Выполнить редактирование текста **Надписи** и проверку правописания всего текста надписи или ее части. Выделив текст **Надписи**, щелкнуть на кнопке **Орфография,** находящейся на вкладке **Рецензирование,** и выбрать команду проверки орфографии.

2.5.4. Создание и форматирование графических объектов с помощью галереи Фигуры

MS Excel поддерживает создание пользователем графических объектов с помощью галереи **Фигуры**, находящейся на контекстной вкладке **Средства рисования** Ленты (см. рис. 39).

Алгоритм 2.10. Создание и форматирование «стрелки к надписи» на диаграмме с помощью галереи Фигуры

Для добавления *линии со стрелкой*, показывающую на часть внедренной диаграммы (например, *координату точки максимума на кривой функции*) (см. рис. 39), необходимо выполнить следующие действия.

1. Щелкнуть на текстовой *надписи* – вокруг *надписи* появятся *маркеры выделения*, а на Ленте отобразится контекстная вкладка **Средства рисования** с вкладкой **Формат** (см. рис.42).
2. Щелкнуть на кнопке **Стрелка** в разделе **Линии,** которая находится в раскрывающейся галерее **Вставка фигуры** в левой части вкладки **Формат** (см. рис. 42). После щелчка на этой кнопке она остается

выделенной (новым цветом), а указатель мыши приобретает форму «+» (символ «плюс»).

3. Перетащить указатель мыши в форме «+» от места, где начинается стрелка, до того места, где она заканчивается, после чего отпустить кнопку мыши. На экране появится две точки: одна – в месте начала стрелки, а вторая – в месте ее завершения. Галерея **Стили фигуры** является контекстно зависимой – ее содержимое будет отображать *стили линии*.
4. Щелкнуть на кнопке **Дополнительные параметры**, находящейся в правом нижнем углу раскрывающейся галереи **Стили фигур** для отображения различных стилей – используется «живой просмотр» для предварительного просмотра выбранного *стиля линии*.
5. Щелкнуть на *эскизе стиля линии* для новой стрелки, выбрав ее в галерее **Стили фигур**. MS Excel отобразит *стрелку* с помощью выбранного *стиля фигуры с маркерами выделения* в начале и конце *стрелки*.
6. Выполнить редактирование стрелки:
    - переместить *стрелку* путем перетаскивания *контура* в другую позицию;
    - изменить *длину стрелки*, перетаскивая *маркер выделения* у конца стрелки;
    - изменить *направление стрелки*, путем *вращения с помощью указателя мыши* вокруг маркера выделения;
    - изменить *параметры форматирования*, посредством их выбора в диалоговом окне **Формат фигуры** на вкладке **Тип линии** (рис. 45) или выбрать вкладку **Формат** в контекстной вкладке **Средства рисования** (рис. 42), после чего выбрать нужный параметр форматирования (см. п. 3.3, алгоритм 2.9)

Пример 2.13

Создать и выполнить форматирование *стрелки к надписи* на диаграмме (см. рис.39) с помощью галереи **Фигуры**.

Следуя инструкциям алгоритма 2.10, создать и выполнить форматирование *стрелки к надписям* на диаграмме, на которой отображены ряды значений величин *x*, *f(x)*, *f1(x)* и *f2(x)* и характерные точки для графика функции вида $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (см. рис. 39).

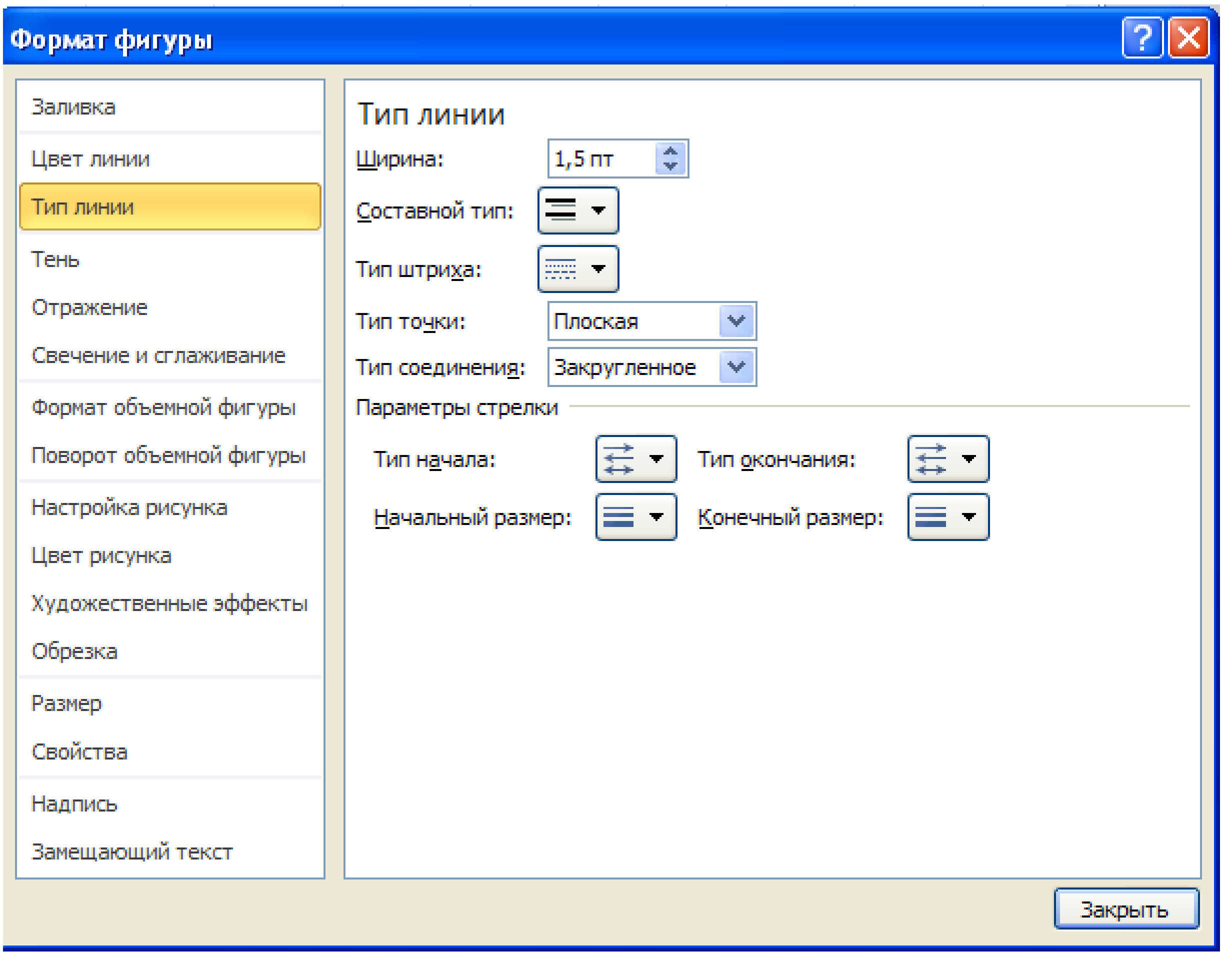


Рис. 45. Диалоговое окно Формат фигуры с открытой вкладкой Тип линии

ГЛАВА 3. ЧИСЛЕННОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

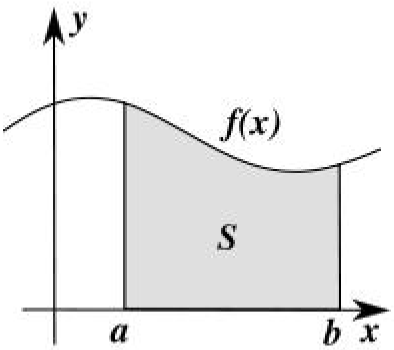
3.1. Постановка задачи

Вычисление определенного интеграла по формуле Ньютона – Лейбница

$$I = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \qquad (1)$$

практически не всегда возможно, если первообразная $F(x)$ не выражается через элементарные функции или выражается слишком сложно. В этих случаях применяют численное интегрирование – набор методов, позволяющих найти значение определенного интеграла приближенно с заданной точностью.

Определенный интеграл вычисляет площадь S криволинейной трапеции, образованной кривой функции $y = f(x)$, осью OX и перпендикулярами в точках $x = a$ и $x = b$. Функция $f(x)$ может быть задана таблично рядом значений (x_i, y_i).



Пусть требуется определить значение интеграла I неотрицательной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ (1).

Методы численного интегрирования основаны на самом определении интеграла

$$I = \int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n-1} (\xi_k)\,\Delta x. \qquad (2)$$ ¶

Интегральная сумма (2) соответствует некоторому разбиению отрезка $[a, b]$ точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ на n равных отрезков длиной $\Delta x = (b - a)/n$ и определенному выбору опорных точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$ на отрезках разбиения Δx. Если количество n отрезков разбиения достаточно большое, то интегральную сумму (2) можно принять в качестве приближенного значения определенного интеграла I (1). При этом в равенстве (2) предел (интеграл) не зависит ни от способа разбиения отрезка $[a, b]$, ни от правила выбора точек $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$.

3.2. Метод прямоугольников

Метод прямоугольников – это один из методов численного интегрирования, в котором отрезок $[a, b]$ делится на n равных отрезков длиной $\Delta x = (b - a)/n$, а в качестве точек ξ_0, ξ_1,…, ξ_{n-1} берутся левые $(x_0, x_1, \dots, x_{n-1})$ или правые $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ концы отрезков разбиения Δx. В зависимости от расположения точки ξ_k внутри отрезка Δx получаются разные формулы численного интегрирования, но суть их остается одной и той же – аппроксимация площади под кривой функции $y=f(x)$ на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ является прямоугольником со сторонами $f(\xi_k)$ и Δx. Обозначив значение функции $f(x)$ в точках $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$, x_n через $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$, y_n, а Δx через h и составив суммы произведений y_i на h, получим формулы, которые выражают площадь ступенчатой фигуры, составленной из *левых* (3) или *правых* (4) прямоугольников:

$$I_1 = h(y_0 + y_1 + \dots + y_{n-1}) = h\sum_{i=0}^{n-1} y_i, \tag{3}$$

$$I_2 = h(y_1 + y_2 + \dots + y_n) = h\sum_{i=1}^{n} y_i. \tag{4}$$

За значение определенного интеграла рекомендуется принять *полусумму* найденных значений по формулам (3) и (4)

$$I_{12} = (I_1 + I_2)/2 \tag{5}$$

Если в качестве опорной точки ξ для нахождения площади прямоугольников ступенчатой фигуры брать точки в середине промежутка Δx:

$$\xi_0 = x_0 + h/2;\ \xi_1 = x_1 + h/2; \dots;\ \xi_{n-1} = x_{n-1} + h/2,$$

то получим формулу, которая выражает площадь ступенчатой фигуры, составленной из *средних прямоугольников*, вида

$$I_3 = h\left[f\left(x_0 + \frac{h}{2}\right) + f\left(x_1 + \frac{h}{2}\right) + \dots + f\left(x_{n-1} + \frac{h}{2}\right)\right] = h\sum_{i=0}^{n-1} f\left(x_i + \frac{h}{2}\right). \tag{6}$$

Учитывая априорно большую точность формулы (6) при том же объеме и характере вычислений ее называют *формулой прямоугольников*.

Решение задачи численного интегрирования по формуле (2) распадается на два этапа.

1. Вычисление приближенного значения определенного интеграла по *методу прямоугольников* различными способами (3-6).
2. Уточнение приближенного значения определенного интеграла до достижения заданной допустимой погрешности.

Для *вычисления значения определенного интеграла по методу прямоугольников* различными способами необходимо выполнить следующие действия.

1. Вычислить значение определенного интеграла по формулам *левых* (3), *правых* (4) прямоугольников, *полусуммы* значений (5) и *средних* прямоугольников (6). В работе требуется сравнить трудоемкость вычисления приближенного значения определенного интеграла двумя способами:
   1.1. с вычислением значений функции *f*(*x*) в точках $x_0, x_1,\ldots, x_{n-1},\ x_n$;
   1.2. с использованием одной *формулы массива* (без вычисления ряда значений функции *f*(*x*)).
2. Оценить погрешность вычисления определенного интеграла с помощью сравнения числовых значений полученных результатов.
3. Исследовать эффективность *метода прямоугольников*.

Для *утонения приближенного значения определенного интеграла* до достижения заданной допустимой погрешности выполнить следующие действия.

1. Выбрать способ уточнения приближенного значения определенного интеграла (в пособии используется методом «*двойного пересчета*» с длинами отрезка разбиения *h* и *h/2*).
2. Произвести уточнение приближенного значения определенного интеграла методом «*двойного пересчета*» с длиной отрезка разбиения *h/2*.

3. Исследовать достижение заданной точности уточнения приближенного значения определенного интеграла (проверить *условие останова итерационного процесса уточнения*). Если заданная точность не достигнута, то вернуться к п. 2.

3.3. Массивы значений

Массив – это совокупность значений, которые представляют собой структуру организации данных по строкам и столбцам (одномерные и двумерные массивы) и воспринимаются при их обработке в MS Excel как единый объект. Одномерные массивы содержат единственный столбец или строку. Двумерные массивы состоят из нескольких столбцов и строк.

Ряды значений x_i и $f(x_i)$ на отрезке $[a, b]$ могут быть представлены как одномерные *массив значений*.

3.3.1. Формулы массивов

Формула массива – это специальная формула, которая выполняет вычисления над наборами значений и возвращает результат в виде либо одного, либо набора значений. Формула массива может обрабатывать несколько наборов значений, которые называются *аргументами массива*. В качестве ссылок в формулах массивов указываются диапазоны значений. Для отображения вычисляемых значений формулы массива выделяется диапазон ячеек того же размера и формы как диапазоны массивов с исходными данными.

Функции массивов – некоторые встроенные функции MS Excel, которые являются *формулами массивов*. Эти функции либо возвращают массив значений, либо им требуется ввести массив значений в качестве аргумента.

Формула массива создается так же, как и обычные формулы, но отличаются вводом формулы. Для завершения ввода формулы массива необходимо нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> вместо простого нажатия клавиши <Enter>. MS Excel автоматически заключит формулу вычислений в строке формул в фигурные скобки.

3.3.2. Редактирование формулы массива

MS Excel воспринимает ячейки диапазона массива как единое целое. Это означает, что нельзя редактировать, изменять значения, вставлять, или удалять отдельные ячейки в диапазоне массива. При попытке изменить формулу в одной из ячеек массива MS Excel выведет на экран окно с сообщением о недопустимости выполнения такой операции («*Нельзя изменить часть массива*»).

Для редактирования содержимого формулы массива нужно выделить ячейку в диапазоне массива и активизировать строку формул. MS Excel отобразит содержимое формулы массива в строке формул без фигурных скобок. Диапазоны ячеек рабочего листа, на которые ссылается формула массива, будут выделены рамками разных цветов в соответствии с цветами диапазонов адресов редактируемой формулы в строке формул. После редактирования формулы массива в строке формул, необходимо нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter>, чтобы эти изменения внести в формулу и заключить ее снова в фигурные скобки.

3.4. Вычисление приближенного значения определенного интеграла по методу прямоугольников

Алгоритм 3.1. Вычисление значения определенного интеграла по методу прямоугольников.

Для вычисления приближенного значения *определенного интеграла по методу прямоугольников* различными способами необходимо выполнить следующие действия.

1. Вычислить приближенное значение определенного интеграла I_1 по формуле *левых прямоугольников* (3) с длиной отрезка разбиения h_1.
2. Вычислить приближенное значение определенного интеграла I_2 по формуле *правых прямоугольников* (4) с длиной отрезка разбиения h_1.
3. Вычислить приближенное *среднее значение* определенного интеграла I_{12} по формуле (5).

4. Вычислить приближенное значение определенного интеграла I_3 по формуле *средних прямоугольников* с длиной отрезка разбиения h_1 (6).
5. Сравнить числовые значения полученных результатов.
6. Произвести уточнения приближенного значения определенного интеграла итерационным методом с помощью «двойного пересчета» формул (3), (4), (5) и (6) с длиной отрезка разбиения $h_2 = 0{,}5h_1$. Оценить погрешность вычисления определенного интеграла различными способами (3), (4), (5) и (6). Если заданная точность вычисления значения определенного интеграла с длиной отрезка разбиения h_2 не достигнута, то итерационный процесс уточнения следует продолжить с длиной отрезка разбиения $h_3 = 0{,}5h_2$ и т. д.
7. Итерационный процесс вычислений определенного интеграла следует завершить, когда заданная точность eps оценки достигнута. За значение определенного интеграла следует принять значение, удовлетворяющее заданной точности, вычисленное на последней итерации.

3.4.1. Вычисление значения определенного интеграла по вычисленным значениям функции f(x)

Пример 3.1

Дан определенный интеграл вида

$$I = \int_{1,5}^{2,3} \frac{\sqrt{0{,}3x + 1.2}}{1{,}6x + \sqrt{x^2 + 0{,}5}} dx \qquad (7)$$

Вычислить первое приближенное значение определенного интеграла I_1 по формуле *левых* прямоугольников (3) на отрезке [1,5; 2,3] с длиной отрезка разбиения h_1 по вычисленным значениям подынтегральной функции $f(x)$ (7) в точках $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$. Открыть *Лист 3* и переименовать на *Лист Пример 3_1*.

1. Создать электронную таблицу вычисления ряда значений величины x_i на отрезке [1,5; 2,3] по формуле арифметической прогрессии

(x_{i+1}= x_i + h_1, где i = 0, 1,…, n – 1) (рис. 46). Вести в ячейку A2 значение 1,5; в ячейку B2 – значение 2,3. Вычислить длину отрезка разбиения h_1 =(B2–A2)/n. Выберем количество n отрезков разбиения исходного отрезка [1,5; 2,3] из условия, что длина отрезка разбиения h_1 должна быть представлена *конечной десятичной дробью*, т.е. содержать конечное число цифр после запятой (в частности, ни одной). Примем n = 8 и введем значение 8 в ячейку A4. Для вычисления значения длины отрезка разбиения h_1 в ячейку B4 ввести формулу =(B2–A2)/A4. В ячейку B4 будет возвращено значение h_1 =0,1.

B6 =КОРЕНЬ(0,3*A6+1,2)/(1,6*A6+КОРЕНЬ(A6^2+0,5))

	A	B	C	D	E	F
1	***a***	***b***				
2	1,5	2,3				
3	***n***	***h***				
4	8	0,1				
5	x_i	$f(x_i)$				
6	1,5	0,316517				
7	1,6	0,30078				
8	1,7	0,286695				
9	1,8	0,274017				
10	1,9	0,262548				
11	2	0,252126				
12	2,1	0,242613				
13	2,2	0,233897				
14	2,3	0,225882				

Рис. 46. Вычисление рядов значений величин x_iи y_i

В ячейку A6 ввести формулу =$A$2, чтобы задать значение x_0, скопировав левую границу отрезка интегрирования [1,5; 2,3]. Выделить диапазон A7:A14 с помощью мыши и клавиши <Shift> и в ячейку A7 ввести формулу =A6+$B$4 для вычисления значения x_1. Скопировать формулу в ячейке A7 на диапазон A7:A14 (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>) для вычисления значений $x_{i+1} = x_i + h_1$, где $i = 0, 1, \dots, n - 1$. Вычисленные значения x_i, которые делят отрезок интегрирования $[1{,}5; 2{,}3]$ на 8 отрезков разбиения длиной $\Delta x = h_1$, отображаются в диапазоне A6:A14 (см. рис.46).

2. Создать электронную таблицу для вычисления ряда значений $y_0, y_1,\dots, y_{n-1}, y_n$ величины подынтегральной функции $f(x)$. Выделить диапазон B6:B14 с помощью мыши и клавиши <Shift> (см. рис. 46). Ввести в ячейку B6 формулу вида

   = КОРЕНЬ (0,3 * A6 + 1,2)/(1,6 * A6 + КОРЕНЬ (A6^2 + 0.5). (8)

   Для ввода формулы (8) применить встроенную математическую функцию КОРЕНЬ и функцию **Автозавершение** формул MS Excel для ее ввода (см. пример 1.2). Выделить ячейку B6, ввести знак «=» и первые буквы «КО» имени функции КОРЕНЬ. Вступит в действие свойство **Автозавершение** формул MS Excel – на экране появится раскрывающееся меню с именами функций, которые начинаются с тех же букв «КО», которые были введены. Выбрать имя КОРЕНЬ – дважды щелкнуть на имени в раскрывающемся меню. В строке формул появится имя функции КОРЕНЬ с одной «открывающей» круглой скобкой. Установить указатель мыши в строке формул и продолжить набирать формулу. При наборе адресной ссылки A6 – щелкнуть мышью на ячейке с адресом A6 (*автоматический ввод* адресных ссылок). Для завершения ввода функции нужно ввести круглую закрывающую скобку. Выполнить копирование формулы в ячейке B6 на диапазон (комбинация клавиш <Ctrl> + <Enter>). Одновременно с копированием формулы на диапазон B6:B14 будут выполнены вычисления ряда значений $y_0, y_1,\dots, y_{n-1}, \quad y_n$ величины подынтегральной функции $f(x)$. Результаты вычислений представлены в диапазоне B6:B14 (см. рис. 46).

3. Вычислить значение определенного интеграла по формуле (3). Выделить ячейку C6 и ввести формулу

   =B4*СУММ(B6:B13), (9)

   применив встроенную математическую функцию СУММ и функцию

Автозавершение формул MS Excel для ее ввода. После ввода знака равенства и адресной ссылки B4 (щелкнуть на ячейке с адресом B4) ввести символ «С» – первую букву имени функции СУММ (рис. 47).

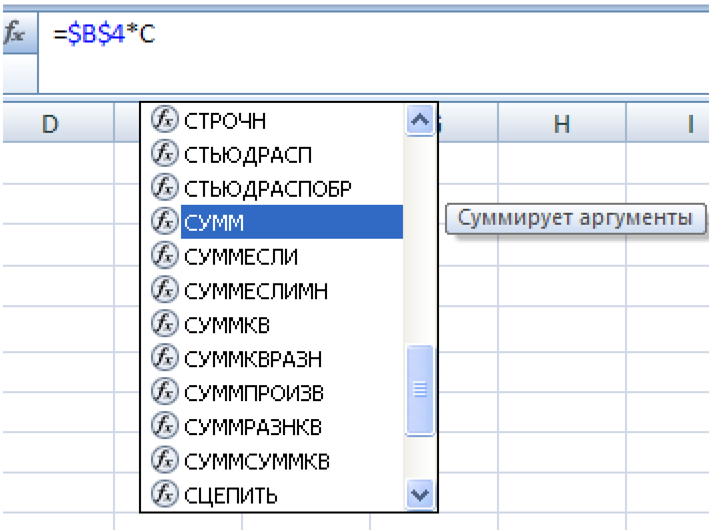
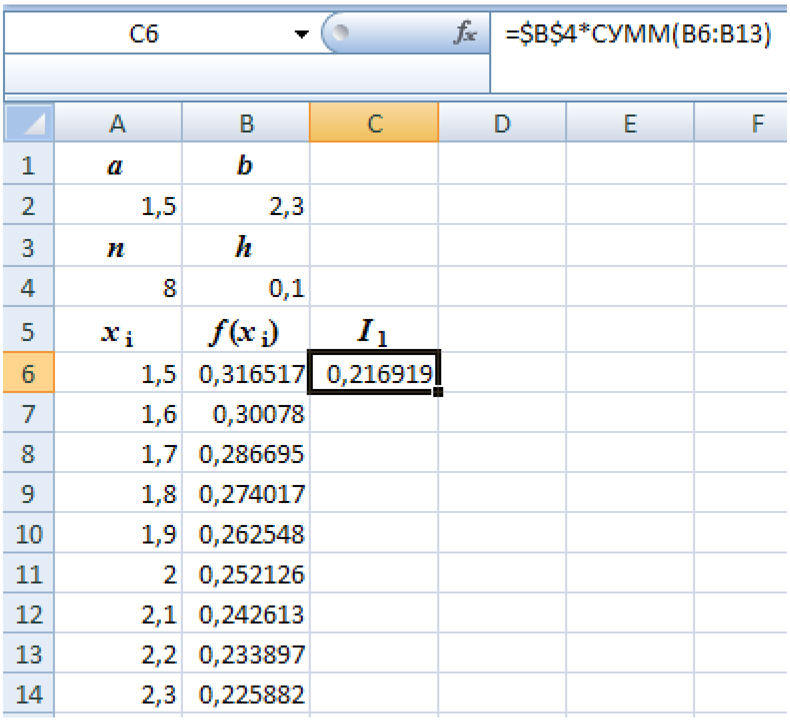


Рис. 47. Ввод имени функции СУММ с применением функции Автозавершение

Вступит в действие свойство **Автозавершение** формул MS Excel – на экране появится раскрывающееся меню с именами функций, которые начинаются с буквы «С», которая была введена. Выбрать имя СУММ – дважды щелкнуть на имени в раскрывающемся меню. В строке формул (рис. 48) появится имя СУММ.



	A	B	C	D	E	F
1	*a*	*b*				
2	1,5	2,3				
3	*n*	*h*				
4	8	0,1				
5	x_i	$f(x_i)$	I_1			
6	1,5	0,316517	0,216919			
7	1,6	0,30078				
8	1,7	0,286695				
9	1,8	0,274017				
10	1,9	0,262548				
11	2	0,252126				
12	2,1	0,242613				
13	2,2	0,233897				
14	2,3	0,225882				

Рис. 48. Вычисление определенного интеграла по формуле «левых прямоугольников»

Выбрать диапазон ячеек B6:B13 в качестве аргумента функции, выделив его с помощью мыши и клавиши <Shift> и закрыть скобку в записи функции СУММ. Завершить ввод формулы нажатием клавиши <Enter>. Значение определенного интеграла I_1=0,216919 (3), вычисленного по формулам (7) и (8) по значениям $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ подынтегральной функции $f(x)$ в ячейках диапазона B6:B13, представлено в ячейке C6 (см. рис. 48).

3.4.2. Вычисление значения определенного интеграла по формуле левых прямоугольников с использованием формулы массива

Пример 3.2

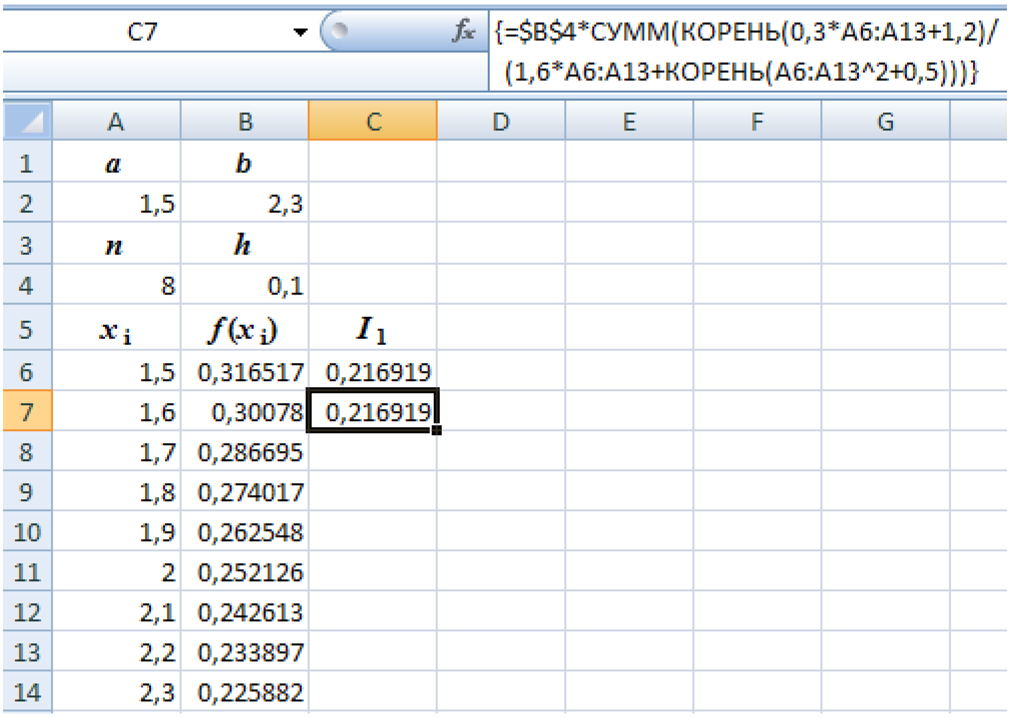
Дан определенный интеграл вида (7). Вычислить первое приближенное значение определенного интеграла I_1 по формуле *левых* прямоугольников (3) с использованием формулы массива.

Вместо вычисления ряда значений функции $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$ в диапазоне B6:B13 для каждой ячейки диапазона A6:A13 применить *формулу массива* (см. п. 3.3) для вычисления интеграла в ячейке C7 (рис. 49) вида

= $B$4 * СУММ(КОРЕНЬ(0,3 * A6:A13 + 1,2)/(1,6 * A6:A13
+ КОРЕНЬ(A6:A13^2 + 0,5))). (10)

В формуле массива (10) значения x_i, где $i = 0, 1, 2, \ldots, n-1$ представлены массивом значений в диапазоне A6:A13. Выделить ячейку C7 и ввести формулу (10). Для ввода формулы (10) применить встроенные математические функции КОРЕНЬ( ) и СУММ( ) и функцию **Автозавершение** формул MS Excel для их ввода (см. пример 3.1). Нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> для завершения создания формулы массива. MS Excel автоматически заключит введенную формулу (10) в строке формул в фигурные скобки, выполнит вычисления по формуле для каждого элемента массива A6:A13 и возвратит значение определенного интеграла I_1, равное 0,216919, вычисленное по формуле массива (10), в ячейку C7 (см. рис. 49).

Сравнение результатов вычислений в ячейках C6 и C7 показывает, что результаты совпадают, однако применение формулы массива более эффективно, т.к. не требуется ввод формулы для вычисления подынтегральной функции с клавиатуры и вычисление ряда ее значений в диапазоне B6:B13.



C7 | {=$B$4*СУММ(КОРЕНЬ(0,3*A6:A13+1,2)/(1,6*A6:A13+КОРЕНЬ(A6:A13^2+0,5)))}

	A	B	C	D	E	F	G
1	***a***	***b***					
2	1,5	2,3					
3	***n***	***h***					
4	8	0,1					
5	x_i	$f(x_i)$	I_1				
6	1,5	0,316517	0,216919				
7	1,6	0,30078	0,216919				
8	1,7	0,286695					
9	1,8	0,274017					
10	1,9	0,262548					
11	2	0,252126					
12	2,1	0,242613					
13	2,2	0,233897					
14	2,3	0,225882					

Рис. 49. Вычисление значения определенного интеграла по формуле «левых» прямоугольников с использованием формулы массива

3.4.3. Вычисление определенного интеграла по формуле «правых» прямоугольников

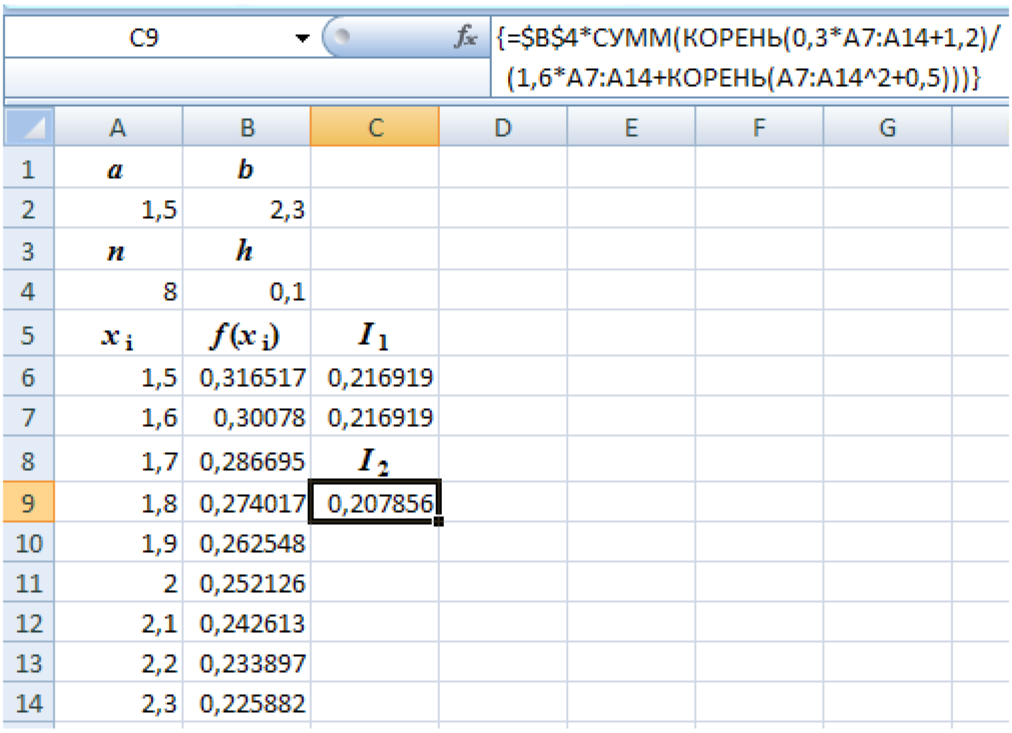
Пример 3.3.

Вычислить значение определенного интеграла I_2 по формуле (4) с длиной отрезка разбиения h_1 с использованием формулы массива.

В электронной таблице (рис. 50) выделить ячейку C9 и ввести формулу массива вида

$$=\$B\$4 * СУММ\ (КОРЕНЬ\ (0{,}3 * A7{:}A14 + 1{,}2)/(1{,}6 * A7{:}A14 + КОРЕНЬ\ (A7{:}A14\char`^2 + 0{,}5))). \qquad (11)$$

Данная формула отличается от формулы (10) для вычисления значения определенного интеграла по формуле *левых* прямоугольников (3) адресными ссылками на диапазон A7:A14, который представляет массив значений *правых* границ отрезков разбиения x_i, где i = 1, 2,…, n.



C9 fx {=$B$4*СУММ(КОРЕНЬ(0,3*A7:A14+1,2)/(1,6*A7:A14+КОРЕНЬ(A7:A14^2+0,5)))}

	A	B	C	D	E	F	G
1	***a***	***b***					
2	1,5	2,3					
3	***n***	***h***					
4	8	0,1					
5	x_i	$f(x_i)$	I_1				
6	1,5	0,316517	0,216919				
7	1,6	0,30078	0,216919				
8	1,7	0,286695	I_2				
9	1,8	0,274017	0,207856				
10	1,9	0,262548					
11	2	0,252126					
12	2,1	0,242613					
13	2,2	0,233897					
14	2,3	0,225882					

Рис. 50. Создание формулы массива для вычисления значения определенного интеграла по формуле «правых» прямоугольников

Чтобы не повторять ввод формулы (10) с клавиатуры скопировать *формулу в ячейке* C7 *через строку формул* в буфер обмена и вставить в строку формул выделенной ячейки C9, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. Выполнить редактирование формулы (10) в строке формул, изменив адресные ссылкиA6:A13 на A7:A14 *автоматическим способом*, выделив с помощью мыши диапазон A7:A14.

Нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> для завершения создания формулы массива. MS Excel автоматически заключит формулу в фигурные скобки (см. рис. 50), выполнит вычисления для каждого элемента массива A7:A14 и возвратит значение определенного интеграла I_2 (4), равное 0,207856, в ячейку C9.

3.4.4. Вычисление определенного интеграла по формуле среднего значения «левых» и «правых» прямоугольников

Пример 3.4

Вычислить значение определенного интеграла I_{12} по формуле *среднего значения левых и правых прямоугольников* (5).

C11 f_x =(C7+C9)/2

	A	B	C	D	E
1	***a***	***b***			
2	1,5	2,3			
3	***n***	***h***			
4	8	0,1			
5	x_i	$f(x_i)$	I_1		
6	1,5	0,316517	0,216919		
7	1,6	0,30078	0,216919		
8	1,7	0,286695	I_2		
9	1,8	0,274017	0,207856		
10	1,9	0,262548	I_{12}		
11	2	0,252126	0,212387		
12	2,1	0,242613			
13	2,2	0,233897			
14	2,3	0,225882			

Рис. 51. Вычисление значения определенного интеграла по формуле «среднего значения левых и правых прямоугольников»

Выделить ячейку C11, как показано на рис. рис.51, ввести формулу = (C7 + C9)/2 с помощью мыши и нажать клавишу <Enter>. Результат вычислений определенного интеграла I_{12}, равный 0,212387, будет возвращен в ячейку C11.

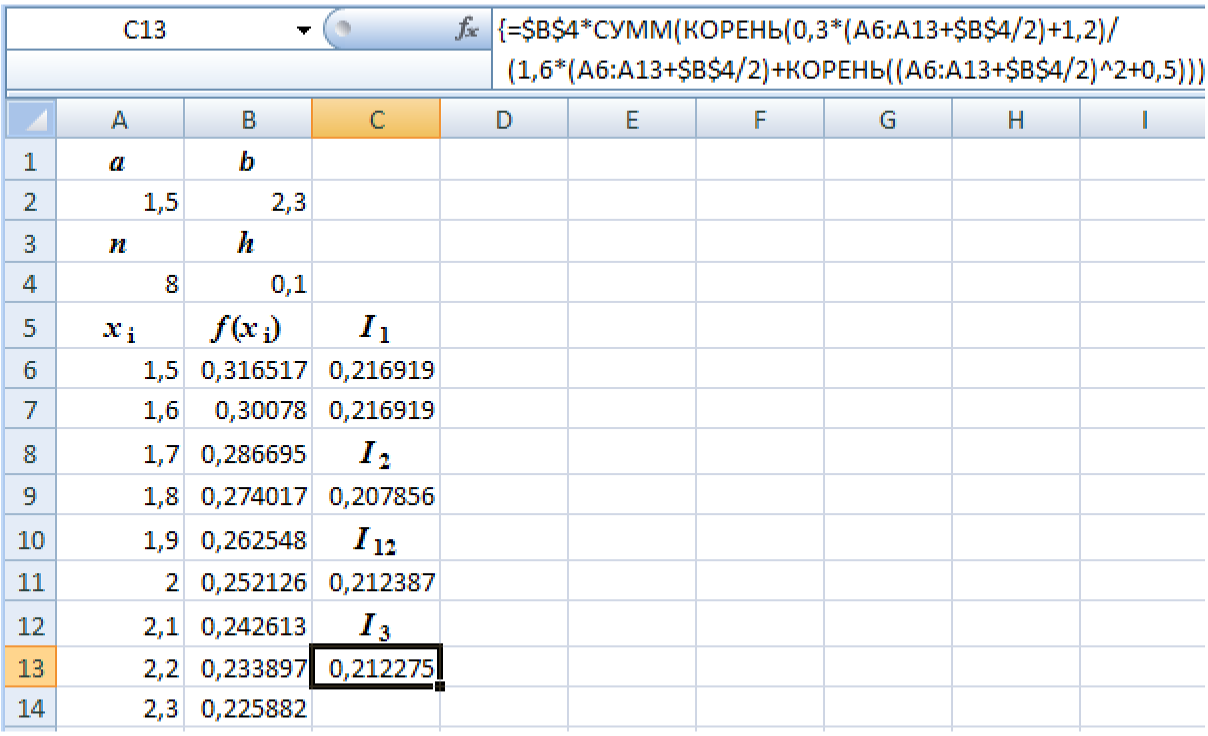
3.4.5. Вычисление определенного интеграла по формуле средних прямоугольников

Пример 3.5

Вычислить значение определенного интеграла I_3 по формуле (6) с длиной отрезка разбиения h_1 с использованием одной формулы массива (без вычисления значений $x_i + h/2$ и $y_0, y_1, \ldots, y_{n-1}$, в отдельных диапазонах).

Выделить ячейку C13 (рис. 52) и ввести формулу массива

=$B$4 * СУММ (КОРЕНЬ (0,3 * (A6:A13 + $B$4/2) + 1,2)/(1,6 * (A6:A13 + $B$4/2) +КОРЕНЬ ((A6:A13 + $B$4/2)^2 + 0,5))). (12)



C13 {=$B$4*СУММ(КОРЕНЬ(0,3*(A6:A13+$B$4/2)+1,2)/(1,6*(A6:A13+$B$4/2)+КОРЕНЬ((A6:A13+$B$4/2)^2+0,5)))}

	A	B	C
1	*a*	*b*	
2	1,5	2,3	
3	*n*	*h*	
4	8	0,1	
5	x_i	$f(x_i)$	I_1
6	1,5	0,316517	0,216919
7	1,6	0,30078	0,216919
8	1,7	0,286695	I_2
9	1,8	0,274017	0,207856
10	1,9	0,262548	I_{12}
11	2	0,252126	0,212387
12	2,1	0,242613	I_3
13	2,2	0,233897	0,212275
14	2,3	0,225882	

Рис. 52. Создание формулы массива для вычисления значения определенного интеграла по формуле *средних* прямоугольников

Данная формула отличается от формулы (10) для вычисления значения определенного интеграла по формуле *левых* прямоугольников заданием формулы массива для вычисления средних значений x_i на отрезках интегрирования по формуле $x_i = (x_i + h/2)$, где $i = 0, 1, 2, \dots, n-1$. Чтобы не повторять ввод формулы (10) с клавиатуры применить *способ копирования формулы в ячейке* C7 в буфер обмена *через строку формул* (см. пример 3.3). Вставить формулу в строку формул выделенной ячейки C13, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. Выполнить редактирование формулы (10), изменив адресные ссылки A6:A13 на (A6:A13 + $B$4/2). Получим формулу (12). Нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> для завершения создания формулы массива. MS Excel выполнит вычисления элементов массива значений (A6:A13+ $B$4/2) и определенного интеграла I_3 и возвратит значение 0,212275 в ячейку C13 (см. рис. 52).

3.4.6. Анализ результатов вычисления определенного интеграла различными способами

Сравнить численные значения полученных результатов вычисления определенного интеграла различными способами (3), (4), (5) и (6) (см. рис. 52), которые сведены в табл.4.

Таблица 4.

Числовые значения определенного интеграла (2), вычисленные по разным формулам метода прямоугольников

№ п/п	Формула вычислений определенного интеграла (2) методом прямоугольников	Результат вычислений
1	Левых прямоугольников (3)	$I_1 = 0{,}216919$
2	Правых прямоугольников (4)	$I_2 = 0{,}207856$
3	Полусумма левых и правых прямоугольников (5)	$I_{12} = 0{,}212387$
4	Средних прямоугольников (6)	$I_3 = 0{,}212275$

Учитывая априорно большую точность формулы *средних прямоугольников* (6) при том же объеме и характере вычислений, как и по формулам *левых* и *правых прямоугольников*, примем для сравнения значение определенного интеграла для $n = 8$ равное 0,212275. Результат вычислений по формуле *левых прямоугольников* (3) отличается в третьем знаке после запятой (0,216919), а по формуле *правых прямоугольников* (4) – во втором знаке (0,207856) (см. табл. 4).

Формула *среднего значения интеграла* (5) также дает высокую точность (отличие от формулы *средних прямоугольников* в четвертом знаке после запятой.), но при этом объем вычислений возрастает практически в два раза по сравнению с вычислениями по формуле (6).

3.5. Утонение приближенного значения определенного интеграла до достижения допустимой погрешности

3.5.1. Выбор способа уточнения приближенного значения определенного интеграла

Известен метод оценки погрешности вычисления значения определенного интеграла непрерывной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ для заданного значения количества отрезков разбиения по *формуле прямоугольников*. Этот метод предполагает нахождение наибольшего значения модуля первой производной (для формул *левых* и *правых* прямоугольников (3) и (4)) или второй производной (для формулы *средних* прямоугольников (6)) подынтегральной функции $f(x)$ на отрезке интегрирования $[a, b]$ (1). Во многих случаях, когда подынтегральной функции $f(x)$ трансцендентна, это довольно трудоемкая процедура. На практике, при использовании ЭВМ для вычислений приближенного значения определенного интеграла численными методами, вместо использования формульных оценок на основе производных подынтегральной функции $f(x)$ для уточнения приближенного значения до достижения заданной точности применяют *метод «двойного пересчета»*.

Алгоритм 3.2. Уточнение приближенного значения определенного интеграла итерационным методом «двойного пересчета»

1. Взять произвольное значение n_1 количества отрезков разбиения с учетом длины исходного отрезка интегрирования $[a, b]$. Значение n_1 рекомендуется принять таким, чтобы численное значение длины отрезка разбиения h_1 выражалось конечной десятичной дробью и не вносило дополнительной погрешности при вычислениях. Вычислить значение длины отрезка разбиения $h_1 = (b - a)/n_1$. Вычислить приближенное значение определенного интеграла ($I^{(1)}$) по *формулам* (3), (4), (5) и (6).
2. Далее количество отрезков разбиения на отрезке интегрирования удваивается ($n_2 = 2n_1$), и вновь вычисляется приближенное значение интеграла($I^{(2)}$) по тем же *формулам прямоугольников*.

3. Для оценки погрешности вычисления интеграла по формулам (5) и (6) нужно воспользоваться формулами абсолютной Δ погрешности (13), когда модуль значения величины интеграла $|I^{(2)}|$<<1,

$$\Delta = |I^{(2)} - I^{(1)}|/3 \qquad (13)$$

или относительной δ погрешности (14), когда модуль значения величины интеграла $|I^{(2)}|$>1,

$$\delta = \Delta / |I^{(2)}|. \qquad (14)$$

Логические условия достижения заданной точности значения определенного интеграла имеют вид:

$$\Delta < eps; \ \delta < eps. \qquad (15)$$

Если одно из логических условий (15) выполняется – абсолютная погрешность Δ при $|I^{(2)}|$<<1 (12) или относительная δ при $|I^{(2)}|$>1 (13) меньше допустимой погрешности eps, то процесс итерационного уточнения значения определенного интеграла можно завершить и за величину интеграла принимается значение $I^{(2)}$, полученное на последней итерации (при n_2). Если логическое условие (15) не выполняется – абсолютная Δ (13) или относительная погрешности δ (14) не меньше допустимой погрешности eps, то значение количества отрезков разбиения n следует снова удвоить, то есть взять $n_3 = 2n_2$ и продолжить итерации.

Пример 3.6

Принять значения определенного интеграла, вычисленные по формулам (5) и (6) при количестве отрезков разбиения $n_1 = 8$, за первое приближение $I^{(1)}$ (пример 3.5). Уточнить приближенное значение определенного интеграла итерационным *методом двойного пересчета* с заданной точностью eps = 0,00001. Ввести значение 0,00001 в ячейку C2 (рис. 53). Следуя инструкциям алгоритма 3.2 выполнить следующие действия.

1. Увеличить в 2 раза количество отрезков интегрирования ($2n_1$): ввести в ячейку D4 формулу = 2 * A2 (см. рис. 53). В ячейку D4 будет

возвращено значение n_2 =16. В ячейку E4 ввести формулу = B4/2. Длина отрезка разбиения (h_2) в ячейке E4 уменьшится в 2 раза (h_2 = 0,05) по сравнению с длиной отрезка h_1 на первой итерации (B4).

E13 | f_x | {=$E$4*СУММ(КОРЕНЬ(0,3*(D6:D21+$E$4/2)+1,2)/(1,6*(D6:D21+$E$4/2)+КОРЕНЬ((D6:D21+$E$4/2)^2+0,5)))}

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	***a***	***b***	***Eps***					
2	1,5	2,3	0,00001					
3	n_1	h_1		$n_2=2n_1$	$h_2=h_1/2$			
4	8	0,1		16	0,05			
5	$x_i(h_1)$	$f(x_i)$	$I_1^{(1)}$	$x_i(h_2)$	$I_1^{(2)}$	***Оценка дост. почн***		
6	1,5	0,316517	0,216919	1,5				
7	1,6	0,30078	0,216919	1,55	0,214597			
8	1,7	0,286695	$I_2^{(1)}$	1,6	$I_2^{(2)}$			
9	1,8	0,274017	0,207856	1,65	0,210066			
10	1,9	0,262548	$I_{12}^{(1)}$	1,7	$I_{12}^{(2)}$			
11	2	0,252126	0,212387	1,75	0,212331	Нет		
12	2,1	0,242613	$I_3^{(1)}$	1,8	$I_3^{(2)}$			
13	2,2	0,233897	0,212275	1,85	0,212303	Точн дост		
14	2,3	0,225882		1,9				
15				1,95				
16				2				
17				2,05				
18				2,1				
19				2,15				
20				2,2				
21				2,25				
22				2,3				

Рис. 53. Электронная таблица уточнения приближенного значения определенного интеграла методом «двойного пересчета»

2. Создать электронную таблицу вычисления ряда значений величины x_i на интервале [1,5; 2,3] по формуле арифметической прогрессии ($x_{i+1} = x_i + h_2$, где $i = 0, 1, \dots, n_2 - 1$) (см. пример 3.1). Ввести в ячейку D6 формулу = $A$2, чтобы задать значение x_0. Выделить диапазон D7:D22, в ячейку D7 ввести формулу =D6+$E$4 и выполнить

копирование формулы в ячейке D7 на диапазон. Вычисленные значения x_i, которые делят отрезок интегрирования [1,5; 2,3] на 16 равных отрезков разбиения с длиной $h_2 = h_1/2$, представлены в диапазоне D6:D22 (см. рис. 53).

3. Ввести формулу массива в ячейку E7 для вычисления интеграла $I_1^{(2)}$ по формуле (3) для ряда значений величины x_i, с длиной отрезка разбиения h_2, заданных диапазоном значений D6:D21, вида

   = $E$4 * СУММ (КОРЕНЬ (0,3 * D6:D21 + 1,2)/(1,6 * D6:D21 + КОРЕНЬ (D6:D21^2 + 0,5))). (16)

   Данная формула отличается от формулы (9) для вычисления значения определенного интеграла $I_1^{(1)}$ по формуле *левых* прямоугольников в ячейке C7 адресными ссылками на диапазон D6:D21, который представляет собой массив значений x_i *левых* границ отрезков разбиения и адресом ячейки длины отрезка разбиения $E$4. Чтобы не повторять ввод формулы (9) с клавиатуры применить *способ копирования формулы в ячейке C7 в буфер обмена через строку формул* (см. пример 1.2). Выделить формулу в строке формул выделенной ячейки C7, скопировать выделенную формулу в буфер обмена, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <C>, завершить копирование, нажав клавишу <Esc>. Вставить формулу в строку формул выделенной ячейки E7, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. Выполнить редактирование формулы (9), изменив адресные ссылки диапазона A6:A13 на диапазон D6:D21 и адресную ссылку $B$4 на $E$4. Нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> для завершения создания формулы массива. MS Excel автоматически заключит формулу в фигурные скобки, выполнит вычисления для каждого элемента массива D6:D21 и возвратит значение 0,214597 в ячейку E7 (см. рис. 53).

4. Ввести формулу массива в ячейку E9 для вычисления интеграла $I_2^{(2)}$ по формуле *правых* прямоугольников (4) для ряда значений величины x_i с длиной отрезка разбиения h_2=h_1/2, заданных диапазоном значений D7:D22, вида

   = $E$4 * СУММ (КОРЕНЬ (0,3 * D7:D22 + 1,2)/(1,6 * D7:D22 +КОРЕНЬ (D7:D22^2 + 0,5))).

   Данная формула отличается от формулы (16) для вычисления значения определенного интеграла $I_1^{(2)}$ по формуле *левых* прямоугольников в ячейке E7 адресными ссылками на диапазон D7:D22, который представляет собой массив значений x_i *правых* границ отрезков разбиения. Чтобы не повторять ввод формулы (16) с клавиатуры применить *способ копирования формулы* в ячейке E7 *в буфер обмена через строку формул* (см. п. 3). Вставить формулу (16) в строку формул выделенной ячейки E9, установив указатель мыши в строке формул и нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. Выполнить редактирование формулы (16), изменив адресные ссылки на диапазон D6:D21 на диапазон D7:D22. Нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> для завершения создания формулы массива. MS Excel выполнит вычисления для каждого элемента массива D7:D22 и возвратит значение 0,210066 в ячейку E9 (см. рис. 53).
5. .Выполнить копирование формулы в ячейке C11 в ячейку E11 для вычисления значения интеграла $I_{12}^{(2)}$ по формуле (5), применив способ копирования ячейки C11 нажатием комбинации клавиш <Ctrl> + <C>. Вставить данные в ячейку E11, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. В результате в ячейку E11 будет возвращено значение $I_{12}^{(2)}$ = 0,212331 (см. рис.53).
6. Ввести формулу массива в ячейку E13 для вычисления значения интеграла $I_3^{(2)}$ по формуле (6) для ряда значений величины середины

отрезка разбиения $x_i + h_2 /2$, заданных массивом значений (D6:D21 + $E$4) (см. рис. 53), вида

= $E$4 * СУММ (КОРЕНЬ (0,3 * (D6:D21 + E$4/2) + 1,2)
/(1,6 * (D6:D21 + E$4/2) + КОРЕНЬ ((D6:D21 + E$4/2)^2 +0 ,5)))

Данная формула отличается от формулы (16) для вычисления значения определенного интеграла $I_2^{(2)}$ по формуле *левых* прямоугольников в ячейке E7 адресными ссылками на массив значений (D6:D21+$E$4/2). Чтобы не повторять ввод формулы (16) с клавиатуры применить *способ копирования формулы в ячейке E7 в буфер обмена через строку формул* (см. пп. 3). Вставить формулу в строку формул выделенной ячейки E13, установив указатель мыши в строке формул и нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. Выполнить редактирование формулы (16), изменив адресные ссылки на массив (D6:D21+$E$4/2). Нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <Shift> + <Enter> для завершения создания формулы массива. MS Excel автоматически заключит формулу в фигурные скобки, выполнит вычисления для каждого элемента массива значений (D6:D21+$E$4/2) и возвратит значение 0,212303 в ячейку E13 (см. рис. 53).

7. Оценить достижение заданной точности значения определенного интеграла $I_{12}^{(2)}$, вычисленного по формуле (5). Модуль значения величины определенного интеграла в ячейке E11 меньше единицы ($\left| I_{12}^{(2)} \right| = 0{,}212331 << 1$). Для оценки погрешности вычислений значения определенного интеграла применить формулу (14) абсолютной погрешности. Логическое условие (16) достижения заданной точности значения определенного интеграла примет вид

$$\left| I_{12}^{(2)} - I_{12}^{(1)} \right| /3 < eps, \tag{17}$$

где $I_{12}^{(2)}$ и $I_{12}^{(1)}$ значения определенного интеграла по *средним значениям,* полученным по формулам в ячейках E11 и C11, соответственно. Ввести в ячейку F11 формулу для проверки условия достижения заданной точности (17) вида:

= ЕСЛИ (ABS $(C11 - E11)/3$ < \$C\$2; "Точность достигнута"; "Нет"). (18)

Завершить ввод формулы, нажав клавишу <Enter>. В ячейку F11 будет возвращено значение «Нет» (заданная точность вычисления интеграла по *среднему значению*, полученному по формулам *левых* и *правых* прямоугольников (5) не достигнута).

8. Оценить достижение заданной точности значения определенного интеграла $I_3^{(2)}$, вычисленного по формуле *средних прямоугольников* (6). Модуль значения величины определенного интеграла в ячейке E13 меньше единицы ($\left|I_3^{(2)}\right| =$ 0,212303 << 1). Для оценки погрешности вычислений значения определенного интеграла применить формулу абсолютной погрешности (13). Логическое условие (15) достижения заданной точности значения определенного интеграла примет вид

$$\left|I_3^{(2)} - I_3^{(1)}\right|/3 < eps, \tag{19}$$

где $I_3^{(2)}$ и $I_3^{(1)}$ значения определенного интеграла по формуле *средних прямоугольников* , полученным по формулам в ячейках E13 и C13, соответственно. Ввести в ячейку F13 формулу для проверки условия достижения заданной точности (17) вида (см. рис. 53):

= ЕСЛИ (ABS (C13 − E13)/3 < \$C\$2; "Точность достигнута"; "Нет"). (20)

Применить способ копирования ячейки F11 в буфер обмена с помощью команды **Копировать** (<Ctrl> + <C>) и вставить данные ячейки в выделенную ячейку F13 с помощью команды **Вставить** (<Ctrl> + <V>). В ячейку F13 будет возвращено значение «Точность достигнута» (см. рис. 53).

9. Провести анализ результатов оценки достижение заданной точности в ячейках F11 и F13. Анализ показал, что значение абсолютной погрешности вычисления значения определенного интеграла $I_{12}^{(2)}$ для формулы *среднего значения левых и правых прямоугольников* (E11)

при значении $n_2 = 16$ превышает допустимую погрешность eps =0,00001, а для формулы *средних прямоугольников* (E13) требуемая точность достигнута. Результаты анализа показали большую эффективность метода *средних прямоугольников* по сравнению с другими формулами метода прямоугольников в достижении заданной точности за минимальное количество итераций.

Допустимая абсолютная погрешность вычисления значения определенного интеграла по формуле *среднего» значения левых и правых прямоугольников* (I_{12}) может быть достигнута при $n_3 = 32$ ($I_{12}^{(3)}$) (рис. 54).

fx =ЕСЛИ(ABS(H11-E11)/3<$C$2;"Точн дост";"Нет")

D	E	F	G	H	I
$n_2=2n_1$	$h_2=h_1/2$		$n_3=2n_2$	$h_3=h_2/2$	
16	0,05		32	0,025	
$x_i(h_2)$	$I_1^{(2)}$	*Оценка дост. точн*	$x_i(h_3)$	$I_1^{(3)}$	*Оценка дост. точн*
1,5			1,5		
1,55	0,214597		1,525	0,213450412	
1,6	$I_2^{(2)}$		1,55	$I_2^{(3)}$	
1,65	0,210066		1,575	0,211184548	
1,7	$I_{12}^{(2)}$		1,6	$I_{12}^{(3)}$	
1,75	0,212331	Нет	1,625	0,21231748	Точн дост
1,8	$I_3^{(2)}$		1,65	$I_3^{(3)}$	
1,85	0,212303	Точн дост	1,675	0,212310478	Точн дост
1,9			1,7		
1,95			1,725		
2			1,75		
2,05			1,775		
2,1			1,8		
2,15			1,825		
2,2			1,85		
2,25			1,875		
2,3			1,9		

Рис. 54. Достижение заданной точности значений определенного интеграла $I_{12}^{(3)}$ и $I_3^{(3)}$ методом «двойного пересчета»

ГЛАВА 4. ИНСТРУМЕНТАЛЬНЫЕ СРЕДСТВА РАЗРАБОТКИ ДОКУМЕНТОВ В MS EXCEL

Перед созданием электронной таблицы в MS Excel для выполнения задания на самостоятельную работу необходимо выполнить проектирование Рабочей книги. При каждом запуске MS Excel без открытия документа программа открывает новую Рабочую книгу, в которой находятся три пустых Рабочих листа. На этапе создания новой электронной таблицы можно открыть шаблон или файл существующей Рабочей книги и создать новую Рабочую книгу на их основе, либо создать уникальную электронную таблицу «с нуля». В самостоятельной работе необходимо выполнить создание Рабочей книги «с нуля», в которой назначение и функции не будут походить ни под один тип существующих шаблонов Рабочих книг. Отчетная документация по самостоятельной работе состоит не только из строго стандартизованных отчетов по обработке информации и форм.

Разработка Рабочей книги «с нуля» должно начинаться с ее проектирования. В процессе проектирования необходимо определиться с требованиями к электронным таблицам и макету выходного документа, что позволит четко представить назначение и функции создаваемой Рабочей книги до ее создания.

1. Компоновка отдельного Рабочего листа электронной таблицы для отладки алгоритма и поиска решения без заголовков столбцов и строк таблиц данных.
2. Компоновка отдельного Рабочего листа с выполнением реорганизации информации в созданной электронной таблице (ее редактирование), придания электронной таблице формы в соответствии с макетом выходного документа (отчета по выполнению задания на самостоятельную работу).
3. Создание внедренной **Точечной** диаграммы с настройками «по умолчанию» для визуального представления таблиц данных на Рабочем листе электронной таблицы для отладки алгоритма

и поиска решения. Диаграммы (графические данные) должны располагаться на самом Рабочем листе (внедренные диаграммы) (подробнее о создании внедренной точечной диаграммы см. п. 2.5.1).

4. Редактирование и форматирование элементов диаграммы (п. 3) на Рабочем листе для реорганизации информации в созданной электронной таблице, придания диаграмме формы в соответствии с макетом выходного документа (подробнее о форматировании точечной диаграммы см. пп. 2.5.2-2.5.4).
5. Данные результатов работы при создании Рабочей книги должны быть сохранены в файле и выведены на печать в виде бумажной копии. Также данные должны быть сохранены в виде файла с расширением (*.**PPTX**) для последующего использования в виде электронной графической презентации.

4.1. Создание электронной таблицы для отладки и поиска решения

Создание электронной таблицы для отладки и поиска решения включает следующие этапы

1. Планирование ячеек электронной таблицы.
2. Ввод и редактирование формул алгоритма решения.
3. Выполнение расчетов по электронной таблице и устранение ошибок.

4.1.1. Планирование ячеек электронной таблицы

Электронная таблица, в которой вычисляются значения корней уравнения первой производной $f1(x) = 0$ по формулам действительных корней уравнения (см. пример 1.2) и отделяются табличным способом на основе критерия существования единственного корня (см. пример 1.3), приведена на рис. 55. На этапе отладки алгоритма и поиска решения планирование ячеек электронной таблицы для размещения информации, включающей исходные данные, промежуточные и окончательные результаты, выполняется пользователем в соответствии с алгоритмом решения задачи «Отделение корней уравнения первой производной $f1(x) = 0$» (см. п. 1.2.2). Размещение информации в ячейках электронной таблицы должно производиться компактно (см. рис. 55) без учета формы выходного документа. Пример планирования размещения информации в ячейках электронной таблицы приведен таблице 5.

	A	B	C	D	E	F
1	1	2	-3	-1		
2	-4	0,5			0,5352	-1,8685
3	-4	-21	29		-1,8794	5,0646
4	-3,5	-8,875	19,75	Нет	0	0
5	-3	-1	12	Нет		
6	-2,5	3,375	5,75	Нет		
7	-2	5	1	Нет		
8	-1,5	4,625	-2,25	Крит.точка		
9	-1	3	-4	Нет		
10	-0,5	0,875	-4,25	Нет		
11	0	-1	-3	Нет		
12	0,5	-1,875	-0,25	Нет		
13	1	-1	4	Крит.точка		
14	1,5	2,375	9,75	Нет		
15	2	9	17	Нет		
16	2,5	19,625	25,75	Нет		
17	3	35	36	Нет		

Рис. 55. Электронная таблица «Отделение корней уравнения первой производной $f1(x) = 0$ формульным и табличным способами» на этапе отладки

Таблица 5

Планирование электронной таблицы (*рис. 55*)

№ п/п	Обозначение в алгоритме	Адрес ячейки	Вводимая информация в ячейку	Отображение в ячейке в формате **Общий**
1	2	3	4	5
1	a	A1	1	1
2	b	B1	2	2
3	c	C1	-3	-3
4	d	D1	-1	-1
5	xk_1	E2	= (−$B$1 + КОРЕНЬ ($B$1^2−3 * $A$1 * $C$1)/(3 * $A$1)	0.5352
6	xk_2	F2	= (−$B$1 – КОРЕНЬ ($B$1^2−3 * $A$1 * $C$1)/(3 * $A$1)	-1.8695

Окончание табл. 5

1	2	3	4	5
7	$f(xk_1)$	E3	= $A$1 * E2^3 + $B$1 * E2^2 + $C$1 * E2 + $D$1	−1,874
8	$f(xk_2)$	F3	= $A$1 * F2^3 + $B$1 * F2^2 + $C$1 * F2 + $D$1	5,0646
9	$f1(xk_1)$	E4	= 3 * $A$1 * E2^2 + 2*$B$1 * E2 + $C$1	0
10	$f1(xk_2)$	F4	= 3 * $A$1 * F2^2 + 2*$B$1 * F2 + $C$1	0
11	x_1	A2	−4	−4
12	h_x	B2	0,5	0,5
13	x_1	A3	= A2	−4
14	$x_2 = x_1 + h_x$ … $x_{15} = x_{14} + h_x$	A4 A17	= A3+ $B$2 … = A14+ $B$2	−3,5 3
15	$f(x_1)$ … $f(x_{15})$	B3 … B17	= $A$1 * A3^3 + $B$1 * A3^2 + $C$1 * A3 + $D$1 (13) = $A$1 * A17^3 + $B$1 * A17^2 + $C$1 * A17 + $D$1	−21 35
16	$f1(x_1)$ … $f(x_{15})$	C3 … C17	= 3 * $A$1 * A3^2 + 2*$B$1 * A3 + $C$1 (14) = 3 * $A$1 * A17^2 + 2*$B$1 * A17 + $C$1	29 36
17	$f1(x_1) \cdot f1(x_2)<0$ … $f1(x_{14}) \cdot f1(x_{15})<0$	D4 … D17	ЕСЛИ (C3*C4<0; "Крит.точка"; "Нет") ЕСЛИ (C16*C17<0; "Крит.точка"; "Нет")	Нет Нет

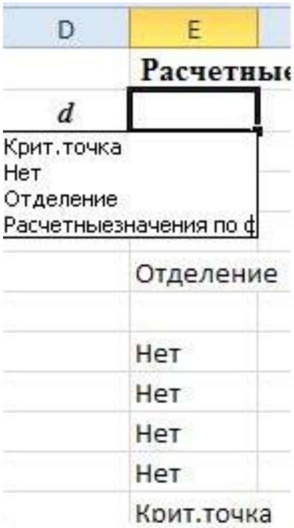
4.1.2. Ввод и редактирование расчетных формул алгоритма решения

При вводе данных с клавиатуры (числовых или текстовых) необходимо выбрать эффективный способ заполнения текущей ячейки.

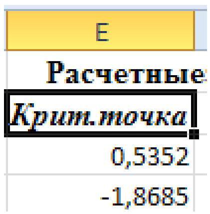
1. Завершение ввода данных в ячейке с перемещением указателя ячейки в другую ячейку при последовательном заполнении ячеек по столбцам или строкам таблицы нажатием клавиши <Enter>. Направление перехода настраивается с помощью установки значения в списке параметра **Переход к другой ячейке после нажатия клавиши Ввод**, который находится в разделе **Дополнительно** диалогового окна **Параметры Excel**.
2. Завершение ввода данных с одновременным переходом к следующей ячейке той же строки вправо, нажать клавиши <Таб> или <→>, влево – комбинацию клавиш <Shift> + <Таб> или <←>. Подробнее о завершении ввода данных с одновременным перемещением указателя ячейки см. п. 1.3.2 [2].
3. Автоматическая замена при вводе аббревиатур полным текстом с помощью функции **Автозамена** MS Excel. Например, многократно используя текст «Точность достигнута», можно дополнить список автоматических замен так, чтобы аббревиатура «тд» автоматически заменялась полным текстом при повторном наборе «тд». Добавление новой записи в список автоматических замен производится в диалоговом окне **Автозамена**. Для его открытия необходимо щелкнуть **Кнопку Office**, выбрать команду **Параметры Excel**, выбрать вкладку **Правописание** и щелкнуть на кнопке **Параметры Автозамены**.
4. Ввод в Рабочие листы последовательности данных с помощью функции MS Excel **Автозаполнение**. Например, если необходимо создать строку, содержащую названия столбцов таблицы $f(x)$, $f1(x)$, $f2(x)$ можно ввести в первую ячейку $f(x)$, а для ввода остальных использовать функцию **Автозаполнение**. При автозаполнении ячеек

таблицы используется *маркер автозаполнения* в правом нижнем углу рамки активной ячейки. При наведении указателя мыши на маркер изменится форма указателя: вместо *толстого белого крестика* указатель примет вид *тонкого черного крестика*. При перетаскивании указателя вправо по строке (или вниз по столбцу) MS Excel автоматически заполнит ячейки (скопирует содержимое активной ячейки). Выполнить редактирование скопированных значений, добавив «1» и «2» в $f(x)$, чтобы преобразовать в $f1(x)$ и $f2(x)$.

5. Функция **Автозаполнение** строит значения последующих ячеек на основе выделенных. При этом могут использоваться различные методы: копирование (повторение), арифметическая и геометрическая прогрессии и др. Использовать функцию **Автозаполнение** при нумерации строк (столбцов) таблицы. Ввести первое значение (например, 1) в первую строку (столбец), нажать и удерживать клавишу <CTRL> при перетаскивании маркера заполнения. MS Excel автоматически пронумерует остальные строки (столбцы), поместив в ячейки значения 2, 3, 4 и. т. д.
6. Использовать автоматическое завершение ввода данных (функция **Автозавершение**) для ускорения ввода повторяющихся текстовых



значений в столбце электронной таблицы. Для любого столбца при включенном **Автозавершении** создается список значений, которые уже введены в столбце, и можно использовать этот список ничего не вводя в новую ячейку. Щелкнуть правой кнопкой мыши на ячейке и выбрать в контекстном меню команду



Выбрать из раскрывающегося списка. Ниже ячейки появится список всех значений столбца (см. рис.). Щелкнуть в нем значение (Крит.точка), и оно будет перенесено в ячейку.

7. Использовать команды, собранные в разделе **Буфер обмена** вкладки **Главная** для перемещения и копирования, как всего содержимого ячеек, так и отдельных частей (значения, формулы, форматы). Команды Windows **Вырезать**, **Копировать**, **Вставить** могут быть эффективно выбраны из контекстного меню выделенной ячейки или из комбинации клавиш <Ctrl> + <X> (**Вырезать**), <Ctrl> + <C> (**Копировать**), <Ctrl> + <V> (**Вставить**). Подробнее о копировании и перемещении ячеек внутри Рабочего листа см. п. 2.5 [2].

При вводе формул со встроенными функциями с клавиатуры также необходимо выбрать эффективный способ создания формул. MS Excel имеет различные средства, повышающие эффективность ввода формул в ячейки и диапазоны ячеек электронной таблицы.

1. Встроенные функции можно вводить в формулы непосредственно с помощью клавиатуры. Этот способ не быстрый, а вероятность синтаксических ошибок достаточно велика. Поэтому во всех случаях рекомендуется использовать **Мастер функций** или средства автоматического ввода.
2. Все формулы начинаются со знака равенства (=). При создании формулы, начинающейся с встроенной функции, можно использовать кнопку **Вставка функции** (***f**x*) строки формул, которая вызывает диалоговое окно **Мастер функций**. Использование **Мастера функций** позволяет выбрать функцию, поместить в ячейку знак равенства, имя встроенной функции и две круглые скобки. Подробнее о вставке встроенной функции с помощью **Мастера функций** см. п. 2.10.1 [2].
3. При определении аргумента функции в диалоговом окне **Аргументы функции** для ввода адресов ячеек рекомендуется применять *средство автоматического ввода* путем выделения ячейки или диапазона ячеек, щелкнув на них мышью. Абсолютную адресную ссылку вводить нажатием клавиши <F4>. Подробнее применение средства автоматического ввода см. пример 1.2.

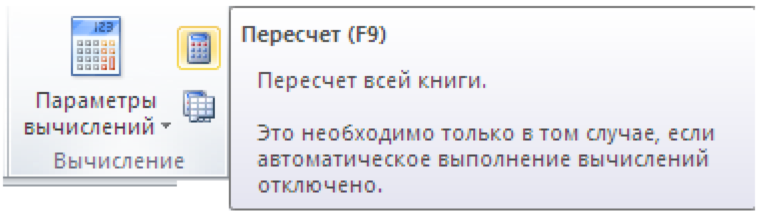
4. Чтобы завершить ввод формулы и ввести ее в текущую ячейку необходимо выполнить одно из следующих действий: щелкнуть на кнопке **Ввод** в строке формул; нажать клавишу <Enter>; нажать клавишу со стрелкой.
5. При вставке встроенной функции в формулу вручную рекомендуется использовать функцию **Автозавершение**. Ввод формулы начать с ввода знака равенства и двух-трех букв имени встроенной функции. Вступит в действие свойство **Автозавершение.** На экране появится раскрывающееся меню с именами всех функций, начинающихся с тех же букв. Щелкнуть на имени функции. MS Excel вставит имя функции в формулу в строке формул с открытой круглой скобкой. Выбрать ячейку или диапазон ячеек в качестве аргумента функции, закрыть круглую скобку и завершить ввод функции (см. п. 3). Подробнее об использовании свойства **Автозавершение** см. пример 1.2.
6. Функцию **Автозаполнение** можно использовать для копирования формулы в ячейке на диапазон (по строке или по столбцу). При копировании формул, содержащих относительные адресные ссылки на ячейки, MS Excel автоматически изменит ссылки в формулах в соответствии с действием *механизма относительной адресации* (подробнее о действии *механизма относительной адресации* при копировании формул см. пример 1.3). Для копирования ячейки на несколько смежных ячеек может быть использован способ *перетаскивания маркера автозаполнения* (расположен в правом нижнем углу ячейки).
7. Для копирования ячейки на диапазон ячеек рекомендуется использовать функцию **Автовыделение** MS Excel, которая достаточно эффективна при расширении выделения диапазона ячеек в больших таблицах данных. Эта функция автоматически выделяет диапазон ячеек в одном направлении – от активной до последней выделенной ячейки при удерживании нажатой клавиши <Shift>.

8. Для копирования данных активной ячейки на выделенный диапазон ячеек рекомендуется использовать метод *копирования один-ко-многим* (*автозаполнение* ячеек диапазона формулами при нажатых клавишах <Ctrl> + <Enter>). MS Excel заполнит остальные ячейки выделенного диапазона формулами, изменяя относительные ссылки в соответствии новым положением формулы (действие *механизма относительной адресации*) Подробнее о копировании данных на выделенный диапазон при нажатых клавишах <Ctrl> + <Enter> см. п. 2.5 [2].
9. Использовать формулы массива, которые значительно эффективнее, чем скопированные в диапазон ячеек обычные формулы (подробнее об использовании формул массивов см. п. 3.3).

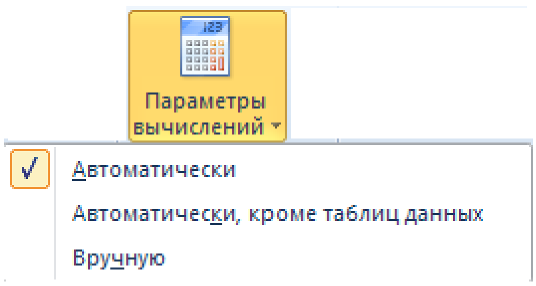
4.1.3. Выполнение расчетов по электронной таблице и устранение ошибок

Режимы пересчета открытых Рабочих листов и обновление открытых диаграмм

MS Excel производит пересчет открытого Рабочего листа и обновление открытых диаграмм после каждого ввода или внесения изменений в любые данные.



Выбор одного из трех режимов пересчета можно производить с помощью элементов управления раскрывающегося меню **Параметры вычислений** раздела **Вычисление** вкладки **Формула** Ленты.



Щелкнуть кнопку **Параметры вычислений** и выбрать одну из команд, как показано на рис. Команда **Автоматически** включает автоматический пересчет данных (установлена по умолчанию). В этом режиме пересчет открытых Рабочих листов и обновление открытых диаграмм происходит сразу же после фиксации ввода данных (нажатие клавиши <Enter>. В режиме **Вручную** отключается режим **Автоматически** и пересчет Рабочих листов производится по щелчку на кнопке **Пересчет**, либо путем нажатия клавиши <F9>.

Независимо от выбранного режима пересчета MS Excel будет автоматически пересчитывать Рабочий лист при каждом сохранении документа. Чтобы сохранить документ без выполнения пересчета формул и обновления диаграмм в режиме **Вручную**, нужно отменить установку «по умолчанию» флажка **Пересчет перед сохранением** в разделе **Работа с формулами** в пункте **Формулы** диалогового окна **Параметры Excel.**

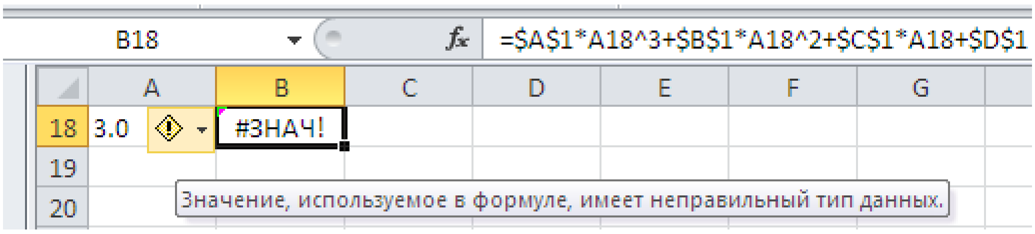
Точность хранимых в оперативной памяти и отображаемых значений в ячейке

MS Excel хранит числовые значения в ячейке Рабочего листа в оперативной памяти компьютера с точность до 15 десятичных цифр и преобразует цифры после запятой: в представлении целого числа в нули; в представлении десятичной дроби – отбрасывает. *Хранимое* в оперативной памяти числовое значение выводится в строке формул. Максимальное количество десятичных цифр числового значения, *отображаемого* в ячейке, зависит от выбранного **Формата** и ширины столбца. В числовом формате **Общий**, который установлен по умолчанию, выводимое значение округляется до 7 цифр и незначащие нули в целой и дробной частях числового значения не отображаются.

Индикация ошибочных значений в формулах

MS Excel анализирует введенные формулы и данные на наличие в них ошибок. Опции для настройки системы контроля ошибок в формулах содержатся в диалоговом окне **Параметры Excel**, которое открывается при выборе пункта **Формулы**.

По умолчанию (фоновый поиск ошибок) ячейки с ошибками в формулах обозначаются *индикатором* ошибки в виде маленького зеленого треугольника, расположенного в левом верхнем углу ячейки. Ошибка сопровождается всплывающей подсказкой с ее описанием. Например, как показано на рис., формула в ячейке B18 отмечена индикатором ошибки. В формуле обнаружена ссылка на ячейку A18, значение в которой введено с десятичной точкой и интерпретируется MS Excel как текстовая константа (значение выравнено по левой граннице).



Если в ячейке не может быть вычислено какое-либо значение, в ней отображается типичное сообщение в виде условного обозначения типа ошибки (табл. 6).

Таблица 6

Типичные сообщения об ошибке в формуле MS Excel

Обозначение ошибки	Расшифровка	Наиболее вероятные причины
#####	Ширина столбца недостаточна	Увеличить ширину столбца вручную или установить автоматический подбор ширины столбца; выбрать другой **Числовой** формат
#ЗНАЧ!	Недопустимый тип аргумента или операнда	Ссылка в формуле на текстовое значение вместо числа или логического значения
#ДЕЛ/0!	Деление на нуль	Значение делителя в формуле равно нулю. Ссылка на пустую ячейку или ячейку, содержащую 0
#ССЫЛКА!	Недопустимая ссылка на ячейку или диапазон	Отсутствует ячейка или диапазон, на который ссылается формула, которые были удалены или в них помещено содержимое скопированных ячеек
#ЧИСЛО!	Неправильные значения в функции	В функции с числовым значением используется текст
#ИМЯ?	Невозможность распознать имя в формуле	Неверно записано имя функции; в ссылке на диапазон ячеек пропущено двоеточие.

4.2. Редактирование электронных таблиц

Выполнение реорганизации информации в созданной электронной таблице, (см. рис. 55) придание ей формы в соответствии с макетом выходного документа (отчет по самостоятельной работе) (рис. 56) является одним из важных этапов процесса выполнения самостоятельной работы. В процессе реорганизации необходимо *управлять ячейками, строками и столбцами* в пределах Рабочего листа (*вставка, удаление, перемещение, копирование*), а также листами в пределах Рабочей книги, которые содержат связанные данные. Основные действия по редактированию электронной таблицы включают следующие.

1. Вставка новых строк и столбцов.
2. Удаление строк и столбцов.
3. Перемещение ячеек и диапазонов в пределах одного листа.
4. Копирование ячеек и диапазонов.
5. Редактирование информации, введенной в ячейку.
6.
7. Форматирование данных в ячейке.
8. Выравнивание содержимого ячейки.
9. Изменение ширины ячейки.
10. Добавление границ.

4.2.1. Вставка новых строк и столбцов

Чтобы *вставить* (*удалить*) *строки или столбцы* в открытом *Рабочем листе* необходимо выполнить следующие действия.

1. Щелкнуть на заголовке строки или столбца: для *вставки* щелкнуть ниже вставляемой строки и правее вставляемого столбца; для *удаления* щелкнуть на заголовке удаляемой строки или столбца. Установить указатель мыши на выделенной области, щелкнуть правой кнопкой мыши и в контекстном меню выбрать пункт **Вставить** (**Удалить**), как показано на рис.

2. Если удаление строк и столбцов привело к удалению данных, используемых в формулах, в ячейках с формулами появляется сообщение об ошибке #ССЫЛКА!. Необходимо исправить формулу, удалив ссылку на ячейку, которая не существует.

Пример.

Дана функция $f(x)$.

Отделить корни уравнения первой производной $f1(x)$ (критические точки функции f(x)) на интервале (α,β) формульным и табличным способами.

Составить графическое представление (Точечную диаграмму) базовых рядов данных "x", "$f(x)$", "$f1(x)$".

Исходные данные

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, где $a = 1, b = 2, c = -1, d = -3.$

Интервал значений аргумента (−4; 3).

Расчетные формулы

$f1(x) = 3ax^2 + 2bx + c; x_{1,2} = (b \pm \sqrt{b^2 - 3ac})/(3a)$

Ввод исходных данных **Расчетныезначения по формулам**

a	*b*	*c*	*d*	*Крит.точка*	*f(x)*	*f1(x)*
1	2	-3	-1	0,5352	-1,8794	0
Нач.знач	-4	***шаг***	0,5	-1,8685	5,0646	0

Данные вычислений

x	*f(x)*	*f1(x)*	***Отделение крит.точки***
-4	-21	29	Нет
-3,5	-8,875	19,75	Нет
-3	-1	12	Нет
-2,5	3,375	5,75	Нет
-2	5	1	Крит.точка
-1,5	4,625	-2,25	Нет
-1	3	-4	Нет
-0,5	0,875	-4,25	Нет
0	-1	-3	Нет
0,5	-1,875	-0,25	Крит.точка
1	-1	4	Нет
1,5	2,375	9,75	Нет
2	9	17	Нет
2,5	19,625	25,75	Нет
3	35	36	Нет

Отчет. Лист 2
Выполнил Студент ФИО
группа

Рис. 56. Макет выходного документа MS Excel

4.2.2. Перемещение ячеек и диапазонов в пределах одного листа

Выполнить следующие действия, чтобы *переместить ячейки и диапазоны* в пределах одного Рабочего листа:

1. Выделить ячейку или диапазон, которые нужно переместить.
2. Установить указатель мыши на одну из границ выделенной области – появится стрелка с маленьким крестиком на конце.
3. Удерживая кнопку мыши, перетащить выделенную область в область для перемещения и отпустить кнопку мыши.
4. MS Excel переместит данные, содержащиеся в выделенной ячейке или диапазоне, в указанное место. При перемещении диапазона, который содержит формулы, ссылающиеся на другие ячейки, ссылки на исходные ячейки не будут изменены.

4.2.3. Копирование ячеек и диапазонов

Копирование ячеек и диапазонов – это распространенная операция, которая может применяться при редактировании электронных таблиц в разнообразных целях:

- копирование данных из одного диапазона (ячейки) в другой диапазон;
- копирование данных из одного или нескольких диапазонов в другой.

Процедура копирования включает две операции: копирование в буфер обмена MS Office; вставку содержимого буфера обмена в целевую ячейку или диапазон.

Чтобы произвести *копирование содержимое одного диапазона в другой*, имеющий те же размеры, выполнить следующие действия.

1. Выделить диапазон, который нужно скопировать, удерживании нажатой клавиши <Shift> (функция **Автовыделение** MS Excel), нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <C> либо щелкнуть правой кнопкой мыши и выбрать пункт **Копировать** в контекстном меню (рис. 57).
2. Выделить левую верхнюю ячейку в том диапазоне, в который необходимо вставить данные из буфера обмена. Для выбора параметра

вставки щелкнуть на стрелке, находящейся в нижней части кнопки **Вставить** вкладки **Главная** Ленты (см. рис. 8), или щелкнуть правой кнопкой мыши и выбрать пункт **Параметры вставки**, чтобы открыть коллекцию **Параметры вставки** (см. рис. 57).

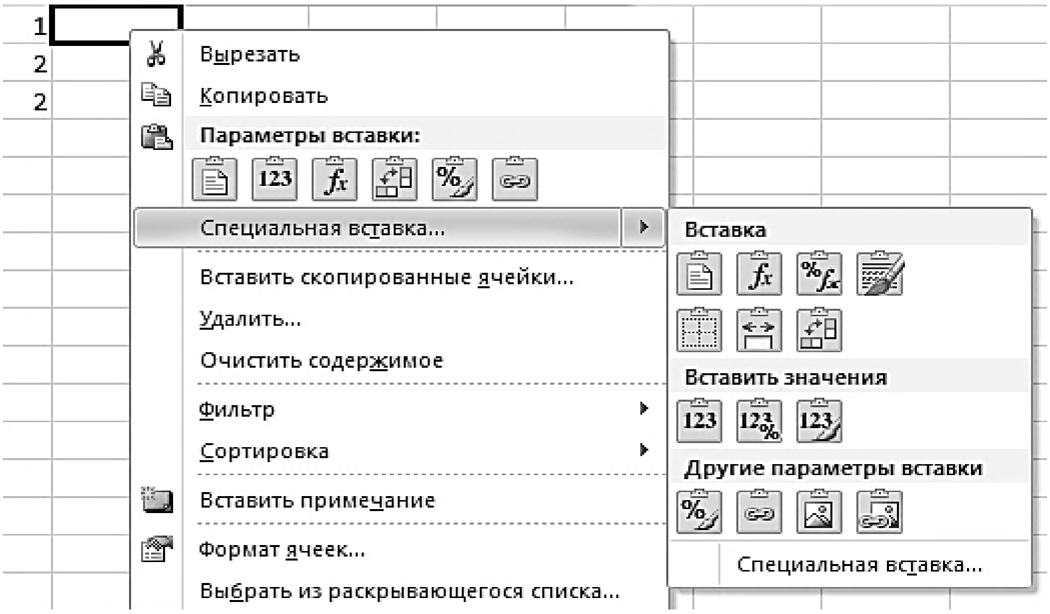


Рис. 57. Коллекция Параметры вставки

MS Excel отображает экранную подсказку для каждого выбранного значка коллекции **Параметры вставки**. Для этого достаточно установить по очереди указатель мыши над значками для просмотра эффекта их применения. Для просмотра дополнительных параметров вставки выбрать пункт меню **Специальная вставка** (см. рис. 57).

После завершения вставки диапазона справа отобразится *смарт-тег* 

Параметры вставки. Нажать клавишу <Ctrl> для отображения коллекции альтернативных параметров вставки, если нужно изменить параметр вставки после его применения. Для отмены отображения *смарт-тега* нажать клавишу <Esc>.

4.2.4. Редактирование информации, введенной в ячейку

Чтобы выполнять *редактирование информации*, введенной в ячейку, необходимо выделить ячейку и перейти в *режим редактирования*: нажать клавишу <F2> или дважды щелкнуть на ячейке.

В примере, показанном на рис. 58, демонстрируется содержимое ячейки В4 после двойного щелчка левой кнопкой мыши.

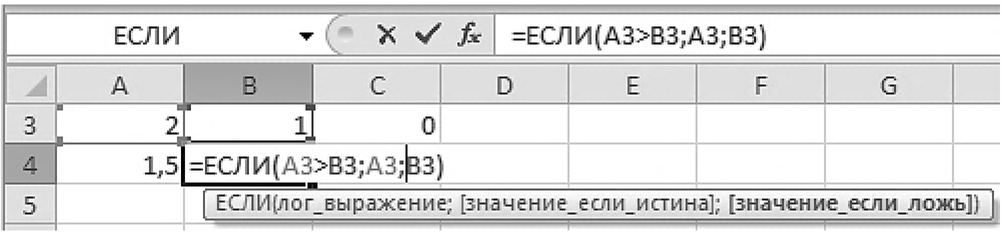


Рис. 58. Редактирование информации в ячейке

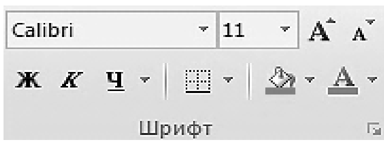
В строке формул появятся две новые пиктограммы:  – отмена редактирования;  – ввод изменений в содержимое ячейки (см. рис. 58). Указатель мыши принимает вид *вертикальной черты*, которую можно перемещать с помощью клавиш управления курсором. В месте нахождения указателя можно добавлять и удалять символы.

4.2.5. Форматирование данных в ячейке

Форматирование данных – это распространенная операция, которая применяется при управлении внешним видом данных в ячейках электронной таблицы с помощью целого ряда *опций форматирования* в MS Excel.

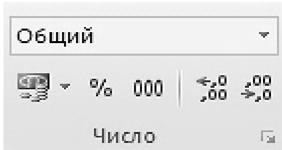
Изменение внешнего вида содержимого ячейки

Для отображения данных в ячейке в MS Excel по умолчанию используется шрифт **Calibri** размером 11 пунктов. К ячейкам можно применить различные стандартные *стили*, *размер шрифта*, *цвет шрифта* и *заливки* и другие атрибуты. Для этого можно воспользоваться параметрами, которые находятся



в группе **Шрифт** вкладки **Главная** Ленты, как показано на рис. Чтобы задать другие параметры шрифта, можно щелкнуть кнопку со стрелкой направленной вниз, в нижней части раздела **Шрифт**. Откроется диалоговое окно **Формат ячеек** с выбранной вкладкой **Шрифт**. Подробнее о форматировании шрифта см. [2].

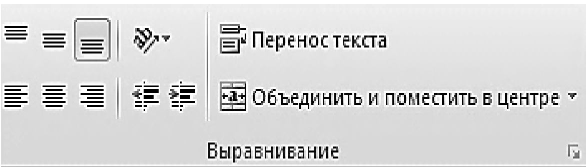
Форматирование числовых значений



Числа отображаются «по умолчанию» в ячейке в формате **Общий** в том виде, в котором они были введены (не выводятся незначащие нули и знак «+» у положительного числа). Для применения встроенных числовых форматов возможно использование кнопки со стрелкой направленной вниз в группе **Число** вкладки **Главная** Ленты, как показано на рис. Откроется диалоговое окно **Формат ячеек** с выбранной вкладкой **Число.** Подробнее о форматировании числовых значений см. [2].

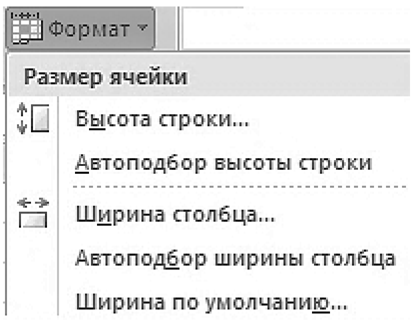
4.2.6. Выравнивание содержимого ячейки

Применяются следующие параметры выравнивания «по умолчанию»: данные выравниваются *по нижнему краю*, числа – *по правому краю*, текст – *по левому краю*. Используя набор стандартных параметров из группы **Выравнивание** вкладки **Главная** Ленты, как показано на рис., можно изменить отображение данных в ячейке. Подробнее о форматировании выравнивания содержимого ячейки см. [2].



4.2.7. Изменение размера ячейки

Потребность в изменении ширины столбца возникает, когда числовое значение не может отображаться (набор знаков #######) и нужно расширить ячейку. В ячейке может отображаться «по умолчанию» не более 8 символов. Высоту строки MS Excel настраивает «по умолчанию» в соответствии с самой высокой записью в строке. Для изменения ширины столбца (высоты строки) необходимо выделить любую ячейку в столбце (строке), ширину (высоту) которой нужно изменить. На вкладке **Главная** Ленты в группе **Ячейка** щелкнуть на кнопке **Формат** и в меню выбрать пункт **Ширина столбца** (**Высота строки**). Подробнее об изменении размера ячейки см. [2].



4.2.8. Добавление границ

Используя различные типы линий при создании границ, изменяя ширину столбцов и высоту строк, пользователь может создать бланк документа любой сложности. На одном **Рабочем листе** не рекомендуется использовать *границы* и отображать *сетку*. Для того чтобы убрать с экрана *сетку*, в группе **Показать или скрыть** вкладки **Вид** Ленты нужно убрать флажок **Сетка**. Для задания *границ* необходимо: выделить диапазон или ячейку, к которым нужно добавить границы; открыть вкладку **Граница** диалогового окна **Формат ячеек** (рис. 59); в секции **Линия** выбрать *тип линии* и ее *цвет*; с помощью кнопок в правой части диалогового окна задать местоположение границ щелчками кнопок, на которых они изображены; щелкнуть на кнопке *ОК*, чтобы граница появилась в таблице. Подробнее о добавлении границ см. [2].

Рис. 59. Диалоговое окно Формат ячеек с открытой вкладкой Граница

4.2.9. Реорганизация электронной таблицы в документ MS Excel

Для реорганизации информации в созданной электронной таблице для отладки алгоритма и поиска решения (рис. 55), придания ей формы в соответствии с макетом выходного документа (рис. 56) необходимо выполнить операции, приведенные в табл. 7.

Таблица 7

Операции по реорганизации электронной таблицы в документ MS Excel

№ п/п	Операция	Действия пользователя «Редактирование электронной таблицы
1	2	3
1.	Активный *Лист Отчет1* скопировать и переименовать на *Лист Отчет2*	Щелкнуть правой кнопкой мыши по ярлычку *Лист Отчет1*. В контекстном меню выбрать команду **Переместить или скопировать** и установить флажок **Создать копию**. Щелкнуть правой кнопкой мыши по ярлычку *Лист Отчет1(2)*, выбрать в контекстном меню команду **Переименовать**.
2	Вставить новые строки 1-14	Щелкнуть на заголовке строки 1 и перетащить указатель мыши по заголовкам, выделяя все строки 1-14. Щелкнуть правой кнопкой мыши в выделенной области и в контекстном меню выбрать пункт **Вставить**.
3	Вставить текст в строки 1-8	Выделить ячейку А1. Ввести текст в ячейки, фиксируя ввод нажатием клавиши <Enter>: А1 – «Пример.»; в А2 – «Дана функция $f(x)$.»; в А3 – «Отделить корни уравнения первой производной $f1(x) = 0$»; в А4 – «(критические точки функции $f(x)$) на интервале (α, β)»; в А5 – «формульным и табличным способами.»; в А6 – «Составить графическое представление (Точечную диаграмму)»; в А7 – «базовых рядов «x», $f(x)$ и $f1(x)$.»; в А8 – «Исходные данные».
4	Вставить формулу в строку 9	Щелкнуть на кнопке **Формула** вкладки **Вставка**, в окне «Место для формулы» ввести формулу $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d,$ где $a = 1,\ b = 2,\ c = -3,\ d = -1$. Переместить формулу в ячейку А9.

Продолжение табл. 7

1	2	3
5	Вставить текст в строки 10-11	Перейти в ячейку A10. Ввести текст – «Интервал значений аргумента $(-4; 3)$». Нажать <Enter>. В ячейку A11 ввести текст – «Расчетные формулы».
6	Вставить формулу в строку 12	Щелкнуть на кнопке **Формула** вкладки **Вставка**, в окне «Место для формулы» ввести «$f1(x) = 3ax^2 + 2bx + c; x_{1,2} = (-b^{\pm}\sqrt{b^2 - 3ac})/(3a)$». Переместить формулу в ячейку A12.
7	Вставить текст в строки 13-14	Перейти в ячейку A13. Ввести текст – «Ввод исходных данных». Нажать <Enter>. Перейти к ячейке E13 и ввести текст «Расчетные значения по формулам». Ввести текст в ячейки, фиксируя ввод нажатием клавиши <Tab>: в A14 – «*a*»; в B14 – «*b*»; в C14 – «*c*»; в D14 – «*d*».
8	Ввести данные в ячейки A15, B15, C15, D15	Перейти в ячейку A15. Ввести числа в ячейки, фиксируя ввод нажатием клавиши <Tab>: в A15 – «1»; в B15 – «2»; в C15 – «−3»; в D15 – «−1».
9	Переместить данные в строке16 и вставить текст	Перейти в ячейку B16 и переместить данные в ячейку D16. Перейти в ячейку A16 и переместить данные в ячейку B16. Перейти в ячейку A16 и ввести текст «Нач.знач». Перейти в ячейку C16 и ввести текст «шаг».
10	Вставить новые строки 17-18	См. п. 2.

Продолжение табл. 7

1	2	3
11	Ввести данные в строки 17-18	Перейти в ячейку A17 и Ввести текст «Данные вычислений». Нажать <Enter>. Ввести в ячейки: A18 – «*x*»; перейти в ячейку B18 и ввести – «*f*(*x*)». Ячейку B18 скопировать в ячейку C18 и отредактировать текст на «*f1*(*x*)». Перейти к ячейке E18 и ввести в ячейку «Отделение». Нажать <Enter>.
12	Копировать, транспонировать и вставить данные в диапазон E15:G16.	Выделить диапазон E19:F21, используя функцию **Автовыделение** MS Excel, при удерживании нажатой клавиши <Shift>. Скопировать в буфер обмена (нажать клавиши <Ctrl+C>), выделить ячейку E15 и щелкнуть кнопку **Вставить** в разделе **Буфер обмена** вкладки **Главная** Ленты В открывшемся меню кнопки **Вставить** выбрать команду **Транспонировать**. Выделить и удалить диапазон ячеек E19:F21.
13	Переместить диапазон ячеек D20:D33 в E20:E33.	Выделить диапазон D20:D33, используя функцию **Автовыделение** MS Excel, при удерживании нажатой клавиши <Shift>. Перетащить диапазон, удерживая нажатой левую кнопку мыши, в E20:E33.
14	Вставить текст в ячейки F14, G14.	Скопировать ячейки B18, C18 в F14, G14. Выделить диапазон ячеек B18:C18 и скопировать в буфер обмена, нажав клавиши <Ctrl + C>. Выделить ячейку F14 и вставить данные из буфера обмена, нажав клавиши <Ctrl + V>.

Продолжение табл.7

1	2	3
15	Выполнить форматирование данных ячеек A1, A8, A11, A13, F13, A17.	Выделить ячейки, удерживая клавишу <Ctrl>.. Изменить внешний вид содержимого ячеек. Воспользоваться параметрами группы **Шрифт** вкладки **Главная** Ленты: **шрифт** Times New Roman, размер шрифта 12 пт., **полужирное начертание**.
16	Вставить текст в ячейки E14 и E19	Использовать автоматическое завершение ввода данных (функция **Автозавершение**) для ускорения ввода повторяющихся текстовых значений в столбце электронной таблицы (подробнее см. п. 4.2.1). Щелкнуть правой кнопкой мыши на ячейке E14 и выбрать в контекстном меню команду **Выбрать из раскрывающегося списка**. Ниже ячейки появится список всех значений столбца. Щелкнуть в нем значение (Крит.точка) и оно будет перенесено в ячейку. В ячейку E19 ввести «крит.точки». Выделить ячейку E19, щелкнув правой кнопкой мыши. Ввести «к». MS Excel автоматически завершит текст «крит.точка», которое имеется в списке. Перейти в режим редактирования ячейки, дважды щелкнув на ячейке, и заменить последний символ.
17	Выполнить форматирование содержимого ячеек A2:A7, A10.	Выделить ячейки, удерживая клавишу <Ctrl>. Изменить внешний вид содержимого ячеек. Воспользоваться параметрами группы **Шрифт** вкладки **Главная** Ленты: **шрифт** Times New Roman, **размер** шрифта 12 пт.

1	2	3
18	Выполнить форматирование содержимого ячеек A14:D14, E14:G14, E18, E19, A18:C18.	Выделить ячейки, удерживая клавишу <Ctrl>. Изменить внешний вид содержимого ячеек. Воспользоваться параметрами группы **Шрифт** вкладки **Главная** Ленты: **шрифт** Times New Roman, размер шрифта 12 пт., **курсив**, **полужирное начертание**, **выравнивание по центру**.
19	Выполнить форматирование содержимого диапазонов ячеек A15:D15, E15:G16, A19:C33, E20:E33.	Выделить четыре несмежных диапазона ячеек. Диапазон A15:D15: выделить A15, удерживая клавишу <Shift>, выделить D15. Диапазон E15:G16: удерживая клавишу <Ctrl>, выделить E15, удерживая клавишу <Shift>, выделить G16. Аналогично выделяются диапазоны A19:C33 и E20:E33 (подробнее о выделении несмежных диапазонов см. п. 1.2.2. [2]). Изменить внешний вид содержимого ячеек. Воспользоваться параметрами группы **Шрифт** вкладки **Главная** Ленты: **шрифт** Times New Roman, **размер** шрифта 12 пт., **выравнивание по центру**.
20	Выполнить форматирование содержимого ячеек B16, D16.	Выделить ячейки B16, D16, удерживая клавишу <Ctrl>. Изменить внешний вид содержимого ячеек. Воспользоваться параметрами группы **Шрифт** вкладки **Главная** Ленты: **шрифт** Times New Roman, **размер** шрифта 12 пт., **выравнивание по центру**.
21	Добавить границы диапазоны A14:D15, E14:G16, A18:C33.	Выделить диапазон A18:C33, Вызвать диалоговое окно **Формат ячеек** (см. рис. 59). На вкладке **Граница** выбрать тип линии и задать их местоположение (таблиц данных)

4.2.10. Сохранение результатов работы в файле Рабочей книги

Рабочая книга с результатами работы может быть сохранена в файлах программы MS Excel 2007, в которой используются новые форматы файлов документов, основанные на расширенном языке разметки XML. Язык XML – стандартный язык для описания и передачи данных, который обеспечивает функциональную совместимость и надежный обмен данными между разнотипными системами и приложениями. Одновременно сохранена полная совместимость и функциональность работы с файлами форматов MS Excel 97-2003. Формат **.XLSX** задан по умолчанию для сохранения Рабочей книги в файле. Работа с файлами Рабочих книг MS Excel не отличается от работы с файлами других документов и программ MS Office 2007.

Сохранить новую Рабочую книгу можно с помощью команды **Сохранить** – кнопка **Сохранить** с изображением дискеты находится с левого края панели быстрого доступа или нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <S>. MS Excel отобразит диалоговое окно **Сохранение документа**. В текстовом поле **Имя файла** можно заменить временное имя файла (Книга 1) на более информативное *Работа_Вар_NNN*, где *Вар* – номер варианта задания по журналу; *NNN* – три последних цифры номера студенческого билета. Если нужно изменить формат файла по умолчанию, то можно воспользоваться раскрывающимся списком **Тип файла**. Необходимо также выбрать папку и диск, на котором будет сохранена информация Рабочей книги (по умолчанию документы сохраняются в папке **Мои документы**). После завершения изменений в диалоговом окне **Сохранение документа** щелкнуть на кнопке **Сохранить** или нажать клавишу <Enter>. Для сохранения копии документа в другой папке и переименования файла используется команда **Сохранить как** из меню кнопки **Office**. Для сохранения Рабочей книги в новой подпапке папки в диалоговом окне **Сохранение документа** щелкнуть на кнопке **Создать папку**, находящейся на расположенной сверху панели, а затем ввести имя папки в появившемся диалоговом окне **Создание папки** и щелкнуть на кнопке ОК.

4.3. Создание электронной графической презентации в MS Power Point

4.3.1. Основные понятия и форматы файлов, поддерживаемых в Power Point

Программа MS Power Point 2007 (Power Point) или более поздние версии широко используется в современной практике проведения семинаров, конференций, обсуждении и защите курсовых и дипломных проектов, а также для демонстрации электронных образовательных ресурсов в системах дистанционного обучения.

Программа Power Point предназначена для создания компьютерных презентаций и предоставляет пользователю все необходимые функции для их создания. Презентация Power Point – это последовательность показываемых на экране компьютера в полноэкранном режиме слайдов и спецэффектов, сопровождающих их показ; раздаточный материал для слушателей, а также конспект и план доклада, которые хранятся в одном файле с расширением **.PPTX**. Презентации можно представлять в электронном виде, распечатывать в виде раздаточного материала (копии слайдов) или распространять через Интернет. Power Point обеспечивает возможность создания Web-презентации и сохранение ее как Web-страницы.

Расширение файла PPTX – это файл презентации программы Power Point. С помощью программы Power Point можно создавать слайды. Слайды могут содержать информацию разных типов: текстовую графическую (рисунки, скриншоты диаграммы), видеоклипы и другие мультимедийные объекты. Управление показом слайдов может происходить с помощью клавиатуры или мыши (вручную), либо автоматически через определенный промежуток времени.

4.3.2. Создание и сохранение снимка экрана монитора (скриншота)

Скриншот – это снимок (изображение) экрана монитора компьютера пользователя. На клавиатуре для снимка экрана монитора имеется специальная клавиша <Print Screen>. Основное назначение этой клавиши – это копирование в буфер обмена содержимого экрана монитора. Клавиша <Print Screen> на обычной клавиатуре находится в группе функциональных клавиш вместе с клавишами <Scroll Lock> и <Pause|Break> справа вверху.

Для создания скриншота нажать клавишу <Print Screen> и изображение, которое пользователь видит на экране, один в один копируется в буфер обмена. При этом Рабочий стол остается без изменений. Затем необходимо вызвать графический редактор Paint, который установлен в компьютере по умолчанию.

Чтобы вызвать программу Paint необходимо открыть меню кнопки **Пуск** и щелкнуть на ярлыке программы. Если ярлык программы Paint отсутствует в меню кнопки **Пуск**, то последовательно щелкнуть на ярлыке **Все программы**, переместить указатель мыши к группе программ **Стандартные**, открыть щелчком мыши еще одно всплывающее меню, в котором содержится значок программы Paint, и щелкнуть на названии программы. На экране монитора появится рабочее окно программы Paint. Далее необходимо вставить изображение (скриншот) в окно программы Paint и сохранить его на компьютере.

Чтобы вставить изображение в окно программы Paint необходимо последовательно щелкнуть на кнопке **Правка** и выбрать в раскрывающемся меню команду **Вставить** или нажать комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. Изображение из буфера обмена скопируется в окно программы Paint. Чтобы сохранить изображение в окне программы Paint на компьютере необходимо открыть меню вкладки **Файл** и выбрать команду **Сохранить как**. В диалоговом окне **Сохранение документа** в текстовом поле **Имя файла** записать имя «$Screen\_K\_NNN$», где K – номер изображения, NNN – три последних цифры в студенческом билете. В поле **Папка** необходимо указать расположение файла на жестком диске. Для хранения файла рекомендуется использовать флэш-память USB. Операционная система MS Windows распознает флэш-диск как съемный жесткий диск. Флэш-память работает на любом компьютере с USB-портом (порт универсальной последовательной шины). Подвести указатель мыши к стрелке в поле **Папка**, открыть список корневых папок компьютера. Перемещаясь по иерархии папок найти папку пользователя на флэш-памяти (этот процесс называется *навигацией*). В поле **Тип файла** выбрать **JPEG**. Этот формат позволяет получить качественное изображение при малом размере файла и поддерживается всеми программами просмотра графических изображений и графическими редакторами. Для выхода из окна **Сохранение документа** щелкнуть кнопку **Сохранить**.

4.3.3. Создание презентации. Базовые сведения и рекомендации

В основе презентации лежит набор слайдов (страниц презентации), на которых размещаются текст, рисунки и другие объекты. Создать презентацию можно с помощью шаблона оформления слайдов (файл с расширением **.POTX**), который можно использовать для форматирования создаваемых презентаций. Файл шаблона оформления содержит стили презентации, включая образцы слайдов, а также набор унифицированных элементов, определяющих внешний вид документа с помощью цветов, шрифтов и графических объектов.

В пособии описывается создание презентации без использования шаблона оформления («с нуля»). Для создания презентации необходимо иметь текст и рисунки, которые нужно разместить на слайдах и оформить надлежащим образом.

При создании презентации необходимо в первую очередь решить, какие материалы из доклада нужно разместить в презентации. В презентации не используются тексты большого объема, чтобы не перегружать ее информацией. В презентации рекомендуется оставить только наглядную информацию: заголовки на каждой странице презентации, графические объекты (скриншоты, таблицы MS Excel, диаграммы и т. п), текст небольшого объема с размером шрифта не менее 22-24 пт.

После того, как принято решение о содержимом, которое нужно разместить в презентации, необходимо определить нужное количество слайдов, создать план базовой структуры презентации, а затем разделить материал на отдельные слайды. Вероятно, могут понадобиться следующие слайды.

- Титульный лист создаваемой презентации.
- Вводный слайд, содержащий основные разделы плана презентации.
- Один слайд для каждого раздела презентации.
- Итоговый слайд, содержащий выводы по представленным в презентации материалам.

При размещении большого объема материала на слайдах необходимо оценить сколько времени потребуется каждому из слайдов в процессе показа презентации. Это время не может превышать от двух до пяти минут.

4.4.4. Рабочее окно программы Power Point

Запуск программы Power Point выполняется стандартным способом. Чтобы вызвать программу Power Point необходимо открыть меню кнопки **Пуск** щелкнуть на ярлыке программы. Если ярлык программы Power Point отсутствует в меню кнопки **Пуск**, то последовательно щелкнуть на ярлыке **Все программы**, переместить указатель мыши к группе программ **Microsoft Office**, открыть щелчком мыши еще одно всплывающее меню, в котором содержится значок программы Power Point, и щелкнуть на названии программы.

После запуска программы на экране монитора появится рабочее окно программы Power Point, содержащее презентацию с одним слайдом (рис. 60). Программа Power Point имеет ленточный интерфейс, аналогичный другим программам из пакета Microsoft Office. Вверху окна расположены вкладки Ленты с кнопками для выполнения. Команды на вкладках сформированы в группы. По умолчанию программа Power Point открывается в режиме **Обычный** (кнопки переключения режимов просмотра расположены справа в нижней части окна). Режим **Обычный** – это основной режим для создания, редактирования и форматирования отдельных слайдов.

В левой части окна приложения находится область, в которой перечень слайдов презентации может отображаться либо в виде миниатюр полноразмерных слайдов (режим **Слайда**), либо в виде **Структуры** (режим **Структура**). Для выбора режима необходимо щелкнуть мышью на соответствующей вкладке (см. рис. 60). Для появления нужного слайда в рабочей области можно щелкнуть соответствующую миниатюру на вкладке **Слайды**. Можно также перетаскивать миниатюры, чтобы изменить порядок слайдов в презентации. Вкладка **Слайды** позволяет также добавлять и удалять слайды.

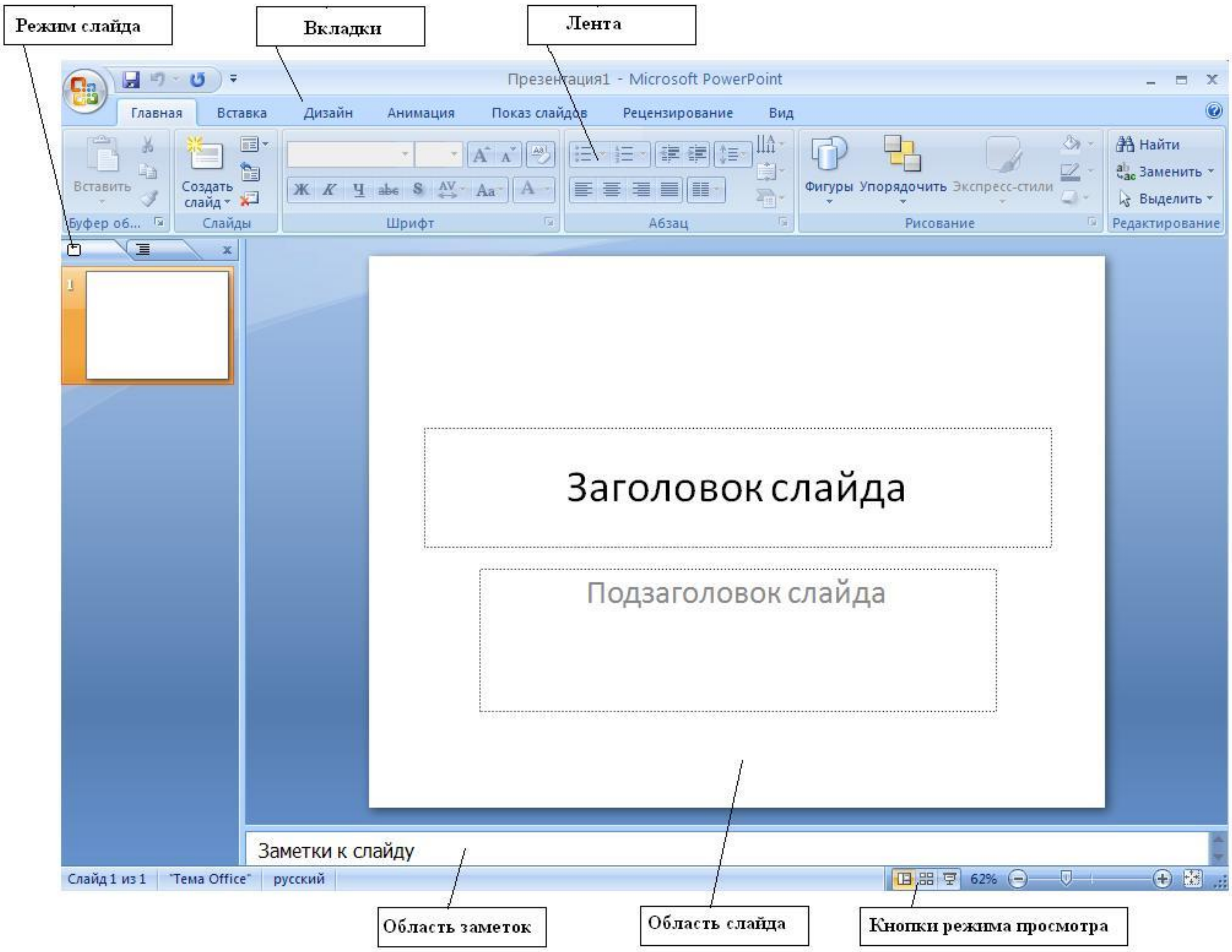


Рис. 60. Рабочее окно программы MS Power Point 2007 после запуска

В режиме **Структура** отображается иерархическая структура, содержащая заголовки и тексты слайдов презентации. Перед заголовком каждого слайда стоит номер и значок. Основной текст, включающий до пяти уровней отступов, расположен после каждого заголовка.

При первом запуске программы Power Point в центральной части Рабочего окна находится *рабочая область*, в которой в режиме **Обычный** отображается эскиз простейшего слайда.

В эскизе содержатся следующие местозаполнители.

- Заголовок слайда.
- Подзаголовок слайда.
- Заметки к слайду.

Подразумевается, что это «титульный лист» создаваемой презентации, на котором указаны: название презентации (Заголовок слайда); поясняющая информация (Подзаголовок слайда). Пунктирные линии показывают поля для ввода в местозаполнители текста, вставки изображения (скриншота), диаграммы или другого объекта. Для ввода значения в эти поля необходимо просто щелкнуть по одной из указанных надписей и ввести значение. Служебные названия (Заголовок слайда, Подзаголовок слайда) при показе слайдов не отображаются. Если какая-то из областей, предлагаемых программой по умолчанию, не требуется, то можно ничего не вводить в эту область. Размеры областей можно изменять, перетаскивая мышью их границы.

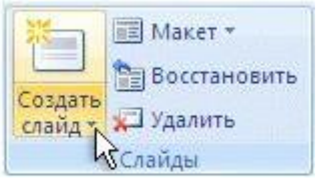
Режим **Показ слайдов** – это режим, с помощью которого можно просмотреть презентацию на экране монитора компьютера.

4.4.5. Создание презентации «с нуля»

При запуске программы Power Point автоматически создается новая презентация, которая изначально содержит один титульный лист. Прежде чем добавить новый слайд в презентацию необходимо назначить макет нового слайда. Чтобы одновременно с добавлением нового слайда в презентацию назначить его макет, можно выполнить следующие действия.

1. На вкладке **Слайды** щелкнуть непосредственно под единственным начальным слайдом – под слайдом появится черная линия.
2. На вкладке **Главная** в разделе **Слайды** щелкнуть стрелку рядом с кнопкой **Создать слайд**, как показано на рис. На экране появится

коллекция, в которой отображаются эскизы различных доступных макетов слайдов: текста; содержимого; текста и содержимого (рис. 61).



- Имя макета (1) определяет содержимое для которого спроектирован каждый из макетов.
- Местозаполнители с цветными значками (2) могут автоматически вставить объекты – таблицы, диаграммы, рисунки из файла и др. Для этого нужно щелкнуть значок.

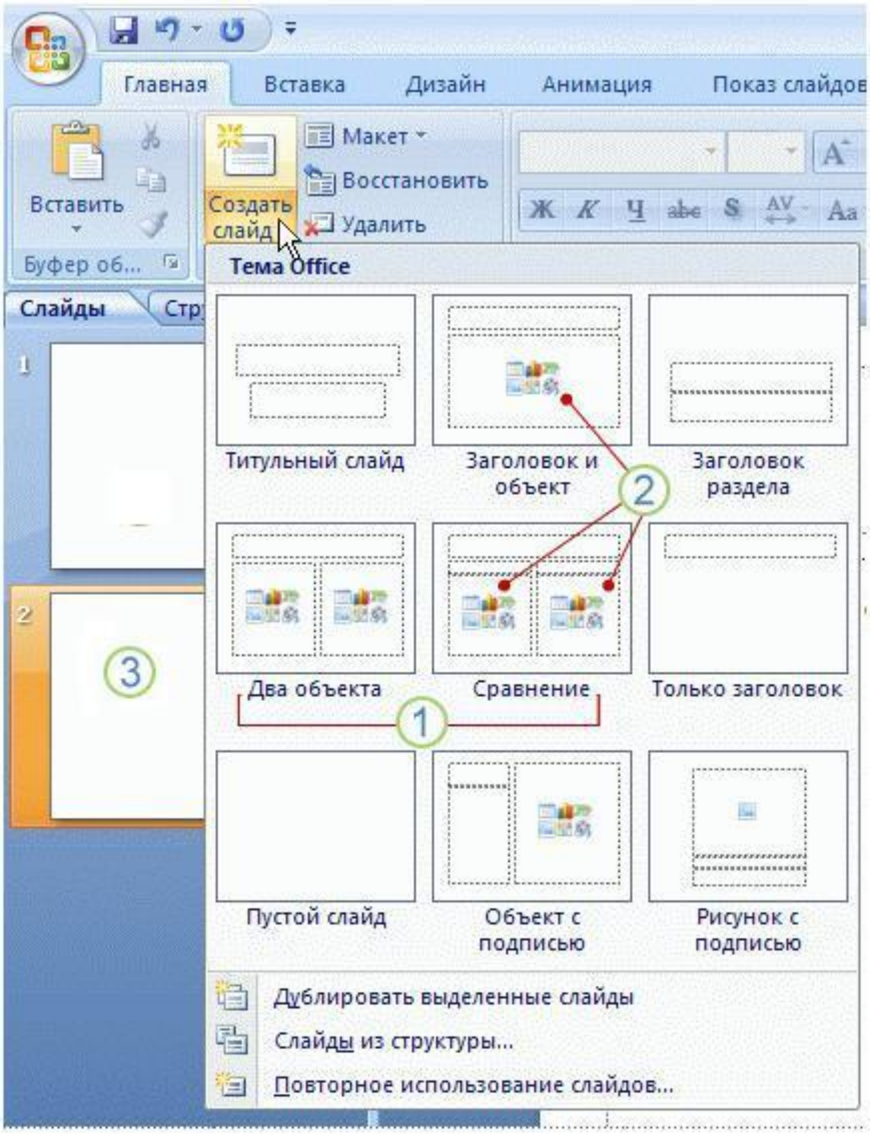


Рис. 61. Коллекция эскизов доступных макетов слайдов

3. Щелкнуть мышью нужный макет в коллекции и выбрать его для нового слайда. Новый слайд появится и на вкладке **Слайды** (3), где он

выделяется как текущий, и в области **Слайд**. Повторить эту процедуру для каждого добавляемого слайда.

4. Если нужно, чтобы для нового слайда использовался тот же макет, что и для предыдущего слайда, можно просто нажать непосредственно кнопку **Создать слайд**.
5. Чтобы изменить макет текущего слайда на какой-либо другой, необходимо на вкладке **Главная** Ленты щелкнуть мышью на кнопке **Макеты** в разделе **Слайды** и в раскрывшейся коллекции выбрать новый макет слайда. Чтобы сделать слайд *текущим*, необходимо на вкладке **Слайды** щелкнуть непосредственно слайд, к которому нужно применить новый макет.
6. Чтобы задать одинаковый макет оформления целой группы слайдов, например, когда все слайды в группе содержат изображения (скриншоты), то следует создать необходимое количество новых слайдов, выделить их в области **Слайд** и назначить им единый макет.

4.4.6. Добавление текста на слайд

Текст является самым общим содержанием слайдов презентации Power Point. Текст, используемый на слайдах, разделяют на следующие типы: *заголовки, подзаголовки, обычный текст, названия, маркированные* и *нумерованные списки*. Текст можно добавлять на слайд различными способами: ввести в поле местозаполнителя (в рамку с пунктирными границами); добавить на слайд область **Надпись** и в нее ввести текст; добавить объект **WordArt** и др.

Ввод текста в рамку.

Макеты текста и содержимого содержат рамки местозаполнителя для ввода текста. В соответствующие рамки вводится текст *заголовка, подзаголовка, основной текст, списки*. Чтобы добавить текст в рамку на любой слайд, необходимо щелкнуть местозаполнитель, в который нужно добавить текст, а затем ввести или вставить нужный текст из буфера обмена. Если текст не умещается в рамке, то по мере ввода новых знаков шрифт и межстрочное расстояние будут уменьшаться до нужного размера. Рамки местозаполнителя можно перемещать, изменять их размеры.

Текст, введенный в рамки местозаполнителя, который отображается в области **Слайд** и на вкладке **Структура**, позволяет осуществить его редактирование и форматирование, как и в MS Excel.

Пример 4.1

В слайде *Титульный лист* создаваемой презентации в рамках местозаполнителя *Заголовок слайда* заменить служебные слова на текст «Вычислительная математика в электронных таблицах» (рис. 62).

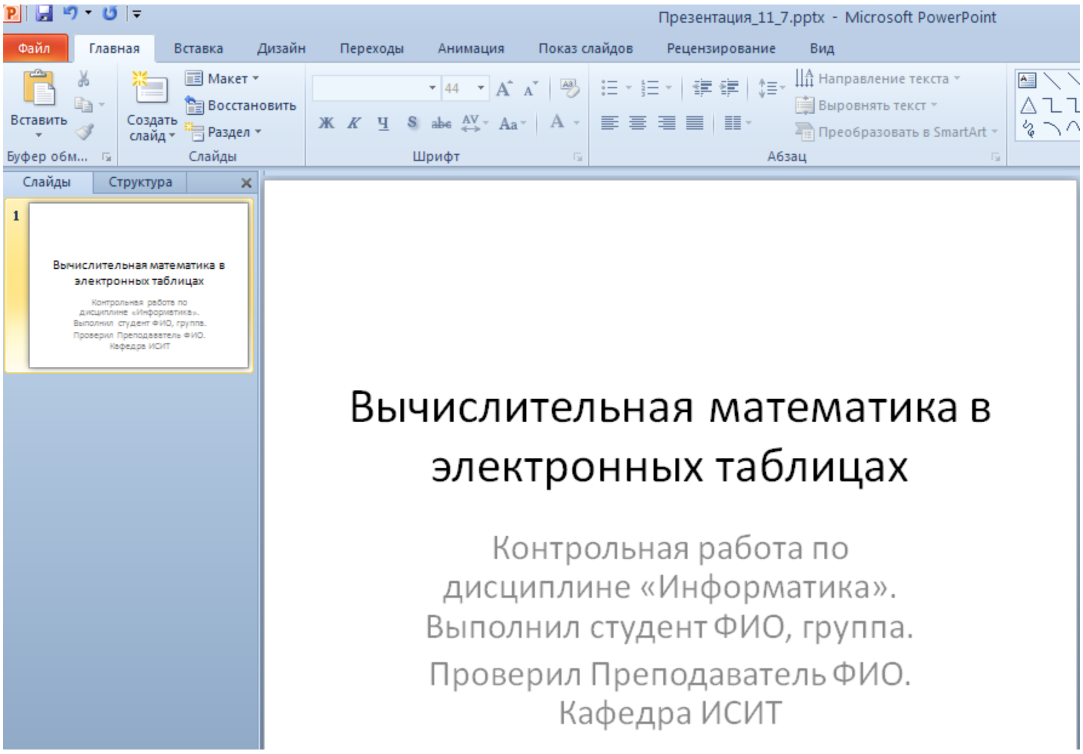


Рис. 62. Отображение введенного в рамки текста на вкладке Слайды и в области Слайд

В местозаполнителе *Подзаголовок слайда* заменить служебные слова на текст «Контрольная работа по дисциплине «Информатика». Выполнил студент ФИО, группа. Проверил Преподаватель ФИО Кафедра ИСИТ». Введенный текст отображается на вкладке **Слайд** (миниатюра) и в области **Слайд**.

Текст, введенный в рамки, отображается и на вкладке **Структура** (рис. 63).

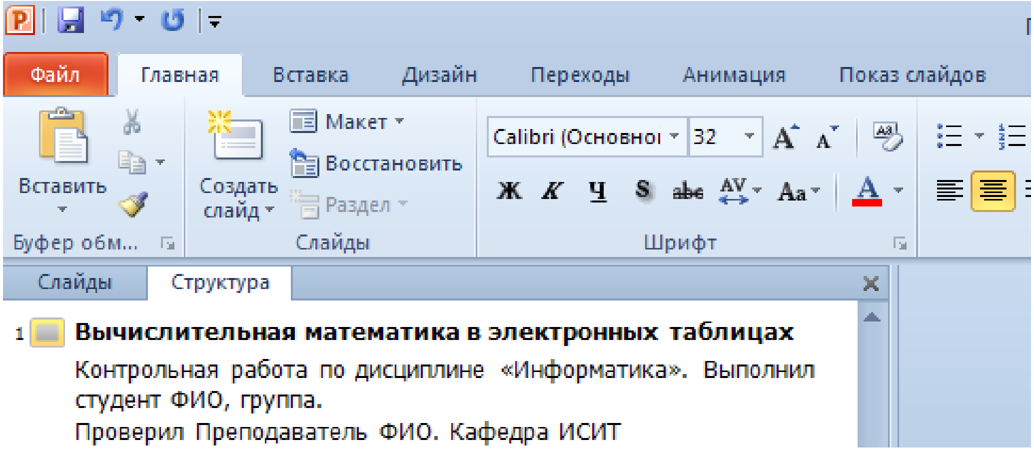


Рис. 63. Отображение введенного в рамки текста на вкладке Структура

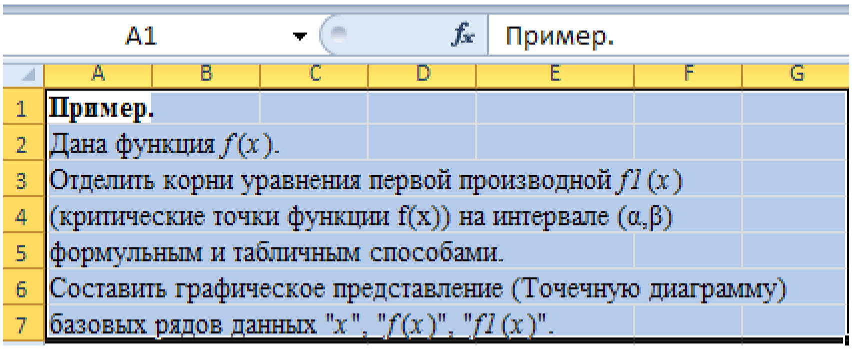
Чтобы увидеть вид созданного слайда, нужно перейти в *режим просмотра презентации*, нажав клавишу <F5>. Для выхода из *режима просмотра* можно воспользоваться клавишей <Esc>.

Добавление основного текста

Текст, созданный с использованием программ MS Office (MS Excel, MS Word) можно скопировать в буфера обмена, а затем вставить в презентацию как в рамки местозаполнителя, так и вне их (макеты **Пустой слайд**, **Только заголовок** и др.).

Основной текст из MS Excel можно вставить следующими способами.

1. Скопировать диапазон ячеек, содержащие текст, в буфер обмена MS Office, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <C> (диапазон A1:A7, как показано на рис.).



2. В презентации Power Point щелкнуть на кнопке **Создать слайд,** выбрать макет слайда, в который нужно скопировать данные диапазона ячеек A1:A7 (макет **Только заголовок**, как показано на рис. 64) и вставить

в слайд, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>. После добавления текста в презентацию его можно редактировать и форматировать. Редактирование данных в ячейках диапазона на слайдах осуществляется аналогично редактированию информации в MS Excel (см. п. 4.2). Чтобы редактировать данные (текст) нужно выделить на слайде скопированный диапазон ячеек (как показано на рис.64.) – откроется доступ к инструментальным средствам редактирования электронной таблицы: на Ленте в разделе **Работа с таблицами** отображаются контекстные вкладки **Конструктор** и **Макет**.

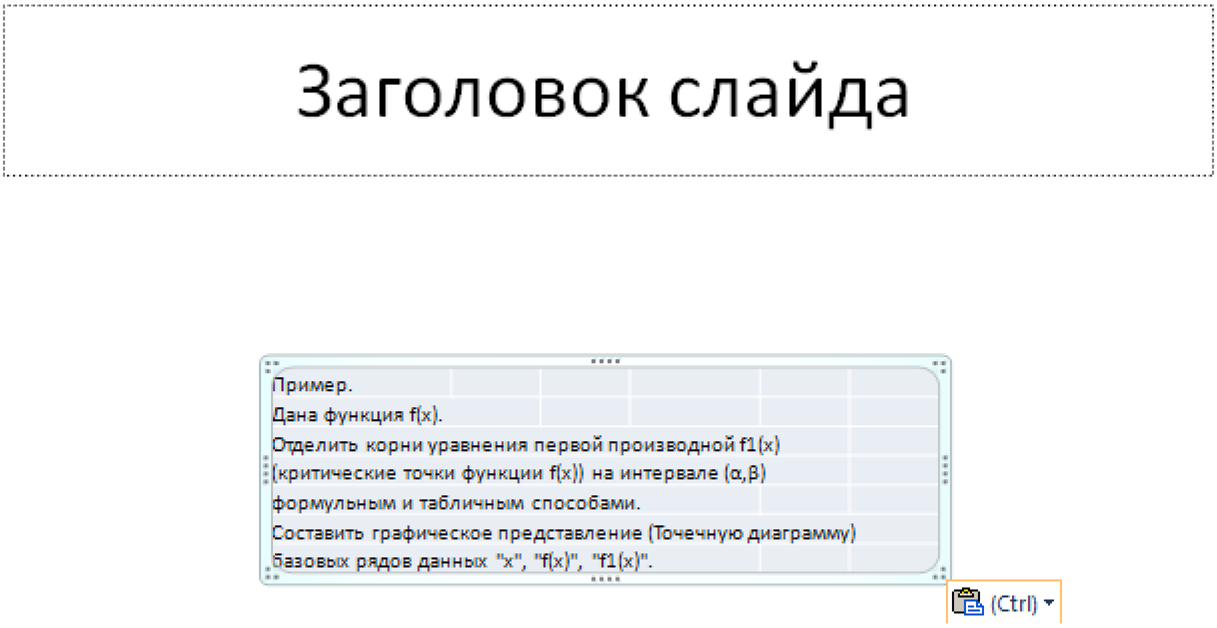


Рис. 64 Добавление текста в слайд копированием данных диапазона ячеек

3. Добавить текст в слайд в виде скриншота. Скриншот в Power Point является внедренным графическим OLE-объектом в презентации, что не допускает применения для редактирования и форматирования инструментальных средств Power Point. Чтобы вставить скриншот в слайд, необходимо выполнить следующие действия.

- Выбрать кнопку **Рисунок** в разделе **Изображения** на вкладке **Вставка** Ленты. На экране отобразится диалоговое окно **Вставка рисунка** (рис. 65).
- Щелкнуть на кнопке **Вставить.** На экране отобразится выбранный рисунок, как показано на рис. 66.

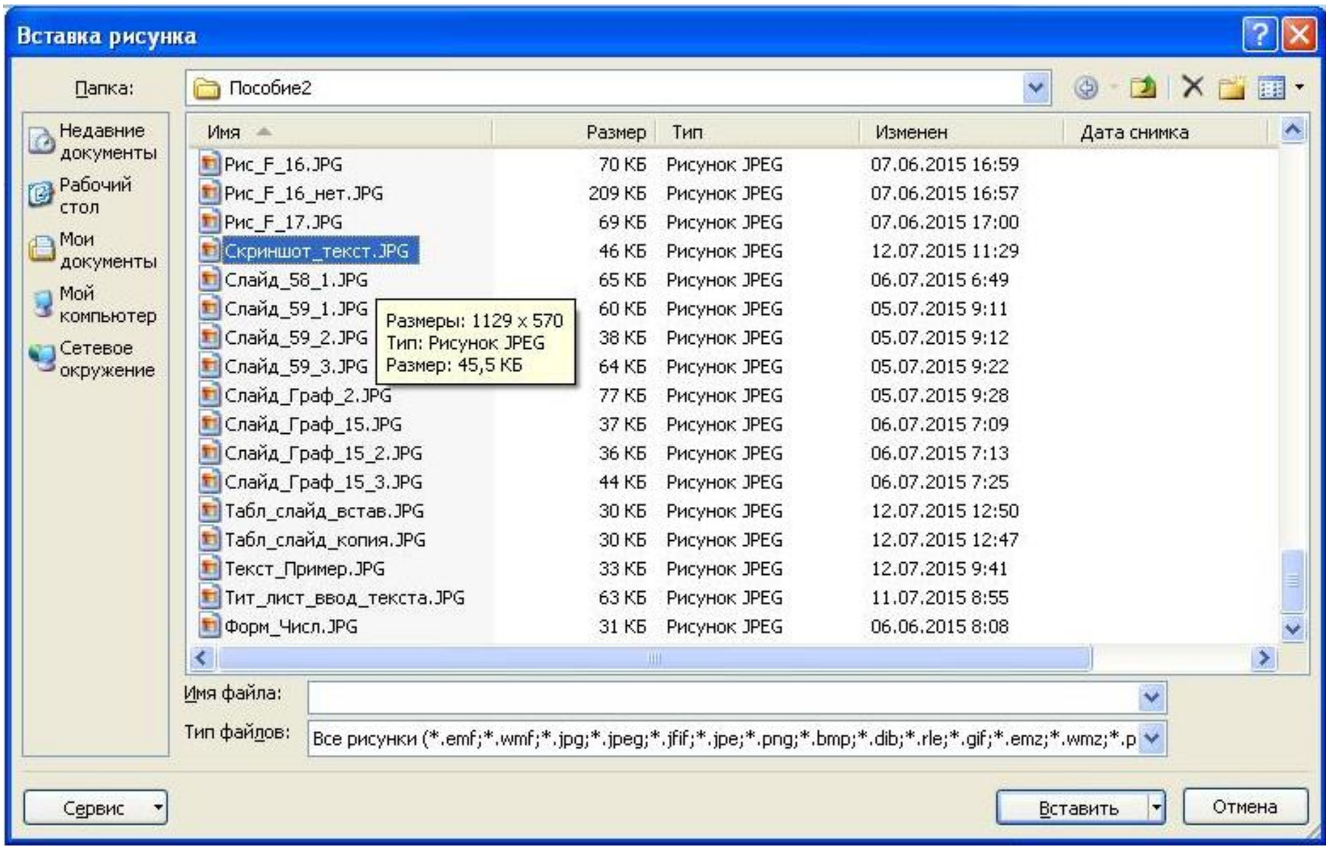


Рис. 65. Диалоговое окно Вставка рисунка

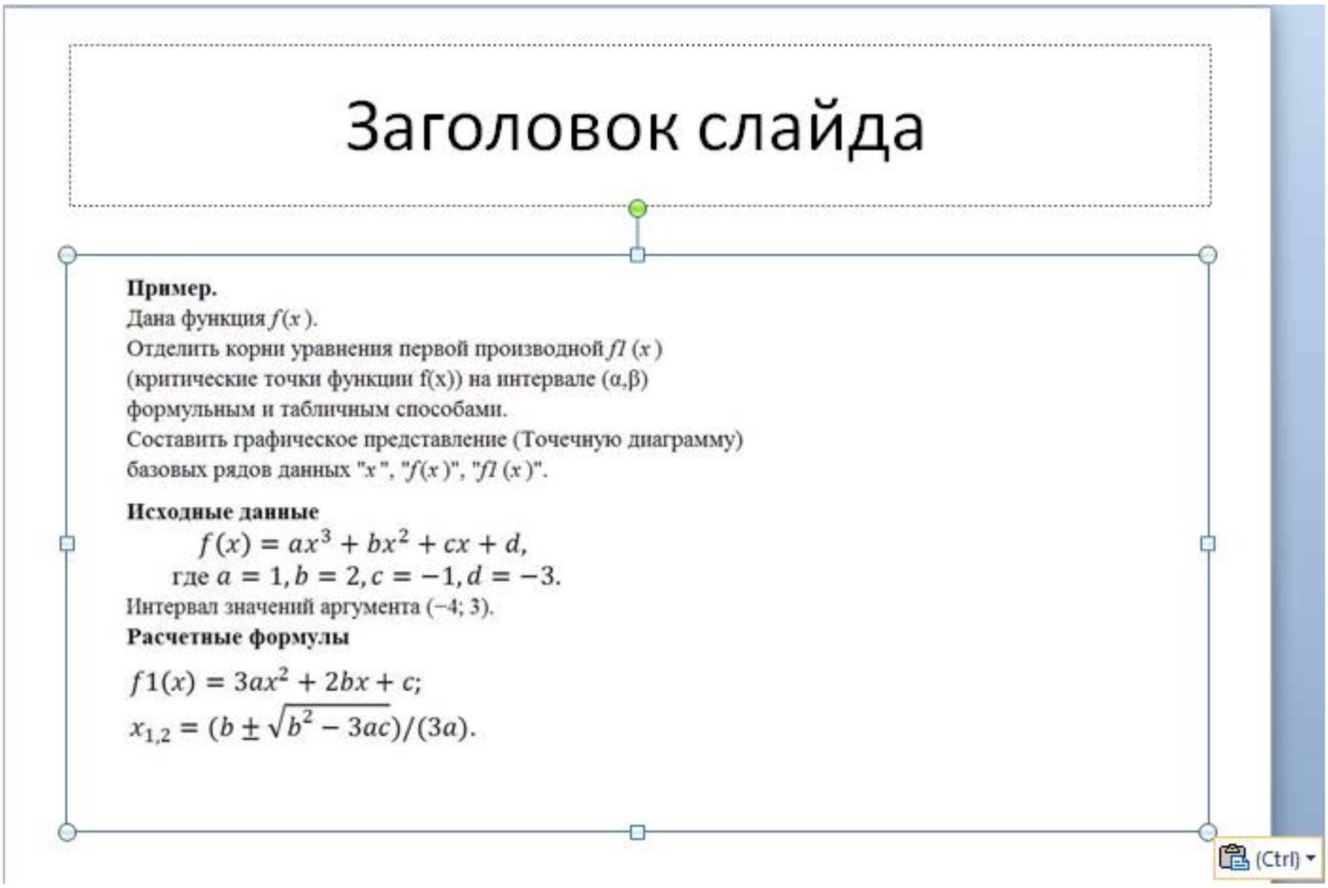


Рис. 66. Добавление текста в слайд копированием изображения экрана (скриншота) в файл

Добавление таблицы MS Excel в слайд

Можно создать новую таблицу MS Excel в Power Point, скопировать существующую электронную таблицу из MS Excel или ее изображение (скриншот) в буфер обмена MS Office и вставить в презентацию.

Данные ячеек электронной таблицы, которые добавляются в слайд с помощью вставки скриншота, нужно оформлять непосредственно в MS Excel до копирования изображения экрана монитора в буфер обмена.

Чтобы скопировать существующую таблицу из Листа Рабочей книги MS Excel и вставить в слайд презентации, нужно выполнить следующие действия.

- Выделить диапазон ячеек таблицы: щелкнуть левую верхнюю ячейку диапазона, а затем удерживая клавишу <Shift>, щелкнуть правую нижнюю ячейку диапазона, как показано на рис.
- Скопировать диапазон ячеек таблицы в буфер обмена, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <C>.
- В презентации Power Point щелкнуть на кнопке **Создать слайд**, выбрать макет слайда, в который нужно скопировать данные, (макет **Только заголовок**, как показано на рис.67.) и вставить в слайд, нажав комбинацию клавиш <Ctrl> + <V>.

A18

	A	B	C
18	*x*	*f*(*x*)	*f1* (*x*)
19	-4	-21	29
20	-3,5	-8,875	19,75
21	-3	-1	12
22	-2,5	3,375	5,75
23	-2	5	1
24	-1,5	4,625	-2,25
25	-1	3	-4
26	-0,5	0,875	-4,25
27	0	-1	-3
28	0,5	-1,875	-0,25
29	1	-1	4
30	1,5	2,375	9,75
31	2	9	17
32	2,5	19,625	25,75
33	3	35	36

4.4.7. Форматирование текста на слайде

В Power Point существует множество способов, чтобы изменить внешний вид текста на слайде. Инструменты по форматированию текста на слайде абсолютно те же, что и в электронных таблицах MS Excel. С помощью основных кнопок, расположенных на вкладке **Главная** Ленты Power Point можно выполнить форматирование характеристик *шрифта*, *стиля, размеров*, *цвета* и *абзаца*. После выделения текста становится доступной всплывающая мини-панель инструментов с набором основных команд форматирования текста. Вывести на экран мини-панель инструментов можно также, щелкнув невыделенный текст правой кнопкой мыши, как показано на рис 68.

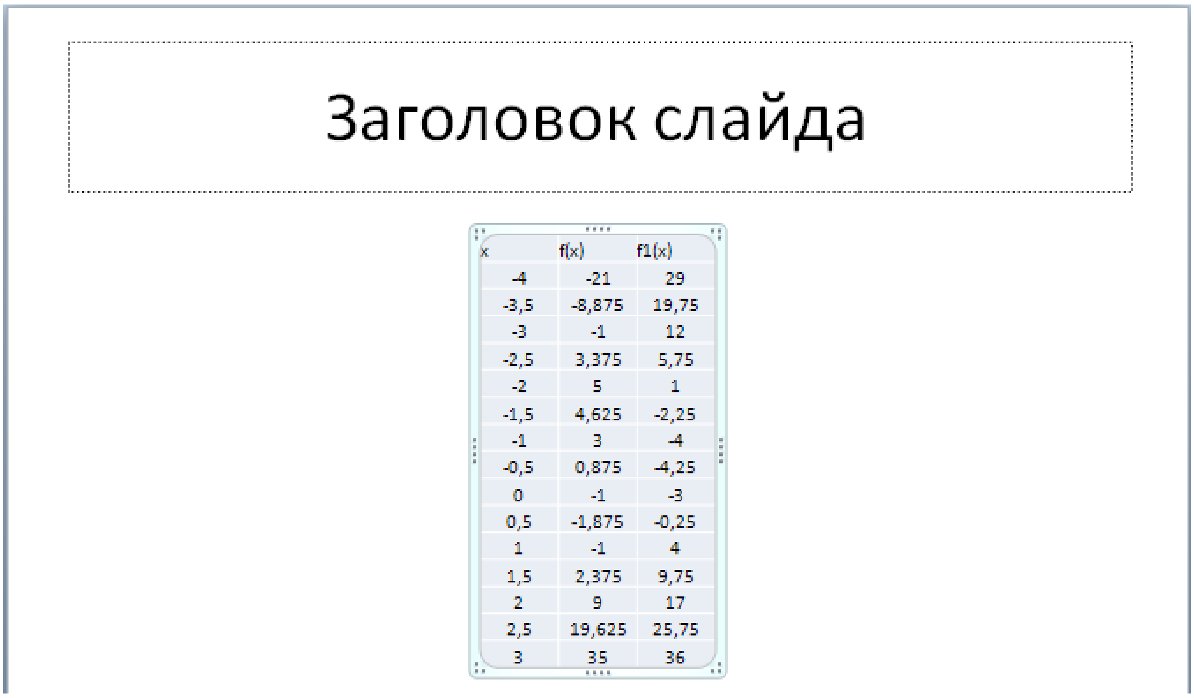


Рис. 67. Добавление электронной таблицы в слайд копированием скриншота в файл

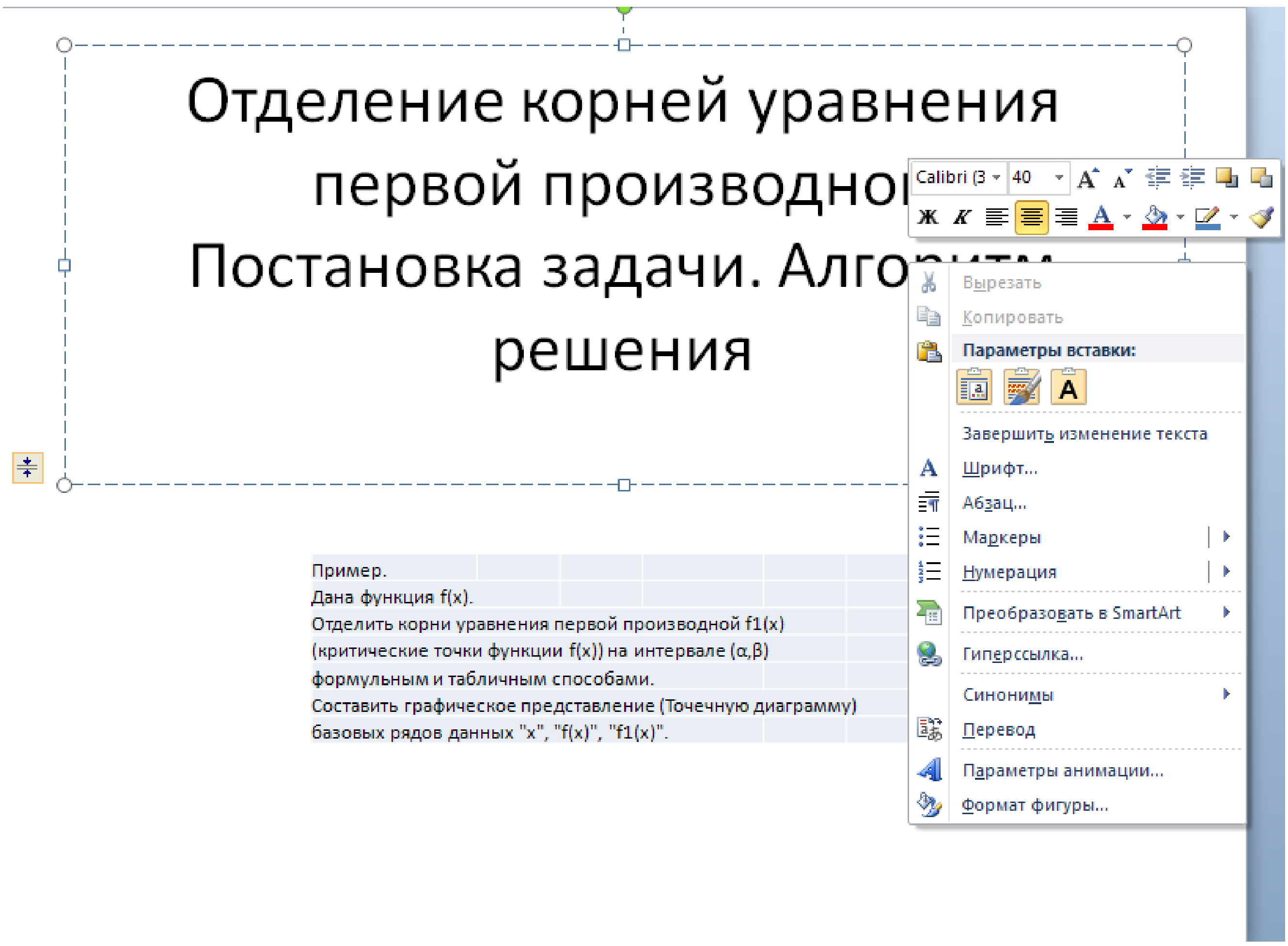


Рис. 68. Вывод на экран панели инструментов форматирования текста

4.4.8. Оформление слайдов

Настройка внешнего вида презентации осуществляется с целью придать ей профессиональный и современный вид, сделать ее понятной и привлекательной для аудитории. Чтобы отформатировать внешний вид слайдов в программе Power Point, применяют несколько заранее определенных *тем документов*.

Тема документа представляет собой набор вариантов форматирования, включающих *тему шрифтов* (набор шрифтов заголовков и основного текста), *цветовую тему* (набор цветов) и *тему эффектов* (набор линий и заливок). *элементов оформления*, придающий особый внешний вид всем слайдам презентации. *Тему документа*, назначенную по умолчанию, можно изменить.

Для настройки внешнего вида слайдов используются инструменты, расположенные на вкладке **Дизайн** Ленты (рис. 69).

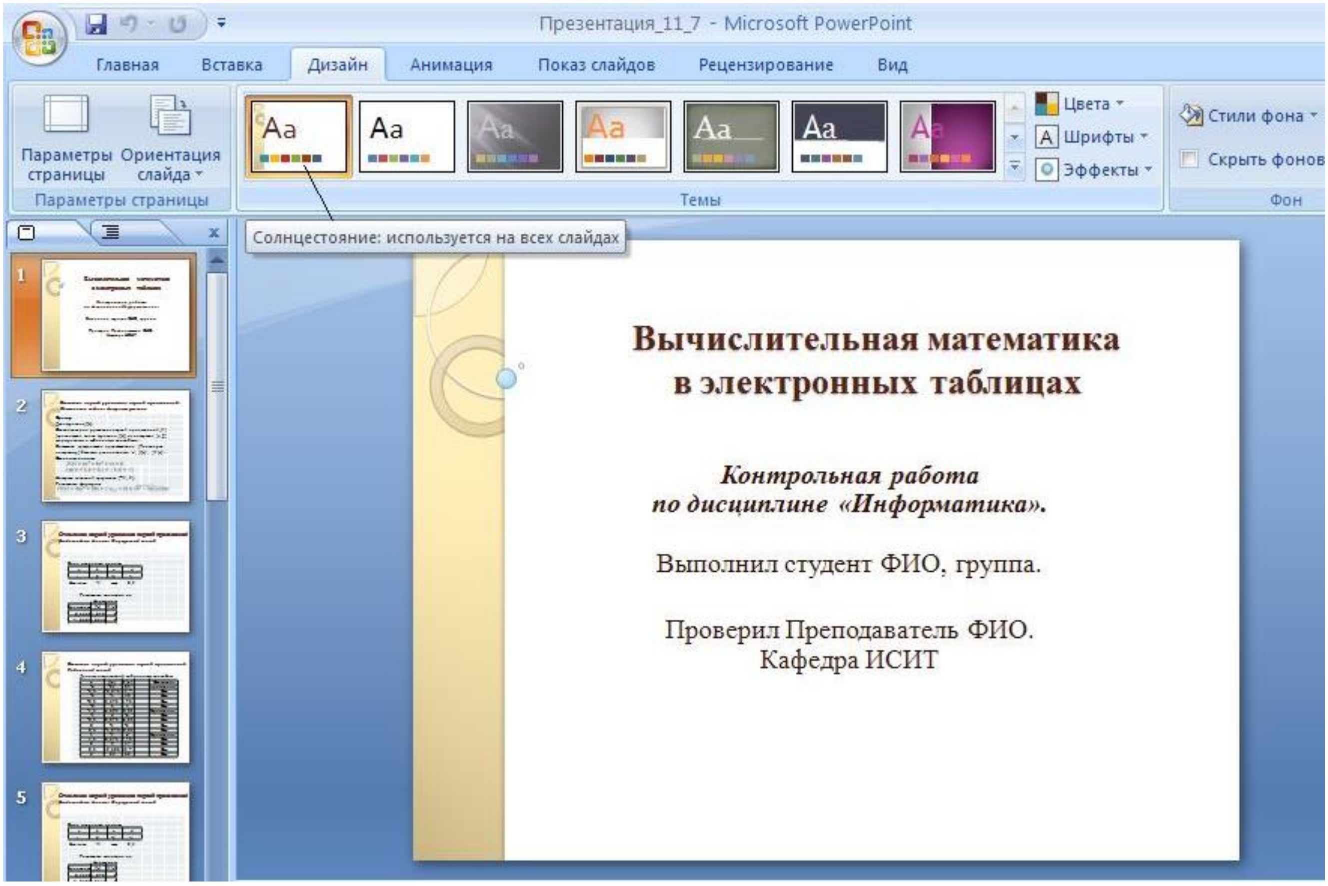


Рис. 69. Выбор темы оформления внешнего вида презентации

В разделе **Темы** можно выбрать цветовое решение для слайда презентации. Для предварительного просмотра внешнего вида текущего слайда после применения конкретной *темы* нужно навести указатель мыши на *эскиз темы*.

Чтобы применить *тему*, нужно щелкнуть на выбранном эскизе кнопкой мыши. Слайды презентации с оформленным внешним видом приведены в прил. 6.

Для изменения *темы* существующей презентации необходимо выполнить следующие действия.

1. Открыть презентацию. Перейти на вкладку **Дизайн** Ленты, как показано на рис. 69.
2. Щелкнуть на кнопке **Дополнительные параметры** в разделе **Темы**. В появившейся коллекции выбрать подходящую *тему* оформления, например, тему **Солнцестояние**, как показано на рис. 69.
3. Щелкнуть на кнопке **Цвета**, расположенной в разделе **Темы**, чтобы раскрыть коллекцию цветовых схем. Выбрать одну из стандартных схем, чтобы скорректировать *цветовую схему* презентации.
4. Шрифты *темы* содержат шрифт заголовка и шрифт основного текста. При нажатии кнопки **Шрифты** названия используемых шрифтов заголовков и основного текста отображаются под названием **Шрифты темы**. Можно изменить оба этих шрифта, чтобы создать собственный набор шрифтов темы.
5. *Тема оформления* применяется ко всей презентации по умолчанию. Чтобы изменить внешний вид только избранных слайдов, их нужно выделить на вкладке **Слайды**, нажав и удерживая клавишу <Ctrl>. Открыть контекстное меню, щелкнув правой кнопкой мыши *тему*, которую нужно применить, и выбрать команду **Применить к выделенным слайдам**.

4.4.9. Добавление заметок докладчика к слайду

Заметки к слайду помогают докладчику в процессе презентации убрать с экрана часть информации, сделав ее невидимой для аудитории. Заметки вводятся в области **Заметки** для каждого слайда, как показано на рис. 70.

4.4.10. Настройка режима показа презентации

Настройка режима показа слайдов презентации средствами вкладки **Показ слайдов** Ленты является заключительным этапом по созданию презентации. Щелкнуть кнопку **Настройка демонстрации** в разделе **Настройка**. На экране появится диалоговое окно **Настройка презентации** (рис. 71), в котором можно включить необходимые опции для настройки показа.

Рис. 70. Добавление заметок докладчика к слайду

Показ слайдов:

- **управляемый докладчиком (полный экран)** – переключение по щелчку мыши или с помощью клавиатуры (включено по умолчанию);
- **автоматический (полный экран)** – слайды чередуются через интервал, установленный в настройках переходов между слайдами (см. **Смена слайдов**).

Параметры показа – непрерывный цикл до нажатия клавиши <Esc> – удобно использовать для показа презентации в фоновом режиме с предварительно установленными настройками времени перехода между слайдами.

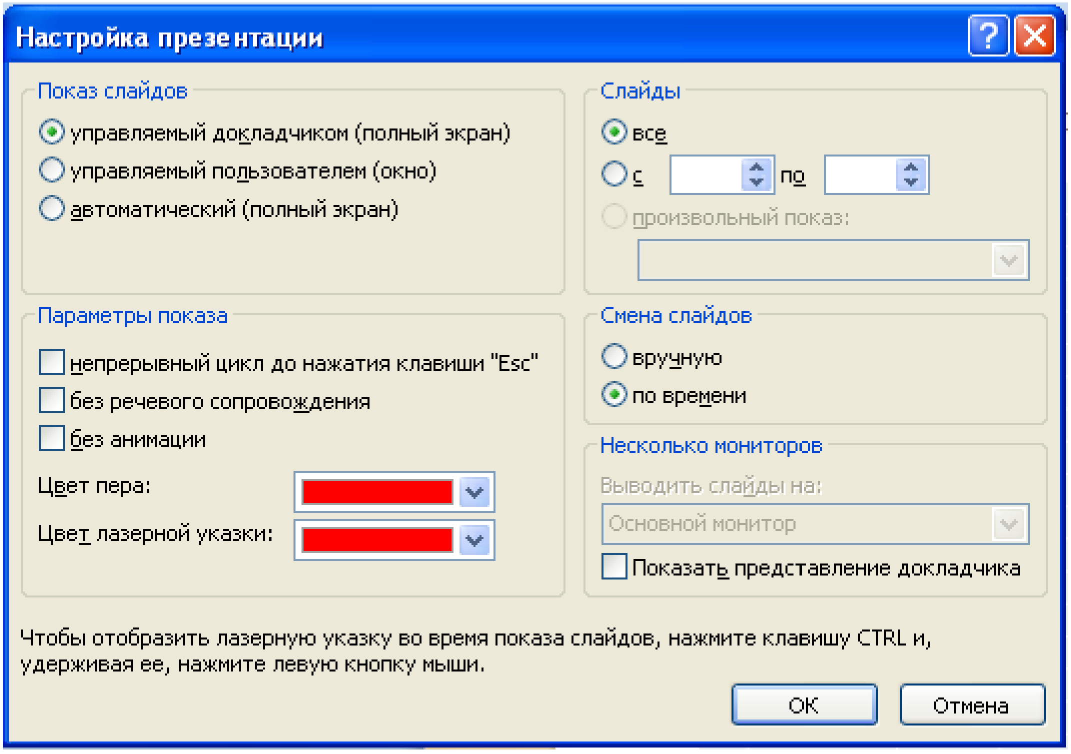


Рис. 71. Диалоговое окно Настройка показа

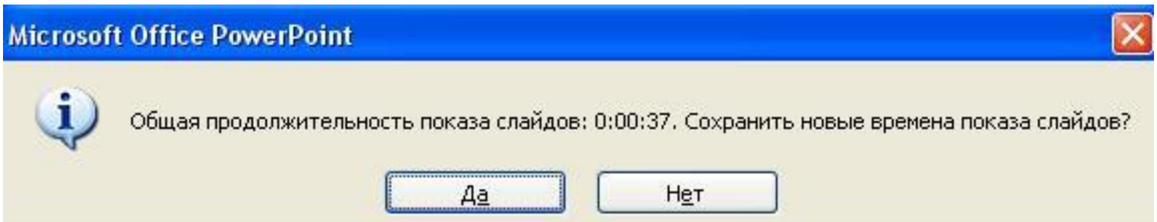
Слайды – указывается, с какого по какой слайд должна показываться презентация (по умолчанию показываются *все* слайды презентации).

Смена слайдов:

- **вручную** – следующий слайд появится после нажатия на любую клавишу клавиатуры и кнопку мыши;

- **по времени** – чтобы настроить временные интервалы перехода между слайдами следует нажать кнопку **Настройка времени** вкладки **Показ слайдов** Ленты. На экране отобразится окно **Запись** со счетчиком времени, который начинает отсчет временного интервала при переключении к следующему слайду, как показано на рис. Далее необходимо запустить показ презентации, задерживаясь на каждом слайде столько времени, сколько будет необходимо при показе перед аудиторией.

Переключение на следующий слайд производится с помощью клавиши <→>. После установки временных интервалов следует сохранить созданную временную схему показа презентации, как показано на рис.



На экране отобразится рабочее окно программы Power Point в режиме **Сортировщик слайдов**, на котором демонстрируются эскизы всех слайдов презентации с установленными временными интервалами между переходами, как показано на рис. 72.

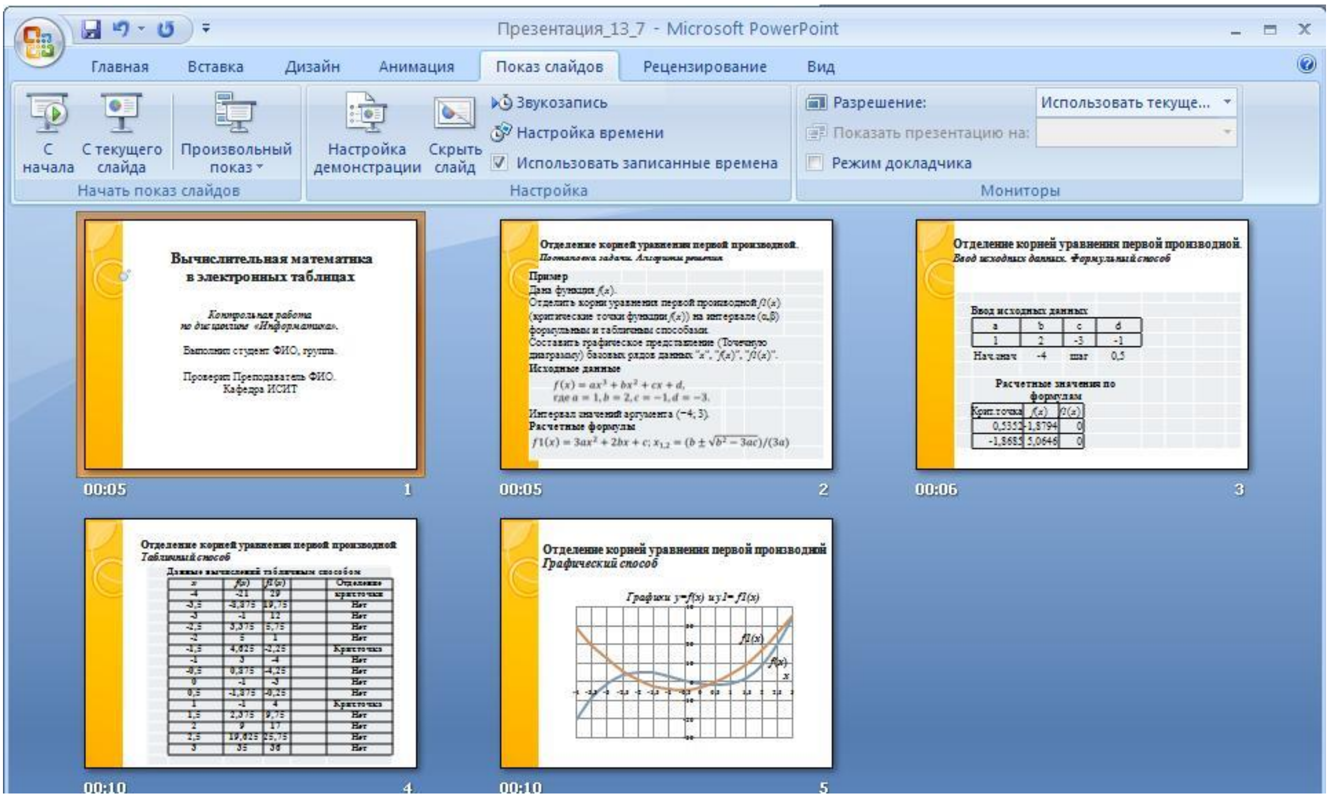


Рис. 72. Временная схема показа презентации

4.4.11. Показ презентации

Созданную презентацию нужно сохранить на флэш-диске в файле, щелкнув на кнопке **Сохранить** панели быстрого доступа. Показывать презентацию в аудитории можно следующими способами.

1. Наиболее удобным является способ показа без запуска программы Power Point. Нужно открыть окно программы **Проводник** Windows, найти файл презентации, щелкнуть по нему правой кнопкой мыши и в появившемся контекстном меню выбрать команду **Показать**.
2. Запустить программу Power Point, открыть презентацию, вызвав окно **Открытие документа** с помощью команды **Открыть** меню **кнопки Office**, показать презентацию, нажав клавишу <F5>, или переключиться в режим **Показ слайда**, щелкнув на кнопке **Показ слайдов** в правом нижнем углу рабочего окна презентации.

Список литературы

1. Жидков Е. Н. Вычислительная математика: учебник для вузов / Жидков Е. Н.; – 2-е изд., перераб. – Москва: Академия, 2013. – (Высшее профессиональное образование). – 198 с.: ил. Гриф: УМО.
2. Макаров Э. П. Электронные таблицы MS Excel 2007: практикум по дисциплине «Информационные технологии/ Э. П. Макаров, Н. А. Лашманова, А. А. Виткин /под общей ред. Э. П. Макарова. – Екатеринбург: Изд-во Урал. Ун-та, 2013. – Ч.1. – 195с.:ил.
3. Макаров Э. П. Алгоритмизация решения физических задач в электронных таблицах: учебное пособие по дисциплине «Информатика» / Э. П. Макаров. – Екатеринбург: УРФУ, 2013. — 168с.:ил.

Приложение 1

Задания для самостоятельной работы по Темам 1 и 2

№ вар	Задание	a	b	c
1.	Найти наименьший положительный	0,6319	0,9217	
2	корень уравнения $f(x) = 0$,	9,4637	13,8249	
3	где $f(x) = \mathrm{tg}ax - bx$	0,9464	1,3825	
4		8,5174	12,4424	
5		1,8927	2,765	
6		4,4164	6,4516	
7	Найти больший корень уравнения	0,3049	0,3436	1,5
8	$f(x) = 0$,	9,1464	10,3081	1,5
9	где $f(x) = \ln ax - bx + c$	0,6098	0,6872	1,5
10		8,5366	9,6209	2,0
11		0,9146	1,0308	2,5
12		7,9268	8,9337	3,0
13	Найти наименьший положительный	0,33	2,3	0,5
14	корень уравнения $f(x) = 0$,	10	7,375	7,75
15	где $f(x) = a\sin bx - cx$	1	2,2	1
16		6,3	5,189	5
17		1,67	2,5	1,5
18		8	6,18	6,25
19	Найти второй положительный	0,33	2,3	
20	корень уравнения $f(x) = 0$,	0,3	10,375	
21	где $f(x) = \cos bx - ax$	1	8	
22		0,43	5,189	
23		0,54	4,3	
24		0,85	6,5	
25		1,5	10	

Приложение 2

Исследование области существования и определения функции y=f(x)

1. Дана $f(x) = \mathrm{tg} ax - bx$.

Каждому действительному числу α (как радианной мере угла), такому, что $\alpha \neq (\pi/2 + k\pi)/a$, где k – любое целое число, можно поставить в соответствие одно действительное число $y = \mathrm{tg}(a\alpha) - b\alpha$. То есть *область существования* функции $y = \mathrm{tg}(a\alpha) - b\alpha$ – множество всех действительных чисел $(-\infty, +\infty)$, кроме чисел $x = (\pi/2 + k\pi)/a$ *(точки разрыва)*, где k – любое целое число. Если по условию задачи, нужно найти наименьший положительный корень уравнения $f(x) = 0$, то *область существования функции* $y = f(x)$ ограничивается неотрицательными значениями x $(0; +\infty)$.

Область определения функции $y = f(x)$, во-первых, ограничивается неотрицательными значениями $x \in (0; +\infty)$, а, во-вторых, точками разрыва $x_{\text{тр}k}$: $(0;\ \pi/(2a))$; $(\pi/(2a);\ (\pi/2\ + \pi)/a))$; $((\pi/2 + \pi)/a)$; $(\pi/2 + 2\pi)/a))$;....

2. Дана $f(x) = \ln ax - bx + c$

Пусть α – некоторое фиксированное положительное число. Тогда каждому положительному числу α можно поставить в соответствие одно число $y = \ln\alpha - b\alpha + c$, т.е. *область существования* функции $y = \ln x - bx + c$ – это множество всех положительных чисел x (0,01;+∞) (при x = 0 функция $\ln x$ не определена, за левую границу области существования принимается любое минимальное положительное число).

Область определения функции $y = f(x)$ совпадает с ее *областью существования*.

3. Дана $f(x) = a\sin bx - cx$

Каждому действительному числу α (как радианной мере угла) можно поставить в соответствие одно действительное число $y = a\sin(b\alpha) - c\alpha$. То есть *область существования* функции $y = a\sin(bx) - cx$ — это множество всех действительных чисел $(-\infty, +\infty)$.Если по условию задачи, нужно найти наименьший положительный корень уравнения $f(x) = 0$, то *область существования функции* $y = f(x)$ ограничивается неотрицательными значениями x $(0; +\infty)$.

Область определения функции $y = f(x)$ совпадает с ее *областью существования*..

4. Дана $f(x) = \cos ax - bx$.

Область существования функции $y = cosax\text{-}bx$ — множество всех действительных чисел $(-\infty, +\infty)$ (аналогична функции *f*(*x*)=sin*x*, см. п. 3*)*. Если по условию задачи, нужно найти положительный корень уравнения $f(x) = 0$, то *область существования функции* $y = f(x)$ ограничивается неотрицательными значениями x $(0; +\infty)$.

Область определения функции $y = f(x)$ совпадает с ее *областью существования*.

Определение формул для вычисления критических точек функций f(x)

1. Дана $f(x) = \mathrm{tg}ax - bx$.

   Формула для первой производной $f1(x) = a/\cos^2 ax - b$

   Формула для первой критической точки функции xk_1,= arcos $(\sqrt{a/b})/a;$

   Формула для первой точки разрыва $x_{\text{ТР}1} = \pi/(2a)$.

   Формула для второй производной $f2(x) = 2a^2 \sin ax/\cos^3 ax$

2. Дана $f(x) = \ln ax - bx + c$

   Формула для первой производной $f1(x) = 1/x - b$

   Формула для критической точки функции $xk_1 = 1/b$.

   Формула для второй производной $f2(x) = -1/x^2$.

3. Дана $f(x) = a\sin bx - cx$.

   Формула для первой производной $f1(x) = ab\cos bx - c$

   Формула для критической точки $xk = 2k\pi/b \pm \arccos(c/(ab))/b$, k = 0 ,1 ,2…

   $xk_1 = \arccos(c/(ab))/b$; $xk_2 = 2\pi/b - xk_1$.

   Формула для второй производной $f2(x) = -ab^2 \sin bx$

4. Дана $f(x) = \cos bx - ax$.

   Формула для первой производной $f1(x) = -b\sin bx - a$.

   Формула для критической точки

   $xk = ((-1)^q \arcsin(\text{-}a/b))/b + \pi q/b$, где $q = 0, 1, 2 \ldots$

   $xk_1 = arc\sin(-a/b)/b$; $xk_2 =$ -$arc\sin(-a/b)/b + \pi/b$;

   $xk_3 = arc\sin(-a/b)/b + 2\pi/b$.

   Формула для второй производной $f2(x) = -(b^2)\cos bx$

Приложение 4

Графический способ отделения корней уравнения $f(x)=0$ на основе его преобразования к виду $\varphi_1(x) = \varphi_2(x)$

Дано уравнение вида

$$f(x) = 0, \quad (1)$$

где $f(x)$ непрерывная и дифференцируемая на любом отрезке из области определения функции, кроме конечного числа точек (например, точек разрыва).

По графику функции $y = f(x)$ можно выполнить отделение корней уравнения (1) – визуально определив, где находятся точки пересечения графика функции с осью OX Для удобства построения графика функции $y = f(x)$ в ряде случаев бывает удобно заменить уравнение вида (1) эквивалентным ему уравнением вида

$$\varphi_1(x) = \varphi_2(x), \quad (2)$$

где $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(x)$ – некоторые функции аргумента x, которые также будем считать непрерывными и дифференцируемыми на любом отрезке их области определения.

Геометрически найти корень уравнения (2) – найти абсциссу точки пересечения графиков функции $y_1 = \varphi_1(x)$ и $y_2 = \varphi_2(x)$.

Пример 1. Уравнения вида $\boldsymbol{tgx - x = 0}$

Отделить графическим способом наименьший положительный корень

$$\mathrm{tg}x - x = 0. \quad (3)$$

Преобразуем уравнение (3) к виду

$$tgx\ = x. \quad (4).$$

Полученное уравнение (4) эквивалентно данному уравнению (3).

Область существования функции $y = \mathrm{tg}x$ – множество всех действительных чисел $(0, +\infty)$, кроме чисел $x = (\pi/2 + k\pi)$ (*точки разрыва*), где $k = 0, 1, \ldots$.*Область определения функции* $y = \mathrm{tg}x$ – внутри отрезков $[k\pi; k\pi+\pi/2]$. *Область определения* функций $y = x$ – множество всех действительных чисел $(0, +\infty)$. Построим графики функций $y_1 = \mathrm{tg}x$ и $y_2 = x$ на отрезке [0; π/2] (рис. 1) и на отрезке (π; 3π/2) (рис. 2).(см. примеры 1.3 и 1.5).

	A	B	C
1	*x*	*y=tg(x)*	*y=x*
2	0	0	0
3	0,1	0,100335	0,1
4	0,2	0,20271	0,2
5	0,3	0,309336	0,3
6	0,4	0,422793	0,4
7	0,5	0,546302	0,5
8	0,6	0,684137	0,6
9	0,7	0,842288	0,7
10	0,8	1,029639	0,8
11	0,9	1,260158	0,9
12	1	1,557408	1
13	1,1	1,96476	1,1
14	1,2	2,572152	1,2
15	1,3	3,602102	1,3
16	1,4	5,797884	1,4
17	1,5	14,10142	1,5

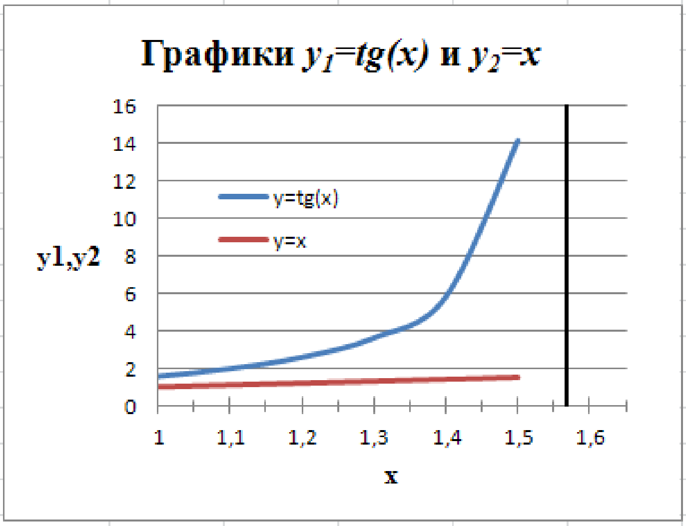


Рис.1. Графический способ отделения корня уравнения t*gx* = *x* на отрезке [0; π/2]

По графикам тангенсоиды $y_1 = \mathrm{tg}x$ и прямой $y_2 = x$ (см. рис. 1) на отрезке [0; π/2] можно определить, что графики функций на данном отрезке не имеют точки пересечения, т.е. на данном отрезке отсутствует корень уравнения tg*x* = *x*.

x	*y=tg(x)*	*y=x*
3,1	-0,04162	3,1
3,2	0,058474	3,2
3,3	0,159746	3,3
3,4	0,264317	3,4
3,5	0,374586	3,5
3,6	0,493467	3,6
3,7	0,624733	3,7
3,8	0,773556	3,8
3,9	0,947425	3,9
4	1,157821	4
4,1	1,423526	4,1
4,2	1,77778	4,2
4,3	2,285848	4,3
4,4	3,096324	4,4
4,5	4,637332	4,5
4,6	8,860175	4,6

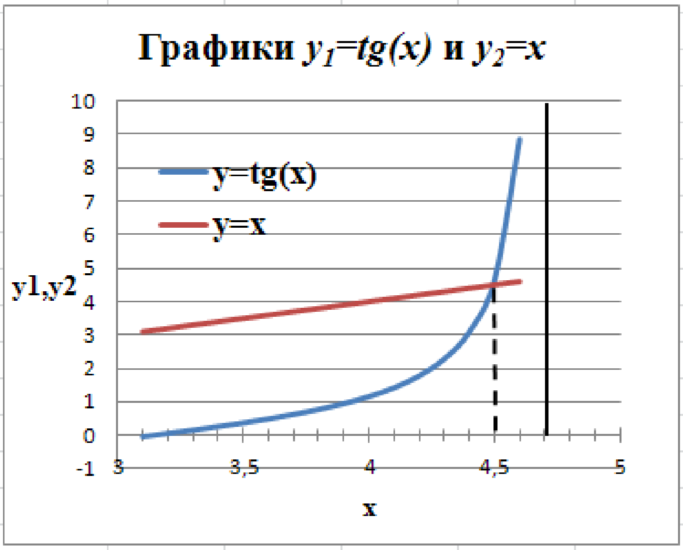


Рис.2. Графический способ отделения корня уравнения t*gx* = *x* на отрезке [π; 3π/2]

На отрезке [π; 3π/2] графики функций пересекаются (см. рис.2) при *x* = 4,5, т.е. на данном отрезке существует корень уравнения t*gx* = *x*, равный 4,5.

Пример 2. Уравнения вида $\boldsymbol{lnx-0,3x=0}$

Отделить графическим способом наибольший положительный корень уравнения вида

$$\ln x-0{,}3x=0. \tag{5}$$

Преобразуем уравнение (5) к виду

$$\ln x=0{,}3x. \tag{6}$$

Полученное уравнение (6) эквивалентно данному уравнению (5).

Область определения функции $y_1=\ln x$ – это множество всех положительных чисел (x>0). *Область определения* функции $y_2=x$ – это множество всех действительных чисел $(0,+\infty)$. Построим графики функций $y_1=\ln x$ и $y_2=0{,}3x$ на отрезке [0,2; 7] (рис. 3).

По графикам $y_1=\ln x$ и прямой $y_2=0{,}3x$ на отрезке [0,2; 7] можно определить, что графики функций на данном отрезке пересекаются дважды, т.е. на данном отрезке существует два корня уравнения ln$x$ = 0,3x, равные приближенно 1,6 и 6,0, соответственно.

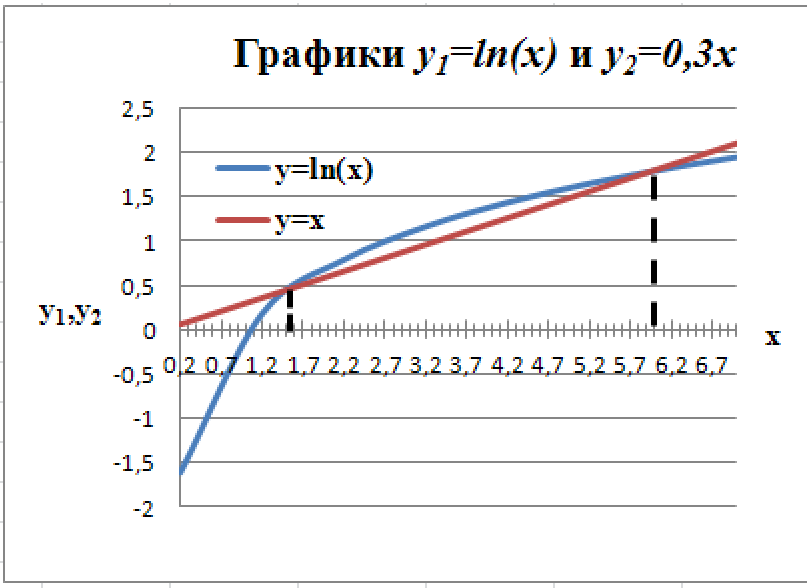


Рис.3. Графический способ отделения корня уравнения ln$x$ =0,3x на отрезке [0,2;7,0]

Пример 3. Уравнения вида $\boldsymbol{sinx - x = 0}$

Отделить графическим способом наименьший положительный корень уравнения вида

$$\sin x - x = 0. \tag{7}$$

Преобразуем уравнение (7) к виду

$$\sin x = x. \tag{8}$$

Полученное уравнение (7) эквивалентно данному уравнению (8).

Область определения функции $y_1 = \sin x$ – множество всех положительных чисел $(0; +\infty)$ совпадает с *областью определения* функции $y_2 = x$. Построим графики функций $y_1 = \sin x$ и $y_2 = x$ на отрезке [0; 3,5] (рис. 4).

По графикам $y_1 = \sin x$ и прямой $y_2 = x$ на отрезке [0; 3,5] можно определить, что графики функций на данном отрезке пересекаются, т.е. на данном отрезке существует корень уравнения $sinx = x$, равный приближенно 2,35.

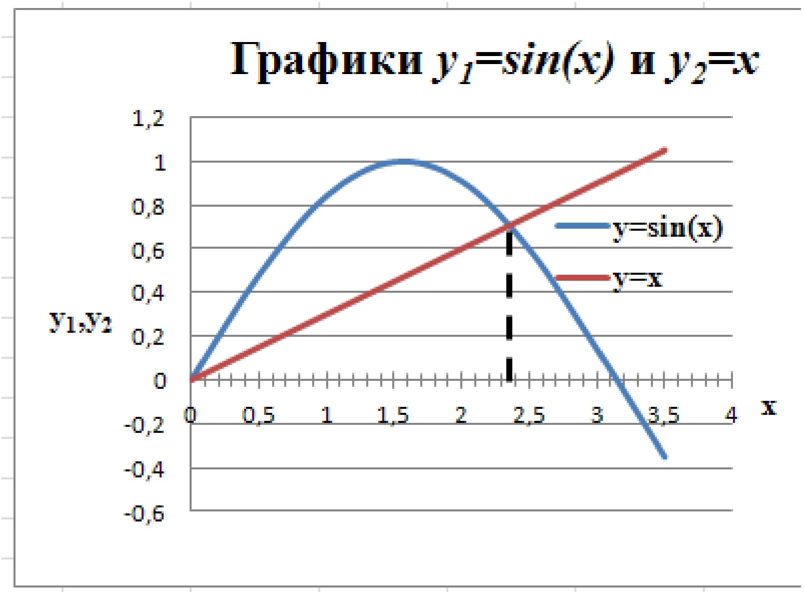


Рис.4. Графический способ отделения корня уравнения $\sin x = x$ на отрезке [0; 3,5]

Пример 4. Уравнения вида $\boldsymbol{cosx - 0,1x = 0}$

Отделить графическим способом наименьший положительный корень уравнения вида

$$\cos x - 0{,}1x = 0. \qquad (9)$$

Преобразуем уравнение (9) к виду

$$\cos x = 0{,}1x\,. \qquad (10).$$

Полученное уравнение (10) эквивалентно данному уравнению (9).

Области определения функций $y_1 = \cos x$ и $y_2 = x$ – множество всех положительных чисел $(0; +\infty)$. Построим графики функций $y_1 = \cos x$ и $y_2 = x$ на отрезке [0; 6,5] (рис. 5).

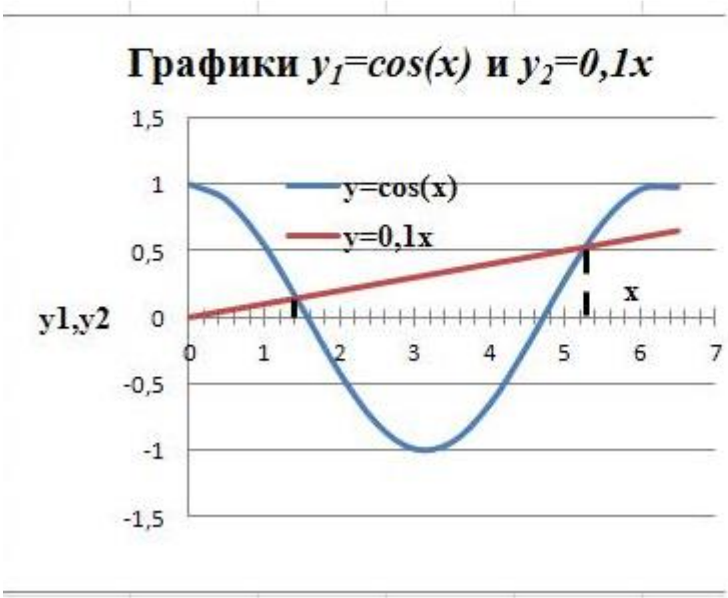


Рис.5. Графический способ отделения корня уравнения cos$x$=0,1x на отрезке [0;6,5]

По графикам $y_1 = \cos x$ и прямой $y_2 = x$ на отрезке $[0; 6{,}5]$ визуально можно определить, что графики функций на данном отрезке пересекаются дважды, т.е. на данном отрезке существует два корня уравнения $\cos x = 0{,}1x$, равные приближенно 1,4 и 5,15.

Приложение 5

Варианты заданий для самостоятельной работы по теме 3

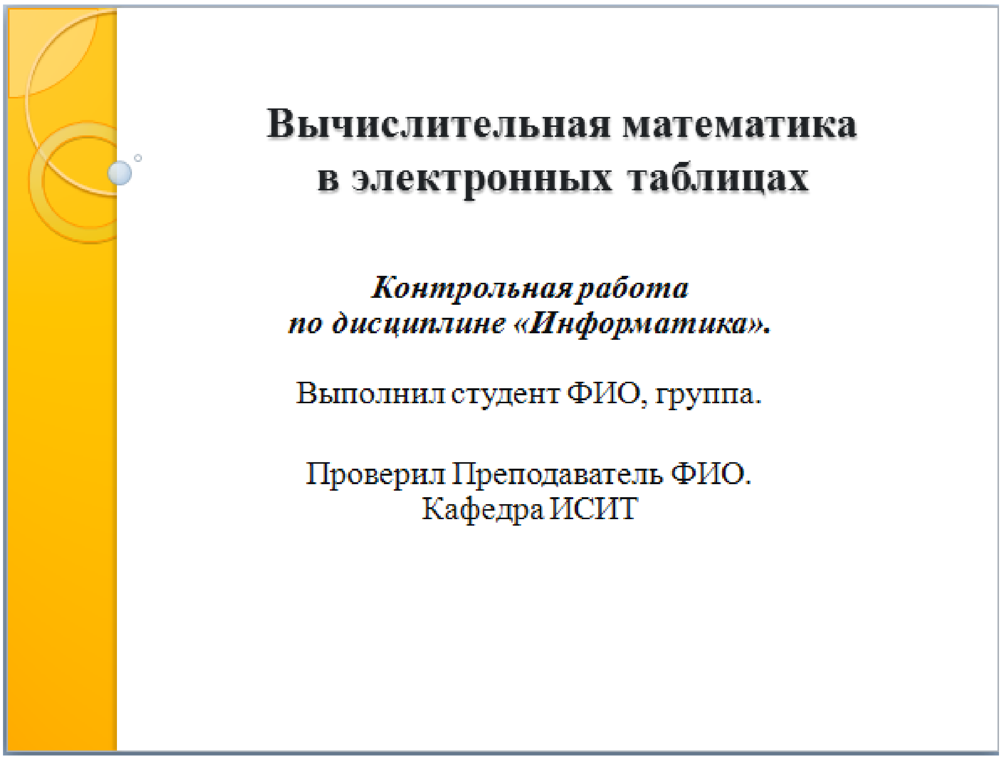
«Численное интегрирование»

№п/п	Определенный интеграл	*a*	*b*	*c*	*q*
1	2	3	4	5	6
1	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+1{,}0}}{qx+\sqrt{0{,}6x+1{,}7}}dx$	1,2	2	0,7	2,1
2	$\int_a^b \frac{\cos(cx^2+1{,}0)}{q+\sin(1{,}5x+0{,}3)}dx$	0,4	1,1	0,4	2,3
3	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+1{,}6}}{q+\sqrt{0{,}3x^2+2{,}3}}dx$	0,8	1,6	2	1,8
4	$\int_a^b \frac{\sin(cx+0{,}5)}{q+\cos(1{,}1x^2+0{,}4)}dx$	0,4	1,2	0,6	1,5
5	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+1{,}3}}{qx+\sqrt{0{,}4x+1{,}7}}dx$	1,2	2,6	1,05	1,5
6	$\int_a^b \frac{\cos(cx+0{,}2)}{q+\sin(1{,}5x^2+0{,}6)}dx$	0,5	1,1	0,7	1.2
7	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+1{,}3}}{q+\sqrt{x^2+0{,}6}}dx$	1,3	2,5	0,8	1,4
8	$\int_a^b \frac{\sin(cx+0{,}3)}{q+cos(1{,}2x^2+0{,}3)}dx$	0,3	1,1	0,8	1,2
9	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+3{,}0}}{qx+\sqrt{2x^2+1{,}6}}dx$	1,2	2	0,5	2,0

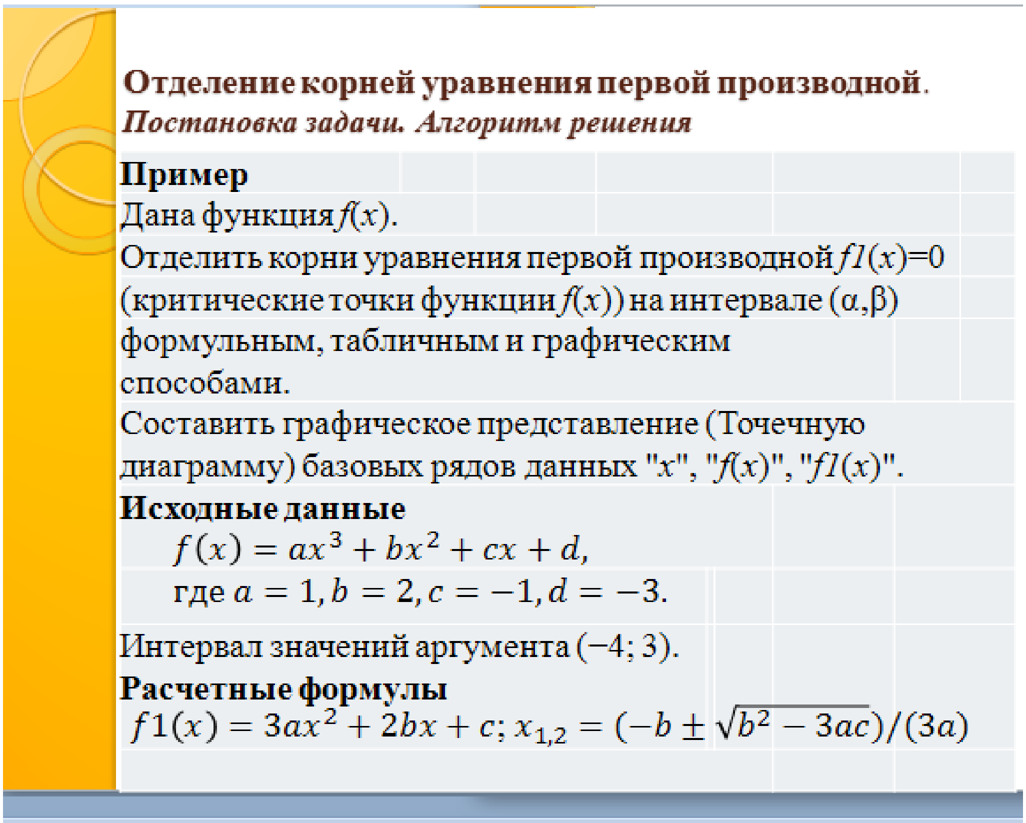
1	2	3	4	5	6
10	$\int_a^b \frac{\cos(cx^2+1,1)}{q+\sin(0,35x+1,3)}dx$	0,1	0.8	0,5	1,3
11	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+2,0}}{qx+\sqrt{1,4x+0,6}}dx$	1	2,2	0,8	1,6
12	$\int_a^b \frac{\sin(cx+1,3)}{q+cos(1,1x^2+0,6)}dx$	0,4	0,8	0,8	0,7
13	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+2,0}}{qx+\sqrt{0,8x^2+1,0}}dx$	0,8	1,8	1,5	1,1
14	$\int_a^b \frac{\cos(cx^2+0,4)}{q+\sin(0,5x+0,4)}dx$	0,3	1,1	0,9	1,2
15	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+12,0}}{qx+\sqrt{0,5x^2+2,0}}dx$	0,4	1,2	2,0	0,8
16	$\int_a^b \frac{\sin(cx^2+0,6)}{q+\cos(0,8x+1,2)}dx$	0,3	0,9	0,95	1,5
17	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+0,5}}{qx+\sqrt{0,9x^2+2,5}}dx$	0,6	1,4	1,1	2,2
18	$\int_a^b \frac{\cos(cx^2+1,1)}{q+\sin(2,1x+0,5)}dx$	0,1	0,7	0,9	2,1
19	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+0,8}}{qx+\sqrt{2,0x+0,6}}dx$	1,3	2,7	1,2	1,7
20	$\int_a^b \frac{\sin(cx+0,7)}{q+\cos(0,6x+0,4)}dx$	0,6	0,9	1,1	1,4

1	2	3	4	5	6
21	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx^2+0{,}8}}{qx+\sqrt{1{,}5x+2{,}1}}dx$	0,8	1,8	0,8	1,1
22	$\int_a^b \frac{\cos(cx^2+1{,}2)}{q+\sin(1{,}1x+0{,}6)}dx$	0,1	0,9	0,5	1,5
23	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx+0{,}6}}{qx+\sqrt{0.8x^2+2{,}1}}dx$	1,0	2,2	1,5	1,6
24	$\int_a^b \frac{\sin(cx+1{,}2)}{q+\cos^2(0{,}5x^2+1{,}1)}dx$	0,3	1,5	0,3	1,3
25	$\int_a^b \frac{\sqrt{cx+0{,}5}}{qx+\sqrt{0{,}7x^2+1{,}3}}dx$	1,3	2,5	0,9	1,4
26	$\int_a^b \frac{\cos(cx^2+0{,}4)}{q+\sin^2(0{,}9x+0{,}7)}dx$	0,6	1,0	0,6	1,3

Слайды презентации с оформленным внешним видом



Слайд «Титульный лист презентации»



Функция $f(x)$ непрерывна и дифференцируема на интервале $(-4; 3)$.

Слайд1. Постановка задачи. Алгоритм решения

Отделение корней уравнения первой производной.
Ввод исходных данных. Формульный способ

Ввод исходных данных

a	b	c	d
1	2	-3	-1
Нач.знач	-4	шаг	0,5

Расчетные значения по формулам

Крит.точка	*f*(*x*)	*f1*(*x*)
0,5352	-1,8794	0
-1,8685	5,0646	0

Корни уравнения первой производной *f1* (*x*)=0 являются критическими точками функции *f* (*x*).

Слайд 2. Ввод исходных данных. Формульный способ.

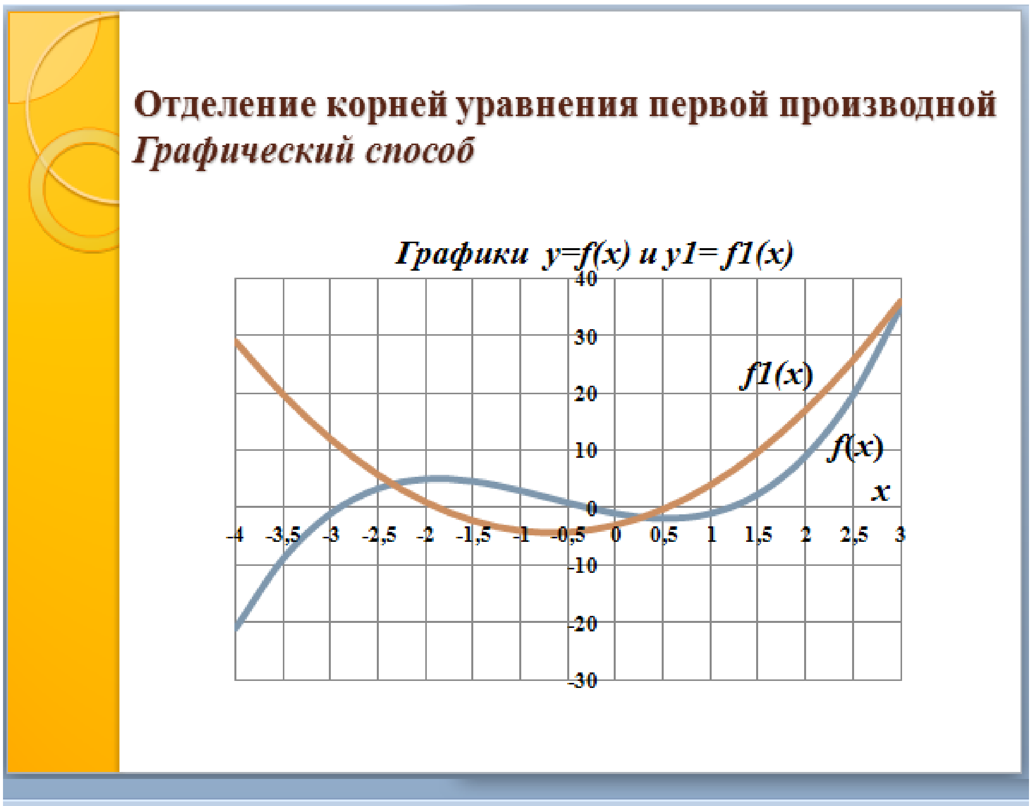
Отделение корней уравнения первой производной
Табличный способ

Данные вычислений табличным способом

x	*f*(*x*)	*f1*(*x*)		Отделение крит.точки
-4	-21	29		
-3,5	-8,875	19,75		Нет
-3	-1	12		Нет
-2,5	3,375	5,75		Нет
-2	5	1		Нет
-1,5	4,625	-2,25		Крит.точка
-1	3	-4		Нет
-0,5	0,875	-4,25		Нет
0	-1	-3		Нет
0,5	-1,875	-0,25		Нет
1	-1	4		Крит.точка
1,5	2,375	9,75		Нет
2	9	17		Нет
2,5	19,625	25,75		Нет
3	35	36		Нет

По данным таблицы значений первой производной f1(x) отделить отрезок $[x_{i-1}\,;\,x_i]$, на котором выполняется логическое условие существования корня на отрезке для функции, заданной таблично, вида $f1(x_{i-1})\cdot f1(x_i)<0$.

Слайд 3. Табличный способ



Геометрически логическое условие $f(x) \cdot f1(x) < 0$ означает, что, если концы дуги графика непрерывной функции $y1 = f1(x)$ на отрезке $[\alpha, \beta]$ находятся по разные стороны оси абсцисс OX, то дуга пересечет ось OX по крайней мере в одной точке $x = xk_1$ (критической точке $f(x)$).

Слайд 4. Графический способ

Оглавление

Учебное издание

Макаров Эдуард Петрович

ЭЛЕКТРОННЫЕ ТАБЛИЦЫ MS Excel 2007

Часть 2

Вычислительная математика в электронных таблицах

Под общей редакцией Т.А. Матвеевой

Редактор

Компьютерный набор и верстка Э. П. Макаров

Подписано в печать   Формат60/90 1/16

Бумага писчая. Плоская печатью Усл. печ. л. 13,1

Уч.-изд. л. 10,1 Тираж 50 экз.   Заказ 1640035

Издательство ООО «Форт Диалог-Исеть»

620142, Екатеринбург, ул. Декабристов, 75

Тел.¨8 (343) 228-02-32

Отпечатано в ООО «Форт Диалог-Исеть»

620142, Екатеринбург, ул. Декабристов, 75

Тел.¨8 (343) 228-02-32