Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 24–28

Корни Боаса – Каца положительно определенных функций с компактным носителем

Р. Р. Акопян, А. В. Ефимов

Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Для непрерывных вещественнозначных положительно определенных функций m переменных ($m > 1$) с носителем в ограниченном выпуклом центрально симметричном теле пространства $\mathbb{R}^m$ получены необходимые и достаточные условия существования вещественнозначных четных корней Боаса – Каца.

Пусть $\mathbb{R}^m$ — евклидово пространство размерности $m \in \mathbb{N}$ со стандартным скалярным произведением $xt = \sum_{k=1}^{m} x_k t_k$ элементов $x = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, $t = (t_1, t_2, \ldots, t_m)$ и нормой $|x| = \sqrt{xx}$. Будем обозначать через $\widehat{f}$ преобразование Фурье

$$\widehat{f}(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(t) e^{-2\pi i\, tz}\, dt, \qquad z \in \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

функции f из пространств $L_1(\mathbb{R}^m)$ или $L_2(\mathbb{R}^m)$ комплекснозначных измеримых функций, соответственно, суммируемых или суммируемых с квадратом на $\mathbb{R}^m$ (см., например, [13, гл. I, §§ 1, 2]). Для пары функций φ_1, $\varphi_2 \in L_2(\mathbb{R}^m)$ определим операцию свертки равенством

$$(\varphi_1 \widetilde{*} \varphi_2)(x) = \int\limits_{t \in \mathbb{R}^m} \varphi_1(t) \overline{\varphi_2(x+t)} dt.$$

В работе исследуется вопрос об условиях существования решения $\varphi \in L_2(\mathbb{R}^m)$ уравнения

$$\varphi \widetilde{*} \varphi = f. \tag{2}$$

Будем рассматривать уравнение (2) в случае, когда функция $f \in L_1(\mathbb{R}^m)$ положительно определенная, т. е. имеет неотрицательное преобразование Фурье, $\widehat{f}(x) \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m$, суммируемое на $\mathbb{R}^m$. В этом случае функция φ в представлении (2) всегда найдется. Действительно, в качестве φ можно взять обратное преобразование Фурье функции $\sqrt{\widehat{f}}$. Это классическое утверждение, известное (см., например, [14, гл. 2, §§ 10, 11]) как критерий Винера – Хинчина – Колмогорова: произвольная характеристическая функция распределения f, т. е. преобразование Фурье плотности вероятности, представима в виде самосвертки некоторой (комплекснозначной) функции φ. Или, в терминах теории преобразования сигналов, спектральная плотность мощности сигнала есть преобразование Фурье автокорреляционной функции.

Исследования выполнены при поддержке РФФИ (проект 15-01-02705) и Программы повышения конкурентоспособности УрФУ (постановление № 211 Правительства РФ от 16.03.2013, контракт № 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

Нас интересует решение уравнения (2) с определенными дополнительными свойствами. В частности, в предположении компактности носителя f, существование φ с компактным носителем. Ключевым здесь является следующий результат, существенно дополняющий критерий Винера – Хинчина – Колмогорова в одномерном случае. В 1945 году Боас и Кац [4] для $m = 1$ показали, что в случае, когда функция f, имеет носитель в отрезке $[-\sigma, \sigma]$, существует (комплекснозначная) функция $\varphi \in L_2(\mathbb{R})$ с носителем в отрезке $[-\sigma/2, \sigma/2]$, являющаяся корнем уравнения (2). W. Ehm, T. Gneiting и D. Richards [6] назвали такую функцию φ *корнем Боаса – Каца* функции f.

Перейдя в равенстве (2) к преобразованиям Фурье, утверждение Боаса – Каца можно эквивалентно сформулировать [6, § 1.2] как следующую теорему о факторизации целых функций экспоненциального типа. Пусть F — целая (т. е. аналитическая в $\mathbb{C}$) функция экспоненциального типа σ, $\sigma < +\infty$, т. е. удовлетворяющая условию

$$\limsup_{r\to\infty} r^{-1} \log \max_{|z|=r} |F(z)| \leqslant \sigma,$$

является неотрицательной и суммируемой на вещественной оси $\mathbb{R}$. Тогда существует целая функция Ψ экспоненциального типа $\sigma/2$ такая, что справедливо равенство

$$\Psi(z)\overline{\Psi(\overline{z})} = F(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Последнее равенство для целых функций на всей комплексной плоскости справедливо тогда и только тогда, когда справедливо равенство $|\Psi(x)|^2 = F(x)$ на вещественной оси. Такое представление является аналогом теоремы Рисса о неотрицательных тригонометрических полиномах (см., например, [12, гл. VI, теорема 40]): всякий тригонометрический полином T_n порядка n, принимающий лишь неотрицательные значения, может быть представлен в форме $T_n(t) = |P_n(e^{2\pi i t})|^2$, где P_n – алгебраический многочлен степени не выше n.

Через $\mathbb{D}$ обозначим произвольное ограниченное выпуклое центрально симметричное тело в $\mathbb{R}^m$. Рассмотрим класс $G_m(\mathbb{D})$ вещественнозначных функций f, определенных на $\mathbb{R}^m$ и обладающих следующими свойствами:

1) непрерывные на всем пространстве $\mathbb{R}^m : f \in C(\mathbb{R}^m)$;

2) носитель $\mathrm{supp} f$, принадлежит множеству $\mathbb{D}$;

3) положительно определенные, то есть преобразование Фурье функций f неотрицательно: $\widehat{f}(x) \geqslant 0, x \in \mathbb{R}^m$.

Для произвольной функции $f \in G_m(\mathbb{D})$ ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ определенно формулой (1) уже при $z \in \mathbb{C}^m$ и является на $\mathbb{C}^m$ целой функцией, т. е. аналитической (голоморфной) в произвольной точке z пространства $\mathbb{C}^m$. Кроме того, как сама функция f, так и ее преобразование Фурье $\widehat{f}$ являются четными функциями, то есть справедливы равенства

$$f(-t) = f(t),\ t \in \mathbb{R}^m; \qquad \widehat{f}(-z) = \widehat{f}(z),\ z \in \mathbb{C}^m.$$

В работе [6] получены критерии существования вещественнозначных и/или четных корней Боаса – Каца для функции $f \in G_1([-\sigma, \sigma])$ в одномерном случае. При $m > 1$ получены критерии существования (комплекснозначных), существования вещественнозначных и/или радиальных корней Боаса – Каца для радиальной функции $f \in G_m(\mathbb{B}_r)$ с носителем в $\mathbb{B}_r$ — шаре радиуса r с центром в начале координат. Точная формулировка результатов будет приведена ниже в теореме B.

Целью данного исследования является получение критерия существования вещественнозначных и (одновременно) четных корней Боаса – Каца для функции f из класса $G_m(\mathbb{D})$ для произвольного ограниченного выпуклого центрально симметричного тела $\mathbb{D} \in \mathbb{R}^m$ при $m > 1$. Наш интерес к существованию корней Боаса – Каца вызван исследованиями задачи Турана на классе $G_m(\mathbb{D})$ и близких к ней экстремальных задач. Для всех известных случаев экстремальная функция в задаче Турана являются самосверткой, а точнее самосверткой характеристической функции множества $\mathbb{D}/2$.

Задача Турана в классическом варианте заключается в исследовании величины

$$AE(\mathbb{D}) = \sup_{f\in G_m(\mathbb{D})} \int_{\mathbb{R}^m} f(x)\,dx = \sup_{f\in G_m(\mathbb{D})} \widehat{f}(0). \tag{3}$$

Эту задачу и ее вариант для тригонометрических рядов называют задачей Турана, так как П. Туран сформулировал ее для 2π-периодических функций одного переменного и отрезка $\mathbb{D}=[-h,h]$, $0<h\leqslant\pi$, в начале 1970х годов в разговоре с С. Б. Стечкиным. В 1972 г. С. Б. Стечкин [11] решил ее в случае $h=2\pi/N$, $N=2,3,\ldots$. Окончательное решение этой задачи получили В. И. Иванов, Д. В. Горбачев, Ю. Д. Рудомазина (см. работу [8] и приведенную там библиографию). Позже выяснилось, что решение задачи (3) для функций одного переменного на числовой оси еще в 1945 году получили R. P. Boas, Jr. и M. Kac [4]. В 1997 г. задача для многомерного куба была решена Н. Н. Андреевым [1]; он также дал оценки величины (3) при $m=3,4$ для октаэдра. В 2000 г. Д. В. Горбачев [7] решил задачу Турана для m-мерных евклидовых шаров. В 2001 г. В. В. Арестов и Е. Е. Бердышева решили задачу Турана для правильного шестиугольника на плоскости [2], а в 2002 г. — для класса многогранников, которыми можно покрыть пространство $\mathbb{R}^m$ с помощью сдвигов [3]. Исторический обзор, факты о связи с другими задачами и информацию о случаях, когда точное решение задачи Турана известно, могут быть найдены в обзорной части статьи Sz. Revesz'a [9].

Приведем известные нам результаты о представлении функций класса $G_m(\mathbb{B}_r)$. Напомним, что функция, значения которой зависят только от $|t|$, называется радиальной, т. е. $f(t)=f_0(|t|), t\in\mathbb{R}^m$, где функция f_0 одной переменной определена на $[0,+\infty)$. В работе [10] для бесконечно дифференцируемых радиальных функций класса $G_m(\mathbb{B}_r)$ было получено следующее представление.

Теорема A (Рудин, 1970) *Бесконечно дифференцируемая радиальная функция f из класса $G_m(\mathbb{B}_r)$ может быть представлена в виде не более чем счетной суммы*

$$f=\sum_k\left(\varphi_k\widetilde{*}\varphi_k+\sum_{l=1}^m\omega_{kl}\widetilde{*}\omega_{kl}\right), \tag{4}$$

где ω_k и $\varphi_k:\mathbb{R}^m\to\mathbb{C}$ — радиальные, бесконечно дифференцируемые функции с носителем в шаре радиуса $r/2$,

$$\omega_{kl}=\frac{\partial\omega_k}{\partial x_l},\qquad l=1,2,\ldots,m.$$

При этом ряды в правой части (4) *сходятся равномерно.*

В статье [5] получен аналог теоремы A для случая непрерывных (радиальных) функций.

В работе [6] при $m>1$ получен критерий возможности более простого представления радиальной функции f класса $G_m(\mathbb{B}_r)$: $f=\varphi\widetilde{*}\varphi$, где φ – функция из пространства $L_2(\mathbb{R}^m)$ с носителем в шаре $\mathbb{B}_{r/2}$, то есть является корнем Боаса–Каца функции f. Также при $m\geqslant1$ получены необходимые и достаточные условия, когда существует корень Боаса–Каца вещественнозначный и/или радиальный. Преобразование Фурье $\widehat{f}$ радиальной функции f класса $G_m(\mathbb{B}_r)$ также является радиальной функцией. Условия сформулированы в терминах нулей аналитического продолжения радиальной части $\widehat{f}$, то есть функции одной комплексной переменной $F_0(z)=\widehat{f}(z,0,\ldots,0)$.

Условие (a). Если F_0 имеет нуль в начале координат, то его порядок кратен четырем.

Условие (b). Любой чисто мнимый нуль F_0 имеет четный порядок.

Условие (c). Любой нуль F_0, который не является ни вещественным, ни чисто мнимым имеет четный порядок.

Теорема B (Эм, Гнейтинг, Ричардс, 2004)

Пусть радиальная (четная при $m = 1$) функция $f \in G_m(\mathbb{B}_r)$.

1) *Если $m = 1$, то вещественнозначный корень Боаса – Каца существует. Четный корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда $\widehat{f}$ удовлетворяет условиям (a) и (b). Вещественнозначный и четный корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда $\widehat{f}$ удовлетворяет условиям (a), (b) и (c).*

2) *Если $m = 2$, то корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда F_0 удовлетворяет (b). Корень Боаса – Каца может быть выбран как радиальная функция тогда и только тогда, когда F_0 удовлетворяет (a) и (b).*

3) *Если $m \geqslant 3$, то корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда F_0 удовлетворяет (a) и (b). Кроме того, любой корень Боаса – Каца обязательно является радиальной функцией с точностью до сдвига.*

4) *Если $m \geqslant 2$, то вещественный корень Боаса – Каца существует тогда и только тогда, когда F_0 удовлетворяет условиям (a), (b) и (c). Кроме того, любой вещественный корень Боаса – Каца обязательно является радиальной функцией с точностью до сдвига.*

Ниже приведена таблица с кратким изложением этих результатов.

Dimension	m=1	m=2	$m \geqslant 3$
Existence		b	ab
Real-Valued		abc	abc
Radial	ab	ab	ab
Real-Valued and Radial	abc	abc	abc

Перейдем к формулировке основного результата настоящей статьи. Дивизором целой функции F называется пара (Λ_F, γ_F), где Λ_F является аналитическим множеством в $\mathbb{C}^m$ всех точек, в которых функция обращается в нуль, и γ_F — целозначная функция, определенная на Λ_F, значение которой в точке $z_0 \in \Lambda_F$ равно кратности нуля функции F в точке z_0. Для точки $z_0 \in \Lambda_F$ и λ, принадлежащего единичной сфере $\mathbb{S}$ в $\mathbb{R}^m$, определим величину $\gamma_F(z_0, \lambda)$, равную кратности точки $w = 0$ как нуля функции $F(z_0 + \lambda w)$ одной комплексной переменной w.

Теорема 1. *Для функции f, принадлежащей классу $G_m(\mathbb{D})$, следующие условия эквивалентны:*

(I) *существует корень Боаса – Каца φ функции f, являющийся четной функцией с вещественными значениями на $\mathbb{R}^m$;*

(II) *существует целая четная функция Ψ такая, что преобразование Фурье $\widehat{f}$ функции f представимо в виде*

$$\widehat{f}(z) = \Psi^2(z), \quad z \in \mathbb{C}^m;$$

(III) *все нули преобразования Фурье $\widehat{f}$ функции f имеют четную кратность, и если $z = 0$ — нуль $\widehat{f}$, то его кратность делится на четыре; то есть для любого $z_0 \in \Lambda_{\widehat{f}}$ число $\gamma_{\widehat{f}}(z_0)$ четное и если $\widehat{f}(0) = 0$, то число $\gamma_{\widehat{f}}(0)$ делится на четыре;*

(IV) *для любых $\lambda \in \mathbb{S}$ и $z_0 \in \Lambda_{\widehat{f}}$ число $\gamma_{\widehat{f}}(z_0, \lambda)$ четное, а если $\widehat{f}(0) = 0$, то число $\gamma_{\widehat{f}}(0, \lambda)$ делится на четыре.*

При этом φ имеет носитель в множестве $\mathbb{D}/2$, $\Psi = \widehat{\varphi}$ — вещественнозначная на $\mathbb{R}^m$, целая функция экспоненциального типа.

Список литературы

1. *Андреев Н. Н.* Экстремальная задача для периодических функций с малым носителем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. 1997. № 1. С. 29–32.
2. *Арестов В.В.*, *Бердышева Е.Е.* Задача Турана для положительно определенных функций с носителем в шестиугольнике // Тр. Ин-та математики и механики УрО РАН. 2001. Т. 7, № 1. С. 21–29.
3. *Arestov V.V.*, *Berdysheva E.E.* The Turan problem for a class of polytopes. // East J. Approx. 2002. Vol. 8, № 3. P. 381–388.
4. *Boas R.P.*, *Jr. and Kac M.* Inequalities for Fourier transforms of positive functions // Duke Math. J. 1945. Vol. 12, № 1. P. 189–206.
5. *Efimov A.V.* An analog of Rudin's theorem for continuous radial positive definite functions of several variables // Proc. Steklov Inst. Math. 2014. Vol. 284. Suppl. 1. P. 79–86.
6. *Ehm W.*, *Gneiting T.*, *Richards D.* Convolution roots of radial positive definite functions with compact support // Trans. Amer. Math. Soc. 2004. Vol. 356. P. 4655–4685.
7. *Горбачев Д.В.* Экстремальная задача для периодических функций с носителем в шаре // Матем. заметки. 2001. Т. 69, вып. 3. С. 346–352.
8. *Иванов В.И.* О задачах Турана и Дельсарта для периодических положительно определенных функций // Матем. заметки. 2006. Т. 80. Вып. 6. С. 934–939.
9. *Revesz S.G.* Turan's extremal problem on locally compact abelian groups // Analysis Mathematica. 2011. V. 37, № 1. P. 15–50.
10. *Rudin W.* An extension theorem for positive-definite functions // Duke Math. J. Vol. 37. 1970. P. 49–53.
11. *Стечкин С.Б.* Одна экстремальная задача для тригонометрических рядов с неотрицательными коэффициентами // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1972. Vol. 23, № 3–4. P. 289–291.
12. *Полиа Г.*, *Сеге Г.* Задачи и теоремы из анализа. Ч. 2. – М.: Наука, 1978. 431 с.
13. *Стейн И.*, *Вейс Г.* Введение в гармонический анализ на евклидовых пространствах. – М.: Мир, 1974. 333 с.
14. *Яглом А. М.* Корреляционная теория стационарных случайных функций с примерами из метеорологии. – Л.: Гидрометеоиздат, 1981. 364 с.