Труды Международной летней математической
Школы-Конференции С. Б. Стечкина по теории функций
Таджикистан, Душанбе, 15–25 августа, 2016. С. 20–23

Граничная задача оптимального восстановления аналитических функций в круге

Р. Р. Акопян

Озёрский технологический институт НИЯУ МИФИ, Озёрск, Россия
Институт математики и компьютерных наук Уральского федерального университета им. первого Президента России Б. Н. Ельцина, Екатеринбург, Россия

Аннотация. Рассматривается задача оптимального восстановления аналитической функции на подмножестве единичного круга по заданным с погрешностью, относительно нормы $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$, ее граничным значениям на части γ_1 единичной окружности. Обсуждается задача выбора оптимальной информации – множества γ_1.

1. Обозначения. Пусть $D = \{z : |z| < 1\}$ — открытый единичный круг с границей $\Gamma = \{z = e^{it} : t \in [0, 2\pi]\}$ — единичной окружностью; E_1 — произвольное измеримое подмножество $[0, 2\pi]$, соответственно, γ_1 — измеримое подмножество $\{z = e^{it} : t \in E_1\}$ окружности Γ. Будем предполагать, что мера γ_1 совпадает с мерой E_1 и положительна, $m(\gamma_1) > 0$.

Рассмотрим пространство Харди $H^1(D)$ функций, аналитических в круге D. Для произвольной функции f из пространства $H^1(D)$ почти всюду на Γ существуют некасательные предельные граничные значения, которые составляют функцию из $L^1(\Gamma)$.

Через ϕ обозначим неотрицательную, суммируемую на $[0, 2\pi]$ функцию, а через ϕ_1 и ϕ_0 – её сужения соответственно на E_1 и $E_0 = [0, 2\pi] \setminus E_1$. Для $\eta > 0$ определим функцию Φ_η равенством

$$\Phi_\eta(t) = \begin{cases} \phi_0(t), & t \in E_0, \\ \eta\phi_1(t), & t \in E_1. \end{cases} \tag{1}$$

В случае $\eta = 1$ имеет место равенство $\Phi_1 = \phi$. Также предположим, что функции $\ln \phi_k$ и $1/\phi_k$ соответственно суммируемы на E_k, $k = 0, 1$. Ясно, что в этом случае при всех $\eta > 0$ функции Φ_η и $\ln \Phi_\eta$ из $L^1(0, 2\pi)$. На γ_1 и $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ определим функции $\psi_k, k = 0, 1$, равенствами

$$\psi_k(e^{it}) = 1/\phi_k(t), \quad t \in E_k, \quad k = 0, 1.$$

Введем $H[\phi_1, \gamma_1]$ — подпространство $L^1(\gamma_1)$ функций, являющихся граничными значениями функций из $H^1(D)$ на γ_1, с конечной L^∞-нормой с весом ψ_1, то есть

$$\|f\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} = \|f(e^{i\cdot})/\phi_1\|_{L^\infty(E_1)} < +\infty,$$

или, что то же самое, существует M, $0 \leqslant M < +\infty$, такое, что почти всюду на E_1 справедливо неравенство

$$|f(e^{it})| \leqslant M\phi_1(t).$$

Исследования выполнены при поддержке Программы государственной поддержки ведущих научных школ (проект НШ-9356.2016.1).

В $H[\phi_1, \gamma_1]$ выделим класс Q функций, для которых граничные значения на γ_0 соответствующей аналитической функции удовлетворяют условию

$$f \in L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0), \quad \|f\|_{L^\infty_{\psi_0}(\gamma_0)} = \|f(e^{i\cdot})/\phi_0\|_{L^\infty(E_0)} \leqslant 1,$$

или, другими словами, почти всюду на E_0 справедливо неравенство

$$|f(e^{it})| \leqslant \phi_0(t).$$

Пусть K – подмножество единичного круга D, $(K, \widetilde{m})$ – метрическое пространство с некоторой конечной мерой $\widetilde{m}$. Обозначим через $B = B(K)$ функциональную банахову структуру (функциональную банахову решетку) — банахово пространство функций, измеримых по мере $\widetilde{m}$ на множестве K, с монотонной нормой $\|\cdot\|_B$, т. е. удовлетворяющей утверждению:
если $f_2 \in B(K)$ *и почти всюду на* K $|f_1(z)| \leqslant |f_2(z)|$, *то* $f_1 \in B(K)$ *и* $\|f_1\|_B \leqslant \|f_2\|_B$.
Будем считать, что функция $\epsilon \equiv 1$ принадлежит пространству $B(K)$ и ее норма равна единице, т. е. $\|\epsilon\|_B = 1$. В частности это означает, что все существенно ограниченные функции принадлежат $B(K)$. Более того, далее предполагается справедливость вложения $Q \subset B(K)$.

Введем Υ — оператор из $H[\phi_1, \gamma_1]$ в $B(K)$, ставящий в соответствие граничным значениям на γ_1 аналитической функции из $H^1(D)$ её сужение на K. На классе Q рассматриваются несколько взаимосвязанных экстремальных задач для оператора Υ.

Для неотрицательной функции $\varphi \in L^1(0, 2\pi)$ такой, что $\ln \varphi \in L^1(0, 2\pi)$, функция

$$s(z, \varphi) = \exp\left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{it} + z}{e^{it} - z} \ln \varphi(t)\, dt \right\}$$

называется функцией Сегё. Для предельных граничных значений почти всюду на $(0, 2\pi)$ имеет место равенство

$$|s(e^{it}, \varphi)| = \varphi(t).$$

Для функции Сегё с граничными значениями Φ_δ (Φ_δ определена равенством (1) при $\eta = \delta$) введем специальные обозначения

$$s_\delta(z) = s(z, \Phi_\delta), \quad s(z) = s_1(z) = s(z, \phi).$$

Пусть $w = w(\cdot, \gamma_1, D)$ — гармоническая в круге D функция, имеющая почти всюду на γ_1 граничные значения, равные единице, и на $\gamma_0 = \Gamma \setminus \gamma_1$ — равные нулю. Значение $w(z, \gamma_1, D)$ этой функции в точке $z \in D$ называется (см., например, [7, гл.VIII, §4]) гармонической мерой множества γ_1 относительно точки z и области D. Для гармонической меры γ_1 относительно точки $z = re^{i\tau}$, $0 \leqslant r < 1$, и круга D справедливо представление

$$w(z, \gamma_1, D) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(r, t - \tau)\, \chi_{E_1}(t)\, dt,$$

в котором P — ядро Пуассона круга D, определяемое равенством

$$P(r, t) = \operatorname{Re} \frac{e^{it} + r}{e^{it} - r} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2},$$

и χ_{E_1} — характеристическая функция множества E_1.

2. Постановка задачи. Пусть для неизвестной функции f из класса Q задана функция $q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ такая, что почти всюду на E_1 справедливо неравенство

$$|f(e^{it}) - q(e^{it})| \leqslant \delta \phi_1(t),$$

или, что то же самое, $\|f-q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \leqslant \delta$. Иными словами, заданы граничные значения функции f с погрешностью на части границы γ_1. Мы хотим наилучшим (оптимальным) способом восстановить по q функцию f на K. В качестве множества методов восстановления $\mathcal{R}$, из которых выбирается оптимальный, будем рассматривать $\mathcal{O}$ — множество всех возможных, $\mathcal{B}$ — ограниченных или $\mathcal{L}$ — линейных операторов из $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$ в $B(K)$. Точная постановка задачи следующая. Для числа $\delta \geqslant 0$ и метода восстановления $T \in \mathcal{R}$ определим величину погрешности метода формулой

$$\mathcal{U}(T,\delta) = \sup\left\{\|f-Tq\|_B \colon f \in Q,\, q \in L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1),\, \|f-q\|_{L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)} \leqslant \delta\right\}. \tag{2}$$

Тогда

$$\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) = \inf\left\{\mathcal{U}(T,\delta)\colon T \in \mathcal{R}\right\} \tag{3}$$

есть величина оптимального восстановления аналитической функции на множестве K (или, что то же самое, оптимального восстановления оператора Υ) с помощью методов восстановления $\mathcal{R}$ на функциях класса Q по их граничным значениям на γ_1, заданным с ошибкой δ по норме $L^\infty_{\psi_1}(\gamma_1)$. Задача состоит в вычислении величины $\mathcal{E}(\delta)$ и определении оптимального метода восстановления – оператора, на котором в (3) достигается нижняя грань.

Задача (3) есть частный случай задачи оптимального восстановления операторов на классе элементов банахова пространства по неполной (в частности – неточной) информации. Общие результаты в этой тематике и дальнейшие ссылки можно найти в [6], [3], [9], [4], [5], [10]. Результаты, связанные с оптимальным восстановлением на классах аналитических функций, можно найти в монографии [10]; в работах автора [1], [2].

3. Оптимальное восстановление Υ. Определим оператор $\mathcal{T}_\sigma$ формулой

$$(\mathcal{T}_\sigma q)(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\frac{s_\delta(z)}{s_\delta(e^{it})}\, q(e^{it})\, dt = \tag{4}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{E_1} P(r,t-\tau)\frac{s(z)}{s(e^{it})}\left(\frac{h(z)}{h(e^{it})}\right)^\sigma q(e^{it})\, dt, \quad z = re^{i\tau} \in K.$$

В следующей теореме приведено решение задачи оптимального восстановления оператора Υ.

Теорема 1. *Для произвольного $K \subset D$ и $\delta > 0$ справедливо равенство*

$$\mathcal{E}_{\mathcal{O}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{B}}(\delta) = \mathcal{E}_{\mathcal{L}}(\delta) = \|s\delta^w\|_B. \tag{5}$$

При этом оптимальным методом восстановления является метод $\mathcal{T}_\sigma, \sigma = \ln\delta$, определяемый соотношением (4).

4. Выбор оптимальной информации при восстановлении Υ. В этой части работы рассмотрим задачу оптимального восстановления оператора Υ с наилучшим выбором множества γ_1, на котором заданы (с погрешностью) граничные значения функции. Точная постановка задачи следующая. Пусть для параметров δ, μ справедливы неравенства $0 < \delta \leqslant 1$ и $0 < \mu < 2\pi$. Рассмотрим

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta,\mu) = \inf\left\{\mathcal{E}_{\mathcal{R}}(\delta) \,:\, m(\gamma_1) \leqslant \mu\right\}, \tag{6}$$

— точную нижнюю грань величины оптимального восстановления (3) по всевозможным измеримым подмножествам γ_1 единичной окружности Γ, мера которых не превосходит числа μ. В экстремальной задаче (6) кроме значения нижней грани представляет интерес множество, на котором она достигается.

Общую постановку задачи выбора оптимальной информации можно найти в работе [8].

Рассмотрим случай, когда множество K состоит из точки z_0, и, соответственно, Υ является функционалом – значением функции в точке $z_0 \in D$, $\Upsilon f = f(z_0)$. Обозначим через u_μ функцию, определяемую в круге D равенством

$$u_\mu(z) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \left(\frac{1+|z|}{1-|z|} \operatorname{tg} \frac{\mu}{4} \right).$$

Ясно, что функция u_μ является радиальной, то есть $u_\mu(z) = u(|z|)$, $z \in D$.

Теорема 2. *В случае* $K = z_0 = re^{i\tau}$, $0 < r < 1$, *при* $0 < \delta \leqslant 1$ *и* $0 < \mu < 2\pi$ *для величины* (6) *справедливо равенство*

$$\mathtt{E}_{\mathcal{R}}(\delta, \mu) = |s(re^{i\tau})| \delta^{u_\mu(r)}.$$

При этом нижняя грань в (6) *достигается на дуге окружности*

$$\gamma_1 = \left\{ e^{it} \,:\, |t - \tau| < \frac{\mu}{2} \right\}.$$

Список литературы

1. *Акопян Р.Р.* Оптимальное восстановление аналитической функции в двусвязной области по ее приближенно заданным граничным значениям // Тр. Ин-та мат. мех. УрО РАН. 2015. Т. 21, № 4. С. 14–19.
2. *Акопян Р.Р.* Оптимальное восстановление аналитической функции по заданным с погрешностью граничным значениям // Матем. заметки. 2016. Т. 99, № 2. С. 163–170.
3. *Арестов В.В.* О равномерной регуляризации задачи вычисления значений оператора // Матем. заметки. 1977. Т. 22, № 2. С. 231–244.
4. *Арестов В.В.* Наилучшее восстановление операторов и родственные задачи // Сборник трудов Всесоюзной школы по теории функций (Душанбе, август 1986 г.), Тр. МИАН СССР. 189. – М.: Наука, 1989. С. 3–20.
5. *Арестов В.В.*, *Габушин В.Н.* Наилучшее приближение неограниченных операторов ограниченными // Изв. вузов. Матем. 1995. № 11. С. 42–68.
6. *Арестов В.В.* Приближение неограниченных операторов ограниченными и родственные экстремальные задачи // Успехи мат. наук. 1996. Т. 51. Вып. 6(312). С. 89–124.
7. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. – М.,Л.: ГИТТЛ 1952. М.: Наука, 1966. 628 с.
8. *Магарил-Ильяев Г. Г.*, *Тихомиров В.М.*, *Осипенко К. Ю.* Неопределенность знания об объекте и точность методов его восстановления // Пробл. передачи информ. 2003. Т. 39. Вып 1. С. 18–133.
9. *Micchelli Ch.A.*, *Rivlin Th.J.* A survey of optimal recovery // Optimal estimation in approximation theory. – N.Y. etc.: Plenum Press, 1977. P. 1–54.
10. *Osipenko K.Yu.* Optimal Recovery of Analytic Functions. – Huntington: NJVA Science Publ.Inc. 2000. 229 p.