С.С. Кралин

СЛУЧАЙНОСТЬ В S4

Нижеследующее представляет собой исследовательское сообщение о свойствах (каким-либо стандартным образом определенного) оператора «случайно» в S4. Как доказательства, так и философские коннотации приводимых ниже (мета)утверждений опущены.

1. Из восьми импликаций, призванных выражать дистрибутивность оператора ∇ относительно связок ($\&$, $\vee$, $\supset$ и $\equiv$) выводима лишь *одна* (напомним читателю, что в случае с оператором $\Box$ выводимы *пять* из этих восьми импликаций):

$$S4 \vdash \nabla(p \vee q) \supset (\nabla p \vee \nabla q).$$

Не проходят никакие «деонтические» модификации свойства дистрибутивности относительно $\&$ и $\vee$. Любопытно, что

$$S4 \vdash \sim\nabla(p \equiv q) \supset (\nabla p \equiv \nabla q).$$

2. Вопрос о выводимости некоторых из упомянутых восьми импликаций в случаях, когда p и q являются формулами

специального вида, связан с вопросом об итерировании модальностей. Ситуация с итерированием ∇ в S4 такая же, как с итерированием $\Box$ в S3:

S4 $\vdash \nabla\nabla\nabla p \equiv \nabla\nabla p$, но лишь S4 $\vdash \nabla\nabla p \supset \nabla p$. Напомним, что S4 $\vdash \Box\Box p \equiv \Box p$.

Что касается *комбинированных* итерированных модальностей, то число таковых (нередуцируемых) также *конечно*. Любопытны следующие теоремы редукции:

S4 $\vdash \Diamond\nabla p \equiv \nabla p$;

S4 $\vdash \nabla{\sim}p \equiv \nabla p$;

S4 $\vdash {\sim}\Box\nabla\nabla p$. (Однако, неверно, что S4 $\vdash {\sim}\nabla\nabla p$, хотя и S5 $\vdash {\sim}\nabla\nabla p$).

Интересны и просто импликации:

S4 $\vdash \nabla\Box p \supset {\sim}\Box p$; S4 $\vdash \nabla\Diamond p \supset \nabla p$; S4 $\vdash \Diamond p \supset \Diamond p$.

3. Центральным нашим результатом является следующее утверждение: *Не существует* такой формулы p, что S4 $\vdash \nabla p$.

Доказательство индукцией по длине p.