

МОДЕЛИ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОТЯЖЕННОСТИ В ЗАДАЧАХ НЕСТАЦИОНАРНОЙ ВИХРЕТОКОВОЙ ДЕФЕКТОСКОПИИ ЛЕГКИХ НЕФЕРРОМАГНИТНЫХ СПЛАВОВ

АННОТАЦИЯ

Рассмотрены интегро-дифференциальные уравнения начально-краевой задачи электродинамики для дефектного неферромагнитного металлического тела бесконечной протяженности. Показано, что все основные утверждения, касающиеся интегро-дифференциальных уравнений для электромагнитного поля в проводящем теле конечных размеров, распространяются и на случай проводника бесконечной протяженности.

Ключевые слова: электромагнитное поле, электродинамика, вихретоковая дефектоскопия

ABSTRACT

The integro-differential equations of initial-boundary problem of the electrodynamics for the defective non-ferromagnetic metal body with infinite length are investigated. It is shown, that all of the major theorem for the integro-differential equations for electromagnetic field in the finite body, may be applied to the case of infinite length of conductor.

Keywords: electromagnetic field, electrodynamics, vortex-current defectoscopy

В производстве и эксплуатации изделий из легких неферромагнитных сплавов существенное значение имеет неразрушающий контроль, в том числе нестационарными вихретоковыми методами. Исследование начально-краевых задач электродинамики является необходимой теоретической базой для предложения новых и обоснования существующих методов контроля, а также для создания приборов нестационарной вихретоковой дефектоскопии.

В настоящий момент широко изучены свойства начально-краевых задач электродинамики в общей постановке для ограниченных проводящих тел, располагающихся в неограниченном трехмерном пространстве; доказана серия теорем общего характера. Однако в конкретных задачах неразрушающего контроля часто встречаются такие модели, как проводящее полупространство, проводящий плоский слой, цилиндр и

цилиндрический слой бесконечной высоты; в приложениях к авиастроению полезными могут оказаться и более сложные модели бесконечной протяженности.

Эти обстоятельства указывают на необходимость общего исследования начально-краевых задач электродинамики для неограниченных проводящих тел.

Рассмотрим начально-краевую задачу электродинамики в следующей постановке. Пусть металлическое тело занимает не ограниченную область Ω . Дефекты занимают ограниченные или неограниченные области $\Omega_1, \Omega_2, \dots$; замыкания этих областей не пересекаются и полностью содержатся в Ω : $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \emptyset$ при $i \neq j$; $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$. Предполагается, что любая сфера с центром в точке $r_0 \in \Omega$ захватываемыми частями границ Ω и Ω_i разбивается на конечное множество областей с кусочно-гладкими границами. Сторонний ток занимает ограниченную область T , замыкание которой не пересекается с замыканием Ω .

Электропроводность тела σ не зависит от времени и предполагается непрерывной функцией пространственных координат во внутренних точках Ω_i и в точках Ω , внешних по отношению к Ω_i . Кроме того, σ допускает непрерывное продолжение на границы Ω_i , как изнутри, так и снаружи Ω_i . Однако, при переходе через границу Ω_i электропроводность σ терпит разрыв. Также σ допускает непрерывное продолжение на границу Ω изнутри области. Используемые при вихретоковом контроле поля меняются достаточно медленно, поэтому пространственной и временной дисперсией электропроводности можно пренебречь.

Металл, из которого изготовлено тело, предполагается слабым магнетиком (этому условию удовлетворяет широкий класс легких неферромагнитных металлических сплавов на основе магния, алюминия и титана), и с достаточно высокой точностью можно считать, что его магнитная проницаемость $\mu = 1$. С не менее высокой точностью можно считать, что диэлектрическая проницаемость ионного остова металла $\varepsilon = 1$.

Внешняя среда предполагается непроводящей, то есть ее электропроводность равна 0. Диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней среды равны 1.

Изображения по Лапласу напряженностей электрического и магнитного поля E и H удовлетворяют следующей системе интегро-дифференциальных уравнений [1]:

$$\begin{cases} \mathbf{E}(\mathbf{r}) + \frac{\varepsilon_0 \mu_0 p^2 - \nabla \operatorname{div}}{p \varepsilon_0} \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') dV' = \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \\ \mathbf{H}(\mathbf{r}) = \operatorname{rot} \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \boldsymbol{\sigma}(\mathbf{r}') \mathbf{E}(\mathbf{r}') dV' - \frac{1}{\mu_0 p} \operatorname{rot} \mathbf{E}_0(\mathbf{r}) \end{cases}, \quad (1)$$

где μ_0 – магнитная постоянная, ε_0 – диэлектрическая постоянная, dV' – элемент объема, по которому производится интегрирование, p – параметр в преобразовании Лапласа, $G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = \frac{\exp(-\sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot p |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$,

$\mathbf{E}_0(\mathbf{r}) = \frac{\nabla \operatorname{div} - \varepsilon_0 \mu_0 p^2}{p \varepsilon_0} \int_T G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{j}(\mathbf{r}') dV'$, $\mathbf{j}$ – изображение по Лапласу плотности стороннего тока.

Исследование системы уравнений (1) сопряжено с исследованием свойств операторов $\hat{P}$ и $\hat{A}$, действие которых на векторное поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ определяется формулами:

$$\begin{aligned} \hat{P}[\mathbf{u}] &= \int_{\Omega} G(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) \mathbf{u}(\mathbf{r}') dV', \\ \hat{A}[\mathbf{u}] &= \frac{\varepsilon_0 \mu_0 p^2 - \nabla \operatorname{div}}{p \varepsilon_0} \hat{P}[\mathbf{u}]. \end{aligned}$$

Ранее с использованием преобразования Фурье, в предположении, что область Ω ограничена, были получены оценочные неравенства для нормы оператора $\hat{P}$ [2], вторых обобщенных производных $\hat{P}[\mathbf{u}]$ [2], а также неравенства для нормы оператора $\hat{A}$ [1]. Вывод указанных неравенств в полной мере переносится и на случай неограниченной области при условии, что поле $\mathbf{u}(\mathbf{r})$ квадратично суммируемо в ней. Из этих неравенств, в частности, следует, что при достаточно больших значениях $\operatorname{Re}(p)$ у системы (1) существует единственное решение [2].

Имеет смысл привести краткий вывод неравенства для среднеквадратичной нормы первых производных $\mathbf{v} = \hat{P}[\mathbf{u}]$: во втором уравнении системы (1) $\mathbf{H}$ выражается через эти производные. Преобразование Фурье по пространственным координатам приводит к следующему выражению для Фурье-образа первой производной $\hat{P}[\mathbf{u}]$:

$$k_i \tilde{\mathbf{v}}(\mathbf{k}) = \frac{k_i \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k})}{\sqrt{k^4 + (\lambda_0^2 + \lambda_1^2)^2 + 2k^2(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)}}, \quad (2)$$

где волнистой линией обозначены Фурье-образы, $\lambda_0 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \operatorname{Re}(p)$, $\lambda_1 = \sqrt{\varepsilon_0 \mu_0} \cdot \operatorname{Im}(p)$, k_i – компоненты трехмерного вектора $\mathbf{k}$ в преобразовании Фурье, k – его модуль (индекс i – номер пространственной

переменной x_i , по которой происходит дифференцирование). Необходимо оценить квадрат модуля (2):

$$\sum_{i=1}^3 |k_i \tilde{v}(\mathbf{k})|^2 = \frac{k^2 |\tilde{u}(\mathbf{k})|^2}{k^4 + (\lambda_0^2 + \lambda_1^2)^2 + 2k^2(\lambda_0^2 - \lambda_1^2)} \leq$$

$$\leq \begin{cases} \frac{k^2 |\tilde{u}(\mathbf{k})|^2}{k^4 + (\lambda_0^2 + \lambda_1^2)^2} \leq \frac{|\tilde{u}(\mathbf{k})|^2}{2(\lambda_0^2 + \lambda_1^2)} \leq \frac{|\tilde{u}(\mathbf{k})|^2}{2\lambda_0^2}, \lambda_0^2 \geq \lambda_1^2 \\ \frac{k^2 |\tilde{u}(\mathbf{k})|^2}{(k^2 + \lambda_0^2 - \lambda_1^2)^2 + 4\lambda_0^2 \lambda_1^2} \leq \frac{(\lambda_0^2 + \lambda_1^2) |\tilde{u}(\mathbf{k})|^2}{4\lambda_0^4 + 4\lambda_0^2 \lambda_1^2} = \frac{|\tilde{u}(\mathbf{k})|^2}{4\lambda_0^2}, \lambda_0^2 < \lambda_1^2 \end{cases}. \quad (3)$$

Следует заметить, что в (3) после разделения на случаи $\lambda_0^2 \geq \lambda_1^2$ и $\lambda_0^2 < \lambda_1^2$ первые неравенства получены путем исследования функций на экстремум по переменной k^2 .

Для окончательной оценки среднеквадратичной нормы необходимо проинтегрировать (3) по компонентам $\mathbf{k}$; в результате получается следующее неравенство:

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right\| \leq \frac{\|\mathbf{u}\|}{2\lambda_0},$$

где двойная прямая скобка обозначает среднеквадратичную норму.

Работа выполнена при поддержке гранта РФФИ, проект № 13-01-00090.

ЛИТЕРАТУРА

1. Марвин С. В. Нестационарная краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца / С. В. Марвин, В. В. Дякин // Электричество. 2008. № 12. С. 30–36.
2. Марвин С. В. О существовании и единственности решения начально-краевой задачи электродинамики / С. В. Марвин, В. В. Дякин // Вестник УГТУ-УПИ, 2005. Т. 69. № 17. С. 295–302.