ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ЭЛЕКТРОМАГНИТНОГО ПОЛЯ С НОРМАЛЬНЫМ НЕДИСПЕРГИРУЮЩИМ МЕТАЛЛОМ, ИМЕЮЩИМ МАКРОСКОПИЧЕСКИЕ ДЕФЕКТЫ

Марвин С.В.[1]
[1] ФГАОУ ВПО УрФУ, г. Екатеринбург, РФ, sergmarvin@mail.ru

Аннотация — **Рассмотрено интегро-дифференциальное уравнение электродинамики для электрической составляющей нестационарного электромагнитного поля, взаимодействующего с дефектным нормальным металлом в условиях, когда дисперсией можно пренебречь. Показано, что при достаточно общих предположениях относительно металлического тела и стороннего тока, создающего поле, интегро-дифференциальное уравнение имеет единственное решение для внутренних точек металлического тела. Также показано, что с помощью обратного преобразования Лапласа можно найти внешнее электрическое поле в любой точке снаружи металлического тела.**

Ключевые слова — интегро-дифференциальные уравнения , нестационое поле, электродинамика.

ВВЕДЕНИЕ

В дефектоскопии металлических изделий, наряду со стационарными методами, предполагающими гармоническую зависимость полей от времени, используются и нестационарные методы диагностики, связанные с использованием полей, меняющихся не по гармоническому закону. Нестационарные (импульсные) методы используются, в частности, в целях энергосбережения.

В математической формализации нестационарным волновым процессам электродинамики соответствуют начально-краевые задачи для уравнений Максвелла: задачи с начальными и граничными условиями, не предполагающие гармоническую зависимость полей от времени. Для исследования нестационарных полей целесообразно использовать не преобразование Фурье по времени, а преобразование Лапласа, и исследовать дифференциальные и интегро-дифференциальные уравнения для изображений по Лапласу [1]. Интегро-дифференциальные уравнения, по сравнению с дифференциальными, имеют несколько преимуществ. Например, интегро-дифференциальные уравнения изначально учитывают условия сопряжения на границе раздела сред. Кроме того, решив интегро-дифференциальное уравнение для внутренних точек рассеивающего тела, поле снаружи тела можно получить прямым вычислением. Вообще, задачи математической физики в интегральной или интегро-дифференциальной постановке всегда удобнее, чем дифференциальные уравнения, для исследований на существование и единственность решения, для качественного исследования свойств решений (гладкость, асимптотика), а также для обоснования сходимости численных алгоритмов.

Наиболее полное и разностороннее исследование интегро-дифференциальных уравнений для нестационарного электромагнитного поля, взаимодействующего с проводящим телом, проводились в предположениях, что электропроводность тела является бесконечно гладкой функцией пространственных координат, а граница тела является поверхностью Ляпунова (что, в частности, означает гладкость границы). При таких предположениях было доказано, что начально-краевая задача электродинамики имеет единственное решение, которое является классическим непрерывно-дифференцируемым решением, не требующим привлечения математического аппарата обобщенных функций; это решение можно получить приближенно методом возмущений [2, 3].

Однако, предположения о гладкости электропроводности и границы тела, с точки зрения дефектоскопии, являются слишком сильными и на практике редко выполняющимися: на границах металлических тел, а также на границах макроскопических дефектов внутри проводящих тел, электропроводность терпит разрыв; кроме того, границы реальных физических тел, зачастую, являются не гладкими, а кусочно-гладкими поверхностями.

Поэтому для целей и задач дефектоскопии немалую практическую значимость будет иметь хотя бы частичное обобщение ранее полученных результатов [2, 3] на кусочно-непрерывную электропроводность и кусочно-гладкую границу.

ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ. ОСНОВНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ

Пусть металлическое тело занимает ограниченную область Ω; граница Ω — кусочно-гладкая. Дефекты занимают области Ω_1, $\Omega_2,\ldots$, Ω_n, тоже с кусочно-гладкими границами; замыкания этих областей не пересекаются и полностью содержатся в Ω: $\overline{\Omega}_i \cap \overline{\Omega}_j = \varnothing$ при $i \neq j$; $\overline{\Omega}_i \subset \Omega$. Сторонний ток, создающий первичное поле, протекает в токовом проводнике, который занимает ограниченное замкнутое множество T. T может быть областью с границей; если прибегать к модели бесконечно тонкого проводника, T будет кривой в пространстве. $\overline{\Omega}$ и T не пересекаются: $\overline{\Omega} \cap T = \varnothing$. Поле реакции измеряется в ограниченном замкнутом множестве T_1 (то есть, в T_1 расположен измерительный проводник; в измерительном проводнике электромагнитное поле создает ЭДС). T_1 не пересекается ни с T, ни с $\overline{\Omega}$: $T_1 \cap \overline{\Omega} = \varnothing$; $T_1 \cap T = \varnothing$ (рис. 1).

Электропроводность тела σ предполагается непрерывной во внутренних точках Ω_i и в точках Ω, внешних по отношению к Ω_i. Кроме того, σ допускает непрерывное продолжение на границу Ω_i как изнутри, так и снаружи Ω_i. Однако, при переходе через границу Ω_i электропроводность σ терпит разрыв. Как функция пространственных координат σ допускает непрерывное продолжение на границу Ω изнутри области. В дефектоскопии используются поля, меняющиеся достаточно медленно, чтобы пространственной и временной дисперсией электропроводности можно было пренебречь.

Металл, из которого изготовлено тело, предполагается нормальным: то есть, этот металл находится в несверхпроводящем состоянии и является очень слабым магнетиком (его магнитную проницаемость можно считать равной 1). Примерами таких металлов могут служить медь, алюминий и цинк при комнатной температуре. Диэлектрическая проницаемость ионного остова нормального металла с высокой точностью можно считать равной 1.

Внешняя среда предполагается непроводящей, то есть ее электропроводность равна 0. Диэлектрическая и магнитная проницаемости внешней среды равны 1.

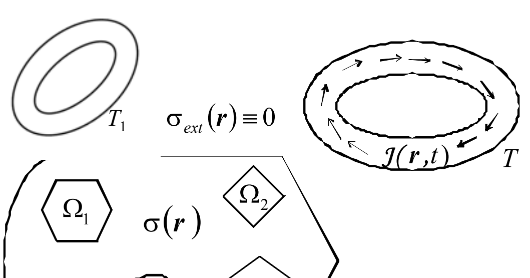

Рис. 1. Металлическое тело, токовый и измерительный проводники

Также предполагается, что в начальный момент времени (в момент включения стороннего тока) электромагнитного поля нет, то есть напряженности электрического и магнитного поля равны нулю.

При перечисленных предположениях интегро-дифференциальное уравнение для нестационарного электрического поля принимает вид [1]:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, p) = \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}, p) + \\ + \frac{\mathrm{graddiv} - \varepsilon_0\mu_0 p^2}{4\pi\varepsilon_0 p} \int_{\text{Щ}} \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \text{у}(\boldsymbol{r}')\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}', \text{p}) d\boldsymbol{r}', \tag{1}$$

где $\boldsymbol{E}$ — изображение по Лапласу напряженности электрического поля; $\boldsymbol{r}$ — набор пространственных координат (x, y, z); p — комплексный параметр в преобразовании Лапласа; $\boldsymbol{E}_0$ — изображение по Лапласу напряженности первичного электрического поля (сторонний ток создает первичное переменное магнитное поле, которое, в свою очередь, создает первичное электрическое поле). Заметим, что второе слагаемое в (1) является изображением по Лапласу от вторичного поля (поля реакции): оно добавляется к $\boldsymbol{E}_0$ и искажает $\boldsymbol{E}_0$ вследствие того, что есть рассеивающее тело с ненулевой электропроводностью σ, занимающее область Ω.

Неизвестным в (1) является $\boldsymbol{E}$, а $\boldsymbol{E}_0$ изначально задано: оно выражается через плотность стороннего тока, которая предполагается известной. В случае, если T имеет ненулевой объем (не бесконечно тонкий провод), $\boldsymbol{E}_0$ определяется выражением:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r}, p) = &-\frac{\mu_0^2 p}{4\pi} \int_T \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|} \boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', p) d\boldsymbol{r}' + \\ &+ \frac{\mu_0^2 p}{4\pi} \int_T \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^3} (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', p)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'))(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' + \\ &+ \frac{3\mu_0}{4\pi c\varepsilon_0} \int_T \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^4} (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', p)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'))(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}' + \\ &+ \frac{3\mu_0}{4\pi p\varepsilon_0} \int_T \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|^5} (\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}', p)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'))(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}') d\boldsymbol{r}', \end{aligned} \tag{2}$$

где $\boldsymbol{J}$ — изображение по Лапласу плотности стороннего тока.

Если T является кусочно-гладкой кривой (бесконечно тонким проводником), то

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p) = &-\frac{\mu_0^2 pI(p)}{4\pi}\int_a^b \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|}\dot{\boldsymbol{r}}'(\tau)d\tau + \\
&+\frac{\mu_0^2 pI(p)}{4\pi}\int_a^b \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|^3}(\dot{\boldsymbol{r}}'(\tau)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)))(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau))d\tau + \\
&+\frac{3\mu_0 I(p)}{4\pi c\varepsilon_0}\int_a^b \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|^4}(\dot{\boldsymbol{r}}'(\tau)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)))(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau))d\tau + \\
&+\frac{3\mu_0 I(p)}{4\pi p\varepsilon_0}\int_a^b \frac{e^{-\frac{p|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|}{c}}}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)|^5}(\dot{\boldsymbol{r}}'(\tau)\cdot(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau)))(\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'(\tau))d\tau,
\end{aligned}
\qquad (3)
$$

где I — изображение по Лапласу силы стороннего тока, $\boldsymbol{r}'(\tau)$ — параметрическое задание кривой T через параметр τ, a и b — пределы параметризации; точка над вектором $\boldsymbol{r}'$ означает дифференцирование по параметру τ ($\dot{\boldsymbol{r}}(\tau)$ представляет собой вектор, касательный к токовому проводнику; он определяет направление протекания тока).

Существование и единственность решения основного интегро-дифференциального уравнения. Асимптотика решения при больших значениях параметра преобразования Лапласа

Выражения (2) и (3) очень громоздки, причем при подстановке конкретных функций $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',p)$ и $\boldsymbol{r}'(\tau)$ в эти выражения получаются интегралы, которые невозможно вычислить аналитически точно, и для их вычисления необходимо привлечь численные методы. Однако, качественный анализ этих выражений достаточно прост; в частности, легко установить асимптотическое поведение $\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)$ при $|p|\to+\infty$, если известна асимптотика $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',p)$ и $I(p)$. Если $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',p)$ и $I(p)$ при $|p|\to+\infty$ убывают не медленнее, чем $\frac{1}{|p|^\alpha}$ ($\alpha>1$), то убывание $|\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)|$ при $|p|\to+\infty$ происходит не медленнее $\frac{1}{|p|^{\alpha-1}}$.

Для анализа выражений и уравнений, содержащих интегралы, часто оказывается удобной среднеквадратичная норма функций: для векторной функции $\boldsymbol{U}$, определенной и квадратично-суммируемой на некотором m-мерном множестве D, среднеквадратичная норма $\|\boldsymbol{U}\|_D$ определяется следующей формулой:

$$
\|\boldsymbol{U}\|_D = \sqrt{\int_D |\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})|^2 d\boldsymbol{x}}\,, \qquad (4)
$$

где $\boldsymbol{x}$ — вектор m переменных, по которым происходит интегрирование. Если множество D ограничено, а модуль $|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})|$ имеет конечный максимум на D, то из (4) следует очевидное неравенство

$$
\|\boldsymbol{U}\|_D \le \sqrt{|D|}\cdot\max_{\boldsymbol{x}\in D}|\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})|\,, \qquad (5)
$$

где $|D|$ — m-мерный объем множества D.

Из (5) следует та же асимптотическая оценка при $|p|\to+\infty$ для $\|\boldsymbol{E}_0(p)\|_\Omega$, что и для $|\boldsymbol{E}_0(\boldsymbol{r},p)|$: убывание не медленнее $\frac{1}{|p|^{\alpha-1}}$. Более того, можно показать, что если $\boldsymbol{E}_0$ определяется формулой (2), $\|\boldsymbol{E}_0\|_\Omega$ убывает при $|p|\to+\infty$ не медленнее $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}',p)$, то есть, не медленнее, чем $\frac{1}{|p|^\alpha}$ [2,3].

При достаточно большой вещественной части параметра p ($\mathrm{Re}(p)>\frac{10\sigma_{\max}}{\varepsilon_0}$, где $\sigma_{\max}$ — максимальное значение электропроводности в Ω) выполняются определенные оценочные неравенства для интеграла в (1), из которых, в частности, следует выполнение принципа сжатых отображений [4]. Вывод оценочных неравенств [2,3], выполненный для бесконечно гладкой функции $\sigma(\boldsymbol{r})$, в предположении, что граница области Ω является поверхностью Ляпунова, без изменений можно перенести на случай кусочно-непрерывной электропроводности и кусочно-гладкой границы.

Из выполнения условий теоремы о сжатых отображениях, в свою очередь, следует существование и единственность у (1) квадратично-суммируемого в Ω решения, причем среднеквадратичная норма $\|\boldsymbol{E}(p)\|_\Omega$ имеет ту же асимптотику при $|p|\to+\infty$, что и $\|\boldsymbol{E}_0(p)\|_\Omega$ [2,3]. Следовательно, $\|\boldsymbol{E}(p)\|_\Omega$ убывает не медленнее, чем $\frac{1}{|p|^{\alpha-1}}$.

Заметим, что в (1) поле снаружи области Ω выражается через поле внутри Ω: интеграл в (1) берется по внутренним точкам Ω. Поэтому поле снаружи металлического тела можно оценить через поле внутри тела, воспользовавшись неравенством Коши-Буняковского [4]: для любых векторных функций $\boldsymbol{U}$ и $\boldsymbol{V}$, определенных и квадратично-суммируемых на некотором m-мерном множестве D, выполняется неравенство

$$
\left|\int_D \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x})d\boldsymbol{x}\right| \le \|\boldsymbol{U}\|_D\cdot\|\boldsymbol{V}\|_D\,. \qquad (6)
$$

С использованием (5) и (6) можно показать, что

$$\max_{\boldsymbol{r}\in T_1}\left|\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)\right| = O\left(\frac{1}{|p|^{\alpha-2}}\right), |p| \to +\infty , \qquad (7)$$

где O — обозначение функции, ограниченной по сравнению с эталонной функцией, указанной в скобках.

Аналитичность по параметру преобразования Лапласа. Обратное преобразование Лапласа

С использованием оценочных неравенств [2,3] для интеграла в (1) можно показать, что $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ внутри области Ω аналитично по параметру p в следующем смысле: существует квадратично-суммируемая в области Ω векторная функция $\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r},p)$, для которой выполняется следующее предельное соотношение:

$$\left\|\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\Delta p}-\boldsymbol{W}(\boldsymbol{r},p)\right\|_{\Omega} \xrightarrow[\Delta p\to 0]{} 0 . \qquad (8)$$

Из (1), (6) и (8) следует, что снаружи области Ω $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ аналитично в обычном смысле, причем имеет место равномерная сходимость:

$$\max_{\boldsymbol{r}\in T_1}\left|\frac{\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p+\Delta p)-\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\Delta p}-\frac{\partial \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)}{\partial p}\right| \xrightarrow[\Delta p\to 0]{} 0 . \qquad (9)$$

При достаточно медленном включении стороннего тока (медленнее, чем t^2) параметр α принимает значения, большие, чем 3. Тогда, как следует из (7) и (9), выполняются достаточные условия существования оригинала у $\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)$ [5], и можно выполнить обратное преобразование Лапласа:

$$\mathcal{E}(\boldsymbol{r},t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{pt}\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},p)d\,\mathrm{Im}(p), \qquad (10)$$

где $\mathcal{E}$ — напряженность электрического поля, Im — обозначение мнимой части. Заметим, что из (7) следует выполнение условий абсолютной и равномерной сходимости несобственного интеграла в (10), что означает непрерывность $\mathcal{E}$ по пространственным координатам и времени.

Заключение

Условия, при которых доказано существование оригинала у решения основного интегро-дифференциального уравнения, являются достаточными условиями, но не являются необходимыми. И, следовательно, возникает задача дальнейшего обобщения полученного результата (в частности, на более быстрое включение стороннего тока).

Библиографический список

1. Дякин, В. В. Задачи электродинамики в неразрушающем контроле / В. В. Дякин, В. А. Сандовский. Екатеринбург: УрО РАН, 2008. - 389 с. - Библиогр.: с. 383-389.

2. Дякин, В. В. Начально-краевая задача и интегро-дифференциальные уравнения электродинамики для немагнитного проводящего тела / В. В. Дякин, С. В. Марвин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2008. – Т. 48. - № 2. – С. 288–296.

3. Марвин, С. В. Начально-краевая задача электродинамики для немагнитного проводящего образца / С. В. Марвин, В. В. Дякин // Электричество. – 2008. – № 12. – С. 30–36.

4. Колмогоров, А. Н. Элементы теории функций и функционального анализа / А. Н. Колмогоров, С. В. Фомин. М.: Наука, 1968. – 496 с. – Библиогр.: с. 492-493.

5. Евграфов, М. А. Аналитические функции / М. А. Евграфов. М.: Наука, 1968. - 472 с. - Библиогр.: с. 470-472.