

ПОСТРОЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ В ЗАДАЧЕ ДИФРАКЦИИ ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЙ ВОЛНЫ НА ТЕЛЕ ВРАЩЕНИЯ

Векшин П.А.¹

¹ ФГАОУ ВПО «Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н. Ельцина», Екатеринбург, Россия (620000, Россия, г. Екатеринбург, ул. Мира, 19) e-mail: petrvekshin@gmail.com

Аннотация: В статье сообщаются основные принципы построения математической модели для расчета электромагнитного поля, рассеянного телом вращения. Поверхность такого тела описывается уравнением кривой. В целях получения численного решения поверхностного интеграла, поверхность аппроксимируется треугольной сеткой. Алгоритмы генерации сетки и расчета рассеянного поля разработаны на базе MATLAB. Рассматривается случай, когда тело является выпуклым и идеально проводящим.

Ключевые слова: дифракция, рассеяние, электромагнитная волна, метод физической оптики, тело вращения, треугольная сетка, MATLAB.

DEVELOPING A MATHEMATICAL MODEL FOR DIFFRACTION OF ELECTROMAGNETIC WAVE FROM A SOLID OF REVOLUTION

Vekshin P.A.¹

¹ Ural Federal University, Yekaterinburg, Russia (620000, Russia, Yekaterinburg, Mira street, 19) e-mail: petrvekshin@gmail.com

Abstract: This paper reports basic principles of developing a mathematical model for computation of electromagnetic field scattered by a solid of revolution. The surface of this solid is described with the equation of a curve. To obtain a numerical solution of a surface integral, the surface is approximated with a triangle mesh. The algorithms for mesh generation and computation of scattering field were developed using MATLAB. The perfectly conducting convex solid is considered.

Key words: diffraction, scattering, electromagnetic wave, physical optics method, solid of revolution, triangle mesh, MATLAB.

Введение

С каждым годом пакеты трехмерного электродинамического моделирования находят все большее применение при решении ряда задач. В частности, использование специализированных программ позволяет существенно сократить временные и материальные затраты при оценке радиолокационной заметности летательных аппаратов. Однако судить о пригодности полученных при моделировании результатов зачастую можно лишь после проведения натурных испытаний.

При решении задачи дифракции плоской электромагнитной волны на идеально проводящем конусе, были выявлены некоторые недостатки специализированных

программ. В результатах расчета, полученных с помощью ANSYS HFSS, периодически наблюдались разного рода зависимости, например, чувствительность к максимальному размеру сетки. Трудности, возникавшие в FEKO, были связаны по большей части с вычислительными ресурсами и дальнейшей обработкой полученных результатов.

Произвести расчет электромагнитного поля, рассеянного объектом с формой, поддающейся математическому описанию, можно посредством построения математической модели. На базе пакета MATLAB был реализован алгоритм, позволяющий описывать поверхность тела вращения и производить ее сегментацию в целях получения численного решения рассеянного поля.

Описание поверхности тела вращения

Поверхность тела вращения, как известно, формируется посредством вращения образующей. Уравнение кривой (образующей) задается зависимостью вида $y = f_1(x)$ на интервале $[x_1, x_2]$, полагая, что вращение осуществляется вокруг оси x . Образующая может описываться n зависимостями, заданными на определенных интервалах:

$$f(x) = \begin{cases} f_1(x) & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2 \\ f_2(x) & \text{при } x_2 < x \leq x_3 \\ \dots & \dots \\ f_n(x) & \text{при } x_n < x \leq x_{n+1} \end{cases} . \quad (1)$$

На границах интервалов должны выполняться условия непрерывности, а также не должно наблюдаться положительных приращений производной функции $f(x)$. Например, в случае функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, определенных на интервалах $[x_1, x_2]$ и $(x_2, x_3]$, соответственно, в точке x_2 должны выполняться следующие условия:

$$\begin{aligned} f_1(x_2) &= f_2(x_2), \\ \frac{df_1(x_2)}{dx} &\geq \frac{df_2(x_2)}{dx}. \end{aligned} \quad (2)$$

Отмеченные условия, а также невозрастающий характер производной функции $f(x)$, определяют выпуклый характер тела вращения. Ненулевое значение функции образующей на границе интервала будет говорить о том, что поверхность замыкается диском, соответствующего радиуса.

Ввод данных, характеризующих вид функции, производится в MATLAB, используя функции `sums` (символьная переменная) и `sum` (символьная функция). Программа реализована в виде отдельных блоков, обеспечивающих более гибкий подход к решению.

Сегментация поверхности

Считая известным критерий сегментации d_{max} , определяющий максимальный размер элемента поверхности, можно переходить к описанию алгоритма генерации треугольной сетки. Полагаем, что образующая описывается n функциями. В таком случае, вектор, содержащий функции в символьном виде, и два вектора, определяющие границы интервалов, имеют n элементов.

Предлагаемый алгоритм сегментации накладывает ограничения на высоту треугольника, а также на длину его основания. Оба угла при основании не превышают 90° . Следовательно, в целях удовлетворения критерию сегментации, высота треугольника и длина его основания не должны превышать значения

$$\Delta = \frac{d_{max}}{\sqrt{2}}. \quad (3)$$

Поверхность тела вращения разбивается на кольцевые сегменты, в общем случае представляющие боковую поверхность усеченного конуса. Длина образующей такого конуса не должна превышать упомянутого значения Δ . Длина образующей поверхности тела вращения, описываемой функцией $f(x)$ на интервале $[x_1, x_{n+1}]$, определяется как

$$L = \int_{x_1}^{x_{n+1}} \sqrt{1 + \left(\frac{df}{dx}\right)^2} dx. \quad (4)$$

Зная длину образующей L и критерий Δ , можно рассчитать количество кольцевых сегментов, заключенных между x_1 и x_{n+1} , следующим образом:

$$N_s = \text{ceil}\left(\frac{L}{\Delta}\right). \quad (5)$$

Каждый кольцевой сегмент как боковая поверхность конуса с радиусами оснований r_{c1} и r_{c2} разбивается на треугольные элементы, количество которых определяется как

$$N_t = \text{ceil}\left(\frac{2\pi r_{c1}}{\Delta}\right) + \text{ceil}\left(\frac{2\pi r_{c2}}{\Delta}\right). \quad (6)$$

Предположим, что $f(x_1) > 0$. Диск, получаемый в сечении $x = x_1$, разбивается на кольцевые сегменты аналогичным образом. Количество кольцевых сегментов определяется по формуле (5), замещая длину образующей L радиусом диска, принимающим значение $f(x_1)$. Получение треугольных элементов производится прежним образом. Аналогичный подход используется и в случае, когда $f(x_{n+1}) > 0$.

Изначально полагалось, что ось симметрии тела совпадает с осью x . Для удобства работы с трехмерным объектом, а также оперирования в сферической системе координат при расчете характеристик рассеяния ось симметрии будет совпадать с осью z , а тело сместится к началу системы координат. При этом точки z_1 и z_{n+1} , ограничивающие тело вращения по оси симметрии, определяются как

$$\begin{aligned} z_1 &= \frac{x_1 + x_{n+1}}{2} - x_{n+1}, \\ z_{n+1} &= \frac{x_1 + x_{n+1}}{2} - x_1. \end{aligned} \quad (7)$$

При генерации треугольников дополнительно производится извлечение данных о ребрах и смежных треугольниках. В массив данных для каждого ребра записывается следующее:

длина, координаты нормалей смежных треугольников и внешний угол клина, образованного поверхностями смежных треугольников. Координаты нормали треугольника извлекаются из ранее полученного массива данных, содержащем дополнительно координаты вершин и центра (точка пересечения медиан), а также площадь треугольника. Характер сегментации можно характеризовать двумерной гистограммой сегментации, показывающей распределение ребер относительно их внешних углов и длин, нормированных к длине волны.

Примеры сегментации некоторых тел вращения

Перейдем к рассмотрению конкретных примеров сегментации поверхности на основе простейших функций образующей. В этом и последующих примерах будем ограничиваться одной функцией, т.е. $f(x) = f_1(x)$. Длину волны выберем равной 0,1 м. Критерий сегментации важен для расчета рассеянного поля, а данном случае его можно выбрать равным одной длине волны. Построим цилиндр высотой 0,1 м и радиусом основания 0,2 м, т.е. $f(x) = 0,2$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0,1$ (значения указываются в м). Из указанных данных можно рассчитать, что кольцевых сегментов, определенных образующей, будет равно 2, а каждое из оснований цилиндра содержит 3 кольцевых сегмента. Результат сегментации показан на рисунке 1.

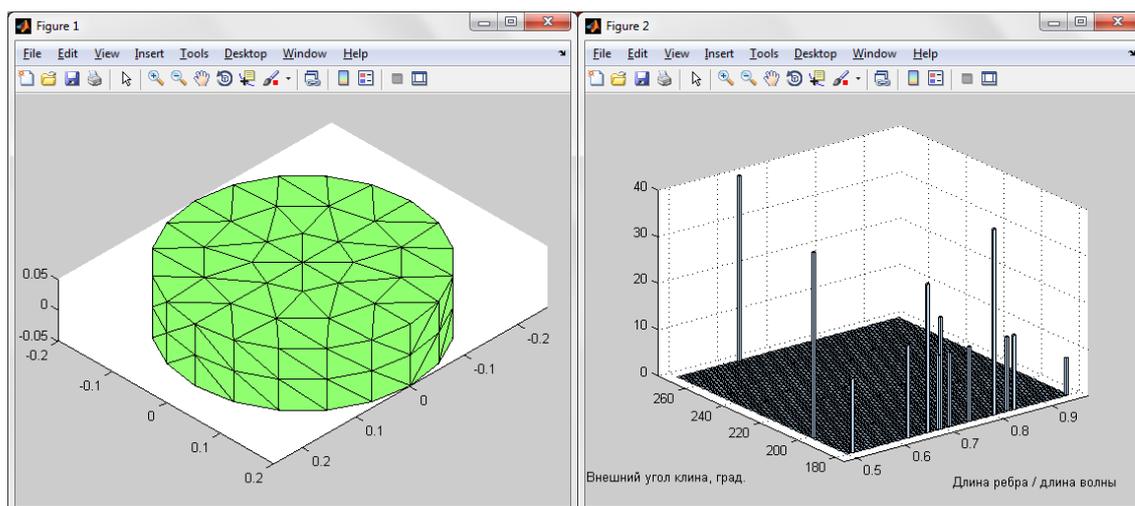


Рисунок 1 — Результат и двумерная гистограмма сегментации цилиндра

Рассмотрим далее сегментацию конуса высотой 0,5 м, радиус основания которого равен 0,2 м. Длина волны и критерий сегментации соответствуют прежнему случаю. Входные данные будут следующие $f(x) = 0,4x$, $x_1 = 0$ и $x_2 = 0,5$. Вид конуса после сегментации и двумерная гистограмма сегментации показаны на рисунке 2.

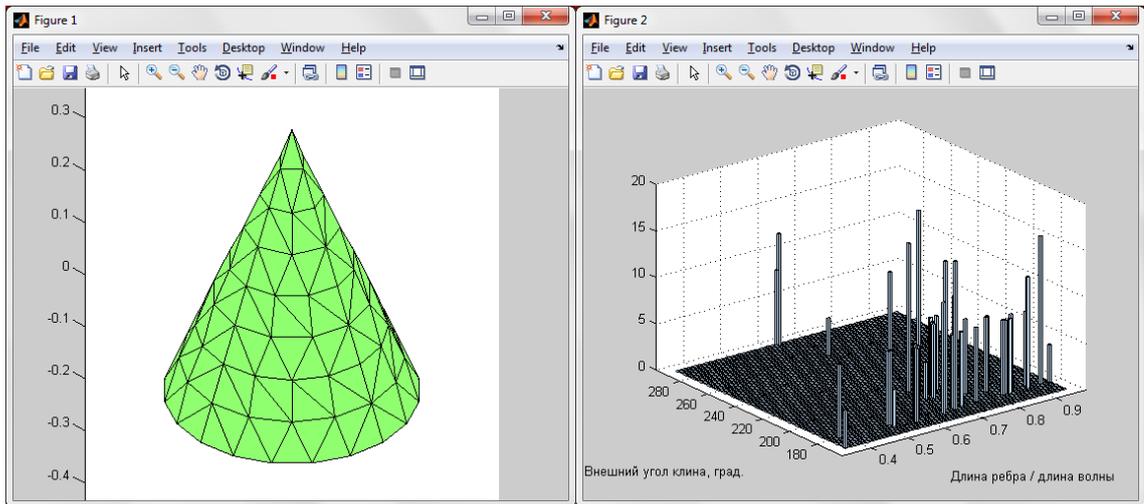


Рисунок 2 — Результат и двумерная гистограмма сегментации конуса

В качестве последнего примера, демонстрирующего результат описанного алгоритма, рассмотрим сегментацию сферы радиусом 0,5 м. Функция образующей примет вид $f(x) = (0,25 - x^2)^{0,5}$, границы интервалов равны $x_1 = -0,5$ и $x_2 = 0,5$, соответственно. Длина волны и критерий сегментации остаются прежними. Результат операции показан на рисунке 3.

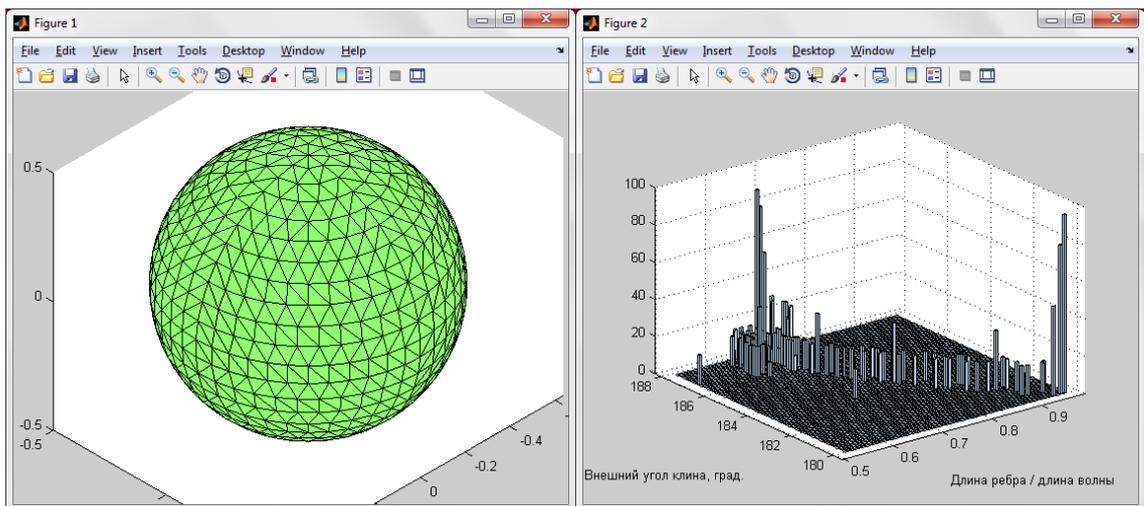


Рисунок 3 — Результат и двумерная гистограмма сегментации сферы

Расчет электромагнитного поля, рассеянного телом вращения

Рассмотрим случай, когда тело является идеальным проводником. Плотность поверхностного тока на элементе поверхности, создаваемая падающей электромагнитной волной, в приближении физической оптики определяется как

$$\vec{J}_s = [\vec{n}, \vec{H}]. \quad (8)$$

Векторный электрический потенциал в дальней зоне, создаваемый элементом тока

$$\vec{A}^s = \frac{1}{4\pi} \int \vec{J}_s \cdot \frac{e^{ik|\vec{r}-\vec{r}_0|}}{|\vec{r}-\vec{r}_0|} dS. \quad (9)$$

Поскольку поверхность идеально проводящая, векторный электрический потенциал будет соответствовать удвоенному значению. Зная векторный электрический потенциал, можно рассчитать напряженность магнитного поля

$$\vec{H} = \text{rot } \vec{A}^e. \quad (10)$$

Напряженность электрического поля в дальней зоне

$$\vec{E} = \vec{H} \cdot \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}. \quad (11)$$

Далее можно оперировать со значениями напряженности электрического поля в дальней зоне. В исследовании характеристик рассеяния интерес представляет эффективная площадь рассеяния (ЭПР), которая в общем случае определяется выражением

$$\sigma = 4\pi R^2 \frac{|E_1^2|}{|E_2^2|}, \quad (12)$$

где R — расстояние от объекта до точки наблюдения в дальней зоне,

E_1 — напряженность электрического поля падающей волны вблизи объекта,

E_2 — напряженность рассеянного электрического поля в точке наблюдения.

В качестве примера были рассчитаны угловые характеристики ЭПР в моностатическом случае для конуса высотой 0,5 м и с диаметром основания 0,4 м, используя предложенный алгоритм и решение в HFSS (PO Solver). Критерий сегментации во всех случаях был выбран равным четверти длины волны. Характеристики были получены для двух значений длин волн: 10 см и 5 см. Поляризация в HFSS была задана так, что вектор напряженности электрического поля падающей волны лежал в плоскости поворота (θ -поляризация). Значение угла $\theta = 0^\circ$ соответствует падению волны на вершину конуса. Угловые характеристики ЭПР были рассчитаны для двух значений длины волны: 5 см (рисунок 4) и 10 см (рисунок 5).

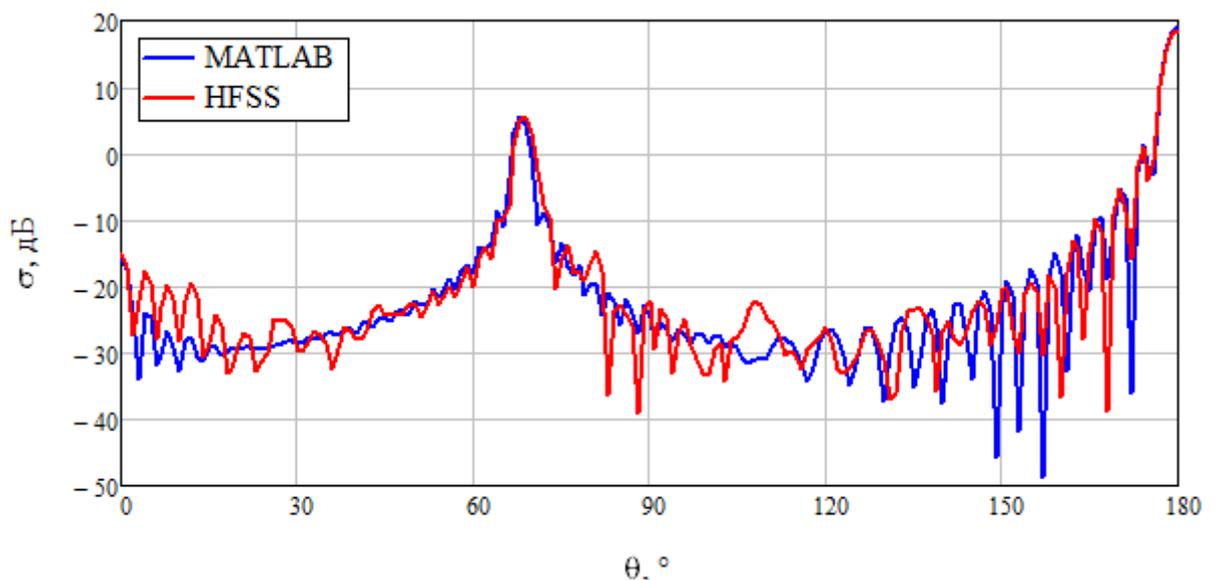


Рисунок 4 — Угловые характеристики ЭПР конуса при длине волны 5 см

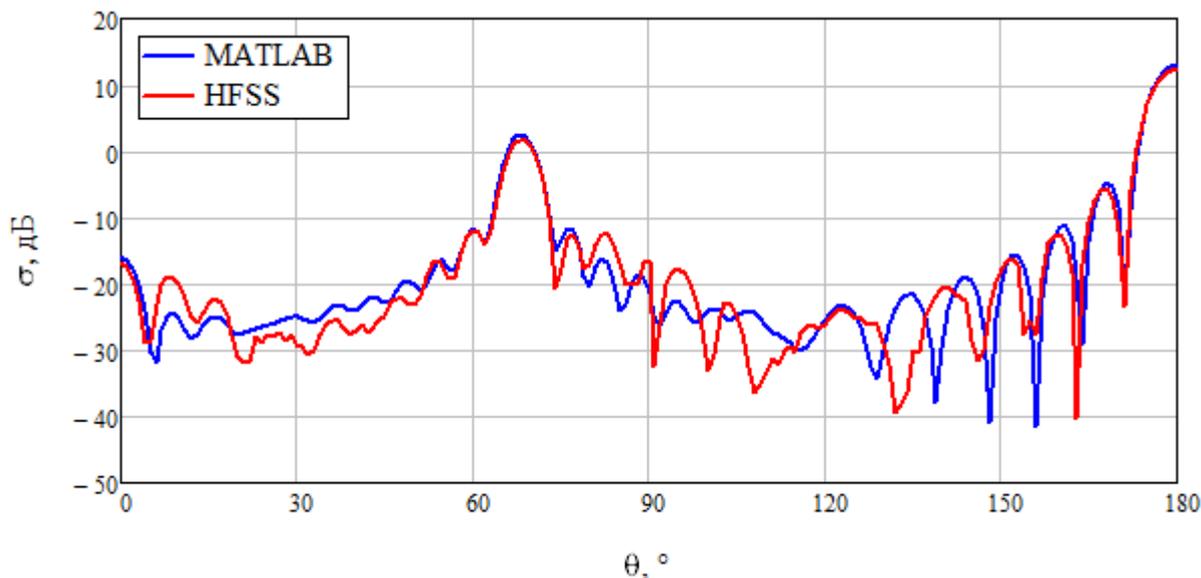


Рисунок 5 — Угловые характеристики ЭПР конуса при длине волны 10 см

Заключение

Разработанный алгоритм построения математической модели для расчета электромагнитного поля, рассеянного телом вращения, обеспечил более гибкий подход к решению задач дифракции. На примере простейших тел вращения, был продемонстрирован результат сегментации поверхности, полученный с помощью алгоритма генерации треугольной сетки. Двумерные гистограммы сегментации позволяют проводить оценку выполненных операций. Алгоритм сегментации поверхности пригоден и в случае сложных в математическом описании, комбинированных тел.

Массив данных, получаемый в результате сегментации поверхности, позволяет расширить границы моделирования, обусловленные методом физической оптики. Данные о ребрах, могут быть использованы при оценке характеристик рассеяния в рамках физической теории дифракции. В этом случае, клин, построенный на ребре, рассматривается как часть клина с ребром бесконечной длины. Учет электромагнитного поля, рассеянного клиньями предоставит, например, более точное решение при падении электромагнитной волны на вершину конуса с малым углом раствора.

Список литературы

1. Электродинамика и распространение радиоволн : учебник / В. А. Неганов, О. В. Осипов, С. Б. Раевский, Г. П. Яровой ; под общ. ред. В. А. Неганова. – 4-е изд., доп. и перераб. – Москва : Радиотехника, 2009. – 744 с.
2. Менцер Дж. Р. Дифракция и рассеяние радиоволн : пер. с англ. / Дж. Р. Менцер. – Москва : Советское радио, 1958. – 148 с.
3. Дьяконов В. П. MATLAB 7.*/R2006/R2007 : самоучитель / В. П. Дьяконов. – Москва : ДМК Пресс, 2008. – 768 с.
4. Felsen L. B. Plane-Wave Scattering by Small-Angle Cones / L. B. Felsen // IRE Transactions on Antennas and Propagation. – 1957. – Vol. 5, № 1. – P. 121–129.
5. Keller J. B. Backscattering from a Finite Cone / J. B. Keller // IRE Transactions on Antennas and Propagation. – 1960. – Vol. 8, № 2. – P. 175–182.