Уральский федеральный университет
имени первого Президента России Б. Н. Ельцина
Институт математики и компьютерных наук

Е. В. НОВАК
Т. В. РЯЗАНОВА
И. В. НОВАК

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА

Учебное пособие

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
УРАЛЬСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ИМЕНИ ПЕРВОГО ПРЕЗИДЕНТА РОССИИ Б. Н. ЕЛЬЦИНА

Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Алгебра

Рекомендовано методическим советом УрФУ
в качестве учебного пособия для студентов, обучающихся
по программе бакалавриата по направлениям подготовки
43.03.04 «Политология», 39.03.01 «Социология»,
39.03.02 «Социальная работа», 37.03.01 «Психология»,
по направлению подготовки специалитета
37.05.01 «Клиническая психология»

Екатеринбург
Издательство Уральского университета
2015

УДК 519.6(075.8)
Н 723

Р е ц е н з е н т ы:
лаборатория прикладной механики
Института машиноведения УрО РАН
(заведующий лабораторией
кандидат технических наук, доцент Л. Ф. Спевак);
С. И. Канторович, кандидат физико-математических наук,
генеральный директор АО «Уралавтоматика»

П о д о б щ е й р е д а к ц и е й
Т. В. Рязановой

Новак, Е. В.

Н 723 Высшая математика: Алгебра : [учеб. пособие] / Е. В. Новак, Т. В. Рязанова, И. В. Новак ; [под общ. ред. Т. В. Рязановой] ; М-во образования и науки Рос. Федерации, Урал. федер. ун-т. — Екатеринбург : Изд-во Урал. ун-та, 2015. — 116 с.

ISBN 978-5-7996-1537-6

Учебное пособие посвящено изучению матриц, определителей и систем линейных уравнений, а также углублению полученных школьных знаний по векторной алгебре. Содержит множество практических заданий и примеров с решениями.

Адресовано студентам начальных курсов гуманитарных направлений подготовки, изучающих основные математические структуры в рамках дисциплины «Высшая математика».

УДК 519.6(075.8)

ISBN 978-5-7996-1537-6

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное пособие посвящено важнейшим разделам высшей математики (элементам линейной и векторной алгебры) и предназначено для студентов первого и второго курса Института социальных и политических наук Уральского федерального университета, изучающих математические основы в рамках курса высшей математики.

Цель курса — изучение матриц, определителей и систем линейных уравнений, а также углубление полученных знаний по векторной алгебре. Пособие содержит множество практических заданий, ведь именно решение задач позволяет понять теорию в полном объеме. Теоретический материал курса представлен кратко, но его достаточно для решения задач. Более подробные теоретические сведения предлагается почерпнуть из литературы, список которой прилагается.

Глава 1 пособия посвящена матрицам и определителям. Она содержит все необходимые для решения задач определения, методы и приемы, а также примеры с решениями, что дает возможность студентам глубже понять тему. В главе 2 рассматриваются системы линейных уравнений и основные методы их решения. Глава 3 поможет читателю освежить и дополнить знания, полученные в школе в разделе векторной алгебры. Основные подглавы содержат небольшие самостоятельные работы с ответами для закрепления полученных знаний.

Учебное пособие включает три контрольные работы, посвященные матрицам, системам линейных уравнений и векторам. Каждая работа содержит 15 вариантов контрольных заданий. Дополнительно представлены типовые варианты с подробным решением.

1. МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

1.1. Матрицы. Основные понятия

Определение. *Матрицей* называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк одинаковой длины (или n столбцов одинаковой длины).

Матрицы обозначаются заглавными буквами латинского алфавита A, B, C и т. д. Для обозначения элементов матрицы используются строчные буквы с двойной индексацией: a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, где i — номер строки, j — номер столбца. Матрица записывается в виде

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \quad \text{или} \quad A = (a_{ij}).$$

Матрицу А называют матрицей размера $m \times n$ и пишут $A_{m \times n}$. Элементы, стоящие на диагонали, идущей из верхнего левого угла, образуют главную диагональ.

Пример.

$$A_{3\times 2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

Пример. С помощью матриц удобно записывать некоторые экономические зависимости.

Ресурсы	Легкая промышленность	Тяжелое машиностроение	Сельское хозяйство
Электроэнергия	2.6	2.1	3.0
Трудовые ресурсы	1.2	1.8	2.8
Водные ресурсы	2.5	3.0	3.0

Таблицу распределения ресурсов по отраслям экономики можно записать в компактной форме в виде матрицы

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 2.6 & 2.1 & 3.0 \\ 1.2 & 1.8 & 2.8 \\ 2.5 & 3.0 & 3.0 \end{pmatrix}.$$

В данной записи, например, матричный элемент a_{11} = 2.6 показывает, сколько электроэнергии употребляет легкая промышленность, а элемент a_{23} = 2.8 — сколько трудовых ресурсов потребляет сельское хозяйство.

Определение. *Матрицы равны между собой*, если равны все соответствующие элементы этих матриц, т. е. А = B, если

$$a_{ij} = b_{ij} \left(i = \overline{1,m}\,;\;\; j = \overline{1,n} \right).$$

Определение. Матрица, у которой число строк равно числу столбцов, называется *квадратной*. Квадратную матрицу размера $n \times n$ называют матрицей n-го порядка.

Пример.

$$A_{2\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной.*

Пример.

$$A_{3\times3} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определение. Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной*.

Обозначается буквой E.

Пример.

$$E_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица называется *треугольной*, если все элементы, расположенные по одну сторону от главной диагонали, равны нулю.

Пример.

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой*. Обозначается буквой O.

В матричном исчислении матрицы O и E играют роль чисел 0 и 1 в арифметике.

Определение. Матрица, содержащая один столбец или одну строку, называется *вектором* (*вектор-столбцом* или *вектор-строкой* соответственно).

Вектор-столбец

$$A_m = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_m \end{pmatrix}.$$

Вектор-строка

$$B_n = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_n \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрица, полученная из данной заменой каждой ее строки столбцом с тем же номером, называется *матрицей, транспонированной к данной*. Обозначается A^T.

П р и м е р.

$$\text{Если } A=\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$$

Транспонированная матрица обладает следующим свойством: $(A^T)^T = A$.

1.2. Действия над матрицами

С л о ж е н и е м а т р и ц

Операция сложения матриц вводится только для матриц одинаковых размеров.

Определение. *Суммой* двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right).$$

П р и м е р.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 6 \\ -5 & 7 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}.$$

В ы ч и т а н и е м а т р и ц

Операция вычитания производится аналогично.

Определение. *Разностью* двух матриц $A_{m \times n} = (a_{ij})$, $B_{m \times n} = (b_{ij})$ называется матрица $C_{m \times n} = (c_{ij})$ такая, что

$$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}\left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right).$$

П р и м е р.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 3 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Умножение матрицы на число

Определение. *Произведением* матрицы $A_{m \times n} = (a_{ij})$ на число k называется матрица $B_{m \times n} = (b_{ij})$ такая, что

$$b_{ij} = k \times a_{ij} (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Пример.

$$A_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix},\ k = 2,$$

тогда

$$kA_{2\times 3} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -6 \\ 4 & 16 & 10 \end{pmatrix}.$$

Операции сложения матриц и умножения матрицы на число обладают следующими свойствами:

1^0. $A + B = B + A$;

2^0. $A + (B + C) = (A + B) + C$;

3^0. $A + O = A$;

4^0. $A - A = O$;

5^0. $1 \times A = A$;

6^0. $a \times (A + B) = \mathrm{a} \times A + a \times B$;

7^0. $(a + b) \times A = a \times A + b \times A$;

8^0. $a \times (b \times A) = (a \times b) \times A$,

где A, B, С — матрицы; a и b — числа.

Произведение матриц

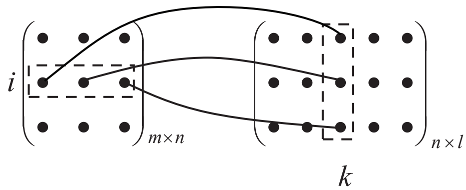
Операция умножения двух матриц вводится только для случая, когда число столбцов первой матрицы равно числу строк второй матрицы.

Определение. *Произведением* матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times l}$ называется матрица $C_{m \times k}$ такая, что

$$c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk}, \text{ где } (i = \overline{1,m};\ k = \overline{1,l}).$$

То есть элемент i-й строки и k-го столбца матрицы произведения C равен сумме произведений элементов i-й строки матрицы A на соответствующие элементы k-го столбца матрицы B.

Получение элемента c_{ik} схематично изображается так:



Если матрицы A и B квадратные, одного размера, то произведения $A \times B$ и $B \times A$ всегда существуют.

П р и м е р. Найти произведение матриц

$$A_{2\times3} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \text{ и } B_{3\times2} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A \times B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 2 & 8 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2\cdot2+1\cdot(-4)+(-3)\cdot0 & 2\cdot3+1\cdot5+1\cdot(-3) \\ 2\cdot2+8\cdot(-4)+5\cdot0 & 2\cdot3+8\cdot5+5\cdot1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 8 \\ -28 & 51 \end{pmatrix}.$$

Определение. Матрицы A и B называются *перестановочными*, если $A \times B = B \times A$. Умножение матриц обладает следующими свойствами:

1^0. $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$;

2^0. $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$;

3^0. $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$;

4^0. $a \times (A \times B) = (a \times A) \times B$,

если, конечно, написанные суммы и произведения матриц имеют смысл.

Для операции транспонирования верны свойства:

1^0 $(A + B)^T = A^T + B^T$;

2^0 $(A \times B)^T = B^T \times A^T$.

1.3. Элементарные преобразования матриц

Элементарными преобразованиями матриц являются:

1) перестановка местами двух параллельных рядов матрицы;

2) умножение всех элементов ряда матрицы на число, отличное от нуля;

3) прибавление ко всем элементам ряда матрицы соответствующих элементов параллельного ряда, умноженных на одно и то же число.

Определение. Две матрицы A и B называются *эквивалентными*, если одна из них получается из другой с помощью элементарных преобразований. Записывается $A \sim B$.

При помощи элементарных преобразований любую матрицу можно привести к матрице, у которой в начале главной диагонали стоят подряд несколько единиц, а все остальные элементы равны нулю.

Такую матрицу называют *канонической*.

П р и м е р.

$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ — матрица в каноническом виде.}$$

П р и м е р. Привести к каноническому виду матрицу

$$A_{3\times 4} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Римскими цифрами будем указывать номер строки или столбца:

$$A_{3\times4}=\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & \scriptstyle \mathrm{III}+\mathrm{II} & \end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & 3 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 3 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & & \scriptstyle \mathrm{IV}+0.5\cdot\mathrm{III}\end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2 & -1\end{pmatrix}\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\scriptstyle \mathrm{I}-1.5\cdot\mathrm{III} & & & \end{array}\\ \begin{pmatrix}2 & 3 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}\scriptstyle \cdot0.25 & & \scriptstyle \cdot0.5 & \scriptstyle \cdot1/3\end{array}\\ \begin{pmatrix}4 & 3 & 4 & 3\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2 & 0\end{pmatrix}\end{array}\sim\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} & & & \scriptstyle \mathrm{IV}-\mathrm{I}\end{array}\\ \begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\end{array}\sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\scriptstyle \mathrm{I}-3\cdot\mathrm{II}\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{array}{l}\scriptstyle \mathrm{I}-2\cdot\mathrm{III}\\ \\ \\ \end{array}\sim\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

Самостоятельная работа

1. Найти $A - 2 \cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -2 & 4\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & -2\end{pmatrix}.$$

2. Найти $2 \cdot A + 3 \cdot B$, если

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{pmatrix}.$$

3. Найти $3 \cdot A — B$, если

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix} \text{ и } B=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

4. Найти $A \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Найти $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Найти $A \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 8 & -7 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти $A \cdot B$ и $B \cdot A$, если

$$A = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ответы.

1. $A - 2 \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ -4 & 8 \end{pmatrix}.$

2. $2 \cdot A + 3 \cdot B = \begin{pmatrix} 7 & 8 \\ 3 & 11 \end{pmatrix}.$

3. $3 \cdot A - B = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 11 \end{pmatrix}.$

4. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 8 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$

5. $B \cdot A = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$

6. Операция не определена.

7. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 0 \\ 6 & -9 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \; B \cdot A = \begin{pmatrix} -1 \end{pmatrix}.$

1.4. Определители. Основные понятия

Определение. Квадратной матрице A порядка n можно сопоставить число Δ (или $|A|$), называемое ее *определителем*, следующим образом:

1) если $n = 1$, т. е. $A = (a_{11})$, тогда $\Delta = a_{11}$;

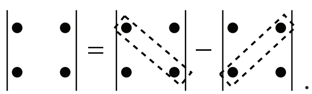
2) $n = 2$, т. е.

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Вычисление определителя 2-го порядка иллюстрируется схемой



3) $n = 3$, т. е.

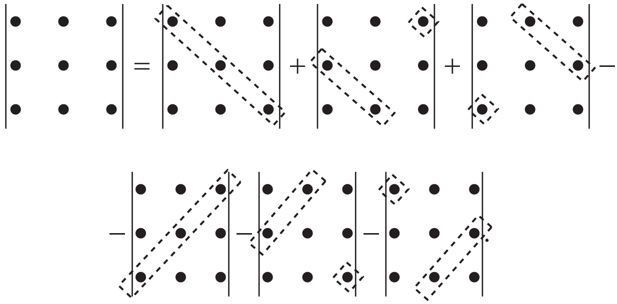
$$A_{3\times 3} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

тогда

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$- a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11}.$$

При вычислении определителя 3-го порядка удобно пользоваться правилом треугольников (или Саррюса), которое символически можно записать так:



П р и м е р. Вычислить определитель матрицы

$$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}2 & 3\\ -2 & 5\end{vmatrix}=2\cdot 5-(-2)\cdot 3=16.$$

П р и м е р. Вычислить определитель матрицы

$$A_{2\times 2}=\begin{pmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}\cos\alpha & \sin\alpha\\ -\sin\alpha & \cos\alpha\end{vmatrix}=\cos\alpha\cdot\cos\alpha-(-\sin\alpha)\cdot\sin\alpha=\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1.$$

Ответ. 1.

П р и м е р. Вычислить определитель матрицы

$$A_{3\times 3}=\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & -3 & 4\\ 2 & -1 & 5\\ 3 & 0 & 1\end{vmatrix}=1\cdot(-1)\cdot 1+(-3)\cdot 5\cdot 3+2\cdot 0\cdot 4-$$

$$-3\cdot(-1)\cdot 4-2\cdot(-3)\cdot 1-1\cdot 0\cdot 5=-1-45+12+6=-28.$$

Ответ. −28.

Правило вычисления определителя для матрицы порядка $n > 3$ является довольно сложным для восприятия и применения. Однако известны методы, позволяющие реализовать вычисление определителей высоких порядков на основе определителей низших порядков. Один из методов основан на свойстве разложения определителя по элементам некоторого ряда. При этом заметим, что определители невысоких порядков (1, 2, 3) желательно уметь вычислять согласно определению.

1.5. Свойства определителей

Сформулируем основные свойства определителей, присущие определителям всех порядков. Некоторые из этих свойств поясним на определителях 3-го порядка.

1^0. («Равноправность строк и столбцов»). Определитель не изменится, если его строки заменить столбцами, и наоборот.

$$\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{21}\\ a_{12} & a_{22}\end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

Проверим это свойство на определителях 2-го и 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{21} \cdot a_{12} \cdot a_{33} - a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} +$$

$$+a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - a_{31} \cdot a_{22} \cdot a_{13} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

2^0. При перестановке двух параллельных рядов определитель меняет знак. Проверим это свойство на определителях 2-го и 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = -\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} -$$

$$-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}-a_{32}\cdot a_{23}\cdot a_{11}=-(a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}+a_{22}\cdot a_{13}\cdot a_{31}+$$

$$+a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{23}-a_{23}\cdot a_{12}\cdot a_{31}-a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}-a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13})=-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

3^0. Определитель, имеющий два одинаковых ряда, равен нулю. Проверим это свойство на определителях 2-го и 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix}=a_{11}a_{12}-a_{12}a_{11}=0,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\underline{a_{11}\cdot a_{12}\cdot a_{33}}+\underline{\underline{a_{12}\cdot a_{13}\cdot a_{31}}}+a_{11}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-$$

$$-\underline{\underline{a_{13}\cdot a_{12}\cdot a_{31}}}-\underline{a_{12}\cdot a_{11}\cdot a_{33}}-a_{32}\cdot a_{11}\cdot a_{13}=0.$$

4^0. Общий множитель элементов какого-либо ряда определителя можно вынести за знак определителя.

Проверим это свойство на определителе 3-го порядка.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\cdot ka_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot ka_{23}\cdot a_{31}+ka_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-$$

$$-a_{31}\cdot ka_{22}\cdot a_{13}-a_{11}\cdot ka_{23}\cdot a_{32}-ka_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33}=k(a_{11}\cdot a_{22}\cdot a_{33}+a_{12}\cdot a_{23}\cdot a_{31}+$$

$$+a_{21}\cdot a_{32}\cdot a_{13}-a_{31}\cdot a_{22}\cdot a_{13}-a_{11}\cdot a_{23}\cdot a_{32}-a_{21}\cdot a_{12}\cdot a_{33})=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}.$$

Из свойств 3 и 4 следует, что если все элементы некоторого ряда пропорциональны соответствующим элементам параллельного ряда, то такой определитель равен нулю.

Действительно,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ ka_{11} & ka_{12} & ka_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=k\cdot 0=0.$$

5^0. Если элементы какого-либо ряда определителя представляют собой суммы двух слагаемых, то определитель может быть разложен на сумму двух соответствующих определителей. Например,

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}+b\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}+c\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}+d\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b\\ a_{21} & a_{22} & c\\ a_{31} & a_{32} & d\end{vmatrix}.$$

6^0. («Элементарные преобразования определителя»). Определитель не изменится, если к элементам одного ряда прибавить соответствующие элементы параллельного ряда, умноженные на любое число. Например,

$$\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23}\end{vmatrix}.$$

Проверим это свойство на определителе 3-го порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+ka_{21} & a_{32}+ka_{22} & a_{33}+ka_{23} \end{vmatrix} \overset{\text{свойство 5}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ ka_{21} & ka_{22} & ka_{23} \end{vmatrix} \overset{\text{свойство 4}}{=} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \overset{\text{свойство 3}}{=}$$

$$= \Delta + k \cdot 0.$$

Дальнейшие свойства определителей связаны с понятиями минора и алгебраического дополнения.

Определение. *Минором* некоторого элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель $(n-1)$-го порядка, полученный из исходного путем вычеркивания строки и столбца, на пересечении которых находится выбранный элемент. Обозначается M_{ij}.

Например, если

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

тогда, например,

$$M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \ M_{23} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Определение. *Алгебраическим дополнением* элемента a_{ij} определителя называется его минор, взятый со знаком «плюс», если сумма $i + j$ — четное число, и со знаком «минус», если эта сумма нечетная. Обозначается A_{ij}: $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$.

Так, $A_{11} = +M_{11}$, $A_{23} = -M_{23}$.

7⁰. **Теорема Лапласа** («Разложение определителя по элементам некоторого ряда»). Определитель квадратной матрицы равен сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на их алгебраические дополнения:

$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in}$ (разложение по элементам i-строки, $i = \overline{1,n}$), $\Delta = a_{1j} \cdot$

$A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj}$ (разложение по элементам j-столбца, $j = \overline{1,n}$).

Проиллюстрируем и одновременно докажем теорему на примере определителя 3-го порядка. В этом случае теорема означает, что

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13}.$$

В самом деле, имеем

$$a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} = a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{12} \cdot \left(-\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} \right) +$$

$$+a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{23}a_{32}) - a_{12}(a_{21}a_{33} - a_{23}a_{31}) +$$

$$+a_{13}(a_{21}a_{32} - a_{22}a_{31}) = a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} +$$

$$+a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} = \Delta.$$

Свойство 7 содержит в себе способ вычисления определителей высоких порядков.

П р и м е р. Вычислить определитель матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{pmatrix}.$$

Решение.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 7 & 8 \\ -1 & 7 & 0 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 & 1 \\ 5 & 3 & 2 \\ -1 & 7 & 4 \end{vmatrix} - 5 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 2 \\ 1 & 7 & 4 \end{vmatrix} +$$

$$+7 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & 4 \end{vmatrix} - 8 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 7 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \\ 1 & -1 & 7 \end{vmatrix} = 3 \cdot (7 \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \cdot (-1) + 5 \cdot 7 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 3 \cdot (-1) - 2 \cdot 7 \cdot 7 - 5 \cdot 0 \cdot 4) - 5 \cdot ((-1) \cdot 3 \cdot 4 + 0 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 7 \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 3 \cdot 1 - 2 \cdot 7 \cdot (-1) - 0 \cdot 0 \cdot 4) + 7 \cdot ((-1) \cdot 5 \cdot 4 + 7 \cdot 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 \cdot (-1) -$$

$$-1 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot (-1) \cdot (-1) - 0 \cdot 7 \cdot 4) - 8 \cdot ((-1) \cdot 5 \cdot 7 + 7 \cdot 3 \cdot 1 + 0 \cdot 0 \cdot (-1) -$$

$$-0 \cdot 5 \cdot 1 - (-1) \cdot (-1) \cdot 3 - 0 \cdot 7 \cdot 7) = 3 \cdot (84 + 35 + 3 - 98) - 5 \cdot (-12 - 3 +$$

$$+14) + 7 \cdot (-20 + 14 - 5 - 2) - 8 \cdot (-35 + 21 - 3) = 72 + 5 - 91 + 136 = 122.$$

Ответ. 122.

8^0. Сумма произведений элементов какого-либо ряда определителя на алгебраические дополнения соответствующих элементов параллельного ряда равна нулю. Например,

$$a_{11}A_{21} + a_{12}A_{22} + a_{13}A_{23} = 0.$$

Самостоятельная работа

Найти определитель:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 5 \end{vmatrix}.$

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix}.$

3. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 4 & 1 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{vmatrix}.$

4. $\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}.$

5. $\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 6 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}.$

Ответы.

1. 12. 2. 1. 3. –5. 4. 48. 5. 665.

1.6. Обратная матрица

Пусть A — квадратная матрица n-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Квадратная матрица A называется *невырожденной*, если определитель Δ не равен нулю: $\Delta \neq 0$. В противном случае матрица A называется *вырожденной*.

Определение. Матрица, составленная из алгебраических дополнений, называется *союзной* (*присоединенной*) *к матрице A*. Обозначается A^*.

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ A_{n1} & A_{n2} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix},$$

где A_{ij} — алгебраическое дополнение элемента a_{ij} данной матрицы A (оно определяется так же, как и алгебраическое дополнение элемента определителя).

Определение. Матрица A^{-1} называется *обратной к матрице A*, если выполняется условие $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$, где E — единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Матрица A^{-1} имеет те же размеры, что и матрица A.

Теорема. Всякая невырожденная матрица имеет обратную.

Проведем доказательство для случая матрицы 3-го порядка. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix},$$

причем $\Delta \neq 0$.

Составим союзную матрицу

$$A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}$$

и найдем произведение матриц A и $(A^*)^T$.

$$A\cdot\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} d_{11} & d_{12} & d_{13} \\ d_{21} & d_{22} & d_{23} \\ d_{31} & d_{32} & d_{33} \end{pmatrix}.$$

$d_{11}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}=\Delta$ по свойству 7;

$d_{12}=a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=0$ по свойству 8;

$d_{13}=a_{11}A_{31}+a_{12}A_{32}+a_{13}A_{33}=0$ по свойству 8;

$d_{21}=a_{21}A_{11}+a_{22}A_{12}+a_{23}A_{13}=0$ по свойству 8;

$d_{22}=a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=\Delta$ по свойству 7;

$d_{23}=a_{21}A_{31}+a_{22}A_{32}+a_{23}A_{33}=0$ по свойству 8;

$d_{31}=a_{31}A_{11}+a_{32}A_{12}+a_{33}A_{13}=0$ по свойству 8;

$d_{32}=a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}=0$ по свойству 8;

$d_{33}=a_{31}A_{31}+a_{32}A_{32}+a_{33}A_{33}=\Delta$ по свойству 7.

Тогда

$$A\cdot\left(A^*\right)^T=\begin{pmatrix} \Delta & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 \\ 0 & 0 & \Delta \end{pmatrix}=\Delta\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=\Delta\cdot E.$$

Таким образом, $A\cdot(A^*)^T=\Delta\cdot E$. Получаем

$$E=A\cdot\frac{\left(A^*\right)^T}{\Delta}.$$

Аналогично можно убедиться, что $(A^*)^T\cdot A=\Delta\cdot E$. Отсюда получаем

$$E=\frac{\left(A^*\right)^T}{\Delta}\cdot A,$$

т. е. $A^{-1}=\frac{\left(A^*\right)^T}{\Delta}$ — обратная матрица (по определению), т. е.

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}.$$

П р и м е р. Найти A^{-1}, если

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Решение.

1. Найдем определитель матрицы:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{vmatrix}=2\cdot 5-(-1)\cdot(-4)=10-4=6\neq 0,$$

значит, обратная матрица существует.

2. Запишем присоединенную матрицу.

Алгебраические дополнения равны

$$A_{11}=5,\ A_{12}=1,\ A_{21}=4,\ A_{22}=2,$$

тогда

$$A^*=\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. $A^{-1}=\frac{\left(A^*\right)^T}{\Delta}=\frac{1}{6}\cdot\begin{pmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$

4. Выполним проверку, для этого покажем, что

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E.$$

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{5}{6} - 4 \cdot \frac{1}{6} & \frac{4}{3} - \frac{4}{3} \\ -\frac{5}{6} + \frac{5}{6} & -\frac{2}{3} + \frac{5}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot \frac{5}{6} - 1 \cdot \frac{2}{3} & -\frac{5}{6} \cdot 4 + \frac{2}{3} \cdot 5 \\ \frac{1}{6} \cdot 2 - \frac{1}{6} \cdot 1 & -\frac{1}{6} \cdot 4 + \frac{1}{3} \cdot 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{5}{6} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

П р и м е р. Найти A^{-1}, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Решение.

1. Найдем определитель матрицы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-3) \cdot 1 + 1 \cdot (-2) \cdot 1 + 1 \cdot 0 \cdot 0 - 1 \cdot (-3) \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 0 \cdot 1 - 0 \cdot (-2) \cdot 1 = -3 - 2 + 3 = -2 \neq 0,$$

значит, обратная матрица существует.

2. Запишем присоединенную матрицу.
Алгебраические дополнения равны:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-3, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=1,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}0 & -3\\ 1 & 0\end{vmatrix}=3, \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=2,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}=0, \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-2,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 1\\ -3 & 1\end{vmatrix}=1, \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=-1,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}1 & -2\\ 0 & -3\end{vmatrix}=-3, \qquad \text{тогда } A^*=\begin{pmatrix}-3 & 1 & 3\\ 2 & 0 & -2\\ 1 & -1 & -3\end{pmatrix}.$$

3. $$A^{-1}=\frac{\left(A^*\right)^T}{\Delta}=\frac{1}{-2}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 2 & 1\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -2 & -3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1.5 & -1 & -0.5\\ -0.5 & 0 & 0.5\\ -1.5 & 1 & 1.5\end{pmatrix}.$$

4. Выполним проверку, для этого покажем, что

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -2 & 1\\ 0 & -3 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1.5 & -1 & -0.5\\ -0.5 & 0 & 0.5\\ -1.5 & 1 & 1.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1\cdot1.5+2\cdot0.5-1\cdot1.5 & -1\cdot1-2\cdot0+1\cdot1 & -1\cdot0.5-2\cdot0.5+1\cdot1.5\\ 0\cdot1.5+3\cdot0.5-1\cdot1.5 & -1\cdot0-3\cdot0+1\cdot1 & -0.5\cdot0-3\cdot0.5+1\cdot1.5\\ 1.5\cdot1-0.5\cdot0-1.5\cdot1 & -1\cdot1+0\cdot0+1\cdot1 & -0.5\cdot1+0\cdot0.5+1\cdot1.5\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ -1.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1.5\cdot 1 - 1\cdot 0 - 0.5\cdot 1 & -1.5\cdot 2 + 1\cdot 3 - 0.5\cdot 0 & 1.5\cdot 1 - 1\cdot 1 - 0.5\cdot 1 \\ -0.5\cdot 1 + 0\cdot 0 + 0.5\cdot 1 & 0.5\cdot 2 - 3\cdot 0 + 0.5\cdot 0 & -0.5\cdot 1 + 0\cdot 1 + 0.5\cdot 1 \\ -1.5\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1.5\cdot 1 & 1.5\cdot 2 - 1\cdot 3 + 1.5\cdot 0 & -1.5\cdot 1 + 1\cdot 1 + 1.5\cdot 1 \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Ответ.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1.5 & -1 & -0.5 \\ -0.5 & 0 & 0.5 \\ -1.5 & 1 & 1.5 \end{pmatrix}.$$

1.7. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \ddots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Определение. Наибольший из порядков миноров данной матрицы, отличных от нуля, называется *рангом* матрицы. Обозначается $r(A)$ или rang A.

Очевидно, что $0 \le r \le \min(m;\, n)$, где $\min(m;\, n)$ — меньшее из чисел m и n.

В общем случае нахождение ранга матрицы перебором всех миноров достаточно трудоемко. Для облегчения этой задачи используются преобразования, сохраняющие ранг матрицы.

Свойства ранга матрицы

1^0. При транспонировании матрицы ее ранг не меняется.

2^0. Если вычеркнуть из матрицы нулевой ряд, то ранг матрицы не изменится.

3^0. Ранг матрицы не изменяется при элементарных преобразованиях матрицы.

Сведем матрицу к диагональному или треугольному виду (если матрица квадратная) или кононическому виду (если матрица не квадратная).

Определение. Количество ненулевых строк называется *рангом* матрицы.

Пример. Найти ранг матрицы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение. Выполним ряд элементарных преобразований, чтобы получить максимальное количество нулевых строк:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \cdot 0.5 \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \cdot \frac{1}{2} \\ \mathrm{III} - 4 \cdot \mathrm{I} \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \end{pmatrix}_{\cdot\frac{1}{3}} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & 1 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{I}-1.5\cdot\text{II} \\ \\ \text{III}+2\cdot\text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.25 & -0.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{I}+0.5\cdot\text{III} \\ \text{II}-\text{III} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1.25 & 0 \\ 0 & 1 & -0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Более невозможно получить нули в матрице, значит, ранг матрицы равен 3.

Ответ. $r(A) = 3$.

Самостоятельная работа

Найти обратную матрицу к матрице:

1. $A = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ -8 & 6 \end{pmatrix}$.

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

4. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Найти ранг матрицы:

5. $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 3 & 1 & 4 & 5 \\ 0 & 3 & 4 & -5 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

6. $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -3 & 4 \\ 5 & 1 & -1 & 7 \\ 7 & 7 & 9 & 1 \end{pmatrix}$.

7. $A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -2 & 4 \\ 2 & -1 & 1 & 8 & 2 \end{pmatrix}$.

8. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ответы.

1. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -2 \\ -4 & -\frac{5}{2} \end{pmatrix}$.

2. $A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{5}{8} & \frac{1}{8} & -\frac{1}{4} \\ \frac{13}{8} & -\frac{1}{8} & \frac{5}{8} \end{pmatrix}$.

3. $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{9} \\ -\frac{2}{9} & \frac{1}{9} & \frac{2}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{2}{9} & \frac{2}{9} \end{pmatrix}$.

4. Нет обратной матрицы.

5. 4. 6. 3. 7. 2. 8. 3.

2. СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

2.1. Основные понятия

Определение. *Системой линейных алгебраических уравнений*, содержащей m уравнений и n неизвестных, называется система вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases}$$

где числа a_{ij} называются коэффициентами системы, числа b_i — свободными членами.

Такую систему удобно записывать в компактной матричной форме $AX = B$.

Определение.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

называется *основной матрицей системы*.

Определение.

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}$$ — *вектор-столбец из неизвестных* x_j.

Определение.

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}$$ — *вектор-столбец из свободных членов* b_i.

Произведение матриц AX определено, так как в матрице A столбцов столько же, сколько строк в матрице X.

Определение. *Расширенной матрицей системы* называется матрица A системы, дополненная столбцом свободных членов:

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & b_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}.$$

Определение. *Решением системы* называется n значений неизвестных $x_1 = c_1$, $x_2 = c_2$, ... $x_n = c_n$, при подстановке которых все уравнения системы обращаются в верные равенства.

Всякое решение системы можно записать в виде вектора-столбца

$$C = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \ldots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Определение. Система уравнений называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение, и *несовместной*, если она не имеет ни одного решения.

Определение. Совместная система называется *определенной*, если она имеет единственное решение, и *неопределенной*, если имеет более одного решения.

Определение. Для неопределенной системы каждое ее решение называется *частным решением* системы. Совокупность всех частных решений называется *общим решением*.

Определение. *Решить систему* — значит выяснить, совместна она или несовместна. Если система совместна, найти ее общее решение.

Определение. Две системы называются *эквивалентными* (*равносильными*), если они имеют одно и то же общее решение.

То есть системы эквивалентны, если каждое решение одной из них является решением другой, и наоборот.

Определение. Система линейных уравнений называется *однородной*, если ее свободные члены равны нулю:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = 0, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = 0, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Утверждение. Однородная система всегда совместна.

Утверждение верно, так как $x_1 = x_2 = x_3 = \ldots = x_n = 0$ является решением системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным*.

2.2. Решение систем линейных уравнений

Пусть дана произвольная система m линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Исчерпывающий ответ на вопрос о совместности этой системы дает теорема Кронекера — Капелли. Приведем эту теорему без доказательства.

Теорема 1 (Кронекера — Капелли). Система линейных алгебраических уравнений совместна тогда и только тогда, когда ранг расширенной матрицы системы равен рангу основной матрицы.

Правила практического отыскания всех решений совместной системы линейных уравнений вытекают из следующих теорем.

Теорема 2. Если ранг совместной системы равен числу неизвестных, то система имеет единственное решение.

Теорема 3. Если ранг совместной системы меньше числа неизвестных, то система имеет бесчисленное множество решений.

П р и м е р. Исследовать на совместность систему

$$\begin{cases} x + y = 1, \\ 2x + 2y = -3. \end{cases}$$

Решение. Запишем основную матрицу системы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix},$$

ее ранг $r(A) = 1$. Запишем расширенную матрицу

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -3 \end{pmatrix},$$

ее ранг $r(A) = 2,$ так как

$$\left(\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0 \right).$$

Таким образом, $r(A) \neq r(\overline{A})$, следовательно, система несовместна.

2.3. Решение невырожденных линейных систем матричным методом

Пусть дана система n линейных уравнений с n неизвестными

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

или в матричной форме $AX = B$.

Основная матрица A такой системы квадратная.

Определение. Определитель этой матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

называют *главным определителем системы*.

Найдем решение данной системы уравнений в случае $\Delta \neq 0$.

Умножив обе части уравнения $AX = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

Поскольку $A^{-1}A = E$ и $EX = X$, то $X = A^{-1}B$.

Определение. Отыскание решения системы по формуле $X = A^{-1}B$ называют *матричным способом решения системы*.

П р и м е р. Решить систему матричным способом:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0, \\ x_1 + 3x_2 = 7. \end{cases}$$

Решение. Так как $X = A^{-1}B$, то сначала вычисляем обратную матрицу к основной матрице системы:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 1 \cdot (-1) = 7 \neq 0,$$

т. е. обратная матрица существует и система совместна.

Алгебраические дополнения равны $A_{11} = 3$, $A_{12} = -1$, $A_{21} = 1$, $A_{22} = 2$, тогда

$$A^* = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, решение имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} \cdot 0 + \frac{1}{7} \cdot 7 \\ -\frac{1}{7} \cdot 0 + \frac{2}{7} \cdot 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $x_1 = 1, x_2 = 2.$

П р и м е р. Решить систему матричным способом:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5, \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10. \end{cases}$$

Решение. Так как $X = A^{-1}B$, то сначала найдем обратную матрицу к основной матрице системы:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = 15 + 8 - 18 - 9 - 12 + 20 = 4 \neq 0,$$

т. е. система совместна.

Алгебраические дополнения равны:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 3, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = -14,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = 10,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -9, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = 7,$$

тогда $A^* = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ -14 & 2 & 10 \\ -9 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ и $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{7}{2} & -\frac{9}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix}.$

Таким образом, решение имеет вид

$$X = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & -\frac{7}{2} & -\frac{9}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & \frac{5}{2} & \frac{7}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Ответ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$.

2.4. Решение систем линейных уравнений методом Крамера

Суть метода решения систем, базирующегося на нахождении определителей, отражена в теореме.

Теорема Крамера. Если главный определитель системы Δ отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое находится по формуле Крамера:

$$x_j = \frac{\Delta_j}{\Delta}, \; j = \overline{1, n},$$

где Δ_j — определитель, полученный из определителя Δ заменой j-го столбца на столбец свободных членов.

Данный метод удобно применять для систем невысоких порядков (не выше третьего), а также если нужно найти одну из неизвестных. Трудность метода заключается в том, что необходимо вычислять много определителей.

П р и м е р. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 = 7, \\ 2x_1 + x_2 = 9. \end{cases}$$

Решение. Вычислим основной определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 4 = 1 \neq 0.$$

Вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 7 & 2 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 7 - 18 = -11, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 9 \end{vmatrix} = 45 - 14 = 31,$$

тогда решение системы будет иметь вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{-11}{1} = -11, \ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{31}{1}.$$

Ответ. $x_1 = -11$, $x_2 = 31$.

П р и м е р. Решить систему методом Крамера:

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 = 1, \\ -4x_1 + 5x_2 = -6, \\ 6x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 2. \end{cases}$$

Решение. Вычислим основной определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -4 & 5 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -14 \neq 0.$$

Вычислим дополнительные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -6 & 5 & 0 \\ 2 & -3 & 2 \end{vmatrix} = 14, \ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -4 & -6 & 0 \\ 6 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 28, \ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ -4 & 5 & -6 \\ 6 & -3 & 2 \end{vmatrix} = -14,$$

тогда решение системы имеет вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{-14} = -1,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{28}{-14} = -2,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-14}{-14} = 1.$$

Ответ. $x_1 = -1$, $x_2 = -2$, $x_3 = 1$.

2.5. Решение систем линейных уравнений методом Жордана — Гаусса

Одним из наиболее универсальных и эффективных методов решений линейных алгебраических систем является метод Жордана — Гаусса, состоящий в последовательном исключении неизвестных. Метод позволяет с помощью элементарных преобразований за конечное число шагов найти решение. Рассмотрим систему линейных уравнений с n-неизвестными:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

Пусть ранг матрицы системы равен r. Исследование и решение системы сводится к эквивалентным преобразованиям этой системы в систему, где основная матрица приводится к канонической. Решение систем по методу Жордана — Гаусса будем производить в следующей последовательности:

1. В исходную матрицу записывается расширенная матрица системы.

2. Выбирается разрешающий элемент $a_{ij} \neq 0$ (лучше, чтобы $a_{ij} = 1$), при этом следует помнить, что дважды в одной строке выбирать разрешающий элемент нельзя.

Определение. Строка, в которой стоит разрешающий элемент, называется *разрешающей строкой*.

Определение. Столбец, в котором стоит разрешающий элемент, называется *разрешающим столбцом*.

3. Если $a_{ij} = 1$, то разрешающая строка переписывается в следующую таблицу без изменений; если $a_{ij} \neq 1$, то все элементы разрешающей строки делятся на a_{ij}.

4. Все элементы разрешающего столбца, кроме a_{ij}, должны быть 0. Это достигается путем эквивалентных преобразований. Получаем единичный столбец.

5. На этом все преобразования 1-й итерации заканчиваются и весь расчет повторяется с пункта 2.

Число итераций в решении системы равно рангу матрицы r, т. е. процесс продолжается до тех пор, пока не будет r единичных столбцов коэффициентов.

При элементарных преобразованиях возможны следующие случаи:

1. Получаем строку $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b_i \neq 0$. Это значит, что система несовместна, т. е. решений нет.

2. Получаем две строки с одинаковой левой частью и разной правой. Это значит, что система несовместна, т. е. решений нет.

3. Получаем строку $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$. Этому уравнению удовлетворяет любое найденное решение системы, поэтому оно может быть отброшено.

4. Получим две одинаковые строки. Значит, имеем два одинаковых уравнения. Одно уравнение может быть отброшено.

Пусть исходная система совместна и ранг матрицы системы равен r. Возможны два случая:

1) $r = n$, где n — число неизвестных, тогда системы имеет единственное решение;

2) $r < n$, тогда исходная система имеет бесчисленное множество решений.

Определение. Неизвестные, относительно которых система разрешима (т. е. неизвестные при единичных столбцах), называются *базисными*. Все остальные неизвестные называются *свободными*.

Определение. Если в общем решении системы свободные переменные приравнять к нулю, то получим решение, называемое *базисным*.

П р и м е р. Решить систему методом Жордана — Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - x_2 + x_3 = 5, \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6, \\ x_1 - x_2 - x_3 = 0. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы, где пунктиром выделен разрешающий элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \\ {\scriptstyle \mathrm{I}\leftrightarrow\mathrm{IV}} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ {\scriptstyle \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I}} \\ {\scriptstyle \mathrm{III}-\mathrm{I}} \\ {\scriptstyle \mathrm{IV}-\mathrm{I}} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 2 & 6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{matrix} {\scriptstyle \mathrm{I}+\mathrm{II}} \\ \\ {\scriptstyle \mathrm{III}-2\cdot\mathrm{II}} \\ {\scriptstyle \mathrm{IV}+\mathrm{II}} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ {\scriptstyle \cdot(-0.25)} \\ {\scriptstyle \cdot\frac{1}{3}} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{matrix} {\scriptstyle \mathrm{I}+2\cdot\mathrm{III}} \\ {\scriptstyle \mathrm{II}+3\cdot\mathrm{III}} \\ \\ {\scriptstyle \text{отбросим}} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x_1 = 3, \\ x_2 = 2, \\ x_3 = 1. \end{cases}$$

Ответ. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.

П р и м е р. Решить систему методом Жордана — Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - 2x_4 = 2, \\ x_1 - 2x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -2, \\ x_2 + 3x_3 - x_4 = 3. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 & -2 & 2 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \cdot 0.5 \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} \boxed{1} & 1.5 & 0.5 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \text{II}-\text{I} \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & -1 & 1 \\ 0 & -3.5 & -2.5 & 4 & -3 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \text{II} \leftrightarrow \text{III} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -1 & 3 \\ 0 & -3.5 & -2.5 & 4 & -3 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \text{III}+3.5\cdot\text{II} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1.5 & 0.5 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 8 & 0.5 & 7.5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{I}-1.5\cdot\text{II} \\ \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0.5 & -3.5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \boxed{8} & 0.5 & 7.5 \end{pmatrix}\begin{matrix} \\ \\ \cdot\frac{1}{8} \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4 & 0.5 & -3.5 \\ 0 & 1 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{15}{16} \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{I}+4\cdot\text{III} \\ \text{II}-3\cdot\text{III} \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{19}{16} & \frac{3}{16} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{16} & \frac{15}{16} \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x_1 + \dfrac{3}{4} \cdot x_4 = \dfrac{1}{4}, \\ x_2 - \dfrac{19}{16} x_4 = \dfrac{3}{16}, \\ x_3 + \dfrac{1}{16} x_4 = \dfrac{15}{16}. \end{cases}$$

Таким образом, x_4 — свободная переменная и общее решение системы запишется в виде

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{4} - \dfrac{3}{4} x_4, \\ x_2 = \dfrac{3}{16} + \dfrac{19}{16} x_4, \\ x_3 = \dfrac{15}{16} - \dfrac{1}{16} x_4. \end{cases}$$

Базисное решение выглядит следующим образом:

$$x_1 = \frac{1}{4},\ x_2 = \frac{3}{16},\ x_3 = \frac{15}{16},\ x_4 = 0.$$

Ответ.

$$x_1 = \frac{1}{4} - \frac{3}{4} x_4,\ x_2 = \frac{3}{16} + \frac{19}{16} x_4,\ x_3 = \frac{15}{16} - \frac{1}{16} x_4.$$

П р и м е р. Решить систему методом Жордана — Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 2, \\ 2x_2 + x_3 = 1, \\ 3x_1 + x_2 - x_3 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 = -2. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} \boxed{1} & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \scriptstyle III-3\cdot I \\ \scriptstyle IV-I \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & -6 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \scriptstyle \cdot(0.5) \\ \scriptstyle \cdot(-0.25) \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & \boxed{2} & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -\dfrac{7}{2} & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \scriptstyle III-II \\ \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -\dfrac{9}{2} & -4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \scriptstyle \cdot\left(-\frac{2}{9}\right) \\ \\ \end{matrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \dfrac{8}{9} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Так как мы получили две строки с одинаковой левой частью и разной правой, это значит, что система несовместна, т. е. решений нет.

Ответ. Решений нет.

П р и м е р. Решите систему методом Жордана — Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 3x_2 - 5x_3 = 2, \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 1, \\ 3x_1 - 2x_2 - 2x_3 - 5x_4 = 3, \\ 7x_1 - 5x_2 - 9x_3 - 10x_4 = 8. \end{cases}$$

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccccc} \boxed{1} & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -5 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -5 & 3 \\ 7 & -5 & -9 & -10 & 8 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \scriptstyle \mathrm{II}-2\cdot\mathrm{I} \\ \scriptstyle \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{I} \\ \scriptstyle \mathrm{IV}-7\cdot\mathrm{I} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 7 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 16 & 26 & -10 & -6 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \scriptstyle \mathrm{III}-\mathrm{II} \\ \scriptstyle \cdot 0.5 \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 13 & -5 & -3 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ \scriptstyle \cdot(0.5) \\ \scriptstyle \mathrm{IV}-\mathrm{II} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \scriptstyle \mathrm{I}+3\cdot\mathrm{III} \\ \scriptstyle \mathrm{II}-5\cdot\mathrm{III} \\ \\ \scriptstyle \cdot\frac{1}{3} \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 13 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \scriptstyle \cdot(-1) \\ \\ \scriptstyle \text{отбрасываем} \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -13 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \scriptstyle \cdot\frac{1}{5} \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -\dfrac{13}{5} & 1 & \dfrac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x_1 - 5x_3 = 2, \\ -\dfrac{13}{5}x_3 + x_4 = \dfrac{3}{5}, \\ x_2 = 0. \end{cases}$$

Таким образом, x_3 — свободная переменная и общее решение системы запишется в виде

$$\begin{cases} x_1 = 2 + 5x_3, \\ x_2 = 0, \\ x_4 = \dfrac{3}{5} + \dfrac{13}{5}x_3. \end{cases}$$

Базисное решение выглядит следующим образом:

$$x_1 = 2,\ \ x_2 = 0,\ \ x_3 = 0,\ \ x_4 = \frac{3}{5}.$$

Ответ.

$$x_1 = 2 + 5x_3,\ x_2 = 0,\ x_4 = \frac{3}{5} + \frac{13}{5}x_3.$$

П р и м е р (оптимальный план перевозок). С двух заводов поставляются автомобили для двух автохозяйств, потребности которых соответственно 200 и 300 машин. Первый завод выпустил 350 машин, второй — 150. Известны затраты на перевозку машин с завода в каждое автохозяйство.

Завод	Затраты на перевозку в автохозяйство, денежные единицы	
	1	2
1	15	20
2	8	25

Минимальные затраты на перевозку равны 7950 денежных единиц. Найти оптимальный план перевозок машин.

Решение. Приведем задачу в алгебраическую форму, для этого введем переменные x_{ij} — количество машин, поставляемых с i-го завода j-му автохозяйству, тогда потребности автохозяйств можно описать уравнениями $x_{11} + x_{21} = 200$, $x_{12} + x_{22} = 300$; возможности заводов — уравнениями $x_{11} + x_{12} = 350$, $x_{21} + x_{22} = 150$; выполнения

условия минимальности затрат на перевозки — уравнением $15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{21} + 25x_{22} = 7950$.

Таким образом, для нахождения оптимального плана перевозок необходимо решить систему уравнений

$$\begin{cases} x_{11} + x_{21} = 200, \\ x_{12} + x_{22} = 300, \\ x_{11} + x_{12} = 350, \\ x_{21} + x_{22} = 150, \\ 15x_{11} + 20x_{12} + 8x_{21} + 25x_{22} = 7950. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 15 & 20 & 8 & 25 & 7950 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{III}-\text{I} \\ \\ \text{V}-15\cdot\text{I} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 20 & -7 & 25 & 4950 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{III}-\text{II} \\ \\ \text{V}-20\cdot\text{II} \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -1050 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \cdot(-1) \\ \\ \\ \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -1050 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \text{отбрасываем} \\ \\ \\ \end{array} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 200 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & -7 & 5 & -1050 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \text{I}-\text{III} \\ \\ \\ \text{IV}+7\cdot\text{III} \end{array} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & 0 \end{pmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ \\ \cdot\frac{1}{12} \end{array} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} \text{I+IV} \\ \text{II−IV} \\ \text{III−IV} \\ \end{matrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 300 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 150 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда система имеет единственное решение:

$$x_{11} = 50,\ x_{12} = 300,\ x_{21} = 150,\ x_{22} = 0.$$

Ответ. $x_{11} = 50,\ x_{12} = 300,\ x_{21} = 150,\ x_{22} = 0.$

Самостоятельная работа

Решить матричным способом:

1. $\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 = -10. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 6x_1 - 3x_2 + x_3 = -5, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 4, \\ 5x_2 + 2x_4 = 6, \\ -4x_2 + 2x_3 + x_4 = 2, \\ x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = -4, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 = 19, \\ x_2 - x_3 = -5. \end{cases}$

Решить систему методом Крамера:

5. $\begin{cases} x_1 + x_3 = 4, \\ -3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = -1, \\ -4x_1 + x_2 - 8x_3 = -18. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 7x_1 + x_3 = 13, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 11, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 9. \end{cases}$

7. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 6, \\ 3x_1 + 6x_2 + 4x_3 = 23, \\ -5x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -14. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1, \\ 5x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 13, \\ 8x_1 + x_2 - x_4 = 18, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 = -6. \end{cases}$

$$9.\ \begin{cases} 5x_1 + 8x_3 + x_4 = 1, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + 3x_4 = -7, \\ 3x_1 + 3x_3 = -1, \\ 2x_1 + 8x_3 + 2x_4 = -2. \end{cases}$$

Решить методом Жордана — Гаусса:

$$10.\ \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 5. \end{cases}$$

$$11.\ \begin{cases} -x_1 + 3x_2 - 8x_3 + x_4 + 3x_5 = 3, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ -3x_1 + 3x_2 - 2x_3 - x_4 - x_5 = -1. \end{cases}$$

$$12.\ \begin{cases} 2x_1 - 5x_2 - x_3 + 2x_4 = 11, \\ x_2 + x_3 + x_4 = 4, \\ 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 - 2x_4 = -2, \\ -x_1 - 2x_2 - x_3 + x_4 = 2. \end{cases}$$

$$13.\ \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = 0, \\ -2x_1 + 4x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 = 0. \end{cases}$$

Ответы.

1. $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $x_3 = -1$.
2. $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $x_3 = -2$.
3. Решения нет.
4. $x_1 = -3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 7$.
5. $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 1$.
6. $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $x_3 = -1$.
7. $x_1 = 7$, $x_2 = -3$, $x_3 = 5$.
8. $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $x_3 = -1$, $x_4 = -2$.

9. Решения нет.

10. $x_1 = \frac{39}{8} + \frac{7}{6}x_4,\ x_2 = \frac{1}{4},\ x_3 = -\frac{3}{8} + \frac{5}{6}x_4.$

11. $x_1 = \frac{5}{4} - \frac{1}{4}x_4 - \frac{5}{4}x_5,\ x_2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}x_4 - \frac{3}{4}x_5,\ x_3 = -\frac{1}{4} + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_5.$

12. $x_1 = 1,\ x_2 = -1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$

13. $x_1 = x_3 - \frac{7}{4}x_4 + x_5,\ x_2 = -\frac{5}{8}x_4.$

3. ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

3.1. Основные понятия

Определение. *Вектор* — это направленный прямолинейный отрезок, т. е. отрезок, имеющий определенную длину и определенное направление.

Если A — начало вектора, а B — его конец, то вектор обозначается символом $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.

Определение. Вектор $\overrightarrow{BA}$ называется *противоположным* вектору $\overrightarrow{AB}$.

Вектор, противоположный вектору $\vec{a}$, обозначается $-\vec{a}$.

Определение. *Длиной* или *модулем* вектора $\overrightarrow{AB}$ называется длина отрезка AB и обозначается $\left|\overrightarrow{AB}\right|$.

Определение. Вектор, длина которого равна нулю, называется *нулевым вектором* и обозначается $\vec{0}$.

Нулевой вектор направления не имеет.

Определение. Вектор, длина которого равна единице, называется *единичным вектором* и обозначается $\vec{e}$.

Определение. Векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *коллинеарными*, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых $\left(\vec{a} \parallel \vec{b}\right)$.

Коллинеарные векторы могут быть *сонаправлены* (направлены одинаково) или *противоположно направлены*.

Нулевой вектор считается коллинеарным любому вектору.

Определение. Два вектор $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются *равными*, если они сонаправлены и имеют одинаковые длины.

3.2. Линейные операции над векторами

Под линейными операциями над векторами понимают операции сложения и вычитания векторов, а также умножение вектора на число.

3.2.1. Сложение векторов

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — два произвольных вектора. Возьмем произвольную точку O и построим вектор $\vec{a}=\overrightarrow{OA}.$ От точки A отложим вектор $\vec{b}=\overrightarrow{AB}.$ Вектор $\overrightarrow{OB}$, соединяющий начало первого вектора с концом второго, называется суммой векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$: $\overrightarrow{OB}=\vec{a}+\vec{b}.$ Это правило сложения векторов называют *правилом треугольника* (рис. 1).

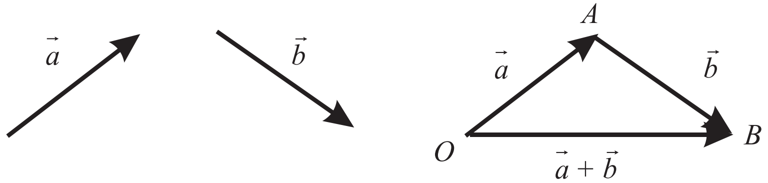


Рис. 1. Сложение векторов по правилу треугольника

Сумму двух векторов можно построить также по *правилу параллелограмма* (рис. 2).

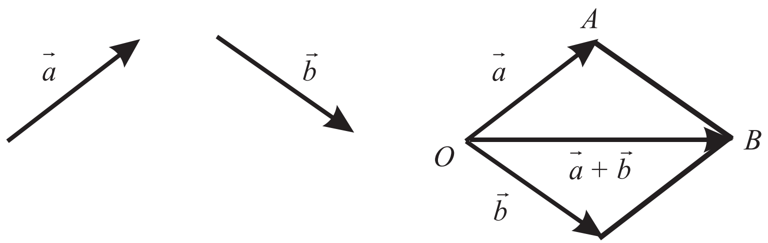


Рис. 2. Сложение векторов по правилу параллелограмма

Можно складывать любое конечное количество векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ и т. д. (рис. 3).

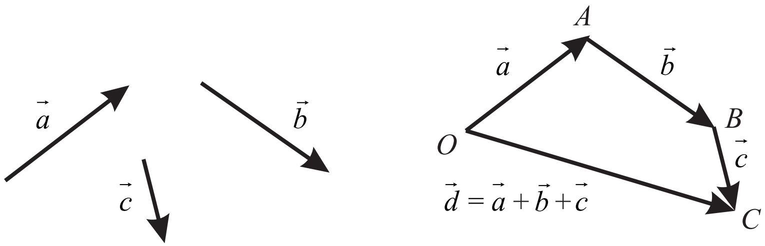


Рис. 3. Сложение нескольких векторов

В случае сложения трех векторов, не параллельных одной плоскости, можно применить правило параллелепипеда (рис. 4).

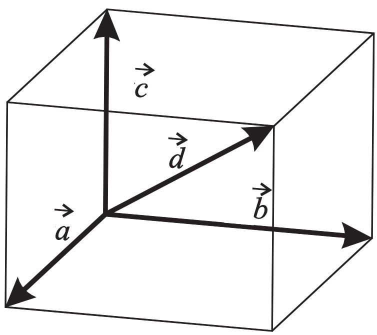


Рис. 4. Сложение векторов по правилу параллелепипеда

3.2.2. Разность векторов

Определение. *Разностью* векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ такой, что $\vec{b} + \vec{c} = \vec{a}$ (рис. 5).

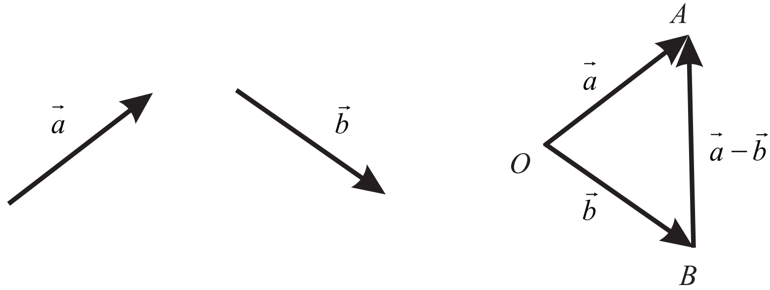


Рис. 5. Разность векторов

Отметим, что в параллелограмме, построенном на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$, одна направленная диагональ является суммой векторов $\vec{a}+\vec{b}$, а другая — разностью $\vec{a}-\vec{b}$ (рис. 6).

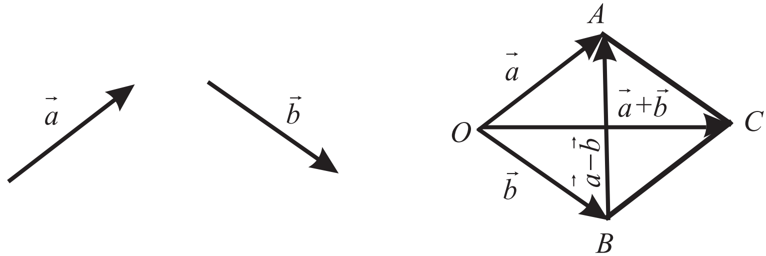


Рис. 6. Сумма и разность векторов

Можно вычитать векторы по правилу $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$, т. е. вычитание векторов заменить сложением вектора $\vec{a}$ с вектором, противоположным вектору $\vec{b}$.

3.2.3. Произведение вектора на число

Определение. *Произведением* вектора $\vec{a}$ на скаляр (число) λ называется вектор $\lambda\cdot\vec{a}$ (или $\vec{a}\cdot\lambda$), который имеет длину $\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\lambda\right|$, коллинеарен вектору $\vec{a}$, имеет направление вектора $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположное направление, если $\lambda < 0$.

Из определения произведения вектора на число следует свойство этого произведения: если $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$, то $\vec{b} \parallel \vec{a}$. Наоборот, если $\vec{b} \parallel \vec{a}$, $\left(\vec{a} \neq \vec{0}\right)$, то при некотором λ верно равенство $\vec{b} = \lambda \cdot \vec{a}$.

Линейные операции над векторами обладают следующими свойствами:

1^0. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$;

2^0. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$;

3^0. $\lambda_1 \cdot \left(\lambda_2 \cdot \vec{a}\right) = \lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \vec{a}$;

4^0. $\left(\lambda_1 + \lambda_2\right) \cdot \vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{a}$;

5^0. $\lambda \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \lambda \cdot \vec{a} + \lambda \cdot \vec{b}$;

6^0. $\vec{a} - \vec{a} = \vec{0}$.

3.3. Компланарные векторы

Определение. Три вектора в пространстве называются *компланарными*, если они лежат в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Если среди трех векторов хотя бы один нулевой или два любые коллинеарны, то такие векторы компланарны.

Признак компланарности векторов

Если вектор $\vec{c}$ можно разложить по $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. представить в виде $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, где x, y — const, то $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — компланарные векторы, и наоборот.

П р а в и л о   п а р а л л е л е п и п е д а (рис. 7)

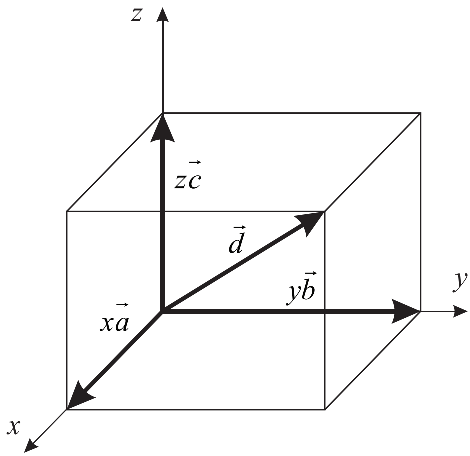


Рис. 7. Правило параллелепипеда

Теорема. Любой вектор можно разложить по трем некомпланарным векторам, причем коэффициенты разложения определяются единственным образом: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.

3.4. Разложение вектора по ортам координатных осей

Рассмотрим в пространстве прямоугольную систему координат $Oxyz$. Выделим на координатных осях Ox, Oy и Oz единичные векторы (орты) (рис. 8), обозначаемые $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$ соответственно. Выберем произвольный вектор $\vec{a}$ пространства и совместим его начало с началом координат: $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$.

Найдем проекции вектора $\vec{a}$ на координатные оси. Проведем через конец вектора $\overrightarrow{OM}$ плоскости, параллельные координатным плоскостям. Точки пересечения этих плоскостей с осями обозначим соответственно через M_1, M_2 и M_3. Получим прямоугольный

параллелепипед, одной из диагоналей которого является вектор $\overrightarrow{OM}$. По определению суммы нескольких векторов находим $\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{M_1N} + \overrightarrow{NM}$. Так как $\overrightarrow{M_1N} = \overrightarrow{OM_2}$, $\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{OM_3}$, то

$$\vec{a} = \overrightarrow{OM_1} + \overrightarrow{OM_2} + \overrightarrow{OM_3}. \tag{1}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \left|\overrightarrow{OM_1}\right| \cdot \vec{i},\ \overrightarrow{OM_2} = \left|\overrightarrow{OM_2}\right| \cdot \vec{j},\ \overrightarrow{OM_3} = \left|\overrightarrow{OM_3}\right| \cdot \vec{k}. \tag{2}$$

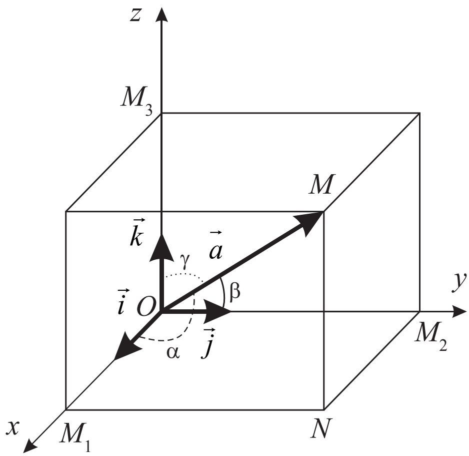


Рис. 8. Разложение вектора по ортам

Обозначим проекции вектора $\vec{a} = \overrightarrow{OM}$ на оси Ox, Oy и Oz соответственно через a_x, a_y, a_z, т. е. $\left|\overrightarrow{OM_1}\right| = a_x$, $\left|\overrightarrow{OM_2}\right| = a_y$, $\left|\overrightarrow{OM_3}\right| = a_z$. Тогда из равенств (1) и (2) получаем

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}. \tag{3}$$

Эта формула является основной в векторном исчислении и называется *разложением вектора* по ортам координатных осей. Числа a_x, a_y, a_z называются *координатами вектора* $\vec{a}$, т. е. координаты вектора есть его проекции на соответствующие координатные оси.

Векторное равенство (3) часто записывают в символическом виде: $\vec{a} = \left\{a_x;\, a_y;\, a_z\right\}$.

Зная проекции вектора $\vec{a}$, можно легко найти выражение для модуля вектора. На основании теоремы о длине диагонали прямоугольного параллелепипеда можно записать:

$$\left|\overrightarrow{OM}\right|^2 = \left|\overrightarrow{OM_1}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_2}\right|^2 + \left|\overrightarrow{OM_3}\right|^2,$$

т. е. $\left|\vec{a}\right|^2 = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2$.

Определение. $\left|\vec{a}\right| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$, т. е. *модуль вектора* равен квадратному корню из суммы квадратов его проекций на оси координат.

3.5. Действия над векторами, заданными проекциями

Пусть векторы $\vec{a} = \left\{a_x; a_y; a_z\right\}$ и $\vec{b} = \left\{b_x; b_y; b_z\right\}$ заданы своими проекциями на оси координат *Ox, Oy, Oz* или, что то же самое, $\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}$ и $\vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}$.

Линейные операции над векторами

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над проекциями этих векторов, то можно записать:

1. При сложении (вычитании) векторов их одноименные координаты складываются (вычитаются), т. е.

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left(a_x \pm b_x\right) \cdot \vec{i} + \left(a_y \pm b_y\right) \cdot \vec{j} + \left(a_z \pm b_z\right) \cdot \vec{k}$$

или

$$\vec{a} \pm \vec{b} = \left\{a_x \pm b_x; a_y \pm b_y; a_z \pm b_z\right\}.$$

2. При умножении вектора на скаляр координаты вектора умножаются на этот скаляр, т. е.

$$\lambda \cdot \vec{a} = \lambda \cdot a_x \cdot \vec{i} + \lambda \cdot a_y \cdot \vec{j} + \lambda \cdot a_z \cdot \vec{k}$$

или

$$\lambda \cdot \vec{a} = \left\{\lambda \cdot a_x ; \lambda \cdot a_y ; \lambda \cdot a_z\right\}.$$

Определение. Два вектора $\vec{a} = \left\{a_x ; a_y ; a_z\right\}$ и $\vec{b} = \left\{b_x ; b_y ; b_z\right\}$ *равны* тогда и только тогда, когда выполняются равенства $a_x = b_x$, $a_y = b_y$, $a_z = b_z$.

Определение. Два вектора $\vec{a} = \left\{a_x ; a_y ; a_z\right\}$ и $\vec{b} = \left\{b_x ; b_y ; b_z\right\}$ *коллинеарны*, если проекции векторов пропорциональны, т. е.

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z}.$$

Верно и обратное утверждение: векторы, имеющие пропорциональные координаты, коллинеарны.

Определение. Вектор, выходящий из начала координат, называется *радиусом-вектором*.

Пусть в пространстве задана прямоугольная декартова система координат $Oxyz$. Для любой точки $M(x, y, z)$ координаты вектора $\overrightarrow{OM}$ называются координатами точки M. Радиус-вектор $\overrightarrow{OM}$ обозначается $\vec{r}$, т. е. $\overrightarrow{OM} = \vec{r}$. Следовательно, координаты точки — это координаты ее радиуса-вектора $\vec{r} = \{x; y; z\}$ или $\vec{r} = x \cdot \vec{i} + y \cdot \vec{j} + z \cdot \vec{k}$.

Найдем координаты вектора $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, если известны координаты точек $A(x_1, y_1, z_1)$ и $B(x_2, y_2, z_2)$. Радиусы-векторы имеют координаты $\overrightarrow{OA}\{x_1, y_1, z_1\}$ и $\overrightarrow{OB}\{x_2, y_2, z_2\}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (x_2 - x_1) \cdot \vec{i} + (y_2 - y_1) \cdot \vec{j} + (z_2 - z_1) \cdot \vec{k}.$$

Следовательно, координаты вектора равны разностям соответствующих координат (рис. 9) его конца и начала:

$$\overrightarrow{AB} = \left\{x_2 - x_1 ; y_2 - y_1 ; z_2 - z_1\right\}.$$

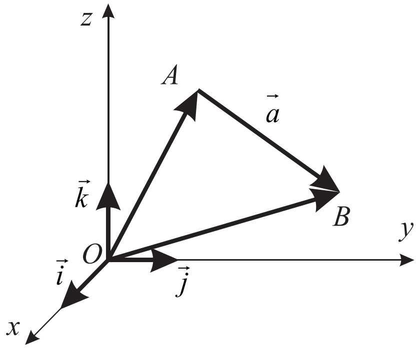
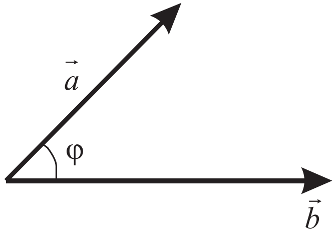


Рис. 9. Разность векторов

3.6. Скалярное произведение векторов и его свойства

3.6.1. Определение скалярного произведения

Определение. Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними.



Обозначается $\vec{a} \cdot \vec{b}$. По определению $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi = \left(\vec{a} \,\hat{}\, \vec{b}\right)$.

3.6.2. Свойства скалярного произведения

1^0. Скалярное произведение обладает переместительным свойством: $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$.

2^0. Скалярное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя: $\left(\lambda\cdot\vec{a}\right)\cdot\vec{b}=\lambda\cdot\left(\vec{b}\cdot\vec{a}\right)$.

3^0. Скалярное произведение обладает распределительным свойством: $\vec{a}\cdot\left(\vec{b}+\vec{c}\right)=\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}$.

4^0. Скалярный квадрат вектора равен квадрату его длины: $\vec{a}^{\,2}=\left|\vec{a}\right|^2$.

5^0. Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ (ненулевые) взаимно перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, т. е. если $\vec{a}\perp\vec{b}$, то $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$. Справедливо и обратное утверждение: если $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$ и $\vec{a}\ne\vec{b}\ne\vec{0}$, то $\vec{a}\perp\vec{b}$.

Выражение скалярного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора:

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\ \text{ и }\ \vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left(a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k}\right)=a_x\cdot b_x\cdot\vec{i}\cdot\vec{i}+$$

$$+a_x\cdot b_y\cdot\vec{i}\cdot\vec{j}+a_x\cdot b_z\cdot\vec{i}\cdot\vec{k}+a_y\cdot b_x\cdot\vec{j}\cdot\vec{i}+a_y\cdot b_y\cdot\vec{j}\cdot\vec{j}+$$

$$+a_y\cdot b_z\cdot\vec{j}\cdot\vec{k}+a_z\cdot b_x\cdot\vec{k}\cdot\vec{i}+a_z\cdot b_y\cdot\vec{k}\cdot\vec{j}+a_z\cdot b_z\cdot\vec{k}\cdot\vec{k}=$$

$$=a_x\cdot b_x+0+0+0+a_y\cdot b_y+0+0+0+a_z\cdot b_z=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z.$$

Таким образом, скалярное произведение векторов равно сумме произведений их одноименных координат:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z.$$

П р и м е р. Пусть заданы два вектора

$$\vec{a}=3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+\vec{k}\ \text{ и }\ \vec{b}=2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}-5\cdot\vec{k}.$$

Тогда скалярное произведение

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 2-2\cdot 4-1\cdot 5=-7.$$

3.6.3. Угол между векторами

По определению скалярного произведения

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|\cdot\cos\varphi.$$

Отсюда

$$\cos\varphi=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\left|\vec{a}\right|\cdot\left|\vec{b}\right|}\ \text{ или }\ \cos\varphi=\frac{a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z}{\sqrt{a_x^2+a_y^2+a_z^2}\cdot\sqrt{b_x^2+b_y^2+b_z^2}}.$$

Если два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ перпендикулярны, то

$$a_x\cdot b_x+a_y\cdot b_y+a_z\cdot b_z=0.$$

П р и м е р. Пусть заданы два вектора

$$\vec{a}=3\cdot\vec{i}-2\cdot\vec{j}+\vec{k}\ \text{ и }\ \vec{b}=2\cdot\vec{i}+4\cdot\vec{j}-5\cdot\vec{k}.$$

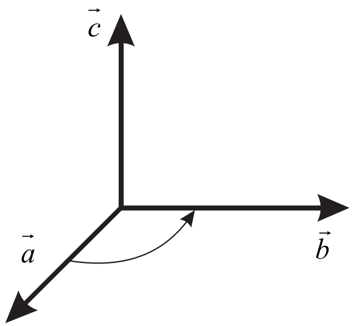
Тогда угол между векторами

$$\cos\varphi=\frac{3\cdot 2-2\cdot 4-1\cdot 5}{\sqrt{3^2+(-2)\ \ +1^2}\cdot\sqrt{2^2+4^2+(-5)^2}}=\frac{-7}{\sqrt{14}\cdot\sqrt{45}}.$$

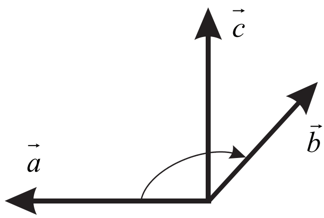
3.7. Векторное произведение векторов и его свойства

3.7.1. Определение векторного произведения

Три некомпланарных вектора $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, взятые в указанном порядке, образуют правую тройку, если с конца третьего вектора $\vec{c}$ кратчайший поворот от первого вектора $\vec{a}$ ко второму вектору $\vec{b}$ виден совершающимся против часовой стрелки, и левую — если по часовой (рис. 10).



Правая тройка



Левая тройка

Рис. 10. Тройки векторов

Определение. Векторным произведением (рис. 11) вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$,

1) который перпендикулярен векторам $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т. е. $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$;

2) имеет длину, численно равную площади параллелограмма, построенного на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$ как на сторонах, т. е.

$$\left|\vec{c}\right| = \left|\vec{a}\right| \cdot \left|\vec{b}\right| \cdot \sin\varphi, \text{ где } \varphi = \left(\widehat{\vec{a},\vec{b}}\right);$$

3) такой, что векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ образуют правую тройку.

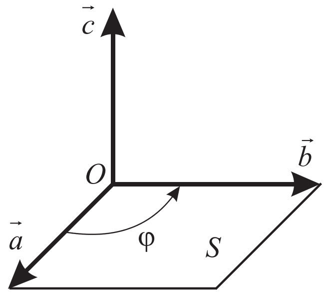


Рис. 11. Векторное произведение

Векторное произведение обозначается $\vec{a} \times \vec{b}$. Из определения векторного произведения непосредственно вытекают следующие соотношения между ортами $\vec{i}$, $\vec{j}$ и $\vec{k}$: $\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}$, $\vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}$, $\vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$.

3.7.2. Свойства векторного произведения

1^0. $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак (рис. 12).

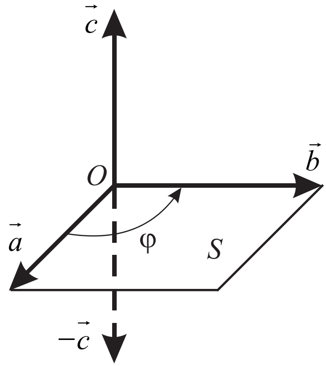


Рис. 12. Свойство 1

2^0. Векторное произведение обладает сочетательным свойством относительно скалярного множителя, т. е.

$$\lambda \cdot \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) = \left(\lambda \cdot \vec{a}\right) \times \vec{b} = \vec{a} \times \left(\lambda \cdot \vec{b}\right).$$

3^0. Два ненулевых вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное произведение равно нулевому вектору, т. е. $\vec{a} \parallel \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$.

4^0. Векторное произведение обладает распределительным свойством:

$$\left(\vec{a} + \vec{b}\right) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}.$$

Выражение векторного произведения через координаты

Пусть заданы два вектора:

$$\vec{a} = a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k} \text{ и } \vec{b} = b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}.$$

Тогда

$$\vec{a} \times \vec{b} = \left(a_x \cdot \vec{i} + a_y \cdot \vec{j} + a_z \cdot \vec{k}\right) \times \left(b_x \cdot \vec{i} + b_y \cdot \vec{j} + b_z \cdot \vec{k}\right) = a_x \cdot b_x \cdot \left(\vec{i} \times \vec{i}\right) +$$

$$+ a_x \cdot b_y \cdot \left(\vec{i} \times \vec{j}\right) + a_x \cdot b_z \cdot \left(\vec{i} \times \vec{k}\right) + a_y \cdot b_x \cdot \left(\vec{j} \times \vec{i}\right) + a_y \cdot b_y \cdot \left(\vec{j} \times \vec{j}\right) +$$

$$+ a_y \cdot b_z \cdot \left(\vec{j} \times \vec{k}\right) + a_z \cdot b_x \cdot \left(\vec{k} \times \vec{i}\right) + a_z \cdot b_y \cdot \left(\vec{k} \times \vec{j}\right) + a_z \cdot b_z \cdot \left(\vec{k} \times \vec{k}\right) =$$

$$= 0 + a_x \cdot b_y \cdot \vec{k} - a_x \cdot b_z \cdot \vec{j} - a_y \cdot b_x \cdot \vec{k} + 0 + a_y \cdot b_z \cdot \vec{i} + a_z \cdot b_x \cdot \vec{j} -$$

$$- a_z \cdot b_y \cdot \vec{i} + 0 = \left(a_y \cdot b_z - a_z \cdot b_y\right) \cdot \vec{i} - \left(a_x \cdot b_z - a_z \cdot b_x\right) \cdot \vec{j} +$$

$$+ \left(a_x \cdot b_y - a_y \cdot b_x\right) \cdot \vec{k} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \cdot \vec{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \cdot \vec{k}.$$

Таким образом,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}.$$

Формулу можно записать через определитель:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

П р и м е р. Найти площадь треугольника, если вершинами треугольника являются точки $A(1, 0, 2)$, $B(2, -1, 0)$ и $C(0, 2, -1)$.

Решение.

$$S_{\text{тр}}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\right|=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Зная координаты векторов

$$\overrightarrow{AB}\{1,-1,-2\} \text{ и } \overrightarrow{AC}\{-1,\ 2,-3\},$$

вычислим площадь:

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -3\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=7\vec{i}+5\vec{j}+\vec{k};$$

$$S=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{7^2+5^2+1^2}=\frac{\sqrt{75}}{2}=\frac{5\sqrt{3}}{2}.$$

Ответ. $S=\dfrac{5\sqrt{3}}{2}.$

3.8. Смешанное произведение векторов

3.8.1. Определение смешанного произведения

Рассмотрим произведение векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$, составленное следующим образом: $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$. Здесь первые два вектора перемножаются векторно, а их результат — скалярно на третий вектор.

Определение. Такое произведение $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ называется *смешанным произведением трех векторов*.

Геометрический смысл смешанного произведения (рис. 13)

Смешанное произведение трех векторов $\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}$ равно объему параллелепипеда, построенного на этих векторах, взятому со знаком «плюс», если эти векторы образуют правую тройку, и со знаком «минус», если они образуют левую тройку.

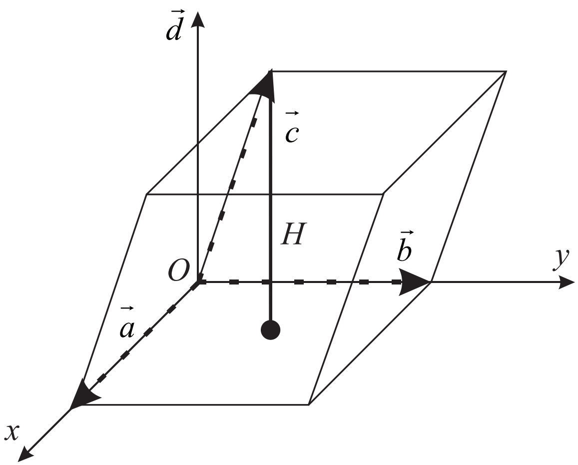


Рис. 13. Смешанное произведение

3.8.2. Свойства смешанного произведения

1^0. Смешанное произведение не меняется при циклической перестановке его сомножителей, т. е.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=\left(\vec{c}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{b}.$$

2^0. Смешанное произведение не меняется при перемене местами знаков векторного и скалярного умножения, т. е.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\left(\vec{b}\times\vec{c}\right).$$

3^0. Смешанное произведение меняет свой знак при перемене мест любых двух векторов-сомножителей, т. е.

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{a}\times\vec{c}\right)\cdot\vec{b},$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{b}\times\vec{a}\right)\cdot\vec{c},$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=-\left(\vec{c}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{a}.$$

4^0. Смешанное произведение ненулевых векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ равно нулю тогда и только тогда, когда они компланарны.

3.8.3. Выражение смешанного произведения через координаты

Пусть заданы векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$:

$$\vec{a}=a_x\cdot\vec{i}+a_y\cdot\vec{j}+a_z\cdot\vec{k},$$

$$\vec{b}=b_x\cdot\vec{i}+b_y\cdot\vec{j}+b_z\cdot\vec{k},\ \vec{c}=c_x\cdot\vec{i}+c_y\cdot\vec{j}+c_z\cdot\vec{k}.$$

Найдем их смешанное произведение, используя выражения в координатах для векторного и скалярного произведений:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\left(c_x\cdot\vec{i}+c_y\cdot\vec{j}+c_z\cdot\vec{k}\right)=$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{i}-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot\vec{j}+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot\vec{k}\right)\cdot\left(c_x\cdot\vec{i}+c_y\cdot\vec{j}+c_z\cdot\vec{k}\right)=$$

$$=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot c_z.$$

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix}\cdot c_x-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix}\cdot c_y+\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\cdot c_z.$$

Формулу можно записать через определитель:

$$\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)\cdot\vec{c}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

П р и м е р. Найти объем пирамиды, если известны ее вершины $A(1, 0, 2)$, $B(2, -1, 0)$, $C(0, 2, -1)$ и $D(-1, 2, 4)$.

Решение.

$$V_{\text{пир}}=\frac{1}{6}\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Зная координаты трех векторов

$$\overrightarrow{AB}\{1,-1,-2\},\ \ \overrightarrow{AC}\{-1,2,-3\},\ \text{и}\ \ \overrightarrow{AD}\{-2,2,2)\},$$

вычислим объем пирамиды:

$$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}=\begin{vmatrix}1 & -1 & -2\\ -1 & 2 & -3\\ -2 & 2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$=-2\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 2 & -3\end{vmatrix}-2\begin{vmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}=-14+10+2=-2.$$

Тогда, объем равен

$$V=\frac{1}{6}\cdot 2=\frac{1}{3}.$$

Ответ. $V=\dfrac{1}{3}.$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 1
МАТРИЦЫ И ОПРЕДЕЛИТЕЛИ

Вариант 1

1. Вычислить $2 \cdot A - B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} -4 & \alpha \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по третьей строке и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 1 \\ 4 & 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 0 & 5 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 2

1. Вычислить $A - 2 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 1.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по третьему столбцу и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 & 3 \\ 5 & 5 & 9 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 3

1. Вычислить $3 \cdot A + B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \alpha & -3 \end{vmatrix} = -1.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по второй строке и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 8 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ 1 & -4 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 4

1. Вычислить $A + 3 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 5 & \alpha \end{vmatrix} = 2.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \\ 2 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по второму столбцу и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 5

1. Вычислить $2 \cdot A - 2 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ -5 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} 4 & \alpha \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по первой строке и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 6

1. Вычислить $3 \cdot A - 2 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 8 & -7 & -3 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ -3 & 3 \end{vmatrix} = 3.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по первому столбцу и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 6 & 5 \\ 1 & -4 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 6 \\ 2 & -3 & -1 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 7

1. Вычислить $A - 4 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ \alpha & -5 \end{vmatrix} = -3.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по третьей строке и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 8 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 4 & -3 \\ -5 & -7 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 6 & 0 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 8

1. Вычислить $4 \cdot A - 3 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 4 & \alpha \end{vmatrix} = 0.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по третьему столбцу и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 & -1 \\ -5 & 6 & 5 & -2 \\ 4 & -9 & -3 & 7 \\ -1 & -3 & 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 9

1. Вычислить $4 \cdot A - B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 5 & -4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} 5 & \alpha \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 5 & \alpha \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = 1.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по второй строке и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 3 & 4 \\ 2 & 8 & 7 & 5 \\ 2 & 5 & 6 & 3 \\ 0 & -3 & -1 & -2 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 10

1. Вычислить $3 \cdot A - 2 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 5 \\ 0 & 4 & 3 \\ -3 & -4 & 0 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} -4 & \alpha \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -3 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по второму столбцу и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & -1 \\ 7 & -4 & 2 & -7 \\ -5 & -7 & 2 & 4 \\ -2 & -5 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 11

1. Вычислить $A - 4 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = 2.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по первой строке и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -8 & 2 & 8 & 3 \\ -1 & -3 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ -1 & -4 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 6 \\ 0 & 4 & -3 \\ -3 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 12

1. Вычислить $A - 4 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \alpha & -3 \end{vmatrix} = -2.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -4 & -4 \\ 2 & -4 & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по первому столбцу и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & -4 & -6 \\ 0 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & 4 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 7 & 7 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 13

1. Вычислить $4 \cdot A - 3 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} -4 & \alpha \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 3.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} -2 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -5 & 2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

по третьему столбцу и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & -3 & -6 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -3 \\ -1 & 4 & 0 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 14

1. Вычислить $4 \cdot A - 3 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} \alpha & -2 \\ 3 & 3 \end{vmatrix} = -3.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -3 & -3 \\ 0 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 0 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

по второй строке и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & -2 & 0 \\ 1 & 3 & -5 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 4 & 0 & -2 \\ -2 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Вариант 15

1. Вычислить $3 \cdot A - 2 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ 0 & 4 & -3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -5 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \alpha & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix}$$

по второму столбцу и вычислить.

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 5 & 7 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & -5 & 1 \\ 4 & 6 & -2 & -3 \end{pmatrix}.$$

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Разбор контрольной работы 1
Матрицы и определители

Типовой вариант

1. Вычислить $A + 2 \cdot B$, если

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Сначала вычислим $2 \cdot B$:

$$2 \cdot B = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$A + 2 \cdot B = \begin{pmatrix} -4 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 11 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}.$$

2. Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \text{ и } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}.$$

Вычислить произведение матриц $A \cdot B$.

$$A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -5 & 0 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \cdot 0 + 4 \cdot (-5) + (-3) \cdot 4 & 0 \cdot (-1) + 4 \cdot 0 + (-3) \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 + (-2) \cdot (-5) + 2 \cdot 4 & 1 \cdot (-1) + (-2) \cdot 0 + 2 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -32 & -6 \\ 18 & 3 \end{pmatrix}.$$

3. Найти α, если

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ \alpha & -3 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскроем определитель: $2 \cdot (-3) - \alpha \cdot 4 = 0$. Теперь найдем α, решив уравнение

$$-6 = \alpha \cdot 4 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{3}.$$

4. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -4 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot 0\cdot(-2) + 0\cdot 3\cdot(-4) + 0\cdot(-4)\cdot(-2) -$$

$$-0\cdot 0\cdot 0 - 3\cdot(-4)\cdot(-2) - 1\cdot(-2)\cdot(-4) = -24 - 8 = -32\,.$$

5. Разложить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix}$$

по первой строке и вычислить его.

$$\begin{vmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - (-2)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + (-3)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -6 - 8 - 6 = -20.$$

6. Найти ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 5 & -2 \\ 5 & 1 & 2 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выполним ряд элементарных преобразований, чтобы получить максимальное количество нулевых строк:

$$A=\begin{pmatrix}6&3&5&-2\\5&1&2&3\\5&3&3&0\\4&3&1&2\end{pmatrix}^{\text{I+IV}}\sim\begin{pmatrix}10&6&6&0\\5&1&2&3\\5&3&3&0\\4&3&1&2\end{pmatrix}^{\text{I}-2\cdot\text{III}}\sim\begin{pmatrix}0&0&0&0\\5&1&2&3\\5&3&3&0\\4&3&1&2\end{pmatrix}^{\text{отбрасываем}}\ \overset{\text{II}-\text{III}}{}\ \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix}0&-2&-1&3\\5&3&3&0\\4&3&1&2\end{pmatrix}_{\text{III}-\text{II}}\sim\begin{pmatrix}0&-2&-1&3\\5&3&3&0\\-1&0&-2&2\end{pmatrix}.$$

Невозможно получить больше нолей в матрице, значит, ранг матрицы равен 3.

7. Найти обратную матрицу к матрице

$$A=\begin{pmatrix}2&0&-4\\-2&-5&0\\3&4&2\end{pmatrix}.$$

Сделать проверку.

Ш а г 1. Найдем определитель матрицы:

$$\Delta=\begin{vmatrix}2&0&-4\\-2&-5&0\\3&4&2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}-5&0\\4&2\end{vmatrix}+0-4\cdot\begin{vmatrix}-2&-5\\3&4\end{vmatrix}=$$

$$=2\cdot(-10)-4\cdot 7=-48\neq 0,$$

значит, обратная матрица существует.

Ш а г 2. Запишем присоединенную матрицу. Алгебраические дополнения равны:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}-5 & 0\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-10,\qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}-2 & 0\\ 3 & 2\end{vmatrix}=4,$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}-2 & -5\\ 3 & 4\end{vmatrix}=7,\qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & -4\\ 4 & 2\end{vmatrix}=-16,$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=16,\qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-8,$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}0 & -4\\ -5 & 0\end{vmatrix}=-20,\qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & -4\\ -2 & 0\end{vmatrix}=8,$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ -2 & -5\end{vmatrix}=-10,\qquad \text{тогда } A^{*}=\begin{pmatrix}-10 & 4 & 7\\ -16 & 16 & -8\\ -20 & 8 & -10\end{pmatrix}.$$

Ш а г 3.

$$A^{-1}=\frac{\left(A^{*}\right)^{T}}{\Delta}=\frac{1}{-48}\cdot\begin{pmatrix}-10 & -16 & -20\\ 4 & 16 & 8\\ 7 & -8 & -10\end{pmatrix}.$$

Ш а г 4. Выполним проверку, для этого покажем, что

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

$$A\cdot A^{-1}=\frac{-1}{48}\cdot\begin{pmatrix}2 & 0 & -4\\ -2 & -5 & 0\\ 3 & 4 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-10 & -16 & -20\\ 4 & 16 & 8\\ 7 & -8 & -10\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{48}\cdot\begin{pmatrix} 2\cdot(-10)+0-4\cdot 7 & 2\cdot(-16)+0-4\cdot(-8) & 2\cdot(-20)+0-4\cdot(-10) \\ -2\cdot(-10)-5\cdot 4+0 & -2\cdot(-16)-5\cdot 16+0 & -2\cdot(-20)-5\cdot 8+0 \\ 3\cdot(-10)+4\cdot 4+2\cdot 7 & 3\cdot(-16)+4\cdot 16+2\cdot(-8) & 3\cdot(-20)+4\cdot 8+2\cdot(-10) \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{48}\cdot\begin{pmatrix} -48 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{pmatrix}=E.$$

$$A^{-1}\cdot A=\frac{-1}{48}\cdot\begin{pmatrix} -10 & -16 & -20 \\ 4 & 16 & 8 \\ 7 & -8 & -10 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 0 & -4 \\ -2 & -5 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{48}\cdot\begin{pmatrix} -10\cdot 2-16\cdot(-2)-20\cdot 3 & 0-16\cdot(-5)-20\cdot 4 & -10\cdot(-4)+0-20\cdot 2 \\ 4\cdot 2+16\cdot(-2)+8\cdot 3 & 0+16\cdot(-5)+8\cdot 4 & 4\cdot(-4)+0+8\cdot 2 \\ 7\cdot 2-8\cdot(-2)-10\cdot 3 & 0-8\cdot(-5)-10\cdot 4 & 7\cdot(-4)+0-10\cdot 2 \end{pmatrix}=$$

$$=\frac{-1}{48}\cdot\begin{pmatrix} -48 & 0 & 0 \\ 0 & -48 & 0 \\ 0 & 0 & -48 \end{pmatrix}=E.$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 2
СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Задание 1. Решить систему уравнений методом Жордана — Гаусса.

Вариант 1. $$\begin{cases} 7x_1+3x_2+3x_3+x_4+x_5=10, \\ 3x_1-2x_2+3x_3+x_4=3, \\ 2x_1+x_2-3x_3+x_5=4. \end{cases}$$

Вариант 2. $$\begin{cases} 4x_1-3x_2-2x_3+x_4+x_5=6, \\ x_1+4x_2+x_3-3x_5=15, \\ 2x_1-x_2-x_3+x_4=-3. \end{cases}$$

Вариант 3. $$\begin{cases} x_1+x_3+2x_4=4, \\ 3x_1+2x_2-3x_3+x_4=6, \\ 4x_1+2x_2+x_3+x_4-x_5=8. \end{cases}$$

Вариант 4. $$\begin{cases} -x_1+5x_2+x_3+x_4+x_5=10, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=6, \\ 0x_2+x_3+2x_4+3x_5=25. \end{cases}$$

Вариант 5. $$\begin{cases} 4x_1-x_2+2x_4+x_5=21, \\ 4x_1-3x_2-x_4+x_5=13, \\ x_1-x_2+x_3-x_5=3. \end{cases}$$

Вариант 6. $$\begin{cases} 2x_1+2x_2-3x_4+x_5=25, \\ 2x_1-3x_2-x_3-2x_5=-9, \\ 6x_2-x_3+x_4=36. \end{cases}$$

Вариант 7. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 21, \\ 4x_1 - x_2 - 2x_4 + x_5 = 15, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 4. \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 - x_4 = -13, \\ 4x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 26, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 1. \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 + x_4 = 2, \\ x_1 + x_2 + 7x_3 - 2x_4 = 6, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 5x_5 = 8. \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 + x_3 + 3x_4 + x_5 = 8, \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 3, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 2. \end{cases}$

Вариант 11. $\begin{cases} 4x_1 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 10, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 - 3x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = -4. \end{cases}$

Вариант 12. $\begin{cases} x_1 + x_3 - 2x_4 + x_5 = 3, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 4, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - x_5 = 5. \end{cases}$

Вариант 13. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 + x_5 = 11, \\ x_1 - x_2 - 2x_4 + 2x_5 = 1, \\ x_1 + x_2 - 3x_4 = 14. \end{cases}$

Вариант 14. $\begin{cases} x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 9, \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 = 16, \\ x_1 - 3x_2 + 2x_4 + x_5 = 11. \end{cases}$

Вариант 15. $$\begin{cases} 5x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1, \\ x_1 - 3x_2 + 3x_3 + x_4 = 8, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 4,. \end{cases}$$

Задание 2. Решить систему уравнений:

а) по формулам Крамера;

б) с помощью обратной матрицы;

в) методом Жордана — Гаусса.

Вариант 1. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = -4, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -3. \end{cases}$$

Вариант 2. $$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 12, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 6, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 3. \end{cases}$$

Вариант 3. $$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = -4, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 11, \\ x_1 - 2x_2 + 2x_3 = -7. \end{cases}$$

Вариант 4. $$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 12, \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 6, \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = -9. \end{cases}$$

Вариант 5. $$\begin{cases} 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = -4, \\ x_1 + x_2 - x_3 = 2, \\ 4x_1 + x_2 - 3x_3 = -5. \end{cases}$$

Вариант 6. $\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 12, \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 = -1. \end{cases}$

Вариант 7. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 2x_3 = 0, \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 4. \end{cases}$

Вариант 8. $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 1, \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = -3. \end{cases}$

Вариант 9. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант 10. $\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 9, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11, \\ x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 19. \end{cases}$

Вариант 11. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 12, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 16, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 8. \end{cases}$

Вариант 12. $\begin{cases} 4x_1 - x_2 = -6, \\ 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 = -14, \\ x_1 - 3x_2 + 4x_3 = -19. \end{cases}$

Вариант 13. $\begin{cases} x_1 + 4x_2 - x_3 = -9, \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = -2, \\ 3x_2 - 7x_3 = -6. \end{cases}$

Вариант 14. $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 4, \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1. \end{cases}$

Вариант 15. $\begin{cases} -3x_1 + 5x_2 + 6x_3 = -8, \\ 3x_1 + x_2 + x_3 = -4, \\ x_1 - 4x_2 - 2x_3 = -9. \end{cases}$

Разбор контрольной работы 2
Системы линейных уравнений

Типовой вариант

1. Решить систему уравнений методом Жордана — Гаусса:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 6, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 - 5x_5 = 5, \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -3. \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы, где пунктиром выделен разрешающий элемент:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & \boxed{1} & 1 & 6 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -5 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}_{\text{III}-\text{I}} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & 1 & 1 & 6 \\ 1 & \boxed{1} & 2 & 0 & -5 & 5 \\ 1 & 1 & 4 & 0 & -1 & -9 \end{pmatrix}_{\text{III}-\text{II},\ \text{I}-\text{II}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 4 & -14 \end{pmatrix}_{\cdot\, 0.5} \sim \begin{pmatrix} 0 & -3 & -4 & 1 & 6 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}_{\text{III}\cdot 4+\text{I},\ \text{III}\cdot(-2)+\text{II}} \sim$$

$$\sim\begin{pmatrix} 0 & -3 & 0 & 1 & 14 & -27 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -9 & 19 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} -3x_2 + x_4 + 14x_5 = -27, \\ x_1 + x_2 - 9x_5 = 19, \\ x_3 + 2x_5 = -7. \end{cases}$$

Таким образом, x_5 и x_2 — свободные переменные и общее решение системы запишется в виде

$$\begin{cases} x_4 = -27 + 3x_2 - 14x_5, \\ x_1 = 19 - x_2 + 9x_5, \\ x_3 = -7 - 2x_5. \end{cases}$$

Базисное решение: $x_2 = 0,\ x_5 = 0,\ x_4 = -27,\ x_1 = 19,\ x_3 = -7.$

2. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 - 3x_3 = 9, \\ x_1 + x_2 - x_3 = -2, \\ 8x_1 + 3x_2 - 6x_3 = 12. \end{cases}$$

а) по формулам Крамера.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

Вычислим основной определитель матрицы системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Вычислим дополнительные определители.

Заменим первый столбец матрицы *A* на столбец матрицы *B*:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 9 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 12 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 3.$$

Заменим второй столбец матрицы *A* на столбец матрицы *B*:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 9 & -3 \\ 1 & -2 & -1 \\ 8 & 12 & -6 \end{vmatrix} = -6.$$

Заменим третий столбец матрицы *A* на столбец матрицы *B*:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 9 \\ 1 & 1 & -2 \\ 8 & 3 & 12 \end{vmatrix} = -1,$$

тогда решение системы имеет вид

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{3}{1} = 3,\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{-6}{1} = -6,\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{-1}{1} = -1;$$

б) с помощью матричного метода.

Так как $X = A^{-1}B$, то сначала найдем обратную матрицу к основной матрице системы:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{pmatrix}.$$

Определитель матрицы

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & -1 \\ 8 & 3 & -6 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

т. е. система совместна.

Алгебраические дополнения

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -3, \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = -2,$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -5, \qquad A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -6 \end{vmatrix} = -3,$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 8 & -6 \end{vmatrix} = 0, \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = -4,$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2, \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3,$$

тогда

$$\left(A^*\right)^T = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix} \text{ и } A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot (A^*)^T = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда решение

$$X = \begin{pmatrix} -3 & -3 & 2 \\ -2 & 0 & 1 \\ -5 & -4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \cdot 9 - 3 \cdot (-2) + 2 \cdot 12 \\ -2 \cdot 9 + 0 \cdot (-2) + 1 \cdot 12 \\ -5 \cdot 9 - 4 \cdot (-2) + 3 \cdot 12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ -1 \end{pmatrix};$$

в) методом Жордана — Гаусса.

Запишем расширенную матрицу системы, где пунктиром выделен разрешающий элемент:

$$\begin{pmatrix} 4 & \boxed{1} & -3 & 9 \\ 1 & 1 & -1 & -2 \\ 8 & 3 & -6 & 12 \end{pmatrix}_{\text{II}-\text{I},\ \text{I}\cdot(-3)+\text{III}} \sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 9 \\ -3 & 0 & \boxed{2} & -11 \\ -4 & 0 & 3 & -15 \end{pmatrix}_{\cdot 0.5} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 & 9 \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{11}{2} \\ -4 & 0 & 3 & -15 \end{pmatrix}_{\text{II}\cdot 3+\text{I},\ \text{II}\cdot(-3)+\text{III}} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{\text{II}\cdot 3+\text{I},\ \text{II}\cdot(-3)+\text{III}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{11}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}_{\cdot 2} \sim \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 1 & 0 & -\frac{15}{2} \\ -\frac{3}{2} & 0 & 1 & -\frac{11}{2} \\ \boxed{1} & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}_{\text{III}\cdot\frac{3}{2}+\text{II},\text{III}\cdot\frac{1}{2}+\text{I}} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Тогда система примет вид

$$\begin{cases} x_2 = -6, \\ x_3 = -1, \\ x_1 = 3. \end{cases}$$

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА 3
ВЕКТОРНАЯ АЛГЕБРА

Даны две вершины A и B параллелограмма $ABCD$, точка пересечения его диагоналей M и точка L вне плоскости параллелограмма. Найти:

а) координаты остальных вершин параллелограмма;

б) периметр параллелограмма;

в) угол между диагоналями;

г) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

д) площадь параллелограмма $ABCD$ (используя векторное произведение);

е) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AL}$ (используя смешанное произведение).

Вариант 1. $A(3, 1, 4)$, $B(-1, 6, 1)$, $M(-1, 1, 6)$, $L(0, 4, -1)$.

Вариант 2. $A(3, -1, 2)$, $B(-1, 0, 1)$, $M(1, 7, 3)$, $L(8, 5, 8)$.

Вариант 3. $A(3, 5, 4)$, $B(5, 8, 3)$, $M(1, 2, -2)$, $L(-1, 0, 2)$.

Вариант 4. $A(2, 4, 3)$, $B(1, 1, 5)$, $M(4, 9, 3)$, $L(3, 6, 7)$.

Вариант 5. $A(9, 5, 5)$, $B(-3, 7, 1)$, $M(5, 7, 8)$, $L(6, 9, 2)$.

Вариант 6. $A(0, 7, 1)$, $B(2, -1, 5)$, $M(1, 6, 3)$, $L(3, -9, 8)$.

Вариант 7. $A(5, 5, 4)$, $B(1, -1, 4)$, $M(3, 5, 1)$, $L(5, 8, -1)$.

Вариант 8. $A(6, 1, 1)$, $B(4, 6, 6)$, $M(4, 2, 0)$, $L(1, 2, 6)$.

Вариант 9. $A(7, 5, 3)$, $B(9, 4, 4)$, $M(4, 5, 7)$, $L(7, 9, 6)$.

Вариант 10. $A(6, 8, 2)$, $B(5, 4, 7)$, $M(2, 4, 7)$, $L(7, 3, 7)$.

Вариант 11. $A(4, 2, 5)$, $B(0, 7, 1)$, $M(0, 2, 7)$, $L(1, 5, 0)$.

Вариант 12. $A(4, 4, 10)$, $B(7, 10, 2)$, $M(2, 8, 4)$, $L(9, 6, 9)$.

Вариант 13. $A(4, 6, 5)$, $B(6, 9, 4)$, $M(2, 10, 10)$, $L(7, 5, 9)$.

Вариант 14. $A(3, 5, 4)$, $B(8, 7, 4)$, $M(5, 10, 4)$, $L(4, 7, 8)$.

Вариант 15. $A(10, 9, 6)$, $B(2, 8, 2)$, $M(9, 8, 9)$, $L(7, 10, 3)$.

Разбор контрольной работы 3
Векторная алгебра

Типовой вариант

Даны две вершины $A(1,\ 3,\ 2)$ и $B(2,\ -1,\ 3)$ параллелограмма $ABCD$, точка пересечения его диагоналей $M(2,\ 0,\ 2)$ и точка $L(4,\ 2,\ -5)$ вне плоскости параллелограмма. Найти:

а) координаты остальных вершин параллелограмма, периметр параллелограмма;

б) угол между диагоналями;

в) скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$;

г) площадь параллелограмма $ABCD$ (используя векторное произведение);

д) объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AL}$ (используя смешанное произведение).

Решение.

а) Координаты остальных вершин параллелограмма (рис. 14).

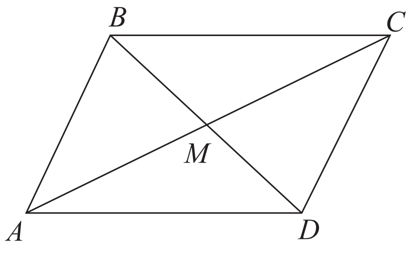


Рис. 14. Параллелограмм *ABCD*

Воспользуемся формулой середины отрезка:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \Rightarrow x_C = 2x_M - x_A.$$

Аналогичные формулы для координат y_M и z_M Подставим координаты точек A и M, получим соответственно $x_C = 2 \cdot 2 - 1 = 3,$

$y_C = -3$ и $z_C = 2$. Таким образом, координаты точки $C(3, –3, 2)$. Аналогично вычисляются координаты точки $D(2, 1, 1)$.

б) Периметр параллелограмма.

По формуле расстояния между двумя точками

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}$$

найдем длины сторон параллелограмма:

$$AB = DC = \sqrt{(2-1)^2 + (-1-3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2};$$

$$BC = AD = \sqrt{(2-1)^2 + (1-3)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{6}.$$

Таким образом, периметр P равен

$$P = 2 \cdot 3\sqrt{2} + 2\sqrt{6} = 6\sqrt{2} + 2\sqrt{6}.$$

в) Угол между диагоналями.

Угол между диагоналями вычисляем по формуле

$$\cos\varphi = \frac{a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \cdot \sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}.$$

Находим координаты векторов $\overrightarrow{AC}$ и $\overrightarrow{BD}$: $\overrightarrow{AC}\{2, -6, 0\}$ и $\overrightarrow{BD}\{0, 2, -2\}$. Тогда

$$\cos\varphi = \frac{2 \cdot 0 - 6 \cdot 2 + 0 \cdot (-2)}{\sqrt{2^2 + 6^2 + 0^2} \cdot \sqrt{0^2 + 2^2 + 2^2}} = \frac{-12}{\sqrt{40} \cdot \sqrt{8}} = -\frac{12}{8\sqrt{5}} = -\frac{3\sqrt{5}}{10}.$$

г) Скалярное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$.

Скалярное произведение векторов вычисляем по формуле

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x \cdot b_x + a_y \cdot b_y + a_z \cdot b_z.$$

Координаты векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$ следующие: $\overrightarrow{AB}\{1,-4,1\}$ и $\overrightarrow{AC}\{2,-6,0\}$. Тогда

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot 2-4\cdot(-6)+1\cdot 0=26.$$

д) Площадь параллелограмма *ABCD* (используя векторное произведение).

Площадь параллелограмма равна модулю векторного произведения:

$$S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}.$$

Зная координаты векторов $\overrightarrow{AB}\{1,-4,1\}$ и $\overrightarrow{AD}\{1,-2,-1\}$, вычислим площадь:

$$S=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & -4 & 1\\ 1 & -2 & -1\end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -2 & -1\end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix}1 & -4\\ 1 & -2\end{vmatrix}=6\vec{i}+2\vec{j}+2\vec{k}.$$

$$S=\left|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\right|=\sqrt{6^2+2^2+2^2}=\sqrt{44}=2\sqrt{11}.$$

е) Объем параллелепипеда, построенного на векторах $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ и $\overrightarrow{AL}$ (используя смешанное произведение).

$$V=\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AL}=\begin{vmatrix}a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\\ c_x & c_y & c_z\end{vmatrix}.$$

Зная координаты трех векторов $\overrightarrow{AB}\{1,-4,1\}$, $\overrightarrow{AD}\{1,-2,-1\}$ и $\overrightarrow{AL}\{3,-1,-7\}$, вычислим объем параллелепипеда:

$$V = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AL} = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 \end{vmatrix} = 3 \cdot \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} +$$

$$+1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - 7 \cdot \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 2.$$

Список рекомендуемой литературы

Ахтямов А. М. Математика для социологов и экономистов / А. М. Ахтямов. — М. : Физматлит, 2004.

Берман Г. Н. Сборник задач по курсу математического анализа / Г. Н. Берман. — М. ; СПб., 2001.

Демидович Б. П. Сборник задач и упражнений по математическому анализу / Б. П. Демидович. — М. : Моск. ун-т, 1997.

Звавич Л. И. Сборник задач по алгебре и математическому анализу. — Вып. 1 : Интеграл и площадь. / Л. И. Звавич, А. Р. Рязановский, А. М. Поташник. — М. : Новая шк., 1996.

Карасев А. И. Курс высшей математики для экономических вузов / А. И. Карасев, З. М. Аксютин, Т. И. Савельева. — М. : Высш. шк., 1982. — Ч. 1, 2.

Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов / Н. Ш. Кремер. — 3-е изд. — М., 2007.

Кудрявцев В. А. Краткий курс высшей математики / В. А. Кудрявцев, В. П. Демидович. — М. : Астрель, 2001.

Кузнецов Л. А. Сборник заданий по высшей математике / Л. А. Кузнецов. — М. : Высш. шк., 1994.

Минорский В. П. Сборник задач по высшей математике / В. П. Минорский. — М. : Физматлит, 2006.

Письменный Д. Т. Конспект лекций по высшей математике. Полный курс / Д. Т. Письменный. — М. : Айрис Пресс, 2009.

Рябушко А. П. Индивидуальные занятия по высшей математике / А. П. Рябушко, В. В. Бархатов, В. В. Државец, И. Е. Юруть. — Минск : Высш. шк., 2009.

Шабунин М. И. Математика. Алгебра. Начала математического анализа : задачник. / М. И. Шабунин, А. А. Прокофьев, Т. А. Олейник, Т. В. Соколова. — БИНОМ. Лаборатория знаний, 2011.

Щипачев В. С. Высшая математика / В. С. Щипачев. — М. : Высш. шк., 2005.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Учебное издание

Новак Екатерина Владимировна
Рязанова Татьяна Владимировна
Новак Ирина Владимировна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА
АЛГЕБРА

Учебное пособие

Зав. редакцией *М. А. Овечкина*
Редактор *Т. А. Федорова*
Корректор *Т. А. Федорова*
Компьютерная верстка *Н. Ю. Михайлов*

План выпуска 2015 г. Подписано в печать 09.11.2015.
Формат 60 × 84 $^{1}/_{16}$. Бумага офсетная. Гарнитура Times.
Уч.-изд. л. 4,5. Усл. печ. л. 6,7. Тираж 70 экз. Заказ № 299.

Издательство Уральского университета
620000, Екатеринбург, ул. Тургенева, 4

Отпечатано в Издательско-полиграфическом центре УрФУ
620000, г. Екатеринбург, ул. Тургенева, 4.
Тел.: +7 (343) 350-56-64, 350-90-13.
Факс +7 (343) 358-93-06.
E-mail: press-urfu@mail.ru