Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего профессионального образования

«Уральский федеральный университет

имени первого Президента России Б. Н. Ельцина»

Институт математики и компьютерных наук

Кафедра математического анализа и теории функций

КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПРИ ОДНОСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ

Допустить к защите

Зав. кафедрой
доктор физ.-мат. наук
профессор
В.В.Арестов

____

«__» __________ 2015 г.

Магистерская диссертация
по направлению
010100.68 Математика
студента группы МКМ-230202
ЗЫКОВА
ДМИТРИЯ ОЛЕГОВИЧА

Научный руководитель —
профессор АРЕСТОВ
ВИТАЛИЙ ВЛАДИМИРОВИЧ,
заведующий кафедрой
математического анализа
и теории функций,
доктор физ.-мат. наук

Екатеринбург

2015

РЕФЕРАТ

Зыков Д. О. КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ ПРИ ОДНОСТОРОННИХ ОГРАНИЧЕНИЯХ, магистерская диссертация. Стр. 22, библ. назв. 4.

Ключевые слова: ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЙ ПОЛИНОМ, КОЭФФИЦИЕНТЫ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ.

Исследуется наибольшее и наименьшее значения коэффициентов нечетных тригонометрических полиномов, не превосходящих функции $f(x) = x$ на отрезках $[0, \pi]$ и $[0, 2\pi]$. Получены точные границы первого коэффициента для полиномов второго порядка. Для полиномов более высоких порядков получены двусторонние оценки первого коэффициента и найдено асимптотическое поведение его максимального и минимального значений по порядку полинома. Даны оценки старших коэффициентов. Аналогичные результаты получены для коэффициентов синус-полиномов при двусторонних линейных ограничениях на отрезке $[0, \pi]$.

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В диссертации изучаются наибольшее и наименьшее значения коэффициентов нечетных тригонометрических полиномов

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx,$$

удовлетворяющих одному из трех следующих ограничений

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \qquad 0 \le x \le \pi; \tag{0.1}$$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \qquad 0 \le x \le 2\pi; \tag{0.2}$$

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx\right| \le x, \qquad 0 \le x \le \pi. \tag{0.3}$$

В частности, доказано, что в предположении (0.2) для первого коэффициента полинома справедливы оценки

$$-6 \le a_1 \le 2.$$

Более того, эти оценки окончательнve.

Работа разбита на три параграфа в зависимости от ограничений (0.1) - (0.3).

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Во время обучения в магистратуре мы продолжили изучать тему, определённую в бакалаврской работе: поведение коэффициентов нечётных тригонометрических полиномов при односторонних ограничениях. Мы рассматривали полиномы вида

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

которые были определены на отрезке $[0, 2\pi]$, и смогли добиться существенных результатов. В частности, были найдены точные значения коэффициентов полинома второй степени, определённого на отрезке $[0, 2\pi]$, при которых значение первого коэффициента оказывалось максимальным для одностороннего линейного ограничения сверху. Также было изучено поведение первых коэффициентов нечётного тригонометрического полинома в зависимости от его степени при одностороннем линейном ограничении сверху.

Мы также занимались изучением поведения коэффициентов тригонометрического полинома $s_n(x)$. В основу исследований были положены результаты, полученные в бакалаврской работе. Нашей задачей было изучить поведение коэффициентов нечётного тригонометрического полинома при односторонних линейных ограничениях сверху, когда полином определён на отрезках $[0, \pi]$ и $[0, 2\pi]$, также мы затронули вопрос поведения коэффициентов нечётного тригонометрического полинома, определённого на отрезке $[0, \pi]$, при двусторонних линейных ограничениях. Таким образом первоначальная задача разбилась на три более узких подзадачи, которые и были исследованы и решены в ходе подготовки магистерской работы.

1. ОДНОСТОРОННЕЕ ОГРАНИЧЕНИЕ НА ОТРЕЗКЕ $[0, \pi]$

1.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathfrak{F}_n$ есть множество нечётных тригонометрических полиномов

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами $a_k = a_k(s_n)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \qquad 0 \le x \le \pi. \tag{1.1}$$

При $1 \le k \le n$ рассмотрим наибольшее и наименьшее значение

$$A_k^+(n) = \sup\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\}, \qquad A_k^-(n) = \inf\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\} \tag{1.2}$$

коэффициентов $a_k = a_k(s_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{F}_n$. В этом параграфе мы найдём конструктивные оценки для коэффициентов тригонометрических полиномов различных степеней. Наиболее полно эти величины были изучены для $k = 1$.

1.2. СЛУЧАЙ $k = 1, n = 2$

При $n = 2,\ k = 1$ величину (1.2) можно вычислить точно.

Теорема 1. При $n = 2,\ k = 1$ величина (1.2) имеет следующее значение:

$$A_1^+(2) = \frac{\pi}{2}. \tag{1.3}$$

Наибольшее значение первого коэффициента имеет полином

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{1.4}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$ ограничение (1.1) принимает вид

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x \le x, \qquad 0 < x < pi. \tag{1.5}$$

В точке $x = \pi/2$ это ограничение даёт оценку $a_1 \le \pi/2$. А это влечёт оценку $A_1^+(2) \le \pi/2$. Для обоснования такой же оценки снизу воспользуемся полиномом f_2, определённым в (1.4). Первый коэффициент этого полинома как раз и имеет значение $\pi/2$. Поэтому для обоснования первого равенства в (1.3) осталось показать, что $f_2 \in \mathfrak{F}_2$, т. е. проверить неравенство

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \le x, \qquad 0 < x < pi. \tag{1.6}$$

Убедимся, что это неравенство выполняется на отрезке $[0, \pi]$. Нам нужно доказать, что разность $\varphi(x) = x - f_2(x)$ на этом отрезке неотрицательная. Производная

$$\varphi'(x) = 1 - f_2'(x) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\cos x - \cos 2x\right) = 2\cos x\left(\cos x - \frac{\pi}{4}\right)$$

функции φ на $[0, \pi]$ обращается в ноль лишь в двух точках $x_1 = \arccos(\pi/4)$ и $x_2 = \pi/2$; более того, производная меняет знак в точке x_1 с «$+$» на «$-$» и в точке x_2 с «$-$» на «$+$». Отсюда заключаем, что функция φ на отрезке $[0, x_1]$ возрастает от значения $\varphi(0) = 0$, убывает на $[x_1, x_2]$ до значения $\varphi(x_2) = \varphi(\pi/2) = 0$ и, наконец, возрастает на $[x_2, \pi]$ от значения $\varphi(x_2) = 0$. Следовательно, на отрезке $[0, \pi]$ функция φ неотрицательная, но это означает, что на $[0, \pi]$ имеет место неравенство (1.6). Тем самым доказано утверждение (1.3) и экстремальность полинома f_2.

1.3. СЛУЧАЙ $k = 1$ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ СТЕПЕНИ ВЫШЕ 2

В этом разделе мы исследуем поведение величины $A_1^+(n)$ по n.

Теорема 2. Для величин $A_1^+(n)$ и $A_1^-(n)$ справедливы следующие два утверждения.

1. При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $A_1^+(n) \leq 2$.
2. Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^+(n) = 2$.
3. Величина $A_1^-(n)$ принимает значение $-\infty$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Начнём с первого утверждения теоремы. Функция $\sin x$ на отрезке $[0,\pi]$ неотрицательная. Умножим неравенство (1.1) для $x \in [0,\pi]$ на функцию $\sin x$ и проинтегрируем по отрезку $[0,\pi]$. Учитывая, что

$$\int\limits_0^\pi \sin x \sin kx\, dx = 0, \qquad k \neq 1,$$

получаем неравенство

$$a_1 \int\limits_0^\pi \sin^2 x\, dx \leq \int\limits_0^\pi x \sin x\, dx. \tag{1.7}$$

Поскольку

$$\int\limits_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int\limits_0^\pi x \sin x\, dx = \pi,$$

то неравенство (1.7) даёт оценку $a_1 \leq 2$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения рассмотрим конкретную функцию f, которая для $x \in [0,\pi)$ определена равенством $f(x) = x$. Разложение этой функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, \qquad \text{где} \qquad a_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k}, \qquad k \geq 1;$$

для дальнейшего важно, что $a_1 = 2$. Сгладим функцию f следующим образом. Используя параметр $\delta \in (0,\pi)$, определим на $[0,\pi]$ функцию

$$f_\delta(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi-\delta]; \\ \tau_\delta(x), & x \in [\pi-\delta, \pi], \end{cases}$$

где

$$\tau_\delta(x) = -\frac{\pi}{\delta^2}x^2 + \frac{2\pi^2 - 2\pi\delta + \delta^2}{\delta^2}x - \frac{\pi(\pi^2 - 2\pi\delta + \delta^2)}{\delta^2}$$

есть многочлен второй степени. В точке $x = \pi - \delta$ прямая $f(x) = x$ касается параболы τ_δ, к тому же, ветви параболы направлены вниз. Поэтому всюду на оси имеет место неравенство $\tau_\delta(x) \leq x,\ x \in \mathbb{R}$. Продолжим функцию f_δ нечетно на $[-\pi, 0]$ и 2π-периодически на всю ось. Нетрудно понять, что будет выполняться неравенство

$$f_\delta(x) \le x, \qquad x \ge 0. \tag{1.8}$$

Функция f_δ на отрезке $[0, \pi - \delta]$ совпадает с функцией $f(x) = x$, а затем гладко переходит в параболу, пересекающую ось Ox в точке $x = \pi$. Функция f_δ на отрезке $[0, \pi]$ непрерывно дифференцируема и на концах отрезка имеет нулевые значения: $f_\delta(0) = f_\delta(\pi) = 0$. Поэтому ряд Фурье этой функции

$$f_\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\delta) \sin kx, \qquad a_k(\delta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f_\delta(x) \sin kx \, dx,$$

сходится к ней равномерно на всей оси. Выясним поведение коэффициентов Фурье $a_k(\delta)$ с увеличением k. Воспользовавшись несколько раз формулой интегрировании по частям, получаем:

$$\int\limits_0^\pi f_\delta(x) \sin kx \, dx = \frac{1}{k} \int\limits_0^\pi f'_\delta(x) \cos kx \, dx = \frac{1}{k^2} \int\limits_0^\pi f'_\delta(x) d \sin kx$$

$$= \frac{1}{k^2} \left(f'_\delta(x) \sin kx \Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi f''_\delta(x) \sin kx dx \right) = -\frac{1}{k^2} \int\limits_0^\pi f''_\delta(x) \sin kx \, dx$$

$$= -\frac{1}{k^2} \int\limits_{\pi-\delta}^\pi f''_\delta(x) \sin kx \, dx = -\frac{2\pi}{k^3 \delta^2} \left(\cos k\pi - \cos k(\pi - \delta) \right) = (-1)^{k-1} \frac{2\pi}{k^3 \delta^2} (1 - \cos k\delta)).$$

Окончательно имеем

$$a_k(\delta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^\pi f_\delta(x) \sin kx \, dx = (-1)^{k-1} \frac{2\pi}{k^3 \delta^2} (1 - \cos k\delta)), \qquad k \ge 1. \tag{1.9}$$

Видно, что (для фиксированного δ) при $k \to \infty$ для коэффициентов справедливо соотношение $a_k(\delta) = O\left(k^{-3}\right)$; следовательно, существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что

$$|a_k(\delta)| \le \frac{C(\delta)}{k^3}, \qquad k \ge 1.$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = S_n(x; f_\delta) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\delta) \sin kx$$

ряда Фурье функции f_δ. Для разности

$$f_\delta(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(\delta) \sin kx$$

при $x \in [0, 2\pi]$ справедлива оценка

$$|f_\delta(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(\delta)||\sin kx| \le \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{C(\delta)}{k^3}\, xk \le x \cdot \epsilon_n, \qquad \epsilon_n = C(\delta) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2};$$

отметим, что $\epsilon_n \to 0,\ n \to \infty$. Отсюда и (1.8) для сумм S_n теперь имеем

$$S_n(x) = f_\delta(x) + S_n(x) - f_\delta(x) \le f_\delta(x) + |f_\delta(x) - S_n(x)| \le x + x\epsilon_n = x(1+\epsilon_n), \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Тригонометрический полином $s_n(x) = S_n(x)/(1+\epsilon_n)$ имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $\sigma_n(x) \le x$ и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Первый коэффициент полинома s_n есть $a_1(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому при любом $n \ge 1$ справедливы оценки

$$\frac{a_1(\delta)}{1+\epsilon_n} \le A_1^+(n) \le 2.$$

Отсюда заключаем, что при любом $0 < \delta < \pi$

$$a_1(\delta) \le \liminf_{n\to\infty} A_1^+(n) \le 2. \tag{1.10}$$

В соответствии с формулой (1.9) имеем

$$a_1(\delta) = 4\frac{1-\cos\delta}{\delta^2} \to 2, \qquad \delta \to +0. \tag{1.11}$$

Из (1.10) и (1.11) следует, что $A_1^+(n) \to 2,\ n \to \infty$.

Третье утверждение очевидно, так как на отрезке $[0, \pi]$ $a_1 \sin(x)$ может принимать только неотрицательные и неположительные значения в зависимости от знака a_1.

Теорема 2 доказана. □

1.4. СЛУЧАЙ $2 \le k \le n$

Теперь мы рассмотрим возможные величины других коэффициентов многочлена.

Теорема 3. Для величины $k \ge 2$ справедливы следующие два утверждения.

1. $A_k^+(n) = +\inf$. 2. $A_k^-(n) = -\inf$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство очевидно. Давайте рассмотрим многочлен вида

$$f_k(x) = a_1 \sin x + a_k \sin kx \tag{1.12}$$

Для того, чтобы показать справедливость утверждения, достаточно взять значение a_1 равным $-k|a_k|$. В этом случае неравенство

$$a_1 \sin x + a_k \sin kx, \qquad 0 \le x \le \pi$$

будет выполняться при любых значениях a_k.

2. ОДНОСТОРОННЕЕ ОГРАНИЧЕНИЕ НА ОТРЕЗКЕ $[0, 2\pi]$

2.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Снова рассмотрим множество тригонометрических полиномов $\mathfrak{F}_n$

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами $a_k = a_k(s_n)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{2.1}$$

При $1 \le k \le n$ рассмотрим наибольшее и наименьшее значения

$$A_k^+(n) = \sup\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\}, \qquad A_k^-(n) = \inf\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\} \tag{2.2}$$

коэффициентов $a_k = a_k(s_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{F}_n$.

В неравенстве (2.1) заменим x на $2\pi - x$; в результате получим эквивалентное ограничение

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le (2\pi - x), \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{2.3}$$

Пусть $\mathfrak{G}_n$ есть множество нечетных тригонометрических полиномов

$$\sigma_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами $b_k = b_k(\sigma_n)$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \le (2\pi - x), \qquad 0 < x < 2\pi \tag{2.4}$$

Рассмотрим наибольшее и наименьшее значения

$$B_k^+(n) = \sup\{b_k(s_n)\colon \sigma_n \in \mathfrak{G}_n\}, \qquad B_k^-(n) = \inf\{b_k(s_n)\colon \sigma_n \in \mathfrak{G}_n\} \tag{2.5}$$

коэффициентов $b_k = b_k(\sigma_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{G}_n$. Сравнивая ограничения (2.3) и (2.4), заключаем, что

$$A_k^-(n) = -B_k^+(n), \qquad A_k^+(n) = -B_k^-(n), \qquad 1 \le k \le n. \tag{2.6}$$

Отметим еще, что, что при фиксированном k величины $A_k^+(n)$ и $B_k^+(n)$ по n не убывают, а $A_k^-(n)$ и $B_k^-(n)$ не возрастают.

В данном разделе будут приведены конструктивные оценки величин (2.2); наиболее полно они будут изучены при $k = 1$.

2.2. СЛУЧАЙ $k = 1, n = 2$

При $n = 2,\ k = 1$ обе величины (2.2) можно вычислить точно.

Теорема 4. *При $n = 2,\ k = 1$ величины (2.2) имеют следующие значения:*

$$A_1^+(2) = \frac{\pi}{2}, \qquad A_1^-(2) = -\frac{3\pi}{2}. \tag{2.7}$$

Наибольшее и наименьшее значения первого коэффициента имеют соответственно полиномы

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, \qquad g_2(x) = -\frac{3\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{2.8}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. При $n = 2$ ограничение (2.1) принимает вид

$$a_1 \sin x + a_2 \sin 2x \le x, \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{2.9}$$

В точке $x = \pi/2$ это ограничение даёт оценку $a_1 \le \pi/2$. А это влечёт оценку $A_1^+(2) \le \pi/2$. Для обоснования такой же оценки снизу воспользуемся полиномом f_2, определённым в (2.8). Первый коэффициент этого полинома как раз и имеет значение $\pi/2$. Поэтому для обоснования первого равенства в (2.7) осталось показать, что $f_2 \in \mathfrak{F}_2$, т. е. проверить неравенство

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \le x, \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{2.10}$$

На отрезке $[\pi, 2\pi]$ это неравенство очевидно. Убедимся, что оно выполняется на отрезке $[0, \pi]$. Нам нужно доказать, что разность $\varphi(x) = x - f_2(x)$ на этом отрезке неотрицательная. Производная

$$\varphi'(x) = 1 - f_2'(x) = 1 - \left(\frac{\pi}{2}\cos x - \cos 2x\right) = 2\cos x\left(\cos x - \frac{\pi}{4}\right)$$

функции φ на $[0, \pi]$ обращается в ноль лишь в двух точках $x_1 = \arccos(\pi/4)$ и $x_2 = \pi/2$; более того, производная меняет знак в точке x_1 с «+» на «−» и в точке x_2 с «−» на «+». Отсюда заключаем, что функция φ на отрезке $[0, x_1]$ возрастает от значения $\varphi(0) = 0$, убывает на $[x_1, x_2]$ до значения $\varphi(x_2) = \varphi(\pi/2) = 0$ и, наконец, возрастает на $[x_2, \pi]$ от значения $\varphi(x_2) = 0$. Следовательно, на отрезке $[0, \pi]$ функция φ неотрицательная, но это означает, что на $[0, \pi]$ имеет место неравенство (2.10). Тем самым, аналогично Теореме 1, доказано первое утверждение (2.7) и экстремальность полинома f_2.

Оценим теперь коэффициент a_1 при ограничении (2.9) снизу. Для этого положим $x = 3\pi/2$ в (2.9); в результате получаем оценку $a_1 \ge -3\pi/2$. Именно такое значение имеет первый коэффициент полинома g_2, определённого в (2.8). Поэтому для обоснования второго утверждения теоремы осталось проверить, что полином g_2 удовлетворяет ограничению

$$g_2(x) = -\frac{3\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x \le x, \qquad 0 < x < 2\pi. \tag{2.11}$$

Исследуем разность $\psi(x) = x - g_2(x)$. Имеем

$$\psi'(x) = 1 - g_2'(x) = 1 + \frac{3\pi}{2}\cos x + \cos 2x = 2\cos x\left(\cos x + \frac{3\pi}{4}\right).$$

Эта функция на $[0, 2\pi]$ обращается в ноль лишь в двух точках $x_1 = \pi/2$ и $x_2 = 3\pi/2$; причём в первой точке она меняет знак с «+» на «−», а во второй – с «−» на «+». Отсюда заключаем, что функция ψ на отрезке $[0, \pi/2]$ растет от значения $\psi(0) = 0$, на отрезке $[\pi/2, 3\pi/2]$ убывает до значения $\psi(3\pi/2) = 0$ и, наконец, возрастает на отрезке $[3\pi/2, 2\pi]$. Следовательно, на отрезке $[0, 2\pi]$ функция ψ неотрицательная, т. е. на $[0, 2\pi]$ имеет место неравенство (2.11). Тем самым доказано второе утверждение (2.7) и экстремальность полинома g_2. $\square$

2.3. СЛУЧАЙ $k = 1$ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ СТЕПЕНИ ВЫШЕ 2

В этом разделе мы исследуем поведение величин $A_1^+(n)$ и $A_1^-(n)$ по n.

Теорема 5. Для величины $A_1^+(n)$ справедливы следующие два утверждения.

1. При любом $n \ge 1$ выполняется неравенство $A_1^+(n) \le 2$.
2. Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^+(n) = 2$.

Доказательство. Начнём с первого утверждения теоремы. Функция $\sin x$ на отрезке $[0, \pi]$ неотрицательная. Умножим неравенство (2.1) для $x \in [0, \pi]$ на функцию $\sin x$ и проинтегрируем по отрезку $[0, \pi]$. Учитывая, что

$$\int_0^\pi \sin x \sin kx\, dx = 0, \qquad k \ne 1,$$

получаем неравенство

$$a_1 \int_0^\pi \sin^2 x\, dx \le \int_0^\pi x \sin x\, dx. \tag{2.12}$$

Поскольку

$$\int_0^\pi \sin^2(x)\, dx = \frac{\pi}{2}, \qquad \int_0^\pi x\sin x\, dx = \pi,$$

то неравенство (2.12) дате оценку $a_1 \le 2$. Первое утверждение теоремы доказано.

Для доказательства второго утверждения будем исходить из конкретной нечетно, 2π-периодической функции f, которая для $x \in [0,\pi)$ определена равенством $f(x) = x$. Разложение этой функции в ряд Фурье имеет вид

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx, \qquad \text{где} \qquad a_k = (-1)^{k-1}\frac{2}{k}, \qquad k \geq 1;$$

для дальнейшего важно, что $a_1 = 2$. Сгладим функцию f следующим образом. Используя параметр $\delta \in (0,\pi)$, определим на $[0,\pi]$ функцию

$$f_\delta(x) = \begin{cases} x, & x \in [0, \pi-\delta]; \\ \tau_\delta(x), & x \in [\pi-\delta, \pi], \end{cases}$$

где

$$\tau_\delta(x) = -\frac{\pi}{\delta^2}x^2 + \frac{2\pi^2 - 2\pi\delta + \delta^2}{\delta^2}x - \frac{\pi(\pi^2 - 2\pi\delta + \delta^2)}{\delta^2}$$

есть многочлен второй степени. В точке $x = \pi - \delta$ прямая $f(x) = x$ касается параболы τ_δ, к тому же, ветви параболы направлены вниз. Поэтому всюду на оси имеет место неравенство $\tau_\delta(x) \leq x,\ x \in \mathbb{R}$. Продолжим функцию f_δ нечетно на $[-\pi, 0]$ и 2π-периодически на всю ось. Нетрудно понять, что будет выполняться неравенство

$$f_\delta(x) \leq x, \qquad x \geq 0. \tag{2.13}$$

Функция f_δ на отрезке $[0, \pi-\delta]$ совпадает с функцией $f(x) = x$, а затем гладко переходит в параболу, пересекающую ось Ox в точке $x = \pi$. Функция f_δ на отрезке $[0,\pi]$ непрерывно дифференцируема и на концах отрезка имеет нулевые значения: $f_\delta(0) = f_\delta(\pi) = 0$. Поэтому ряд Фурье этой функции

$$f_\delta(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(\delta) \sin kx, \qquad a_k(\delta) = \frac{2}{\pi}\int_0^\pi f_\delta(x) \sin kx\, dx,$$

сходится к ней равномерно на всей оси. Выясним поведение коэффициентов Фурье $a_k(\delta)$ с увеличением k. Воспользовавшись несколько раз формулой интегрировании по частям, получаем:

$$\int_0^\pi f_\delta(x) \sin kx\, dx = \frac{1}{k}\int_0^\pi f'_\delta(x) \cos kx\, dx = \frac{1}{k^2}\int_0^\pi f'_\delta(x) d \sin kx$$

$$= \frac{1}{k^2}\left(f'_\delta(x) \sin kx \Big|_0^\pi - \int_0^\pi f''_\delta(x) \sin kx dx \right) = -\frac{1}{k^2}\int_0^\pi f''_\delta(x) \sin kx\, dx$$

$$= -\frac{1}{k^2} \int\limits_{\pi-\delta}^{\pi} f_\delta''(x) \sin kx \, dx = -\frac{2\pi}{k^3\delta^2} \left(\cos k\pi - \cos k(\pi - \delta) \right) = (-1)^{k-1} \frac{2\pi}{k^3\delta^2} (1 - \cos k\delta)).$$

Окончательно имеем

$$a_k(\delta) = \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi} f_\delta(x) \sin kx \, dx = (-1)^{k-1} \frac{2\pi}{k^3\delta^2} (1 - \cos k\delta)), \qquad k \geq 1. \tag{2.14}$$

Видно, что (для фиксированного δ) при $k \to \infty$ для коэффициентов справедливо соотношение $a_k(\delta) = O\left(k^{-3}\right)$; следовательно, существует константа $C(\delta) > 0$ такая, что

$$|a_k(\delta)| \leq \frac{C(\delta)}{k^3}, \qquad k \geq 1.$$

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x) = S_n(x; f_\delta) = \sum_{k=1}^{n} a_k(\delta) \sin kx$$

ряда Фурье функции f_δ. Для разности

$$f_\delta(x) - S_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(\delta) \sin kx$$

при $x \in [0, 2\pi]$ справедлива оценка

$$|f_\delta(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^{\infty} |a_k(\delta)| |\sin kx| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{C(\delta)}{k^3} xk \leq x \cdot \epsilon_n, \qquad \epsilon_n = C(\delta) \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^2};$$

отметим, что $\epsilon_n \to 0, \ n \to \infty$. Отсюда и (2.13) для сумм S_n теперь имеем

$$S_n(x) = f_\delta(x) + S_n(x) - f_\delta(x) \leq f_\delta(x) + |f_\delta(x) - S_n(x)| \leq x + x\epsilon_n = x(1 + \epsilon_n), \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Тригонометрический полином $s_n(x) = S_n(x)/(1 + \epsilon_n)$ имеет порядок n и удовлетворяет ограничению $\sigma_n(x) \leq x$ и потому принадлежит множеству $\mathfrak{F}_n$. Первый коэффициент полинома s_n есть $a_1(\delta)/(1 + \epsilon_n)$. Поэтому при любом $n \geq 1$ справедливы оценки

$$\frac{a_1(\delta)}{1 + \epsilon_n} \leq A_1^+(n) \leq 2.$$

Отсюда заключаем, что при любом $0 < \delta < \pi$

$$a_1(\delta) \leq \liminf_{n \to \infty} A_1^+(n) \leq 2. \tag{2.15}$$

В соответствии с формулой (2.18) имеем

$$a_1(\delta) = 4 \frac{1 - \cos \delta}{\delta^2} \to 2, \qquad \delta \to +0. \tag{2.16}$$

Из (2.16) и (2.15) следует, что $A_1^+(n) \to 2, \ n \to \infty$. Теорема 5 доказана. $\square$

Относительно величины $B_1^+(n)$, определённой в (2.5), справедливо такое утверждение.

Теорема 6. Для величины $B_1^+(n)$ имеют место следующие два утверждения.

1. При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $B_1^+(n) \leq 6$.
2. Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} B_1^+(n) = 6$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Умножим левую и правую часть неравенства (2.4) на $\sin x$ и проинтегрируем по отрезку $[0,\pi]$; это даёт оценку

$$b_1 \int\limits_0^\pi \sin^2 x\,dx \leq \int\limits_0^\pi (2\pi - x)\sin x\,dx,$$

которая после вычисления интегралов принимает вид $b_1 \leq 6$. Первое утверждение теоремы 6 доказано.

Второе утверждение доказывается по той же схеме, как было обосновано соответствующее утверждение теоремы 5. При $0 < \delta < \pi/2$ рассмотрим на отрезке $[0,\pi]$ вспомогательную функцию

$$g_\delta(x) = \begin{cases} 2\pi - x, & x \in [\delta, \pi-\delta]; \\ -\dfrac{2\pi}{\delta^2}x^2 + \dfrac{4\pi-\delta}{\delta}x, & x\in[0,\delta]; \\ -\dfrac{\pi}{\delta^2}x^2 + \dfrac{2\pi^2 - 2\pi\delta - \delta^2}{\delta^2}x - \dfrac{\pi(\pi^2-2\pi\delta-\delta^2)}{\delta^2}, & x\in[\pi-\delta,\pi]. \end{cases}$$

Эта функция на отрезке $[\delta,\pi-\delta]$ совпадает с функцией $2\pi - x$, а на отрезках $[0,\delta]$ и $[\pi-\delta,\pi]$ плавно переходит в параболы, пересекающие ось Ox в точках $(0,0)$ и $(\pi,0)$. Из соображений выпуклости следует, что $f_\delta(x) \leq 2\pi - x,\ x\in[0,\pi]$. Продолжим функцию g_δ нечетно на $[-\pi,0]$ и 2π-периодически на всю ось. Нетрудно понять, что имеет место оценка

$$g_\delta(x) \leq 2\pi - x, \qquad x\in[0,2\pi]. \tag{2.17}$$

Ряд Фурье функции g_δ имеет вид

$$g_\delta(x) = \sum_{k=1}^\infty b_k(\delta)\sin kx, \qquad b_k(\delta) = \frac{2}{\pi}\int\limits_0^\pi f_\delta(x)\sin kx\,dx;$$

он сходится к g_δ равномерно на всей оси. Исследуем поведение коэффициентов Фурье b_k с ростом k. Воспользовавшись несколько раз теоремой об интегрировании по частям, получаем

$$\int\limits_0^\pi g_\delta(x)\sin kx\,dx = -\frac{1}{k}\int\limits_0^\pi g_\delta(x)\,d\cos kx = -\frac{1}{k}\left(g_\delta(x)\cos kx\Big|_0^\pi - \int\limits_0^\pi g_\delta'(x)\cos kx\,dx\right) =$$

$$\frac{1}{k^2}\left(\int\limits_0^\pi g'_\delta(x)\,d\sin kx\right)=\frac{1}{k^2}\left(g'_\delta(x)\sin kx\Big|_0^\pi-\int\limits_0^\pi g''_\delta(x)\sin kx\,dx\right)=$$
$$=\frac{2\pi}{k^3\delta^2}\left(2(1-\cos k\delta)+(-1)^{k-1}(1-\cos k\delta)\right).$$

Окончательно имеем

$$b_k(\delta)=\frac{4}{k^3\delta^2}\left(2(1-\cos k\delta)+(-1)^{k-1}(1-\cos k\delta)\right). \tag{2.18}$$

Видно, что $a_k(\delta)=O\left(k^{-3}\right),\ k\to\infty$, а следовательно, существует константа $C(\delta)>0$ такая, что $|b_k(\delta)|\le C(\delta)k^{-3},\ k\ge 1$.

Рассмотрим частичную сумму

$$S_n(x)=\sum_{k=1}^n b_k(\delta)\sin kx$$

ряда Фурье функции g_δ. Имеем

$$|g_\delta(x)-S_n(x)|\le\sum_{k=n+1}^\infty |b_k(\delta)||\sin kx|\le\sum_{k=n+1}^\infty |b_k(\delta)||\sin k(2\pi-x)|$$

$$\le|2\pi-x|\sum_{k=n+1}^\infty k|b_k(\delta)|\le|2\pi-x|\cdot\epsilon_n,\qquad \epsilon_n=C(\delta)\sum_{k=n+1}^\infty\frac{1}{k^2}.$$

Отсюда и (2.17) для сумм S_n получаем оценки

$$S_n(x)=g_\delta(x)+S_n(x)-g_\delta(x)\le g_\delta(x)+|g_\delta(x)-S_n(x)|\le(2\pi-x)(1+\epsilon_n),\qquad x\in[0,2\pi].$$

Следовательно, полином $\sigma_n(x)=S_n(x)/(1+\epsilon_n)$ удовлетворяет ограничению $\sigma_n(x)\le 2\pi-x,\ x\in[0,2\pi]$, и значит, принадлежит множеству $\mathfrak{G}_n$. Его первый коэффициент есть $b_1(\delta)/(1+\epsilon_n)$. Поэтому справедливы неравенства

$$\frac{b_1(\delta)}{1+\epsilon_n}\le B_1(n)\le 6.$$

При $n\to\infty$ получаем отсюда оценки

$$b_1(\delta)\le\liminf_{n\to\infty}B_1(n)\le 6. \tag{2.19}$$

Согласно (2.18)

$$b_1(\delta)=\frac{12}{\delta^2}(1-\cos\delta).$$

Этот коэффициент обладает свойством $b_1(\delta)\to 6,\ \delta\to+0$. Поэтому из (2.19) следует второе утверждение теоремы. $\square$

В силу соотношений (2.6) теорему 6 можно сформулировать в следующей эквивалентной форме.

Теорема 7. Для величины $A_1^-(n)$ имеют место следующие два утверждения.

1. При любом $n \geq 1$ выполняется неравенство $A_1^-(n) \geq -6$.
2. Имеет место предельное соотношение $\lim\limits_{n\to\infty} A_1^-(n) = -6$.

2.4. СЛУЧАЙ $2 \leq k \leq n$

На данный момент нам удалось определить верхнюю и нижнюю границы для первого коэффициента синус-полинома удовлетворяющего заданным условиям. Тем не менее, нахождение границ для других коэффициентов представляет собой большую сложность, по той причине, что мы уже не сможем использовать простой метод, описанный в этой статье. Однако существует достаточно простой способ, позволяющий получить верхнюю и нижнюю границы для всех коэффициентов многочлена.

Теорема 8. Величины $A_k^+(n)$ и $A_k^-(n)$ являются ограниченными для всех k и n, и справедливы следующие неравенства:

$$A_k^+(n) \leq 2\pi - \frac{2}{k} \tag{2.20}$$

$$A_k^-(n) \geq -2\pi - \frac{2}{k} \tag{2.21}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о.

$$\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \sin(\nu x)) \leq x$$

Домножим неравенство с левой и правой стороны на $(1+\sin(kx))$ в первом случае и на $(1-\sin(kx))$ во втором.

$$(1+\sin(kx))\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \sin(\nu x)) \leq x(1+\sin(kx))$$

$$(1-\sin(kx))\sum_{\nu=1}^{n}(a_\nu \sin(\nu x)) \leq x(1-\sin(kx))$$

Затем продифференцируем на отрезке $[0, 2\pi]$.

$$a_k\int_0^{2\pi}\sin^2(kx)dx + \sum_{\nu=1}^{n}\int_0^{2\pi} a_\nu \sin(\nu x)dx \leq \int_0^{2\pi} xdx + \int_0^{2\pi} x\sin(kx)dx$$

$$a_k\int_0^{2\pi}\sin^2(kx)dx - \sum_{\nu=1}^{n}\int_0^{2\pi} a_\nu \sin(\nu x)dx \leq \int_0^{2\pi} xdx - \int_0^{2\pi} x\sin(kx)dx$$

Известно, что

$$\int_0^{2\pi} \sin^2(kx)dx = \pi;$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\nu x)\sin(kx)dx = 0,\ k \neq \nu;$$

$$\int_0^{2\pi} \sin(\nu x)\sin(kx)dx = 0,\ k \neq \nu;$$

$$\int_0^{2\pi} x\sin(kx)dx = -\frac{2\pi}{k};$$

В результате мы получаем следующие неравенства:

$$a_k \leq 2\pi - \frac{2}{k}$$

$$a_k \geq -2\pi - \frac{2}{k}$$

И, значит, можем оценить границы для значений $A_k^+(n)$ и $A_k^-(n)$:

$$A_k^+(n) \leq 2\pi - \frac{2}{k}$$

$$A_k^-(n) \geq -2\pi - \frac{2}{k}$$

Следовательно, $A_k^+(n)$ и $A_k^-(n)$ — ограниченные для любых n и k.

3. ДВУСТОРОННЕЕ ОГРАНИЧЕНИЕ НА ОТРЕЗКЕ $[0, \pi]$

3.1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathfrak{F}_n$ есть множество нечётных тригонометрических полиномов

$$s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx$$

порядка (не выше) n с вещественными коэффициентами $a_k = a_k(s_n)$, удовлетворяющих условию

$$|\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx| \le x, \qquad 0 \le x \le \pi. \tag{3.1}$$

При $1 \le k \le n$ рассмотрим наибольшее и наименьшее значение

$$C_k^+(n) = \sup\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\}, \qquad C_k^-(n) = \inf\{a_k(s_n)\colon s_n \in \mathfrak{F}_n\} \tag{3.2}$$

коэффициентов $a_k = a_k(s_n)$ полиномов из класса $\mathfrak{F}_n$. В этом разделе мы изучим поведение данных величин и выведем конструктивные оценки, основываясь на результатах, полученных в предыдущих секциях.

3.2. СЛУЧАЙ $k = 1$ ДЛЯ МНОГОЧЛЕНОВ СТЕПЕНЕЙ 2 И ВЫШЕ

Для начала мы докажем теорему о связи между значениями $C_k^+(n)$ и $C_k^-(n)$.

Теорема 9. Величины $C_k^+(n)$ и $C_k^-(n)$ связаны соотношением

$$C_k^+(n) = -C_k^-(n). \tag{3.3}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Неравенство (3.1) равносильно следующей системе неравенств

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x, \qquad 0 \le x \le \pi, \\ \sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \ge -x, \qquad 0 \le x \le \pi \end{cases} \tag{3.4}$$

Преобразуем второе неравенство

$$-\sum_{k=1}^{n} a_k \sin kx \le x$$

$$\sum_{k=1}^{n} -a_k \sin kx \le x$$

Проведём замену $a_k = -b_k$ и получим неравенство

$$\sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \leq x$$

которое равносильно первому неравенству системы. Таким образом, если мы зададим величину

$$B_k^+(n) = \sup\{b_k(s_n) \colon s_n \in \mathfrak{F}_n\},$$

то будет несложно догадаться, что $B_k^+(n) = C_k^+(n)$ или $-C_k^-(n) = C_k^+(n)$. Теорема доказана.

Теорема 10. При $n = 2,\ k = 1$ величины (3.2) имеют следующие значения:

$$C_1^+(2) = \frac{\pi}{2}, \qquad C_1^-(2) = -\frac{\pi}{2}. \tag{3.5}$$

Наибольшее и наименьшее значения первого коэффициента имеют соответственно полиномы

$$f_2(x) = \frac{\pi}{2}\sin x - \frac{1}{2}\sin 2x, \qquad g_2(x) = -\frac{\pi}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin 2x. \tag{3.6}$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из Теоремы 1 и Теоремы 9.

Теорема 11. Для величин ${}^{+}_{1}(n)$ и ${}^{-}_{1}(n)$ справедливы следующие два утверждения.

1. При любом $n \geq 1$ выполняются неравенства ${}^{+}_{1}(n) \leq 2$ и ${}^{-}_{1}(n) \geq 2$.
2. Имеют место предельные соотношения $\lim\limits_{n\to\infty} {}^{+}_{1}(n) = 2$ и $\lim\limits_{n\to\infty} {}^{-}_{1}(n) = -2$.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Доказательство следует из Теоремы 2 и Теоремы 9.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В ходе исследований нам удалось значительно углубить и расширить теорию, разработанную на базе результатов полученных в бакалаврской работе. В частности, были найдены оценки снизу и, в частных случаях, точные конструктивные значения для первых коэффициентов тригонометрических полиномов, ограниченных сверху на отрезках $[0, \pi]$ и $[0, 2\pi]$, оценки для остальных коэффициентов, а также были рассмотрены оценки для первых коэффициентов тригонометрических полиномов при двусторонних ограничениях. Полученные нами результаты дают возможность более полно судить о поведении коэффициентов тригонометрических полиномов и тем самым послужат основой для дальнейших изысканий в этой области.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арестов В.В.* Об интегральных неравенствах для тригонометрических полиномов и их производных / В.В. Арестов Изв. АН СССР. Сер. Мат. 1981. Т. 45, № 1. С. 3–22.

2. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. / А. Зигмунд Т. $1, 2$. М.: Мир, 1965.

3. *Szegö* G. Über einen Satz des Herrn Serge Bernstein / G. Szegö Schriften Königsberg. 1928. V. 5. S. 59–70.

4. *Арестов В.В.* Неравенство Сеге для производных сопряженного тригонометрического полинома в L_0 / В.В. Арестов Матем. заметки. 1994. Т. 56, № 6. С. 10–26.